# Προσομοίωση 7-6-2022

$X \sim F(x)$

$\theta = E(h(X))$ (αν $X$ συνεχής $\theta = \int h(x) f(x)\, dx$ )

Έστω γεννήτρια τυχαίων αριθμών από $F(x)$

① Δημιουργούμε "τυχαίο" δείγμα $x_1, \dots, x_n$

② Μετασχημ. $y_1 = h(x_1) \; \dots, \; y_n = h(x_1)$

δείγμα $y_1, \dots, y_n$ από $Y = h(X)$

③ $\hat{\theta} = \bar{Y}_n$ , $S$ = δειγμ. τυπ. απόκλιση ($y$)

ΔΕ $\bar{Y}_n \pm t_{a/2, n-1} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

**Παράδ. 1** Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu, \sigma^2$ : γνωστά

π.χ. $X$ = LDL

$$X \sim N(92, 10^2)$$

Φυσιολογικό όριο LDL $= 100$

$Y$ = υπέρβαση από το $100$

$$Y = \max(X-100, 0)$$

π.χ. 5 άτομα

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 90 | 98 | 105 | 120 | 99 |
| $Y$ | 0 | 0 | 5 | 20 | 0 |

$$\boxed{E(Y) = ?}$$

# Αλγόριθμος Monte Carlo

① Δημιουργώ $N$ παρατηρήσεις $X \sim \mathcal{N}(92, 10^2)$

(προσομοιώνουμε $N$ άτομα αυτού του πληθ.)

$x_1, \dots, x_N$

② $y_1, \dots, y_N$ = υπερβάσεις

$$y_i = \max(x_i - 100, 0)$$

③ $\hat{\theta} = \overline{y}_N$ $\qquad$ $s$ : τυπ. αποκλ. $(y)$.

ΔΕ $\qquad \overline{y}_N \pm t_{\alpha/2, N-1} \dfrac{s}{\sqrt{N}}$

**Παράδειγμα** Μεροληψία Εκτιμήτριας

$X \sim Exp(\lambda)$ , $\lambda$ άγνωστο.

$\lambda$ : ρυθμός

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ , $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Αν $\theta = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Παίρνω (πραγματικό!!) δείγμα από τον πληθυσμό

$x_1, \dots, x_n$

$$\hat{\theta} = \bar{x}_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$E(\hat{\theta}) = \theta = \frac{1}{\lambda}$ δηλ. $\hat{\theta}$ αμερόληπτη

(b) Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το $\lambda$

Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το $\lambda$:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n} \qquad \left[ \text{Συνεπής εκτιμήτρια} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda \right]$$

Όμως $\hat{\lambda}$ δεν είναι αμερόληπτη

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) \neq \frac{1}{E(\bar{X}_n)} = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda$$

[μπορούμε ν.δ.ο. $E(\hat{\lambda}) > \lambda$]

bias $\boxed{E(\hat{\lambda}) - \lambda = ?} = b(n,\lambda)$

[Θεωρητικά υπολογίζεται $b(n,\lambda) = \frac{\lambda}{n-1}$]

Πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε το $b(n,\lambda)$ μέσω Monte Carlo?

Θέλουμε να εκτιμήσουμε

$$\boxed{\theta = E\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) - \lambda} = b(n,\lambda)$$

όπου $\bar{X}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, $X_1, \dots, X_n \sim$ ατμ $\sim Exp(\lambda)$.

## Προσομοίωση

**1 σενάριο (1 επανάληψη):**

Προσομοιώνουμε $n$ τιμές $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$.

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$Y = \frac{1}{\bar{X}_n} \longrightarrow \hat{\lambda}$$

Επαναλαμβάνουμε το παραπάνω για N επαναλήψεις (simulated replications)

Παίρνουμε $\underline{Y_1, \dots, Y_N}$ ← προσομοιωμένες τιμές της εκτιμήτριας $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}_n}$

$$\hat{b} = \frac{Y_1 + \dots + Y_N}{N} - \lambda$$

---

## Παράδειγμα: Ισχύς t-test

$\mu \neq \mu_0$.

$$P_0 = 1 - b = 1 - P(\text{accept } H_0 \mid \mu, \sigma)$$

$P_0(\mu, \sigma)$

[Αν $\underline{\mu = \mu_0}$: $H_0$ ισχύει $P_0 = 1 - P(\text{accept } H_0 \mid H_0 \text{ true})$
$= P(\text{reject } H_0 \mid H_0) = \alpha$]

$$P_0 = \boxed{\underline{P(\text{accept } H_0 \mid \mu, \sigma)} = \cancel{\theta}} = ?$$

t-test.

Έστω $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Παίρνω $\boxed{X_1, \dots, X_n}$ α.τ.μ $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad S = \text{stdev}(X)$$

$$t = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

$$R = \text{αποτέλεσμα} = \begin{cases} 0, & \text{αν } |t| \le t_{\alpha/2, n-1} \\ 1, & \text{αν } |t| > t_{\alpha/2, n-1} \end{cases}$$

Κανόνας $\begin{cases} \text{accept } H_0 & : \text{αν } R = 0 \\ \text{reject } H_0 & : \text{αν } R = 1 \end{cases}$

$$P_0 = \text{power} = E(R \mid \mu, \sigma, n) = P(R = 1)$$

# Σενάριο Προσομοίωσης

Δεδομένων $(\mu, \sigma)$ ; $(n, \alpha, \mu_0)$

πραγμ. τιμές $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ άγνωστες στον έλεγχο

έλεγχος

Σενάριο

Δημ. δείγμα $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

υπολ. $t = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

$$R = \begin{cases} 0 & \text{αν } |t| < t_{\alpha/2, n-1} \\ 1, & \text{αν } |t| > t_{\alpha/2, n-1} \end{cases}$$

R : αποτέλεσμα σεναρίου

---

Επαναλαμβάνουμε για N σενάρια

$R_1, \dots, R_N$

$\hat{P}_0 = \bar{R}_N$ , ΔΕ $\bar{R}_N \pm t_{\alpha/2, N-1} \dfrac{S_R}{\sqrt{N}}$

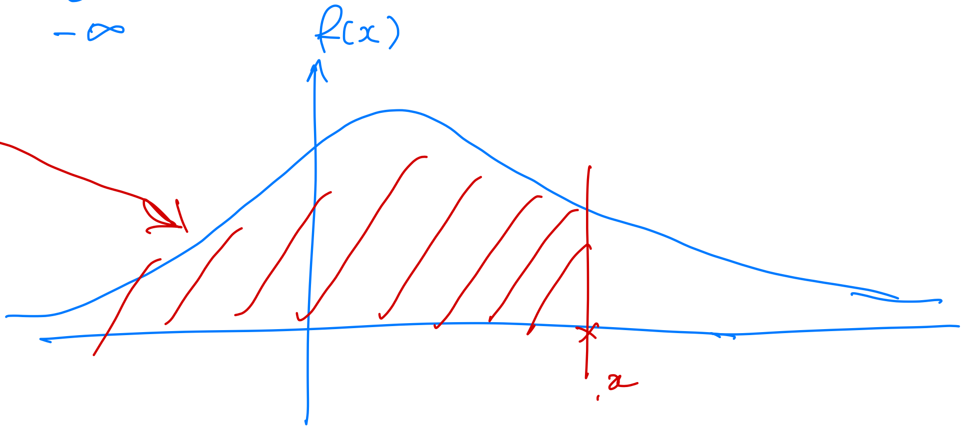
# Γεννήτριες Τυχαίων Αριθμών

Έστω $X$ συνεχής με σππ. $f(x)$

και συνάρτηση κατανομής $F(x)$

$$f(x) = F'(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \le x)$$




## ① Μέθοδος Αντίστροφου Μετ/σμού

Πρέπει: ① Να γνωρίζουμε τον τύπο της $F(x)$

② Να μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $F(x) = \alpha$ ως προς $x$.

όταν $X$ συνεχής: $x = F^{-1}(\alpha)$ (αντίστροφη εικόνα)

# Πιθανότητες

Αν $X \sim F$

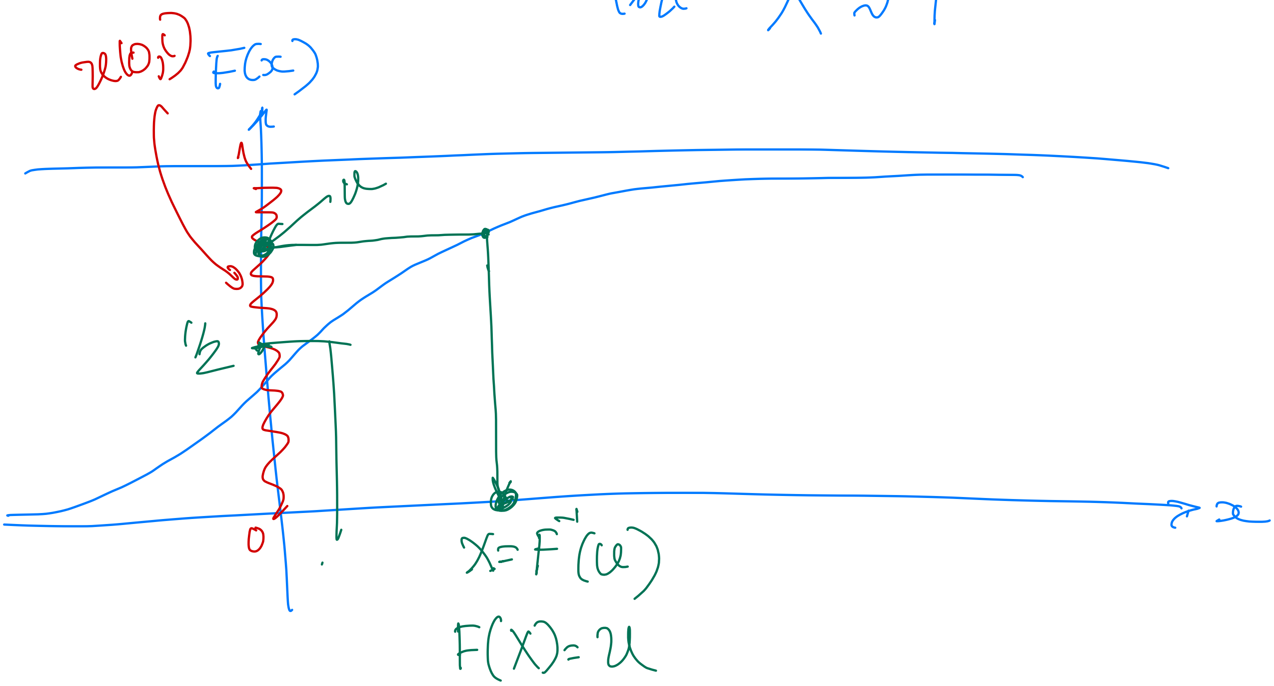
και $\underbrace{Y = F(X)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Y \sim \boxed{\mathcal{U}(0,1)}}$

Αλγόριθμος για γεννήτρια από την $F$:

Έστω $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

Λύνω: $F(X) = U \Rightarrow \underline{X} = F^{-1}(U)$

Τότε $X \sim F$




Ισοδύναμα Δημιουργούμε τυχαίο $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

Παίρνουμε $X \sim U$-quantile της $F$.

## Παράδειγμα 1

Έστω $X \sim Exp(\lambda)$

[υπάρχει η rexp στο R αλλά ας το δούμε]

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

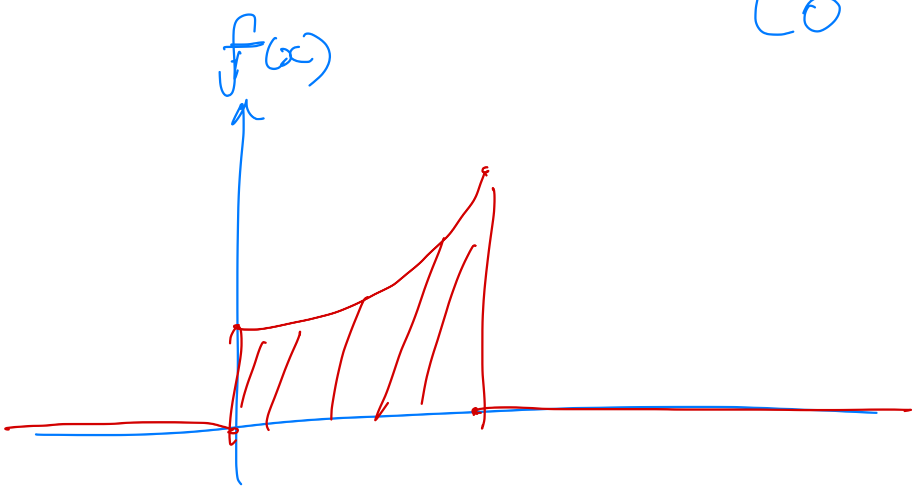
$$F(X) = U \Rightarrow 1 - e^{-\lambda X} = U \Rightarrow e^{-\lambda X} = 1 - U$$

$$\Rightarrow -\lambda X = \ln(1-U)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)}$$

Παράδειγμα 2

$X$ σ.π.π. $\quad f(x) = \begin{cases} c e^{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



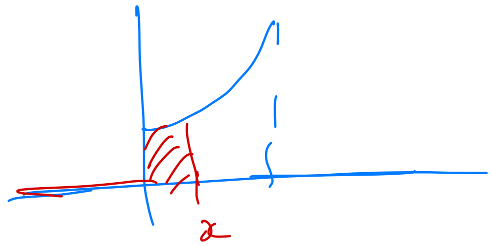

$c = ?$

$$\int_0^1 c e^{x} dx = 1 \Rightarrow c \int_0^1 e^{x} dx = 1 \Rightarrow$$

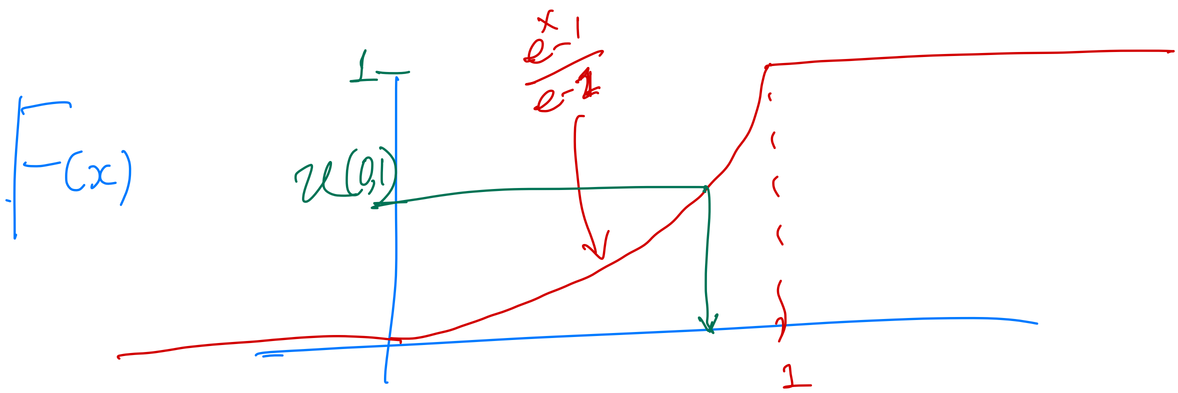
$$\Rightarrow c \cdot \left[ e^{1} - e^{0} \right] = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{e-1}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x}}{e-1}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \dfrac{e^x-1}{e-1} & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x>1 \end{cases}$$




$0<x<1$ : $$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e-1}\,dt = \frac{e^x-1}{e-1}$$




Έστω $U \sim U(0,1)$

Λύνουμε $F(X)=U \Rightarrow \dfrac{e^X-1}{e-1} = U \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^X - 1 = U(e-1) \Rightarrow e^X = 1 + U(e-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \ln\left(1+U(e-1)\right)}$$

γεννήτρια της $F(x)$

<u>Άσκηση</u>: Δημιουργήστε μια συνάρτηση R

για γεννήτρια από αυτή της $F(x)$

rf(n) : δημιουργεί n παρατηρήσεις από αυτή τη κατανομή

Τρέξτε τη για $n = 1000$ $\Rightarrow$

$$x = (x_1, \ldots, x_{1000})$$

hist(x) : θα πρέπει να μοιάζει