

Προσποσίωση 2024-25

6/6/2025

- ① Μαθηματα Παρ. 6/6/25
Περ 12/6/25
Παρ 13/6/25
Τρ. 17/6/25
Παρ. 20/6/25 → online
επανάληψη/
αυκρίσεις

Τετάρτη Εξέταση Δευ 14/7/25

② eclass : παρατρέτε !!

③ Υλικά : Σημειώσεις / υλικά and eclass
Robert - Casella:
Introduction to Monte-Carlo
Methods with R.
PDF Δωρεάν and springer με IP: uoa.gr

④ Γνώση R

- ⑤ Αξιολόγηση
- 1) Project ~ 20-30% ποσοστό
 - 2) ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
-

Ενότητες

- ① Group / Monte Carlo
Παραδείγματα
Γεννήσεις, τωρινός αριθμός
- ② Μέθοδοι Μέγιστης Διασποράς
- ③ Simulation { Correlated Data
Longitudinal Data
Survival Data / Competing Risks
Missing values
- ④ MCMC / Gibbs Sampling models
(Bayesian statistics)
- ⑤ Εφαρμογές / Ασκήσεις

Εισαγωγή Προσομοίωση Monte Carlo

Προσομοίωση (Simulation) : Αναπαράσταση (μίμηση)
πραγματικής ενός συστήματος
με χρήση υπολογιστή.

Παράδειγμα ①

π.χ. Πίχνω ένα ζάρι 16 φορές

X = αριθμός πιν 6

$X \sim \text{Binomial}(n=16, p=1/6)$

$P(X > 5)$... αναμενικά

Πίχνω ζάρι 100 φορές

X = άθροισμα ριψεών $100 \leq X \leq 600$

$P(\text{άθροισμα} = 235) \leftarrow \underline{\underline{\deltaύσκολο!!}}$

↪ R : δ-πρόσχησε 100 ζυχ.αρ.
όπου καθέναν 1, ..., 6
ποινιζαν..
επανάληψη 10⁸ φορές

Παράδειγμα Στατιστική Μεθοδολογία

π.χ. Εκτίμηση της μέσης τιμής μιας κατανομής

$X \sim F$, θ παράμετρος

Δίνεται δείγμα $x_1, \dots, x_n \Rightarrow \hat{\theta}$ εκτίμηση του θ .

Ερώτηση: $\hat{\theta}$ αμεροβλήσιμη;

Αμεροβλήσιμη

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Bias $E(\hat{\theta}) - \theta \leftarrow$ επίρροπος?

① μαθηματική
ανάλυση
συνήθως
δύσκολο

② άμεσως
μεγάλη πραγματοποίηση
δείγματα μεγέθους
 n από την F
υποβ. $\hat{\theta}$ από κάθε
δείγμα

επίρροπος $E(\hat{\theta}) - \theta$

③ Simulation
προσομοίωση

Τεκμήριωση στατιστικού αποτελέσματος

Παράδειγμα 3

Έστω X ενίενδο LDL $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Οόμγια : Αρεκό ενίενδο LDL = δ

$$1) \theta = E(X - \delta) = E(X) - \delta = \mu - \delta$$

$$2) \theta = E(\max(X - \delta, 0)) = \text{μέση υπέρβαση}$$

π.χ. 10 αόμα		82, 87, 97, 100, 85
$\delta = 95$		105, 106, 90, 90, 80
$\theta_1 = E(\max(X - \delta, 0))$		0, 0, 2, 5, 0
		10., 11, 0, 0, 0
		μέση αέρη = $\frac{28}{10} = 2,8$

$$3) \frac{28}{4} = 7 \rightarrow E(X - \delta \mid X > \delta) = \theta_2$$

Παράδειγμα 4

Προσμοίωση πληθύνων

$N = 10000$ αόμα

κάθε αόμο έαε εναρή με m αόμα
αόμα κατά μέσο όρο.

Σε κάθε εναρή $p = P(\text{μετάδοση})$

Αν σε $t=0$ έχει μισήσει 1 αλφες
 $P(\text{σε } t=25, > 300 \text{ αλφες})$

Προσέγγιση Monte Carlo

Έστω τυχαία μεταβλητή X
με συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$

$$Y = h(X)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε $\theta = E(h(X))$

Αν X διακριτή $\theta = \sum_x h(x) p(x)$, $p(x) = P(X=x)$

Αν X συνεχής $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$, $f(x) = \text{σφππ}_{\text{ως } X}$

Υπολογιστικά μπορεί να είναι δύσκολο έως αδύνατο

Έστω $x_1, \dots, x_n$ δείγματα από την κατανομή της X

Εκτίμηση του θ : $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n h(x_i)}{n}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \text{ συνεχώς} \\ E(\hat{\theta}_n) = \theta \end{array} \right\}$$

Πώς βρίσκω το δείγμα?

Αν αρέει είναι αδύνατο η λύση.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε αρέει το δείγμα μέσω προσομοίωσης

Ο αριθμός προσομοίωσης μπορεί να είναι πολύ αρέει π.χ. αν $X \sim \text{Exp}(5)$, $\theta = E(\log X)$

$X_1, \dots, X_n$:
 $X_1 = \text{rexp}(1, 1/5)$
 $X_2 = \text{rexp}(1, 1/5)$
 $\vdots$
 X_n } προσομ. δείγμα

πολύ δύσκολο π.χ. αν $X = \text{αρ. αρέει} \delta$ μινς μετά την έρευνα επιδημίας

δημιουργία αριθμού που προσομοιώνει την εξέλιξη της επιδημίας

Αριθμός : Γεννήτρις τυχαίων αριθμών
RNG
Random number generators

Τεκμηρίων στατιστική μέθοδος

π.χ. $\theta = P(\text{οργανισμός ζώνου I σε ένα ταύνο ελέγχου υποδείξουν})$

$$\theta = P(A)$$

Εστω $X = \begin{cases} 1 & \text{αν ισχύει } A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1 - P(A)) = \\ &= P(A) \end{aligned}$$

Παραδείγματα στο R

① $X = \text{LDL}$ αιώνας, $X \sim \mathcal{N}(\mu=120, \sigma=20)$

$$\theta = E\left(\underbrace{\max(X-140, 0)}_{h(X)}\right)$$

$$X \sim \mathcal{N}(120, 20^2) \quad f(x) = \dots$$

$$h(x) = \max(x-140, 0)$$

$$\theta = E(h(X))$$

Αντίστροφος

Σενάριο 1 άτομο

n : $x_1, \dots, x_n$ στο $\mathbb{R}$

$$h(x_1), \dots, h(x_n) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i)$$

② Έστω $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$\lambda = \text{ρυθμός}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το λ
από δείγματα $x_1, \dots, x_n$ της $\text{Exp}(\lambda)$.

Θεωρώ των εξής Εκτιμήτρια.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{X}_n = \hat{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

$$E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) \neq \frac{1}{E(\bar{X}_n)} = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda$$

$$b = E(\underbrace{\hat{\theta}_n - \lambda}_Y)$$

$$Y = \frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda,$$

$$\text{όπου } \bar{X}_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

$$x_1, \dots, x_n \sim \text{Exp}(\lambda)$$

R : παραμετρικά συνάρτηση $(\lambda, n) \rightarrow$ 'Εκτίμηση b