Μιά άσκηση στους Χώρους Hilbert

Άσκηση Θεωρούμε τον χώρο $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ όπου $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$ και την γραμμική απεικόνιση $\phi : f \to \int_0^{1/2} f$.

Εξετάστε αν είναι της μορφής $f \to \int_0^1 fg$ για κατάλληλη $g \in C([0,1])$.

Λύση Παρατηρώ ότι $\phi(f) = \int_0^1 \chi_{[0,1/2]} f$. Επομένως αν ήταν αλήθεια ότι $\phi(f) = \int_0^1 fg$, θα είχαμε

$$\int_0^1 (\chi_{[0,1/2]} - g)f = 0 \quad \text{για κάθε } f \in C([0,1]).$$

Αν γνωρίζω ότι $\chi_{[0,1/2]} \in L^2([0,1])$, η προηγούμενη ισότητα λέει ότι το $\chi_{[0,1/2]} - g \in L^2([0,1])$ είναι κάθετο στον υπόχωρο $C([0,1])$, ο οποίος είναι πυκνός στον $L^2([0,1])$ και συνεπώς το $\chi_{[0,1/2]} - g$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $L^2([0,1])$. Άρα $\chi_{[0,1/2]}(t) - g(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί όταν η g είναι συνεχής (γιατί η $\chi_{[0,1/2]}$ έχει άλμα στο σημείο 1/2).

Αν δεν γνωρίζω ότι $\chi_{[0,1/2]} \in L^2([0,1])$, την προσεγγίζω με συνεχείς ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$:

Θεωρούμε τις γραμμικές μορφές ϕ_n με $\phi_n(f) = \int_0^1 fg_n$ όπου

$$g_n(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(\frac{1}{2} - t) & : \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{2} \\ 0 & : \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Καθε ϕ_n είναι συνεχής με $\|\phi_n\| = \|g_n\|_2 = \left(1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + 1 \cdot \frac{1}{2n}\right)^{1/2}$. Επίσης

$$|\phi(f) - \phi_n(f)| = \left|\int_0^1 (\chi_{[0,1/2]} - g_n)f\right| \le \left\|\chi_{[0,1/2]} - g_n\right\|_2 \|f\|_2 .$$

Υπολογίζουμε

$$\left\|\chi_{[0,1/2]} - g_n\right\|_2^2 = \int_0^1 |\chi_{[0,1/2]} - g_n|^2 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |1 - g_n|^2 \le \frac{1}{2n}$$

(γιατί $|1 - g_n(t)|^2 \le 1$ για κάθε $t \in [0,1]$). Συνεπώς $\|\phi - \phi_n\| \to 0$.

Επομένως, αν ήταν αλήθεια ότι $\phi(f) = \int_0^1 fg$, θα είχαμε

$$\|g - g_n\|_2 = \|\phi - \phi_n\| \to 0 \quad \text{άρα} \quad \int_0^1 |g - g_n|^2 \to 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως} \quad \int_0^1 |g - g_n|^2 &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |g - g_n|^2 + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |g - g_n|^2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 |g - g_n|^2 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |g - 1|^2 + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |g - g_n|^2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 |g|^2 \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |g|^2 = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |g-1|^2 \to 0$$

$$\text{άρα} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} |g|^2 = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} |g-1|^2 = 0$$

$$\text{άρα} \quad g(t) = 0 \ \ \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{και} \quad g(t) = 0 \ \ \forall t \in \left[1, \frac{1}{2}\right]$$

άτοπο.