Αποκλίνουσες σειρές Fourier

Δουλεύουμε στον χώρο Banach $X = (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ όπου $C(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(t+2\pi) = f(t)\ \forall t\}$.

Ορισμός 1 (Συντελεστές Fourier)

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N},\, t \in [-\pi, \pi]).$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ οι μέσοι όροι των αθροισμάτων $(S_n(f)(t))_n$ συγκλίνουν στην f (και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς t).
Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν «πολλές» $f \in C(\mathbb{T})$ για τις οποίες η ακολουθία $(S_n(f)(t))_n$, όχι απλώς δεν συγκλίνει, αλλά δεν είναι ούτε καν φραγμένη, και μάλιστα ότι αυτό συμβαίνει σε «πολλά» σημεία t.

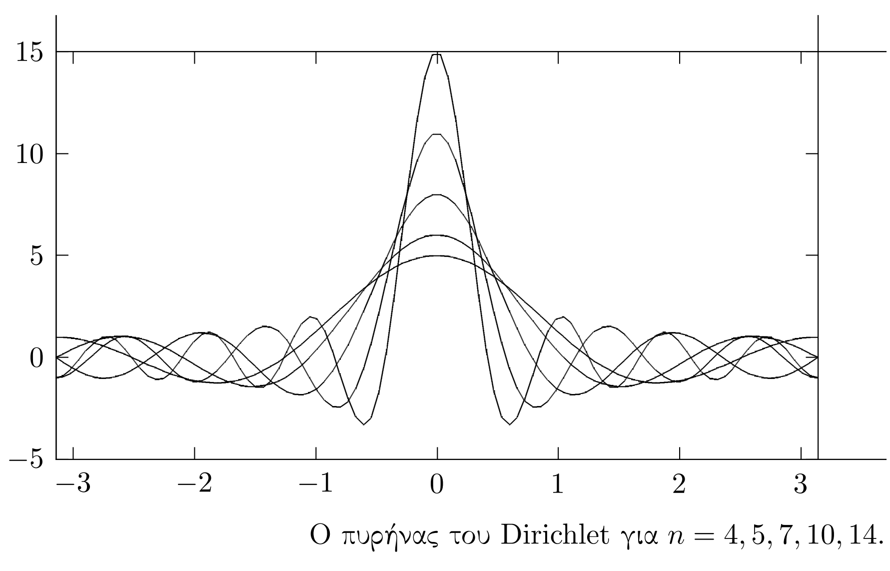
Παρατήρηση

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(t-s)}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(s)D_n(t-s)ds$$

$$\text{όπου} \quad D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(iks) \quad \text{είναι ο πυρήνας του Dirichlet.}$$

Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)},\ x \neq 0, \pm\pi, \\ \\ 2n+1,\ x = 0 \end{cases}$$



Ο πυρήνας του Dirichlet για $n = 4, 5, 7, 10, 14$.

Για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτω

$$p_{m,t}(f) = |S_m(f)(t)|, \quad f \in C(\mathbb{T}).$$

Οι $p_{m,t}$ είναι συνεχείς ημινόρμες. Πράγματι:

$$p_{m,t}(f) = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t-s) D_n(s) ds \right| \leq \|D_m\|_1 \|f\|_\infty$$

όπου

$$\|D_m\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |D_n(s)| ds \,.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής γνωστό

Λήμμα $\|D_m\|_1 \sim \log m$, άρα $\sup_m \|D_m\|_1 = \infty$.
(Μια απόδειξη μπορεί κανείς να βρει στις σημειώσεις του Α. Γιαννόπουλου, Πρόταση 5.5.2.)

Πρόταση 1 *Για κάθε t η οικογένεια $\{p_{m,t} : m \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλ.*

$$\sup\{\|p_{m,t}\| : m \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε τον ακόλουθο Ισχυρισμό:
Ισχυρισμός Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ ώστε

$$|p_m(f,t)| \geq \frac{1}{2} \|D_m\|_1 \ .$$

Απόδειξη ισχυρισμού Έχουμε

$$\|D_m\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |D_m(s)| ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} D_m(s) g_m(s) ds$$

όπου $g_m(s) = \begin{cases} 1, \text{ αν } D_m(s) > 0 \\ -1, \text{ αν } D_m(s) < 0 \\ 0, \text{ αν } D_m(s) = 0 \end{cases}$

Η συνάρτηση g_m είναι φραγμένη ($\|g_m\|_\infty = 1$) και έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνέχειες. Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$, «διορθώνοντας» την g_m κοντά σε κάθε ασυνέχεια, μπορούμε να βρούμε μια $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} |g_m(s) - f(t-s)| ds < \epsilon$ (η f εξαρτάται από τα m και t) οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} |\|D_m\|_1 - p_m(f,t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} (g_m(s) - f(t-s)) D_m(s) ds \right| \\ &\leq \|D_m\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |g_m(s) - f(t-s) ds < (2m+1) \frac{\epsilon}{2\pi} \end{aligned}$$

οπότε αρκεί να διαλέξουμε το ϵ ώστε $(2m+1)\frac{\epsilon}{2\pi} < \frac{1}{2} \|D_m\|_1$. □

Όπως δείξαμε και στην απόδειξη της Αρχής Ομοιομόρφου Φράγματος, για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$, εάν κάποιο από τα σύνολα $\{A_{N,t}, N \in \mathbb{N}\}$ όπου

$$A_{N,t} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,t) \leq N\}$$

περιείχε μια μπάλα του χώρου $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, τότε θα είχαμε $\sup\{\|p_{m,t}\| : m \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε t και κάθε N το σύνολο $A_{N,t}$, που είναι κλειστό, έχει κενό εσωτερικό. Άρα το συμπλήρωμά του

$$B_{N,t} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,t) > N\}$$

είναι ανοικτό και πυκνό στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, επομένως από το Θεώρημα Baire το σύνολο

$$B_t := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} B_{N,t}$$

είναι πυκνό G_δ. Όμως

$$B_t := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,t)| = \infty\}.$$

Δηλαδή, για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει ένα «μεγάλο» σύνολο συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους στο συγκεκριμένο σημείο t δεν είναι καν φραγμένη.

Υπάρχουν άραγε συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε «πολλά» σημεία;
Ναι, υπάρχουν:
Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε ρητό $q \in (-\pi, \pi]$, το σύνολο

$$B_{N,q} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,q) > N\}$$

είναι ανοικτό και πυκνό. Επομένως, αφού το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Baire συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$B := \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} B_{N,q} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,q)| = \infty \; \forall q \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του $C(\mathbb{T})$. Δηλαδή υπάρχει ένα «μεγάλο» σύνολο συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους δεν είναι φραγμένη σε κανένα ρητό.

Παρόλο που το σύνολο των σημείων, στα οποία η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης αποκλίνει, μπορεί να είναι πυκνό στο $[-\pi, \pi]$, είναι πάντα «μικρό» από την άποψη της Θεωρίας Μέτρου.
Πράγματι, ο L. Carleson απέδειξε ότι για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει *σχεδόν για κάθε* t.
Δείτε
Carleson, Lennart (1966), "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Mathematica 116 (1): 135–157.
και
Wikipedia: Carleson's theorem.