Το Θεώρημα Stone - Weierstrass

Θεώρημα 1 *Έστω* [1] *X συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C_{\mathbb{R}}(X)$ η πραγματική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$. Έστω ότι ένα υποσύνολο*

$$\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$$

ικανοποιεί

(1) το $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα (δηλ. κλειστή σε αθροίσματα και γινόμενα)

(2) η $\mathcal{A}$ περιέχει τις σταθερές (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$)

(3) η $\mathcal{A}$ χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$).

Τότε *η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Απόδειξη (a) Έστω $\mathcal{B}$ η $\|\cdot\|_\infty$-κλειστή θήκη της $\mathcal{A}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{B} = C_{\mathbb{R}}(X)$.
Παρατηρούμε ότι και η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (1), (2) και (3): Πράγματι οι (2) και (3) είναι προφανείς και η (1) έπεται από την norm συνέχεια των αλγεβρικών πράξεων.

(b) Ισχυρισμός: αν $f \in \mathcal{B}$, τότε $|f| \in \mathcal{B}$.

(c) Ισχυρισμός: αν $f, g \in \mathcal{B}$, τότε $f \wedge g \in \mathcal{B}$ και $f \vee g \in \mathcal{B}$. [2]

(d) Ισχυρισμός: Αν $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $s, t \in \mathbb{R}$, υπάρχει $g \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $g(x) = s$ και $g(y) = t$.

Σταθεροποιούμε τώρα μια $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ και ένα $\epsilon > 0$.
Θέλουμε να βρούμε $g \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\|f - g\|_\infty < \epsilon$, δηλ.

$$\text{για κάθε } z \in X, \quad f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon.$$

Από το (d), για κάθε ζεύγος $\{x, y\} \subseteq X$ μπορούμε να βρούμε $g \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $g(x) = f(x)$ και $g(y) = f(y)$.
Χρησιμοποιώντας την συμπάγεια, θα πετύχουμε την *ομοιόμορφη προσέγγιση* της f σε ολόκληρον τον X, σε δύο βήματα, πρώτα από πάνω και μετά από κάτω. Στο πρώτο βήμα θα κρατήσουμε την πρώτη ισότητα $g(x) = f(x)$ και θα εξασθενίσουμε την δεύτερη ισότητα σε φράγμα από τα κάτω, αλλά ομοιόμορφα σε ολόκληρον τον X:
(e) Ισχυρισμός: Σταθεροποιούμε ένα $x \in X$. Υπάρχει $g^x \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε

$$g^x(x) = f(x) \quad \text{και για κάθε } z \in X, \quad f(z) - \epsilon < g^x(z).$$

Στο δεύτερο και τελευταίο βήμα, θα βρούμε μια $g \in \mathcal{B}$ που θα εξακολουθεί να ικανοποιεί το φράγμα από τα κάτω, και , αντί γαι την πρώτη ισότητα, θα ικανοποιεί ένα φράγμα από τα πάνω ομοιόμορφα σε ολόκληρον τον X.

[1] stoneweixe June 25, 2016
[2] $(f \wedge g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ και $(f \vee g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.
Δηλαδή, μια *κλειστή* υπάλγεβρα της $C_{\mathbb{R}}(X)$ είναι "υποσύνδεσμος".

Απόδειξη του Ισχυρισμού (b): *Αν $f \in \mathcal{B}$, τότε $|f| \in \mathcal{B}$.*

Παρατηρούμε ότι το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα: $f(X) \subseteq [a,b]$. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R} : t \to |t|$. Από το Θεώρημα Weierstrass (ή και Taylor), υπάρχει μια ακολουθία (p_n) πραγματικών πολυωνύμων ώστε $p_n \to \phi$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Έπεται ότι $p_n \circ f \to \phi \circ f$ ομοιόμορφα στο X. Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $t \in [a,b]$ να έχουμε $|p_n(t) - \phi(t)| < \epsilon$, οπότε για κάθε $x \in X$ έχουμε $|p_n(f(x)) - |f(x)|| < \epsilon$. Όμως, αφού το $p_n(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων του t, η συνάρτηση $p_n \circ f$ είναι γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων της f, άρα $p_n \circ f \in \mathcal{B}$ αφού η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα. Έπεται ότι $|f| \in \mathcal{B}$ αφού η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή. □

Απόδειξη του Ισχυρισμού (c) : *Αν $f, g \in \mathcal{B}$, τότε $f \wedge g \in \mathcal{B}$ και $f \vee g \in \mathcal{B}$.*

Πράγματι, αφού η $\mathcal{B}$ είναι γραμμικός χώρος και $|f - g| \in \mathcal{B}$ από το (b), έχουμε

$$\begin{aligned} f \vee g &= \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \mathcal{B} \\ f \wedge g &= \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού (d): *Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ και κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ υπάρχει $g \in \mathcal{B}$ ώστε $g(x) = s$ και $g(y) = t$.*

Επιλέγουμε $g_1 \in \mathcal{B}$ ώστε $g_1(x) \neq g_1(y)$ (από την υπόθεση (3)) και θέτουμε $s_0 := g_1(x)$, $t_0 := g_1(y)$. Βρίσκουμε $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\xi s_0 + \eta = s \quad \text{και} \quad \xi t_0 + \eta = t$$

και θέτουμε $g = \xi g_1 + \eta \mathbf{1}$ Η g ανήκει στην $\mathcal{B}$ από τις (1) και (2). Έχουμε $g(x) = \xi g_1(x) + \eta = \xi s_0 + \eta = s$ και $g(y) = \xi g_1(y) + \eta = \xi t_0 + \eta = t$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού (e): *Σταθεροποιούμε ένα $x \in X$. Υπάρχει $g^x \in \mathcal{B}$ ώστε*

$$g^x(x) = f(x) \quad \textit{και για κάθε } z \in X, \quad f(z) - \epsilon < g^x(z).$$

Έστω $y \in X$. Εφαρμόζουμε το (d) στα $s = f(x)$ και $t = f(y)$: Βρίσκουμε $f_y \in \mathcal{B}$ ώστε $f_y(x) = f(x)$ και $f_y(y) = f(y)$.

Η συνεχής συνάρτηση $f - f_y$ μηδενίζεται στο y: υπάρχει λοιπόν ανοικτή περιοχή U_y του y ώστε

$$z \in U_y \;\Rightarrow\; f(z) - f_y(z) < \epsilon \;\Leftrightarrow\; f_y(z) > f(z) - \epsilon. \tag{*}$$

Η οικογένεια $\{U_y : y \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Επιλέγουμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα: $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ και θέτουμε

$$g^x = f_{y_1} \vee f_{y_2} \vee \cdots \vee f_{y_n}.$$

Απο τον Ισχυρισμό (c), έχουμε $g^x \in \mathcal{B}$. Επειδή $f_{y_i}(x) = f(x)$ για κάθε i, έπεται ότι $g^x(x) = f(x)$. Επίσης, κάθε $z \in X$ ανήκει σε κάποιο U_{y_i}, οπότε $g^x(z) \geq f_{y_i}(z) > f(z) - \epsilon$ από την (*). □

Ολοκλήρωση της Απόδειξης: Για κάθε $x \in X$, η συνεχής συνάρτηση $g^x - f$ που βρήκαμε στο (e) μηδενίζεται στοτ x. Υπάρχει λοιπόν ανοικτή περιοχή V_x του x ώστε

$$z \in V_x \;\Rightarrow\; g^x(z) - f(z) < \epsilon \;\Leftrightarrow\; g^x(z) < f(z) + \epsilon. \tag{†}$$

Η οικογένεια $\{V_x : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Επιλέγουμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα: $X = \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$ και έστω

$$g = g^{x_1} \wedge g^{x_2} \wedge \cdots \wedge g^{x_m}$$

Απο τον Ισχυρισμό (c), έχουμε $g \in \mathcal{B}$. Από τον (e), κάθε g^{x_i} ικανοποιεί $g^{x_i}(z) > f(z) - \epsilon$ για κάθε $z \in X$, οπότε $g(z) > f(z) - \epsilon$ για κάθε $z \in X$. Επίσης, κάθε $z \in X$ ανήκει σε κάποιο V_{x_j} και συνεπώς $g(z) \leq g^{x_j}(z) < f(z) + \epsilon$ από την (†). Έπεται ότι

$$\text{για κάθε } z \in X, \quad f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon. \qquad \square$$

Η μιγαδική περίπτωση.
Γράφουμε $C(X)$ για την μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$.

Οι υποθέσεις (1) ως (3) δεν αρκούν για να εξασφαλίσουν ότι μια $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ θα είναι πυκνή στην $C(X)$.

Παράδειγμα. Έστω $X = \overline{\mathbb{D}}$ και έστω $\mathcal{A}$ η άλγεβρα των μιγαδικών πολυωνύμων. Είναι άλγεβρα, περιέχει τις (μιγαδικές) σταθερές και χωρίζει τα σημεία, γιατί περιέχει το p_1 όπου $p_1(z) = z$. Όμως, δεν είναι πυκνή στην $C(X)$: η συνεχής συνάρτηση f όπου $f(z) = \bar{z}$ δεν προσεγγίζεται από πολυώνυμα ομοιόμορφα στο X. Πράγματι: αν υπήρχε ακολουθία (p_n) από πολυώνυμα ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε θα είχαμε

$$\int_0^{2\pi} p_n(e^{it})e^{it}dt \to \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{it}dt.$$

Όμως το αριστερό σκέλος μηδενίζεται (είναι γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής $\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt$ όπου $k > 0$) ενώ το δεξί σκέλος είναι 2π.

Ο μιγαδικός συζυγής είναι ακριβώς αυτό που λείπει:

Θεώρημα 2 *Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C(X)$ η μιγαδική άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$. Έστω ότι ένα υποσύνολο*

$$\mathcal{A} \subseteq C(X)$$

ικανοποιεί

(1) το $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα (δηλ. κλειστή σε αθροίσματα και γινόμενα)

(2) η $\mathcal{A}$ περιέχει τις σταθερές (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$)

(3) η $\mathcal{A}$ χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$)

(4) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς μιγαδικούς συζυγείς, δηλ. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$.

τότε η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(X)$.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{A} : f(X) \subseteq \mathbb{R}\}$. Θεωρούμενη ως υποσύνολο της πραγματικής άλγεβρας $C_{\mathbb{R}}(X)$, η $\mathcal{C}$ είναι προφανώς υπάλγεβρα της $C_{\mathbb{R}}(X)$: αν οι $f, g \in \mathcal{A}$ παίρνουν πραγματικές τιμές, τότε οι $f + g$, fg ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και παίρνουν πραγματικές τιμές. Επίσης η $\mathcal{C}$ περιέχει τις (πραγματικές) σταθερές, γιατί η $\mathcal{A}$ περιέχει όλες τις σταθερές.

Τέλος, η $\mathcal{C}$ χωρίζει τα σημεία του X. Πράγματι , αν $x \neq y$, από την (3) υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ ώστε $f(x) \neq f(y)$. Επομένως είτε $(\mathrm{Re}f)(x) \neq (\mathrm{Re}f)(y)$ είτε $(\mathrm{Im}f)(x) \neq (\mathrm{Im}f)(y)$. Αλλά οι συναρτήσεις $\mathrm{Re}f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ και $\mathrm{Im}f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ ανήκουν και οι δύο στην $\mathcal{C}$, εφόσον $\bar{f} \in \mathcal{A}$ από την υπόθεση (4).

Από το Θεώρημα 1, η $\mathcal{C}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C_{\mathbb{R}}(X)$. Επομένως, για κάθε $f \in C(X)$ και $\epsilon > 0$, αφού οι $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ ανήκουν στην $C_{\mathbb{R}}(X)$, υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}$ ώστε $\|\mathrm{Re}f - g\|_\infty < \epsilon$ και $\|\mathrm{Im}f - h\|_\infty < \epsilon$. Τώρα η συνάρτηση $\phi := g + ih$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ και $\|f - \phi\|_\infty < 2\epsilon$. $\square$

Μερικές εφαρμογές. (i) Έστω $X = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Το σύνολο $\mathcal{A}$ των *τριγωνομετρικών πολυωνύμων*, δηλ. οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων $e_k(z) = z^k$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2 (για την (4), χρειάζονται θετικές και αρνητικές τιμές του k).

Συμπέρασμα: κάθε συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{T}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από ακολουθία *τριγωνομετρικών πολυωνύμων*.

(ii) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^2$ συμπαγές και μη κενό. Τα ακόλουθα δύο σύνολα συναρτήσεων στο X ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2 και άρα είναι ομοιόμορφα πυκνά στην $C(X)$:

$\mathcal{A}_1$: οι γραμμικοί συνδυασμοί συναρτήσεων h της μορφής $h(s,t) = f(s)g(t)$ όπου οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ (ή κατάλληλα υποσύνολα του $\mathbb{R}$).

$\mathcal{A}_2$: τα πολυώνυμα δύο μεταβλητών.

(ii)' (*Θεώρημα Fubini για συνεχείς συναρτήσεις: Αν $K_i = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) και $h : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε*

$$\int_{K_1} \left(\int_{K_2} h(x,y)dy \right) dx = \int_{K_2} \left(\int_{K_1} h(x,y)dx \right) dy . \tag{F}$$

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε ότι τα διαδοχικά ολοκληρώματα *υπάρχουν*, γιατί η h, ως συνεχής στο συμπαγές $K := K_1 \times K_2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, και επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $(x_i, y_i) \in K$ ($i = 1, 2$) και $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 < \delta$ ισχύει $|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| < \epsilon$ οπότε η συνάρτηση $H : K_1 \to \mathbb{R}$ με $H(x) = \int_{K_2} h(x,y)dy$ ικανοποιεί $|H(x_1) - H(x_2)| \le \int_{K_2} |h(x_1, y) - h(x_2, y)|dy \le \epsilon \int_{K_2} dy = \epsilon|b_2 - a_2|$ όταν $x_1, x_2 \in K_1$ και $|x_1 - x_2| < \delta$ άρα η H είναι συνεχής στο K_1 και συνεπώς ολοκληρώσιμη.

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η σχέση (F) ισχύει όταν η h είναι της μορφής $h(s,t) = f(s)g(t)$ όπου οι f και g είναι συνεχείς. Συνεπώς, αφού τα ολοκληρώματα είναι γραμμικές απεικονίσεις, η σχέση (F) ισχύει για κάθε h στην άλγεβρα $\mathcal{A}_1$. Όμως, όπως είδαμε, η $\mathcal{A}_1$ είναι πυκνή στην $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι οι γραμμικές μορφές

$$\phi_1(h) = \int_{K_1} \left(\int_{K_2} h(x,y)dy \right) dx \quad \text{και} \quad \phi_2(h) \int_{K_2} \left(\int_{K_1} h(x,y)dx \right) dy$$

είναι συνεχείς στην $(C(K), \|\cdot\|_K)$. Παρατηρούμε ότι η ϕ_1 είναι γραμμική, ως σύνθεση δυο γραμμικών απεικονίσεων: $\phi_1 = \phi \circ \Phi$ όπου

$$\Phi : C(K) \to C(K_1) : h \to \Phi(h) \text{ όπου } (\Phi(h))(x) = H(x) := \int_{K_2} h(x,y)dy, \quad (x \in K_1) \quad \text{και}$$

$$\phi : C(K_1) \to \mathbb{R} : H \to \int_{K_1} H(x)dx.$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η ϕ_1 είναι φραγμένη. Έχουμε για κάθε $h \in C(K)$,

$$\begin{aligned} |\phi_1(h)| &\le \int_{K_1} \left| \int_{K_2} h(x,y)dy \right| dx \le \int_{K_1} \left(\int_{K_2} |h(x,y)|dy \right) dx \\ &\le \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \|h\|_K \, dy \right) dx = \int_{K_1} (\|h\|_K \, |b_2 - a_2|)dx = \|h\|_K \, |b_2 - a_2||b_1 - a_1| . \end{aligned}$$

Συνεπώς η ϕ_1 είναι φραγμένη με $\|\phi_1\| \le |b_2 - a_2||b_1 - a_1|$. Ομοίως και για την ϕ_2.

Σημείωση Παρατηρείστε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε την έννοια του *διπλού ολοκληρώματος* $\iint_K$.

(iii) (παραλλαγή του (ii)) Έστω $X \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές και μη κενό, και $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων ως προς z *και* $\bar{z}$. Τότε το $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνό στο $C(X)$ (είδαμε ότι τα πολυώνυμα ως προς z δεν επαρκούν εν γένει).

(iv) Έστω X το ευθύ (Καρτεσιανό) γινόμενο αριθμήσιμου πλήθους αντιγράφων του $\mathbb{T}$. Είναι συμπαγής χώρος ως προς την τοπολογία γινόμενο (ή οποιαδήποτε "μετρική γινόμενο"). [3] Για κάθε $i \in \mathbb{N}$,

[3] Μάλιστα είναι συμπαγής ομάδα με πράξεις κατά συντεταγμένη.

ονομάζουμε $e_i : X \to \mathbb{C}$ την συνάρτηση $e_i(z_1, z_2, \dots) = z_i$. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών γινομένων της μορφής

$$e_{i_1}^{n_1} e_{i_2}^{n_2} \dots e_{i_m}^{n_m}$$

όπου $n_k \in \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\mathcal{E}$ όλων των (πεπερασμένων) γινομένων αυτής της μορφής είναι κλειστό ως προς πολλαπλασιασμό και ως προς μιγαδικούς συζυγείς, και περιέχει τη σταθερή συνάρτηση **1**. Επομένως η γραμμική του θήκη $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα που περιέχει τις σταθερές και είναι κλειστή ως προς μιγαδικούς συζυγείς. Τέλος, το $\mathcal{E}$ χωρίζει τα σημεία του X. Πράγματι, αν $z = (z_1, z_2, \dots) \neq w = (w_1, w_2, \dots)$ τότε υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $z_i \neq w_i$ και τότε $e_i(z) \neq e_i(w)$. Επομένως, και η $\mathcal{A}$ χωρίζει τα σημεία του X.

Κατά συνέπεια, κάθε συνεχής συνάρτηση στο άπειρο γινόμενο X προσεγγίζεται ομοιόμορφα από στοιχεία της $\mathcal{A}$. Παρατηρείστε ότι κάθε συνάρτηση στην $\mathcal{A}$ εξαρτάται από πεπερασμένο πλήθος συντεταγμένων.

Η τοπικά συμπαγής περίπτωση. Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff είναι *τοπικά συμπαγής* αν κάθε σημείο του έχει μια συμπαγή περιοχή (παράδειγμα ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, όχι όμως ο $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$). Μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένη (πχ. η $f(t) = t$ στον $\mathbb{R}$). Μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ σ' έναν τοπικά συμπαγή χώρο X λέγεται ότι *μηδενίζεται στο άπειρο* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές υποσύνολο $K \subseteq X$ τέτοιο ώστε $|f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \notin K$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι αναγκαστικά φραγμένη.

Το σύνολο $C_0(X)$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που μηδενίζονται στο άπειρο, εφοδιασμένο με τη νόρμα supremum, είναι πλήρης άλγεβρα με νόρμα. Όταν ο X δεν είναι συμπαγής, η $C_0(X)$ δεν μπορεί να περιέχει μη μηδενικές σταθερές (δεν μηδενίζονται στο άπειρο). Μπορεί όμως να δειχθεί ότι η $C_0(X)$ "δεν μηδενίζεται πουθενά", με την έννοια ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $f \in C_0(X)$ ώστε $f(x) \neq 0$. Αποδεικνύεται το ακόλουθο:

Θεώρημα 3 *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Έστω ότι ένα υποσύνολο*

$$\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$$

ικανοποιεί

(1) το $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα (δηλ. κλειστή σε αθροίσματα και γινόμενα)

(2) η $\mathcal{A}$ "δεν μηδενίζεται πουθενά" στο X (δηλ. για κάθε $x \in X$ υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ ώστε $f(x) \neq 0$)

(3) η $\mathcal{A}$ χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$)

(4) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς μιγαδικούς συζυγείς, δηλ. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$.

Τότε η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C_0(X)$.