Καλώς ήρθατε στην Συναρτησιακή Ανάλυση!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH495/

Εαρινό Εξάμηνο 2015-16

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ *ώστε* $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ *ώστε* $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Γραμμικοί χώροι

Παραδείγματα

• Το σύνολο $\mathscr{S}$ όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x+y=(\xi_k+\eta_k) \quad , \quad \lambda x=(\lambda\xi_k)$$

για $x=(\xi_k)$, $y=(\eta_k)$ και $\lambda\in\mathbb{K}$.

• Αν $A\neq\emptyset$ και $F(A)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{K}$, τότε το $F(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f,g\in F(A)$ και $\lambda\in\mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g$, $\lambda f\in F(A)$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t\in A.$$

Γραμμικοί χώροι

Αν X γραμμικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, λέμε ότι το x ανήκει στην γραμμική θήκη του A (γράφουμε $x \in \mathrm{span}(A)$) ή ότι είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A, αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1, \ldots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \ldots . \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα $y_1, \ldots, y_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \ldots \mu_m \in \mathbb{K}$, όχι όλα 0, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k, δηλ. αν

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν περιέχει κάποια $y_1, \ldots, y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \setminus \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \setminus \{x\}$.

Το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε πεπερ. πλήθος στοιχείων $x_1, \ldots, x_n$ του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ένας $Y \subseteq X$ λέγεται (γραμμικός) υπόχωρος του X αν $\mathrm{span}(Y) \subseteq Y$, δηλαδή αν

$$x, y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x + \lambda y \in Y.$$

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Ορισμός (νόρμα)

Έστω X ένας πραγματικός ή μιγαδικός γραμμικός (:διανυσματικός) χώρος. Νόρμα στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ *για κάθε* $x \in X$ *και* $\|x\| = 0$ *αν και μόνον αν* $x = 0$ *(μη αρνητική).*

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{K}$ *και κάθε* $x \in X$ *(θετικά ομογενής).*

(γ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *για κάθε* $x, y \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ *είναι μια νόρμα στον* X, *τότε το ζεύγος* $(X, \|\cdot\|)$ *λέγεται* *χώρος με νόρμα*.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *με*

$$d(x,y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X *από τη νόρμα του).*

δηλαδή για κάθε $x, y, z \in X$,

(M1) $d(x,y) \geq 0$,

(M2) $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ και

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.
Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a,b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b].$$

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

1.1. Στον $\mathbb{K}^m$ ορίζουμε την νόρμα supremum $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ ως εξής: αν $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ τότε

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

1.2. Στον $\mathbb{K}^m$ ορίζουμε την νόρμα ένα $\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|.$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{K}$. Ο χώρος $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m.

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

1.3. Στον $\mathbb{K}^m$ ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, χρειάζεται η

Παρατήρηση (Ανισότητα Cauchy–Schwarz)

Έστω $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

1.4. Γενικότερα, στον $\mathbb{K}^m$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p-νόρμα, $1 < p < \infty$, όπου

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Παρατήρηση (Ανισότητα Hölder)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $p, q > 1$ ώστε[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder για $p = q = 2$.

[1] Οι p και q λέγονται συζυγείς εκθέτες.

Χώροι με νόρμα: Παραδείγματα

Παρατήρηση (Ανισότητα Minkowski)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $p > 1$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Η τριγωνική ανισότητα $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ για την p-νόρμα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski. Ο χώρος $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$ συμβολίζεται με ℓ_p^m.

2.1. Ο χώρος $\ell_\infty \equiv \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, \dots\}.$$

2.2. Ο χώρος $c_0 \equiv c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \exists \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\right\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος (μάλιστα γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞) με τις κατά σημείο πράξεις. Σε αυτόν θεωρούμε την supremum νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

2.3. Ο χώρος $\ell_1 \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών (δηλαδή ακολουθιών των οποίων η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα):

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}.$$

Είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0
(αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$).
Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

2.4. Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\ell_p \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών:

$$\ell_p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty \right\}.$$

Ορίζουμε την p–νόρμα

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

2.5. Ο χώρος $c_{00} \equiv c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών: $x \in c_{00}$ αν και μόνον αν υπάρχει $n_0 \equiv n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε από τις p–νόρμες, $1 \leq p \leq \infty$. (Αλλά και άλλες «εξωτικές» νόρμες...)

3.1. Ο χώρος $C([0,1])$ των συνεχών πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων στο $[0,1]$:

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

Είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον $C([0,1])$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού η $|f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max διότι κάθε συνεχής συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή.

3.2. Αν $1 \leq p < \infty$, στον $C([0,1])$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την *p–νόρμα*

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, χρειάζονται οι ανισότητες Hölder και Minkowski για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις:

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις. *Αν $f, g : [0,1] \to \mathbb{K}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $1 < p < \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| \, dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. *Αν $1 \leq p < \infty$, τότε*

$$\left(\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

3.3. Στον $C^1([0,1])$, τον χώρο των συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{K}$ που έχουν συνεχή παράγωγο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη νόρμα

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι η

$$\|f\|_d := \|f'\|_\infty$$

δεν είναι νόρμα (και δεν επάγει μετρική) στον $C^1([0,1])$.

3.4. Γενικότερα αν K συμπαγής και Hausdorff (ή συμπαγής μετρικός) και $(E,\|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, ορίζουμε $C(K;E)$ τον γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f:K\to(E,\|\cdot\|_E)$ και την νόρμα της ομοιόμοφης σύγκλισης :

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\|_E : t\in K\},\quad f\in C(K;E).$$

3.5. Αν $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, ορίζουμε $H^\infty(\mathbb{B})$ τον χώρο των ολόμορφων και φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, εφοδιασμένο με τη νόρμα supremum.

3.6. Η άλγεβρα του δίσκου $A(\mathbb{D})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ που είναι ολόμορφες στο $\mathbb{D}$, εφοδιασμένος με τη νόρμα supremum του $C(\overline{\mathbb{D}})$.

3.7. Ο χώρος $A(\mathbb{T})$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ που έχουν μηδενικούς αρνητικούς συντελεστές Fourier: $\hat{g}(n) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt = 0$ για κάθε $n < 0$, εφοδιασμένος με τη νόρμα supremum του $C([0, 2\pi])$.
Είναι ισομετρικά ισόμορφος με την $A(\mathbb{D})$ μέσω της απεικόνισης $A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{T}) : f \to \tilde{f}$, όπου $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$.

Πρώτες ιδιότητες

Πρόταση

Σε κάθε χώρο με νόρμα X, οι συναρτήσεις

- $X \to \mathbb{R} : x \to \|x\|$
- $X \times X \to X : (x,y) \to x+y$
- $\mathbb{K} \times X \to X : (\lambda, x) \to \lambda x$

είναι συνεχείς.

Πρόταση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και d η επαγόμενη μετρική. Τότε, για κάθε $x,y,z \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, έχουμε

(i) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$,

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

Μετρική σε γραμμικό χώρο

Παράδειγμα

Στον $\mathscr{S}$, αν $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k)$ η συνάρτηση

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

είναι μετρική. Ο $\mathscr{S}$ είναι γραμμικός χώρος, όμως η d δεν επάγεται από κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathscr{S}$.

Θα έπρεπε να ικανοποιεί την

$$d(2x,0) = \|2x\| = 2\|x\| = 2d(x,0),$$

δηλαδή για κάθε $x = (\xi_k) \in \mathscr{S}$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{2|\xi_k|}{1 + 2|\xi_k|} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|}.$$

Αυτό δεν ισχύει (πάρτε, για παράδειγμα, $x = (1, 0, \dots)$.)

Πρώτες ιδιότητες

Συμβολισμοί Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Αν $x \in X$ και $r \in \mathbb{R}_+$,

$$B(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$
$$\hat{B}(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$$
$$S(x,r) = \{y \in X : \|y - x\| = r\}.$$

Η *μοναδιαία μπάλα* B_X του X είναι η *κλειστή μπάλα* με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Δηλαδή,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Πρόταση

Σε κάθε χώρο με νόρμα X, η μοναδιαία μπάλα B_X είναι σύνολο κλειστό, φραγμένο, κυρτό (δηλ. αν $x, y \in B_X$ και $\lambda \in (0,1)$ τότε $\lambda y + (1-\lambda)x \in B_X$) και συμμετρικό ως προς το 0, με μη κενό εσωτερικό (κυρτό σώμα).

Πληρότητα: Χώροι Banach

Μια ακολουθία (x_n) στον $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ορισμός

Χώρος Banach είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή, ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.)

Δηλαδή, ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν για κάθε ακολουθία Cauchy (x_n) στον X υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x_n - x\| \to 0$.

Από τα προηγούμενα Παραδείγματα, τα 1.1 ως 1.4 ορίζουν χώρους Banach, όπως και τα 2.1 ως 2.4. Το Παράδειγμα 2.5 δεν είναι πλήρης χώρος.
Το Παράδειγμα 3.1 είναι χώρος Banach, ενώ τα 3.2 και 3.3 δεν είναι. Το 3.4 ορίζει χώρο Banach αν και μόνον αν ο $(E, \|\cdot\|_E)$ είναι πλήρης. Τέλος, τα 3.5, 3.6 και 3.7 ορίζουν χώρους Banach.

Σύγκλιση σειρών σε χώρο με νόρμα

Ορισμός (α) Έστω (x_k) ακολουθία στον $(X, \|\cdot\|)$. Η ακολουθία (s_n) των *μερικών αθροισμάτων* της (x_k) ορίζεται από την

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Αν υπάρχει $s \in X$ τέτοιο ώστε $s_n \to s$ (δηλ. $\|s_n - s\| \to 0$) τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει στο* s, και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

(β) Λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *συγκλίνει απολύτως*, αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$$

(δηλαδή, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.)

Σύγκλιση σειρών

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, η σειρά $\sum_n \frac{e_n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα, αλλά δεν συγκλίνει μέσα στο χώρο.

Παρατήρηση: Αν $x = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k+1)^2}, \dots)$, τότε $\|s_n - x\|_\infty \to 0$. Όμως το x δεν ανήκει στον c_{00} (αλλά στον c_0).

Πρόταση

Έστω X ένας χώρος Banach. Αν η $\sum_{k=1}^\infty x_k$ συγκλίνει απολύτως στον X, τότε συγκλίνει στον X.

Αντίστροφα:

Πρόταση

Σε ένα χώρο X με νόρμα, Αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει, τότε ο X είναι πλήρης (είναι χώρος Banach).

Διαχωρισιμότητα

Υπενθύμιση Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται διαχωρίσιμος αν έχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Παραδείγματα

Ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, και οι $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ για $1 \le p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι, ο $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι.

Πρόταση

Ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσμος αν και μόνον αν έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο E που η γραμμική του θήκη είναι πυκνή στον X, δηλαδή $\overline{\mathrm{span}(E)} = X$.

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι πλήρης. Ειδικότερα, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.

Χρειάζεται το

Λήμμα

Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ (που εξαρτάται από τη νόρμα και από τα $x_1, \ldots, x_m$), τέτοια ώστε για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ να ισχύει

$$c\,(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_m|) \leq \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m\|.$$

(δηλαδή, αν οι συντελεστές λ_i είναι «μεγάλοι», τότε το διάνυσμα $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ δεν μπορεί να έχει «αυθαίρετα» μικρή νόρμα.)

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι κλειστός στον X.

... γιατί είναι πλήρης.

Εφαρμογή

Αν X είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε κάθε βάση Hamel του X είναι υπεραριθμήσιμη.

Ισοδύναμες νόρμες

Ορισμός

Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον X λέγονται ***ισοδύναμες*** *αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε, για κάθε $x \in X$*

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

Παράδειγμα – Άσκηση

Αν $p, q \in [1, \infty]$, οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον $\mathbb{K}^m$ (για $m < \infty$), αλλά όχι στο c_{00}.

Πρόταση

Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον X.
(a) *Μία ακολουθία (x_n) του X είναι συγκλίνουσα στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν είναι συγκλίνουσα στον $(X, \|\cdot\|')$.*
(b) *Η (x_n) είναι βασική στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν είναι βασική στον $(X, \|\cdot\|')$.*

Ισοδύναμες νόρμες

Η ισοδυναμία νορμών είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θεώρημα

Δύο νόρμες σ΄ έναν γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη Αν $\{e_1, \dots e_d\}$ είναι αλγεβρική βάση ενός $(X, \|\cdot\|)$, κάθε $x \in X$ γράφεται μοναδικά $x = \sum_{k=1}^{d} \lambda(k) e_k$ και ορίζω $|||x||| := \sum_{k=1}^{d} |\lambda(k)|$. Δείχνω ότι οι $|||\cdot|||$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες. Άρα όλες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Υπενθύμιση:

Ορισμός (συμπάγεια)

*Ένας μετρικός χώρος (K, ρ) λέγεται **συμπαγής (compact)** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Θεώρημα

*Ένας μετρικός χώρος (K, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι **ακολουθιακά συμπαγής**, δηλαδή αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (x_n) έχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$.*

Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Πρόταση

Σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε συμπαγές υποσύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.

Στον $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$, ισχύει και το αντίστροφο (Θεώρημα Bolzano–Weierstrass).

Στον $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, δεν ισχύει το αντίστροφο: Η B_X δεν είναι συμπαγής: η ακολουθία (e_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, αφού $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ όταν $n \neq m$.

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, και έστω $\emptyset \neq K \subseteq X$. Τότε, το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα. Ο X έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η B_X είναι συμπαγής.

Χρειάζεται ένα γεωμετρικό Λήμμα: Αν Y είναι κλειστός υπόχωρος, σε κάθε υπόχωρο $Z \supsetneq Y$ μπορώ να βρω διάνυσμα «μακριά» από τον Y. Σε Ευκλείδειους χώρους μπορώ να βρώ z με $\|z\| = d(z, Y)$. Γενικότερα

Λήμμα (F. Riesz)

Έστω X χώρος με νόρμα, και Y, Z υπόχωροι του X. Αν Y είναι κλειστός, γνήσιος υπόχωρος του Z. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο ώστε $\|z\| = 1$ και

$$d(z, Y) = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \geq \theta.$$

Γραμμικές μορφές

Υπενθύμιση Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση $\phi : E \to \mathbb{K}$ λέγεται γραμμική μορφή ή συναρτησοειδές ή συναρτησιακό αν $\phi(\lambda x_1 + x_2) = \lambda\phi(x_1) + \phi(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Παραδείγματα

(α) $E = \ell^p$: $\phi((x(1), x(2), \dots)) := x(387)$

(β) $E = c_{00}$: $\psi((x(1), x(2), \dots)) := \sum_k x(k)$

(γ) $E = C([0,1])$: $\phi(f) := f(\frac{1}{2})$

(δ) $E = C([0,1])$: $\psi(f) := \int_0^1 f(t)dt$.

(ε) $E = C([0,1])$: $\chi(f) := \|f\|_\infty$: όχι! ($\chi(f) \neq \chi(-f)$)

Σε κάθε γραμμικό χώρο ορίζεται μια γραμμική μορφή (η μηδενική!). Επίσης, σε κάθε μη μηδενικό γραμμικό χώρο ορίζεται μια με μηδενική μορφή (η απόδειξη χρειάζεται το αξίωμα της επιλογής).

Γραμμικές μορφές σε χώρους με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική μορφή τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Η f είναι συνεχής στο 0
(β) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής
(γ) Υπάρχει σταθ. $M < \infty$ ώστε $|f(x)| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Η μικρότερη τέτοια M ονομάζεται $\|f\|$. Ισοδύναμα,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

(Θα αποδειχθεί πιό κάτω, γενικότερα: δες το Θεώρημα 7.)

Γραμμικές μορφές σε χώρους με νόρμα

Σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική μορφή είναι συνεχής.

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$: $\phi(x) = x(k)$ συνεχής.
$\psi(x) = \sum_k x(k)$ ασυνεχής.
$f(x) = \frac{1}{n_x} \sum_k x(k)$ συνεχής (όπου n_x : $x(n) = 0$ όταν $n > n_x$).

Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$: $\phi(x) = x(k)$ συνεχής.
$\psi(x) = \sum_k x(k)$ συνεχής.
$\chi(x) = \frac{1}{n_x} \sum_k x(k)$ συνεχής .

Στον $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$: $\delta_t(f) = f(t)$ συνεχής.
$\psi(f) = \int f(t)dt$ συνεχής.

Στον $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$: $\delta_t(f) = f(t)$ συνεχής;
$\psi(f) = \int f(t)dt$ συνεχής;

Μια άσκηση

Έστω $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ και έχει κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι χώρος Banach.

• Κενό εσωτερικό: Αν το S περιείχε μια $B(x,\delta)$ τότε, αν $y = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \dots)$ (m όροι, με $m\frac{\delta}{4} > 1$), θα είχαμε $x + y \in S$. Επίσης $-x \in S$ αφού $x \in S$ και S συμμετρικό, άρα $\frac{1}{2}(x + y - x) \in S$ αφού S κυρτό. Δηλαδή $\frac{y}{2} \in S$· θα έπρεπε λοιπόν $\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \cdots \leq 1$, άτοπο.

Παρατήρηση: Γενικότερα, ένας γνήσιος υπόχωρος χώρου με νόρμα δεν μπορεί να περιέχει μια μη κενή ανοικτή μπάλα. Γιατί τότε θα περιείχε μια ανοικτή μπάλα κέντρου 0 (μεταφορά ανοικτού είναι ανοικτό) οπότε θα περιείχε ένα «αρκετά μικρό» πολλαπλάσιο κάθε διανύσματος, άρα κάθε διάνυσμα!

Μια άσκηση

Ξανά:

Έστω $S=\{x\in\ell_\infty : \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|\leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ και έχει κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι χώρος Banach.

- Κλειστό: Έστω $x_n\in S$ για κάθε n και $\|x_n-x\|_\infty\to 0$. Τότε, $x(k)=\lim_n x_n(k)$ για κάθε k, άρα, για κάθε $N\in\mathbb{N}$ έχουμε $\sum_{k=1}^N |x(k)|=\sum_{k=1}^N \lim_n |x_n(k)|=\lim_n \sum_{k=1}^N |x_n(k)|\leq 1$ αφού $\sum_{k=1}^N |x_n(k)|\leq 1$ για κάθε n. Συνεπώς $\sum_{k=1}^\infty |x(k)|=\sup_N \sum_{k=1}^N |x(k)|\leq 1$.

Παρατήρηση: Χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι $x_n(k)\to x(k)$ για κάθε k, δηλ. δείξαμε ότι το S είναι κλειστό στην τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο (ασθενέστερη απ' την τοπολογία της $\|\cdot\|_\infty$).

Μια άσκηση

Ξανά:

Έστω $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ και έχει κενό εσωτερικό. Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι χώρος Banach.

• Όχι Banach: Δύο τρόποι: Ο κομψός: Για κάθε $x \in \ell^1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x\|_1 \leq n$, άρα $\frac{x}{n} \in S$. Οπότε $\ell^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(nS)$: αριθμήσιμη ένωση κλειστών. Αν ήταν πλήρης, από το θεώρημα Baire (!) κάποιο θάπρεπε να περιέχει μια μπάλα.

• Ο στοιχειώδης: Ο ℓ^1 είναι υπόχωρος του c_0 (κάθε αθροίσιμη είναι μηδενική). Αλλά περιέχει τον c_{00} που είναι πυκνός στον $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, άρα κι αυτός είναι πυκνός. Αν ήταν Banach, θάταν κλειστός, οπότε θάταν ίσος με τον c_0. Αλλά δεν είναι (υπάρχουν μηδενικές που δεν είναι αθροίσιμες).

Υπερεπίπεδα και γραμμικές μορφές

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος και $f : E \to \mathbb{K}$ γραμμική. Ο πυρήνας (kernel) της f είναι ο γραμμικός υπόχωρος

$$\ker f := \{x \in E : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Είναι γνήσιος υπόχωρος του E ανν $f \neq 0$.

Πρόταση

Αν $x_0 \in E$ με $f(x_0) \neq 0$, τότε κάθε $x \in E$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = \lambda x_0 + y \quad \text{όπου} \quad \lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)} \in \mathbb{K} \text{ και } \quad y \in \ker f.$$

Δηλαδή $E = \mathrm{span}(M, x_0)$.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Αν $y_1 := f(x_0)x - f(x)x_0$ βλέπω ότι $f(y_1) = 0$. Λύσε ως προς x και κάνε πράξεις...
Μοναδικότητα: Γραμμ. ανεξαρτησία ...

Υπερεπίπεδα και γραμμικές μορφές

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος.

Πόρισμα

Αν f, g είναι δύο μη μηδενικές γραμμικές μορφές, τότε $\ker f = \ker g$ ανν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ ώστε $f = \lambda g$.

Γενίκευση:

Άσκηση

Έστω $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ γραμμικές μορφές στον E. Υποθέτουμε ότι

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0$$

(δηλαδή ότι $\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k \subseteq \ker f$). Τότε η f είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{f_1, \ldots, f_n\}$: υπάρχουν $a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$ για κάθε $x \in E$.

(Το αντίστροφο είναι προφανές.)

Κλειστά υπερεπίπεδα και συνεχείς γραμμικές μορφές

Τώρα γυρνάμε στην Ανάλυση: Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ γραμμική μορφή. Αν η f είναι συνεχής, τότε ο πυρήνας της, $f^{-1}(\{0\})$ είναι βέβαια κλειστός υπόχωρος. Το ενδιαφέρον είναι ότι ισχύει το αντίστροφο. Μάλιστα, υπάρχει μια ίσως απροσδόκητη διχοτομία:

Πρόταση (Για γραμμικές μορφές $f : X \to \mathbb{K}$ μόνο)

(α) f συνεχής $\iff$ $\ker f$ *κλειστός υπόχωρος του X.*
(β) f ασυνεχής $\iff$ $\ker f$ *πυκνός και γνήσιος υποχ. του X.*

Απόδειξη. Αν είναι ασυνεχής, δεν θα είναι φραγμένη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $|f(x_n)| > n\|x_n\|$ (άρα και $f(x_n) \neq 0$). Έστω $x \in X$: θα βρώ $y_n \in \ker f$ ώστε $\|x - y_n\| \to 0$. Για κάθε n, εφαρμόζω την προηγούμενη πρόταση με το x_n στη θέση του x_0: υπάρχει $y_n \in \ker f$ ώστε $x = \frac{f(x)}{f(x_n)}x_n + y_n$. Έπεται ότι $\|x - y_n\| = \left\|\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\right\| = |f(x)|\frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} < |f(x)|\frac{1}{n}$, άρα $\|x - y_n\| \to 0$.

Γεωμετρική ερμηνεία της νόρμας μιας γραμμικής μορφής

Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{K}$ συνεχής γραμμική μορφή, $f \neq 0$. Τότε $\|f\| = \frac{1}{d}$, όπου d η απόσταση του $0 \in X$ από το $M_1 := \{x \in X : f(x) = 1\}$.

Απόδειξη. Αν $x \in M_1$, τότε $1 = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$, άρα $\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$.
Συνεπώς $d = \inf\{\|0 - x\| : x \in M_1\} \geq \frac{1}{\|f\|}$.
Από την άλλη, ξέρω ότι $\|f\| = \sup\{|f(y)| : y \in B_X\}$ άρα για κάθε $\varepsilon \in (0, \|f\|)$ υπάρχει $y \in B_X$ με $\|f\| - \varepsilon < |f(y)|$ (οπότε $f(y) \neq 0$).
Αν $x = \frac{y}{f(y)}$ έχω $x \in M_1$ και $|f(y)| \, \|x\| = \|f(y)x\| = \|y\| \leq 1$ άρα $|f(y)| \leq \frac{1}{\|x\|}$ οπότε τελικά $\|f\| - \varepsilon < |f(y)| \leq \frac{1}{\|x\|}$ ή $\|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$.
Συνεπώς $d = \inf\{\|x\| : x \in M_1\} < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$ άρα τελικά $d \leq \frac{1}{\|f\|}$ αφού το ε ήταν τυχόν.

Φραγμένοι τελεστές

Μια απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ γραμμικών χώρων είναι γραμμική αν $T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Ο *πυρήνας* της T είναι το σύνολο $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, και η *εικόνα* της T είναι το σύνολο $\mathscr{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$. Ο πυρήνας και η εικόνα μιας γραμμικής $T : E \to F$ είναι γραμμικοί υπόχωροι των E και F αντίστοιχα.

Θεώρημα

Αν $(E, \|.\|_E)$ και $(F, \|.\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η T είναι συνεχής.

(β) Η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.

(γ) Η T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο *του E.*

(δ) Υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ για κάθε *$x \in E$.*

(ε) Ο περιορισμός της T στην μοναδ. μπάλα του E είναι φραγμ. συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ είναι φραγμένο.(Ισοδύναμα, η T στέλνει φραγμένα σε φραγμένα.)

(στ) Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική απεικόνιση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη σε όλον το χώρο.
(διότι $T(nx) = nT(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν ο περιορισμός της T στην μοναδιαία μπάλα του E είναι φραγμένη συνάρτηση.

Αν $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Η Τ είναι φραγμένη αν και μόνον αν $\|T\| < +\infty$.

Φραγμένοι τελεστές

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Πρόταση

Αν $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *είναι χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *φραγμένος τελεστής, τότε*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\}$$

$$= \inf\{k > 0 : \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \text{ για κάθε } x \in E\}.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|\|x\|_E$$

για κάθε $x \in E$.

Φραγμένοι τελεστές

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
D *πυκνός υπόχωρος του* E *και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Η T *δέχεται συνεχή επέκταση*

$$T_1 : E \to F \quad \delta\eta\lambda. \;\; T_1|_D = T$$

αν και μόνον αν είναι συνεχής.

Η επέκταση T_1 *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|T_1\| = \|T\|$.

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *μεταξύ χώρων με νόρμα λέγεται* *ισομορφισμός* *αν είναι 1-1, επί, συνεχής, και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής. Η* T *λέγεται* *ισομετρικός ισομορφισμός* *αν επι πλέον είναι ισομετρία. Οι* E *και* F *λέγονται* *ισόμορφοι* *αν υπάρχει ισομορφισμός από τον* E *επί του* F*, και λέγονται* *ισομετρικά ισόμορφοι* *αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός από τον* E *επί του* F*.*

Παρατηρήσεις (α) Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι ισομορφισμός στην εικόνα της $T(E)$ ανν υπάρχουν θετικές σταθερές m, M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει

$$m \|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Ο T είναι ισομετρία ανν $m = M$ (οπότε $m = 1$).

(β) Μια ισομετρία είναι βέβαια 1-1, όχι όμως πάντα επί (σε απειροδιάστατους χώρους). Παράδειγμα: το shift στον ℓ^2.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E,\|.\|),(F,\|.\|)$ *είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε* $\mathscr{B}(E,F)$ *το σύνολο όλων των* *φραγμένων γραμμικών* *απεικονίσεων*

$$T:(E,\|.\|)\to(F,\|.\|).$$

Όταν $E=F$*, γράφουμε* $\mathscr{B}(E)$ *αντί για* $\mathscr{B}(E,E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T+\lambda S)(x)=Tx+\lambda(Sx)\quad(x\in E).$$

το σύνολο $\mathscr{B}(E,F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T\to\|T\|$ *είναι νόρμα στον χώρο* $\mathscr{B}(E,F)$.
Αν επί πλέον ο F *είναι πλήρης, ο* $\mathscr{B}(E,F)$ *είναι χώρος Banach.*

Ο τοπολογικός δυϊκός

Ορισμός

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, ο τοπολογικός δυϊκός X^* του X είναι ο γραμμικός χώρος όλων των γραμμικών και συνεχών απεικονίσεων $f : X \to \mathbb{K}$, δηλαδή $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

Πόρισμα

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\|_X = 1\}$ είναι χώρος Banach.

Ειδικότερα, ο τοπολογικός δυϊκός ενός χώρου με νόρμα ταυτίζεται με τον τοπολογικό δυϊκό της πλήρωσής του.

Δεν ξέρουμε ακόμα αν $X^* \neq \{0\}$ για οποιονδήποτε X: θα δειχθεί αργότερα (Θεώρημα Hahn-Banach). Για συγκεκριμένους όμως χώρους X ή κατηγορίες χώρων, βρίσκουμε εύκολα $f \in X^* \setminus \{0\}$:

Παραδείγματα τοπολογικών δυϊκών

Πρόταση

Θεωρούμε τον $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) = \ell^2(n)$. *Ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον* $\ell^2(n)$. *Γράφουμε* $(\ell^2(n))^* \simeq \ell^2(n)$.

$$T : (\ell^2(n))^* \to \ell^2(n) : f \to (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Πρόταση

Ο $(\ell_1)^*$ *είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον* ℓ_∞.

Πρόταση

Αν $1 < p < +\infty$, *τότε ο* ℓ_p^* *είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον* ℓ_q, *όπου* q *ο συζυγής εκθέτης του* p, *δηλαδή* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Πρόταση

Θεωρούμε τον c_0 *με τη supremum νόρμα* $\|\cdot\|_\infty$. *Ο δυϊκός του χώρος* $(c_0)^*$ *είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον* ℓ_1.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο[2]

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \, \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$.

Παράδειγμα Στον ℓ^2: $\langle x, y \rangle = \sum_n x(n)\overline{y(n)}$ οπότε $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

[2] Δες το αρχείο part.pdf: Σημειώσεις για τους χώρους Hilbert και άλλα

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, (α) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}.$$

(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πόρισμα

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$$(E, \|.\|) \times (E, \|.\|) \to (\mathbb{K}, |.|) : (x, y) \to \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\textit{για κάθε } x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\textit{αν } x, y \in E \textit{ και } \langle x, y \rangle = 0,\ \textit{τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται κάθετα (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y\rangle = 0$.
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική (orthonormal) αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle ., .\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει[3] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά $\quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\,.$

---

[3] με $[A]$ ή $\operatorname{span} A$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Το διάνυσμα $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Απόδειξη Λήμματος Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.
Τώρα: $(x-y) \perp F \iff \langle x-y, e_k \rangle = 0 \; \forall k, \iff$
$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \; \forall k, \iff y = y_x$.
Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \ldots n$) και
$y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Πυθαγόρειο: $\|z + y_1\|^2 = \|z\|^2 + \|y_1\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$.
Το X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\mathrm{span}(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν
(i) είναι ορθοκανονική και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος[4] *χώρος E με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).*

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F (π.χ. $E = C([0,1])$ και $F =$ πολυώνυμα).

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,

(ι) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).*

(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

[4] Το ευθύ ισχύει και σε μη διαχωρίσιμους χώρους Hilbert - δες `onbasis.pdf`.

Απόδειξη Έστω $x \in E$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

Ξέρουμε όμως (Πυθαγόρειο)

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2. \quad \rightsquigarrow$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

$$\text{Αν } m \geq n, \text{ έχουμε } \quad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle .,. \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|.\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.

(c) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο. Ο $(L^2([a, b]), \|.\|_2)$ είναι Hilbert.

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E,\|\cdot\|) \to (\ell^2,\|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, e_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος[5] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
Ακριβέστερα, αν $\{x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H, η απεικόνιση

$$U : H \to \ell^2 \;:\; x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

---

[5] Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για μη διαχωρίσιμους χώρους.

Υπενθύμιση:

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Το διάνυσμα $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (ΙΙ))

Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y\| = d(x, F) \equiv \inf\{\|x - z\| : z \in F\}$.

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του F ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον F, και το συμβολίζουμε $P_F(x)$ ή $P(F)x$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Από την απόδειξη του Θεωρήματος:

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, F κυρτό και πλήρες υποσύνολο του E. Αν $x \in E \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x-y\| = d(x,F) \equiv \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus F$, τότε το διάνυσμα $x - P_F(x)$ είναι κάθετο στον F. Αντίστροφα αν $y_0 \in F$ και $(x - y_0) \perp F$ τότε $y_0 = P_F(x)$.

Πόρισμα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$. Η απόσταση του z από τον M είναι: $d(z,M) = \|z\|$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα

Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert *H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.*

Ορισμός (κάθετος υπόχωρος)

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Παρατηρήσεις (α) Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του E. (β) $A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{span}(A)$ πυκνός στον E.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M, ώστε $M^{\perp} = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle .$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλ.

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; y \in H .$$

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος

Το πρόβλημα της επέκτασης συνεχών γραμμικών μορφών

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ συνεχής γραμμική μορφή.

Πάντα μπορώ να επεκτείνω την f σε $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ γραμμική.
Μπορώ όμως επιπλέον να πετύχω $\tilde{f}$ συνεχή;

Ειδικότερα: υπάρχουν άραγε πάντα σε ένα χώρο με νόρμα μη μηδενικές συνεχείς γραμμικές μορφές; (Ξεκίνα από $Y = \mathrm{span}(\{x\})$ όπου $x \neq 0$ και $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$. Μπορείς να επεκτείνεις διατηρώντας και τη συνέχεια;)

Αν X Hilbert, OK: γράφω $x = P_Y(x) + (x - P_Y(x))$ και ορίζω $\tilde{f}(x) = f(P_Y x)$, δηλ. $\tilde{f}(z) = 0$ αν $z \in Y^{\perp}$.

Αλλιώς;

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή.
*Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ φραγμένη **γραμμική** μορφή με $\tilde{f}|_Y = f$ **και** $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής και γραμμική επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)*

Πρώτο (και κρίσιμο) βήμα για την απόδειξη:

Λήμμα

Με τις ίδιες υποθέσεις, έστω $x \in X \setminus Y$ και $Y_1 = \mathrm{span}(Y \cup \{x\})$.
Τότε, υπάρχει $f_1 : Y_1 \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $f_1|_Y = f$ και $\|f_1\| = \|f\|_{Y^*}$.

Συνεχίζω: αν $x_2 \in X \setminus Y_1$ θέτω $Y_2 = \mathrm{span}(Y_1 \cup \{x_2\})$ και βρίσκω $f_2 : Y_2 \to \mathbb{K}$ κ.ο.κ. Θα τελειώσει ποτέ η διαδικασία;

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Ορισμός

Έστω X πραγματικός γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$. Το p λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές ή κυρτή μορφή, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$,

δηλαδή, αν είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές.

Παραδείγματα

(α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική μορφή, τότε η f αλλά και το $|f|$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

(β) Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(γ) Η $p : \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ με $p((\xi_k)) = \limsup \xi_k$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Θεώρημα (επέκτασης)

Έστω X *πραγματικός γραμμικός χώρος, και* $p : X \to \mathbb{R}$ *υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω* Y *γραμμικός υπόχωρος του* X, *και* $f : Y \to \mathbb{R}$ *γραμμική μορφή με την ιδιότητα:*

$$\text{για κάθε } x \in Y, \quad f(x) \leq p(x).$$

Τότε, υπάρχει γραμμική μορφή $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε*
(i) $\tilde{f}(x) = f(x)$ *αν* $x \in Y$ *(η* $\tilde{f}$ *είναι επέκταση της* f*), και*
(ii) $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ *για κάθε* $x \in X$.

Πρώτο (και κρίσιμο) βήμα για την απόδειξη:

Λήμμα

Με τις ίδιες υποθέσεις, έστω $x_1 \in X \setminus Y$ *και* $Y_1 = \mathrm{span}(Y \cup \{x_1\})$. *Τότε, υπάρχει* $f_1 : Y_1 \to \mathbb{R}$ *γραμμική μορφή με* $f_1|_Y = f$ *και* $f_1(x) \leq p(x)$ *για κάθε* $x \in Y_1$.

Το Θεώρημα Hahn - Banach: μιγαδική μορφή

Θεώρημα (επέκτασης)

Έστω X πραγματικός ή μιγαδικός γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμα. Έστω Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ γραμμική μορφή με την ιδιότητα:

$$\text{για κάθε } y \in Y, \quad |f(y)| \leq p(y).$$

Τότε, υπάρχει γραμμική μορφή $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε
(i) $\tilde{f}(y) = f(y)$ αν $y \in Y$ (η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f), και
(ii) $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα (Hahn - Banach)

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή.
Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής και γραμμική επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)

(Αποδείξεις στο `complexHB.pdf`)

Το Θεώρημα Hahn - Banach: μιγαδική μορφή

Η απόδειξη για την μιγαδική περίπτωση στηρίζεται στην πραγματική περίπτωση και στην παρατήρηση ότι μια μιγαδική γραμμική μορφή καθορίζεται από το πραγματικό της μέρος:

Λήμμα

Έστω X μιγαδικός γραμμικός χώρος.
(α) Αν $g : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική και θέσουμε $f(x) = \mathrm{Re} g(x)$, τότε η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική [6] *και $g(x) = f(x) - if(ix)$ για κάθε $x \in E$.*
(β) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική, τότε η $f_1 : X \to \mathbb{C}$ με $f_1(x) = f(x) - if(ix)$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική και ικανοποιεί $\mathrm{Re} f_1(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E$.
(γ) Αν $p : X \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα και f, f_1 είναι όπως στο (β), τότε

$$|f(x)| \le p(x) \ \forall x \in X \iff |f_1(x)| \le p(x) \ \forall x \in X.$$

[6] δηλ. $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Πρόταση

Έστω X πραγματικός ή μιγαδικός χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Θεώρημα

Έστω $X \neq \{0\}$ πραγματικός ή μιγαδικός χώρος με νόρμα, και $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

Πόρισμα (Ο X^* χωρίζει τα σημεία)

Αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, $X \neq \{0\}$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x) \neq f(y)$.

Το Θεώρημα Hahn - Banach

Ισοδύναμα,

Πόρισμα

Αν $X \neq \{0\}$, τότε $X^* \neq \{0\}$.

Ισχύει μάλιστα κάτι πολύ ισχυρότερο:

Θεώρημα

Έστω X πραγματικός ή μιγαδικός χώρος με νόρμα, και $x \in X$. Τότε,

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Υπενθύμιση:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Η κανονική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$

Έστω $x \in X$. Η απεικόνιση $\hat{x} : X^* \to \mathbb{K} : f \to f(x)$ είναι γραμμική και συνεχής, δηλ. $\hat{x} \in X^{**}$. Επομένως ορίζεται η $\tau : X \to X^{**}$ όπου $\tau(x) = \hat{x}$.

Θεώρημα

Κάθε χώρος X με νόρμα εμφυτεύεται με φυσιολογικό τρόπο ισομετρικά στον X^{**} μέσω της $\tau : X \to X^{**}$ που ορίζεται από την

$$(\tau(x))(f) = f(x), \quad x \in X,\ f \in X^*.$$

Ορισμός

*Η απεικόνιση τ λέγεται **κανονική εμφύτευση** του X στον X^{**}. Ο X λέγεται **αυτοπαθής** αν $\tau(X) = X^{**}$, δηλαδή αν η τ είναι επί. Τότε, ο X είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}.*

... Αλλά υπάρχει μη αυτοπαθής χώρος X που είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**} (R.C. James, 1951).

Αυτοπάθεια

• Ένας χώρος με νόρμα που δεν είναι πλήρης δεν μπορεί να είναι αυτοπαθής.

• Ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής, γιατί $c_0^* \simeq \ell_1$: διαχωρίσιμος ενώ $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$: μη διαχωρίσιμος.

• Ο ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, θα ήταν ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞^*, οπότε ο ℓ_∞^* θα ήταν διαχωρίσιμος. Όμως τότε ο ℓ_∞ θα έπρεπε να είναι διαχωρίσιμος (όπως θα δούμε).

Πρόταση

Ο ℓ_p, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.

$\forall \phi \in \ell_p^{**}$: να βρώ $x \in \ell_p$ με $\tau(x) = \phi$

Θυμίζω: $T_p : \ell_p^* \to \ell_q : f \to (f(e_n))$ ισομετρία επί. Όμως, η

$\psi := \phi \circ T_p^{-1} : \ell_q \xrightarrow{T_p^{-1}} \ell_p^* \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ ανήκει στον ℓ_q^*.

Έστω $x = (\psi(e_n))$. Τότε $x \in \ell_p$ και $\forall y \in \ell_q : \psi(y) = \sum x(n)y(n)$.

Θδο $\tau(x) = \phi$:

Για κάθε $f \in \ell_p^*$ θέτω $y := (f(e_n)) \Rightarrow T_p^{-1}(y) = f$.

Έχω $\phi(f) = \phi(T_p^{-1}(y)) = \psi(y) = \sum x(n)y(n)$

και $\hat{x}(f) = f(x) = f(\sum x(n)e_n) = \sum x(n)f(e_n)$.

αλλά $y(n) = f(e_n)$ άρα $\phi(f) = \hat{x}(f)$.

Κι αφού το $f \in \ell_p^*$ ήταν τυχόν, $\tau(x) = \phi$.

Θεώρημα (Ο X^* χωρίζει σημεία και κλειστούς υποχώρους)

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν

$$\delta = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\},$$

τότε υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1$, $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\tilde{f}(x_0) = \delta$.

Ειδικότερα, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1$ και $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$.

Θεώρημα

Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.

Η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα

Πρόταση

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, υπάρχει χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : X \to \tilde{X}$ με πυκνή εικόνα. Ο $\tilde{X}$ είναι «ουσιαστικά μοναδικός», δηλ. αν $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach και $\psi : X \to Y$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον $\tilde{X}$ επί του Y ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in X$.
Ο χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ λέγεται ***η πλήρωση*** *του $(X, \|\cdot\|)$.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, two heads, "\phi"] \arrow[d, tail, two heads, "id"] & \phi(X) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads, dashed] & \tilde{X} = \overline{\phi(X)} \arrow[d, tail, two heads, "T"] \\
X \arrow[r, tail, two heads, "\psi"'] & \psi(X) \arrow[r, tail] & Y = \overline{\psi(X)}
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη $\tilde{X} = \overline{\tau(X)} \subseteq X^{**}$ και $\phi = \tau$.

Banach Limits: μια εφαρμογή του Θ. Hahn-Banach

Θεωρούμε τον υπόχωρο c του ℓ^∞ που αποτελείται από τις *συγκλίνουσες* ακολουθίες. Η απεικόνιση

$$f_0 : c \to \mathbb{K} : (x(n))_n \to \lim x(n)$$

είναι γραμμική, νόρμας 1, και έχει τις ιδιότητες:
$\lim x(n) = \lim x(n+1)$ και: αν $x(n) \geq 0 \; \forall n$ τότε $\lim x(n) \geq 0$.
Banach Limit ονομάζεται κάθε επέκταση της f_0 σε μια $f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ που διατηρεί αυτές τις ιδιότητες.

Θεώρημα

Υπάρχει γραμμική μορφή $f : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ με τις ιδιότητες

(i) $\|f\| = 1$.

(ii) $f(x) = \lim x(n)$ *όταν η* $x = (x(n))$ *συγκλίνει.*

(iii) *Αν* $x(n) \geq 0$ *για κάθε* n *τότε* $f(x) \geq 0$.

(iv) $f(x(1), x(2), x(3), \dots) = f(x(2), x(3), \dots)$ *για κάθε* $x = (x(n)) \in \ell^\infty$.

(Απόδειξη στο `banachlim.pdf`)

Αρχή ομοιόμορφου φράγματος (PUB)

Αν μια $A \subseteq X^*$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, αν δηλ. υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\sup\{|f(x)| : f \in A\} \leq M$ για κάθε $x \in B_X$, τότε είναι κατά σημείο φραγμένη: για κάθε $x \in X$, $\sup\{|f(x)| : f \in A\} \leq M \|x\| < \infty$. Αντίστροφα;

Παράδειγμα

Στον χώρο $X = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$: Ονομάζω A την οικογένεια των $f : X \to \mathbb{K}$ της μορφής $f(x) = \sum_n a_n x(n)$ όπου $(a_n) \in c_{00}$ και $\sup |a_n| \leq 1$. Τότε $A \subseteq X^*$.

Η A είναι κατά σημείο φραγμένη: για κάθε $x \in X$, $\sup\{|f(x)| : f \in A\} \leq \sum_n |x(n)| < \infty$
αλλά δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη: δεν υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\sup\{|f(x)| : f \in A\} \leq M$ για κάθε $x \in B_X$:

Πράγματι: Αν $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)$ και $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$ τότε

$\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_X$ αλλά $f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$.

Αρχή ομοιόμορφου φράγματος (PUB)

Κάθε $f \in A$ επεκτείνεται σε $\tilde{f} : c_0 \to \mathbb{K}$ φραγμένη. Αλλά η $\tilde{A} = \{\tilde{f} : f \in A\}$ δεν είναι κατά σημείο φραγμένη: Αν $x_0 = (\frac{1}{n})$ τότε $\sup\limits_n |\tilde{f}_n(x_0)| = +\infty$.

«Συσσώρευση των ιδιομορφιών» (condensation of singularities) στο x_0.

Μάλιστα, υπάρχουν «πολλά» σημεία σαν το x_0 (πυκνό και G_δ).

Θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος

Θεώρημα

Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_i : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, $i \in I$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε } i \in I, \quad \|T_i x\|_Y \leq M_x.$$

(δηλαδή, το $\{T_i x : i \in I\}$ είναι φραγμένο σύνολο στον Y).
Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{για κάθε } i \in I, \quad \|T_i\| \leq M$$

(δηλαδή, το $\{\|T_i\| : i \in I\}$ είναι φραγμένο στον $\mathbb{R}$).

Αρχή ομοιόμορφου φράγματος

Θεώρημα

Έστω X χώρος Banach και $\mathscr{P} = \{p_i : i \in I\}$ οικογένεια συνεχών ημινορμών στον X. Τότε
είτε η $\mathscr{P}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει M ώστε $p(x) \leq M \|x\|$ για κάθε $x \in E$ και κάθε $p \in \mathscr{P}$
ή αλλιώς (δεν είναι κατά σημείο φραγμένη, μάλιστα) το σύνολο $B = \{x \in X : \sup_i p_i(x) = \infty\}$ είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του X.

(Απόδειξη στο `pubn.pdf`)

Το Θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος έπεται θέτοντας $p_i(x) = \|T_i x\|, i \in I$.

Αρχή ομοιόμορφου φράγματος

Πρόταση (Θεώρημα Banach-Steinhaus)

Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές για $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n(x))$ είναι συγκλίνουσα στον Y. Τότε, η απεικόνιση $T : X \to Y$ με

$$x \mapsto T(x) := \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα, και $\{x_n\}$ ακολουθία στον X. Η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$ η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{K}$.

(ασθενώς φραγμένη $\Rightarrow$ norm φραγμένη.)

Παραδείγματα

Άσκηση

Μια ακολουθία (x_n) σ′ έναν χώρο με νόρμα X λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ αν για κάθε $f \in X^*$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x)$ στον $\mathbb{K}$. Αν, για κάθε $f \in X^*$, η $(f(x_n))$ είναι συγκλίνουσα (λέμε τότε ότι η (x_n) είναι ασθενώς Cauchy) τότε υπάρχει μοναδικό $\phi \in X^{**}$ ώστε $\phi(f) = \lim f(x_n)$ για κάθε $f \in X^*$.

Για παράδειγμα, στον $X = c_0$, η (x_n) όπου $x_n = e_1 + \cdots + e_n$ είναι ασθενώς Cauchy αλλά δεν συγκλίνει ασθενώς.

Πρόταση

Έστω $y = (\eta_k)$ ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (x(k)) \in c_0$, η σειρά $\sum_k x(k)\eta_k$ συγκλίνει. Τότε, $y \in \ell_1$. Δηλαδή,

$$\sum_k |\eta_k| < +\infty.$$

Σειρές Fourier

Δουλεύουμε στον χώρο Banach $X = (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ όπου $C(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(t+2\pi) = f(t)\, \forall t\}$.

Ορισμός (Συντελεστές Fourier)

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N},\, t \in [-\pi, \pi]).$$

$$S_n(f) \xrightarrow{?} f$$

Θεώρημα (Féjer)

Για κάθε συνεχή f, οι μέσοι όροι συγκλίνουν ομοιόμορφα:

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f) + s_1(f) + \cdots = S_n(f)) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f.$$

Αποκλίνουσες σειρές Fourier

Θ.δ.ο. υπάρχουν «πολλές» $f \in C(\mathbb{T})$ για τις οποίες η ακολουθία $(S_n(f)(t))_n$ είναι μη φραγμένη, μάλιστα σε «πολλά» σημεία t.

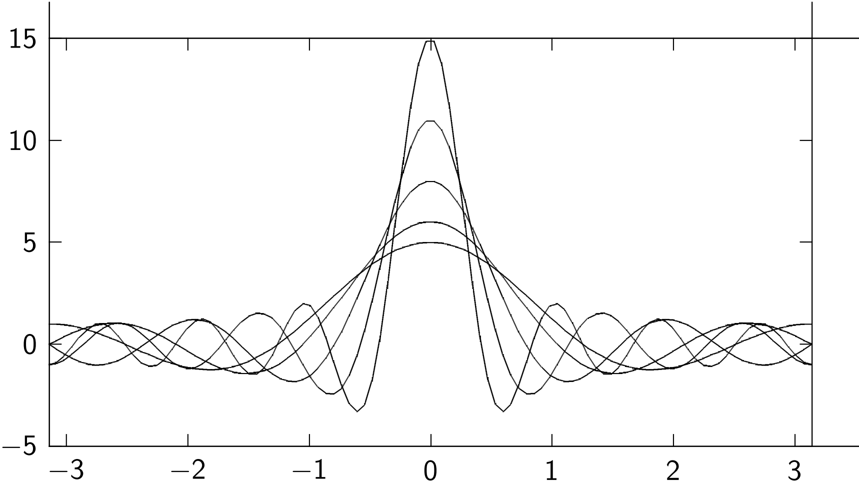
Παρατήρηση

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t-s)D_n(s)ds$$

$$\text{όπου} \quad D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(iks)\,.$$

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)},\ x \neq 0, \pm\pi, \\[2ex] 2n+1,\ x = 0 \end{cases}$$

Ο πυρήνας του Dirichlet για $n = 4, 5, 7, 10, 14$.



Αποκλίνουσες σειρές Fourier!

Για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτω

$$p_{m,t}(f) = |S_m(f,t)|, \quad f \in C(\mathbb{T}).$$

Είναι συνεχείς ημινόρμες:

$$p_{m,t}(f) = |\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t-s)D_n(s)ds| \leq \|D_m\|_1 \|f\|_\infty .$$

Λήμμα 1 Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ ώστε

$$|S_m(f,t)| \geq \frac{1}{2}\|D_m\|_1 .$$

Λήμμα 2 $\|D_m\|_1 \sim \log m$, άρα $\sup_m \|D_m\|_1 = \infty$.

Έπεται ότι για κάθε t η οικογένεια $\{p_{m,t} : m \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Αποκλίνουσες σειρές Fourier

... άρα για κάθε N και t το

$$A_{N,t} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,t) \leq N\}$$

είναι κλειστό με κενό εσωτερικό, άρα το συμπλήρωμά του

$$B_{N,t} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,t) > N\}$$

είναι ανοικτό πυκνό στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, επομένως (Baire) το σύνολο

$$B_t := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} B_{N,t}$$

είναι πυκνό G_δ. Όμως

$$B_t := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,t)| = \infty\}.$$

Δηλαδή, για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει ένα «μεγάλο» σύνολο συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους στο συγκεκριμένο σημείο t δεν είναι καν φραγμένη.

Αποκλίνουσες σειρές Fourier

Υπάρχουν άραγε συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε «πολλά» σημεία;
Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε ρητό $q \in (-\pi, \pi]$, το σύνολο

$$B_{N,q} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f, q) > N\}$$

είναι ανοικτό και πυκνό. Επομένως, (Baire) το σύνολο

$$B := \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} B_{N,q} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f, q)| = \infty \, \forall q \in \mathbb{Q}\}$$

είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του $C(\mathbb{T})$. Δηλαδή υπάρχει ένα «μεγάλο» (άρα, μη κενό!) σύνολο συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους δεν είναι φραγμένη σε κανένα ρητό.

Από την άλλη, (L. Carleson) αν $f \in C(\mathbb{T})$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει σχεδόν για κάθε t.

(Λεπτομέρειες στο `divfour.pdf`)

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης

- $T : X \to Y$ ανοικτή σημαίνει:

V ανοικτό στο $X \;\Rightarrow\; T(V)$ ανοικτό στο Y.

- $T : X \to Y$ συνεχής γραμμικός όχι πάντα ανοικτός,

πχ. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (x, 0)$.

- $T : X \to Y$ γραμμικός και ανοικτός τότε επί γιατί υπάρχει

$B_Y(0, \delta) \subseteq Y$ με $T(X) \supseteq T(B_x(0, 1)) \supseteq B_Y(0, \delta)$ άρα $T(X) \supseteq nB_Y(0, \delta)$ για κάθε n άρα $T(X) = Y$.

Θεώρημα

Έστω X και Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ συνεχής και επί γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης

Λήμμα

Αν X, Y χώροι Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε το $T(B_X(0,1))$ περιέχει ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον Y.

Αποδ. Βήμα 1. $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_X(0, \frac{k}{2}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_X(0, \frac{1}{2})$.

$$\Rightarrow \quad Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_X(0, \frac{1}{2})).$$

$$\Rightarrow \quad Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_X(0, \frac{1}{2}))} = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{T(B_X(0, \frac{1}{2}))}.$$

Y πλήρης! Από Baire, υπάρχει $k_0 : \ k_0\overline{T(B_X(0, \frac{1}{2}))} \supseteq B_Y(y_0, \delta)$ στον Y. Δηλαδή,

$$y_0 + B_Y(0, \delta) \subseteq k_0\overline{T(B_X(0, \frac{1}{2}))}.$$

Βήμα 2.

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0 : \; y_0 + B_Y(0,\delta) \subseteq k_0 \overline{T(B_X(0,\frac{1}{2}))}.$$

Έστω $y \in B_Y(0,\delta)$. Τότε, $y_0 + y \in y_0 + B_Y(0,\delta)$, άρα

$$y_0 + y \in k_0 \overline{T(B_X(0,\frac{1}{2}))} \Rightarrow \exists \, x_n \in B_X(0,\frac{1}{2}) : k_0 T(x_n) \to y_0 + y.$$

$$y_0 \in k_0 \overline{T(B_X(0,\frac{1}{2}))} \Rightarrow \exists \, x_n' \in B_X(0,\frac{1}{2}) : k_0 T(x_n') \to y_0.$$

Τότε, $x_n - x_n' \in B_X(0,1)$, και

$$k_0 T(x_n - x_n') = k_0 T(x_n) - k_0 T(x_n') \to y.$$

Δηλαδή,

$$y \in k_0 \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Άρα,

$$\overline{T(B_X(0,1))} \supseteq B_Y(0,\frac{\delta}{k_0}) = B_Y(0,\delta')$$

όπου $\delta' = \frac{\delta}{k_0}$.

Βήμα 3.

$$\exists \delta' > 0 : \overline{T(B_X(0,1))} \supseteq B_Y(0,\delta')$$

Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \delta'/2$. Τότε,

$$y \in \frac{1}{2} B_Y(0,\delta') \subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_X(0,1))} = \overline{T(B_X(0,\frac{1}{2}))},$$

άρα υπάρχει $x_1 \in B_X(0,\frac{1}{2})$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta'}{2^2}.$$

Τότε, $y - Tx_1 \in B_Y(0,\frac{\delta'}{2^2}) \subseteq \overline{T(B_X(0,\frac{1}{2^2}))}$, άρα υπάρχει $x_2 \in B_X(0,1/2^2)$ τέτοιο ώστε

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\delta'}{2^3}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in B_X(0,\frac{1}{2^n})$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta'}{2^{n+1}}.$$

Βήμα 3 συνέχεια

$$(*) \qquad \exists \delta' > 0 : \ \|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta'}{2^{n+1}}.$$

Αλλά $\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$ άρα $\sum \|x_n\| < \infty$ άρα (X πλήρης), η $z_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$ συγκλίνει, έστω στο x, και $\|x\| \leq \sum \|x_n\|$ άρα

$$\|x\| \leq \sum \|x_n\| \leq \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1$$

δηλαδή, $x \in B_X(0,1)$. Από την $(*)$,
$T(z_n) = T(x_1) + \cdots + T(x_n) \to y$. Όμως $z_n \to x$ και ο T είναι συνεχής, άρα $T(z_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $T(x) = y$, κι αυτό σημαίνει ότι $y \in T(B_X(0,1))$. Άρα

$$T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0, \frac{\delta'}{2}).$$

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης: Απόδειξη

Αν $A \subseteq X$ ανοιχτό ν.δ.ο. $T(A)$ ανοιχτό: Έστω $y \in T(A)$ και $x \in A$ με $Tx = y$. Έστω $r > 0$ με $B_X(x,r) \subseteq A$.
Από το Λήμμα, υπάρχει $\delta > 0$ με $T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0,\delta)$. Τότε,

$$B_Y(0,\delta r) = rB_Y(0,\delta) \subseteq rT(B_X(0,1)) = T(rB_X(0,1)) = T(B_X(0,r)).$$

Αν $y' \in B_Y(y,\delta r)$, τότε $y' - y \in B_Y(0,\delta r)$, άρα υπάρχει $z \in B_X(0,r)$ με $T(z) = y' - y$. Έπεται ότι $T(x+z) = y'$. Αλλά $x + z \in B_X(x,r)$, άρα

$$T(A) \supseteq T(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(y,\delta r).$$

Το $y \in T(A)$ ήταν τυχόν, άρα το $T(A)$ είναι ανοιχτό. $\square$

Πόρισμα (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης)

Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο γραμμικός τελεστής $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος.

Παραδείγματα

$T : X \to Y$. Χρειάζεται πληρότητα και των δύο:

(α) X πλήρης, Y όχι:

$$T = Id : X = (\ell^1, \|\cdot\|_1) \to Y = (\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$$

συνεχής επί, όχι φραγμένο αντίστροφο (όχι ανοικτός).

Παρατήρηση: $Y = \bigcup_{n=1}^\infty nS$ όπου $S = \{x = x(m) : \sum_m |x(m)| \leq 1\}$
άρα κάθε nS είναι κλειστό με κενό εσωτερικό στον Y (Ασκ. I.8).

Παραδείγματα

(β) X όχι πλήρης, Y πλήρης:

Έστω $(Y, \|\cdot\|_Y)$ διαχωρίσιμος χώρος Banach, $\{y_i : i \in I\}$ αλγεβρική βάση με $\|y_i\| = 1$ για κάθε i. Κάθε $y \in Y$ γράφεται $y = \sum_{i \in F} a_i y_i$ όπου $a_i \in \mathbb{R}$ και $F \subseteq I$ πεπερασμένο.

Ορίζω $X = (Y, \|\cdot\|_X)$:

$$\left\| \sum_{i \in F} a_i y_i \right\|_X := \sum_{i \in F} |a_i|$$

Ο τελεστής

$$T = Id : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|)$$

γραμμικός συνεχής επί.
Αλλά $\|y_i - y_j\|_X = 2$ για $i \neq j$, άρα $(X, \|\cdot\|_X)$ μη διαχωρίσιμος.
Οπότε T^{-1} μη συνεχής.

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης (Υπενθύμιση)

Θεώρημα Έστω X και Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ συνεχής και επί γραμμικός τελεστής. Τότε, το $T(B_X(0,1))$ περιέχει ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον Y. Έπεται ότι ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση.

Πόρισμα:
Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο γραμμικός τελεστής $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος.

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης: Παρατηρήσεις

Λήμμα

Αν Y χώρος Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε

$$\overline{T(B_X(0,1))} \supseteq B_Y(0,\delta').$$

Παρατήρηση: *Έπεται ότι υπάρχει $\theta > 0$ ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχει (x_n) με $\|x_n\| \leq \theta \|y\|$ και $\|Tx_n - y\| \to 0$.*
... Αλλά δεν μπορώ πάντα να επιλέξω (x_n) συγκλίνουσα: τότε θα είχα $\|x\| \leq \theta \|y\|$ και $Tx = y$. Αυτό δεν γίνεται πάντα: δες το Παράδειγμα (β).

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης: Παρατηρήσεις

Πόρισμα

Έστω X γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X,

$$\|x_n\|_1 \to 0 \Longrightarrow \|x_n\|_2 \to 0.$$

Τότε οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Η υπόθεση ισοδυναμεί με την συνέχεια της $Id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$, άρα με την ύπαρξη σταθεράς $A \in (0, \infty)$ ώστε $\|x\|_2 \leq A\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$. Το συμπέρασμα είναι ότι και η $Id : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ είναι συνεχής, οπότε υπάρχει $B \in (0, \infty)$ ώστε $B\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq A\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα κλειστού γραφήματος

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το γράφημα του T είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(T) = \{(x, y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y.$$

Αν ο T είναι συνεχής, τότε το $\mathrm{Gr}(T)$ είναι κλειστό στον μετρικό χώρο $X \times Y$ ως προς οποιαδήποτε μετρική γινόμενο, π.χ. αυτήν που προέρχεται από τη νόρμα $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ του $X \times Y$.

Πρτρ: $Gr(T)$ κλειστό $\iff$ Αν $x_n \to x$ και $Tx_n \to y$ τότε $Tx = y$.
Ισοδύναμα: Αν $x_n \to 0$ και $Tx_n \to y$ τότε $y = 0$.

Θεώρημα (Θεώρημα κλειστού γραφήματος)

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα $Gr(T)$ του T είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, τότε ο T είναι φραγμένος.

Θεώρημα κλειστού γραφήματος

Παράδειγμα

$X = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty))$, $Y = (c_0, \|\cdot\|_\infty))$

$$T : X \to Y : \ (x(n)) \to (nx(n)).$$

Έχει κλειστό γράφημα, αλλά δεν είναι συνεχής:
$\|T(e_n)\| = n \to \infty$.

Εφραμογή: Θεώρημα Hellinger-Toeplitz

Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ γραμμική. Αν $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ για κάθε $x, y \in H$, τότε η T είναι φραγμένη.

Εφαρμογή: Συμπληρωματικοί υπόχωροι

Πρόταση

Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υπόχωρος του X. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$.
(β) Υπάρχει συνεχής γραμμικός τελεστής $P : X \to X$ με $P \circ P = P$ ώστε $P(X) = Y$.

Απόδειξη (β) $\Rightarrow$ (α): Θέτω $Z = \ker P$.

(α) $\Rightarrow$ (β): Αν $X = Y \oplus Z$, η απεικόνιση $P : X \to X$ με

$$P(y+z) = y \quad (y \in Y, z \in Z)$$

(ορίζεται καλά, είναι γραμμική, ταυτοδύναμη και) έχει κλειστό γράφημα: αν $(x_n, Px_n) \to (0, w)$ τότε $w = \lim Px_n \in Y$ και $w = \lim(Px_n - x_n) \in Z$ άρα $w = 0$.

Εφαρμογή: Συμπληρωματικοί υπόχωροι

Παρατήρηση Αν $X = \ell^\infty$ και $Y = c_0$, αποδεικνύεται (R.S. Phillips, 1940) ότι ο Y δεν έχει κλειστό συμπλήρωμα, δεν υπάρχει δηλαδή κλειστός υπόχωρος Z του X ώστε $X = Y \oplus Z$.

Αν βέβαια ο X είναι χώρος Hilbert, κάθε κλειστός υπόχωρος Y έχει κλειστό συμπλήρωμα, π.χ. τον κάθετο υπόχωρο $Y^\perp$.

Οι μόνοι χώροι Banach που έχουν την ιδιότητα, κάθε κλειστός υπόχωρος να έχει κλειστό συμπλήρωμα είναι εκείνοι που είναι (γραμμικά και τοπολογικά) ισόμορφοι με χώρους Hilbert (J. Lindenstrauss και L. Tzafriri, 1971).

Πρόταση

Αν X είναι χώρος με νόρμα, κάθε υπόχωρος Y πεπερασμένης διάστασης (είναι κλειστός και) έχει κλειστό συμπλήρωμα.

Εφαρμογή

Πρόταση

Έστω K συμπαγής (μετρικός) χώρος και $\|\cdot\|$ μιά νόρμα στον χώρο $C(K)$ με τις ιδιότητες:

(α) Ο χώρος $(C(K), \|\cdot\|)$ είναι πλήρης και

(β) Για κάθε $t \in K$, η γραμμική μορφή
$\delta_t : (C(K), \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \to f(t)$ είναι συνεχής.

Τότε η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$.

Απόδειξη Θεωρούμε την $Id : (C(K), \|\cdot\|_\infty) \to (C(K), \|\cdot\|)$.
(α) Δείχνουμε ότι έχει κλειστό γράφημα. Άρα είναι συνεχής.
(β) Αφού είναι 1-1, επί και συνεχής μεταξύ χώρων Banach, έχει φραγμένο αντίστροφο.

Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

Fredholm: $$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t,s) f(s) ds, \quad t \in J$$

Πρόταση (Εξίσωση Fredholm)

Έστω $J = [a,b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για κάθε συνεχή $g : J \to \mathbb{R}$ και κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ με $|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$ (όπου $|K(t,s)| \leq M$ στο $J \times J$), η εξίσωση Fredholm έχει μοναδική λύση f στο J.

- Γράφω $f - \mu T(f) = g$ όπου $(Tf)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds$.

Ν. δ. ο. $(I - \mu T)$ έχει φραγμένο αντίστροφο, ή, ισοδύναμα, ότι η $S : f \to \mu T(f) + g$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Υπενθύμιση: θεώρημα σταθερού σημείου

Θεώρημα (Banach)

Έστω (X,ρ) *πλήρης μετρικός χώρος και* $S : X \to X$ *συνάρτηση με την ιδιότητα: υπάρχει* $0 < c < 1$ *ώστε*

$$\rho(S(x),S(y)) \le c \cdot \rho(x,y) \qquad \textit{γνήσια συστολή}$$

για κάθε $x,y \in X$. *Τότε, υπάρχει μοναδικό* $z \in X$ *ώστε* $S(z) = z$.

Μάλιστα, για κάθε αρχικό σημείο $x_0 \in X$, ισχύει

$$\rho(S^n(x_0),z) \le \frac{c^n}{1-c} \cdot \rho(x_0,S(x_0))$$

άρα η ακολουθία $S^n(x_0) \to z$.

Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

Volterra: $$f(t) = g(t) + \mu \int_a^t K(t,s) f(s)\, ds, \quad t \in J.$$

Πρόταση (Εξίσωση Volterra)

Έστω $J = [a,b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για κάθε συνεχή $g : J \to \mathbb{R}$ και κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, η εξίσωση Volterra έχει μοναδική λύση f στο J.

Δεν ισχύει πάντα $\|\mu T\| < 1$, αλλά

$$\|(\mu T)^m\| \le (|\mu| M)^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ώστε κάποτε $\|(\mu T)^m\| < 1$.

Εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0.$$

Θεώρημα (Picard)

Έστω $F : A \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο ορθογώνιο*

$$A = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

Υποθέτουμε ότι η F *ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή: υπάρχει* $L > 0$ *τέτοιος ώστε*

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x - y| \quad \textit{για κάθε } (t,x),(t,y) \in A.$$

Θέτουμε $M = \max|F|$.
Τότε, αν $h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$, *η διαφορική εξίσωση* $f' = F(t, f)$, $f(t_0) = x_0$ *έχει μοναδική λύση στο διάστημα* $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Να βρούμε σταθερό σημείο της Φ, όπου

$$(\Phi f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J.$$

8. Ξεκινώντας από το θεώρημα κλειστού γραφήματος, αποδείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης.

9. Θεωρούμε τον $C[0,1]$ και τον υπόχωρό του $C^1[0,1]$ που αποτελείται από όλες τις f που έχουν συνεχή παράγωγο f' στο $[0,1]$. Ορίζουμε $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ με $Tf = f'$.

(α) Δείξτε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;

10. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $g \in Y^*$, τότε $g(Tx_n) \to 0$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

11. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$, ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$, ο $T^y : X \to Z$ με $T^y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής (δηλ. η T είναι *διγραμμική* και *χωριστά συνεχής*). Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, y \in Y$$

και άρα η $T : X \times Y \to Z$ είναι συνεχής.

Ασκήσεις

- Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής.
Δείξτε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν
(α) έχει πυκνό σύνολο τιμών και
(β) είναι κάτω φραγμένος, δηλ. υπάρχει $a > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq a\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

- Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο $T^{-1} : \mathrm{im}(T) \to X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $\mathrm{im}(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

- Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ για τις οποίες ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

Ασκήσεις

- Έστω X χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$ κυρτό και συμπαγές. Αν $\{T_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια συνεχών αφινικών απεικονίσεων $T_i : K \to K$ που *μετατίθενται*, δηλαδή $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ για κάθε $i, j \in I$, δείξτε ότι υπάρχει ένα κοινό σταθερό σημείο στο K, δηλαδή ένα $x \in K$ ώστε $T_i x = x$ για κάθε $i \in I$.
  (Ασθενής μορφή του Θεωρήματος Markov-Kakutani.)

- Έστω X χώρος με νόρμα και $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος. Δείξτε ότι κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Y \to \ell^\infty$ δέχεται φραγμένη γραμμική επέκταση $\tilde{T} : X \to \ell^\infty$ με $\left\| \tilde{T} \right\| = \| T \|$.

- Έστω $K = \{x = (x(n)) \in \ell^2_{\mathbb{R}} : |x(n) \leq \frac{1}{3^n} \forall n\}$.
Δείξτε ότι το K είναι συμπαγές και κυρτό. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : K \to \mathbb{R} : x \to \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x(n)$ είναι καλά ορισμένη, αφινική και συνεχής στο K, αλλά δεν επεκτείνεται συνεχώς στον ℓ^2.

- Έστω X χώρος Banach, (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*, και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \to 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

- Έστω K συμπαγής (μετρικός) χώρος και $\phi : K \to K$ ομοιομορφισμός. Στον χώρο Banach $X = (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ θεωρούμε την απεικόνιση $T : f \to f \circ \phi$. Δείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, και ότι είναι ισομετρία και επί.

Ασκήσεις

- Στον χώρο $C_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχής και φραγμένη}\}$ με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, για $a \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την απεικόνιση T_a με $(T_a f)(x) = f(x-a)$, $(f \in C_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R})$. Δείξτε ότι ο T_a είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, ισομετρία και επί.

- Για κάθε $x \in c_0$ ορίζουμε $\|x\|_* := \sum_k \frac{1}{2^k}|x(k)|$. Δείξτε ότι η $\|\cdot\|_*$ είναι (καλά ορισμένη) νόρμα στον c_0 και ότι ο $(c_0, \|\cdot\|_*)$ δεν είναι χώρος Banach.

- Αν X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και Y είναι γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1 = \mathrm{dist}(x, Y)$. (Συγκρίνετε με το Λήμμα Riesz.)

- Σε κάθε χώρο με νόρμα, η κλειστή θήκη ενός κυρτού συνόλου είναι κυρτό σύνολο.

Ασκήσεις

- Στον χώρο $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ δείξτε ότι η απεικόνιση S όπου $S(x(1), x(2), \dots) = (x(2), x(3), \dots)$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής και υπολογίστε τη νόρμα του.

- Στον χώρο $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ δείξτε ότι η απεικόνιση ϕ όπου $\phi((x(n)) = \sum_k x(k)$ είναι καλά ορισμένη γραμμική μορφή και υπολογίστε τη νόρμα της.

- Αν $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία, για κάθε $x, y \in X$ θέτουμε $a(n) = \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$. Δείξτε ότι $(a(n)) \in \ell^1$.
Αν επιπλέον η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε $\sum_n a(n) = \langle x, y \rangle$.