12-6-2025

Παράδειγμα

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ μ, σ^2 άγνωστα

Ζητούμενο $(1-\alpha)$ ΔΕ για μ (με βάση δείγμα μεγέθους n)

$$\hat{\mu} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\hat{\mu} = \overline{X}_n$, $S =$ δειγμ. τυπ. απόκλιση.

$$\underbrace{\hat{\mu} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \hat{\mu} + \frac{t_{\alpha/2} S}{\sqrt{n}}}$$

$\Leftarrow$ τι σημαίνει;

Για δεδομένο δείγμα δε γνωρίζουμε αν ισχύει

Η θεωρία λέει ότι για μεγάλο αριθμό δειγμάτων

η $P(\text{κάλυψης}) = 1-\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Έστω } X_1, \dots, X_n \text{ ανεξ. ισόνομες } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \text{Έστω } \overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad S = \text{τυπ. απόκλιση} \\ \text{κ' } L = \overline{X}_n - \dfrac{S t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \quad U = \overline{X}_n - \dfrac{S t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta = P\left(L \le \mu \le U\right) = 1-\alpha}_{\text{επαληθεύστε μέσω προσομοίωσης}}$$

① Μια επανάληψη

simconfint = function (n, μ, σ, α)

δημ. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

υπολογίζει L, U

επιστρέφει $Y = \begin{cases} 1 & \text{αν } L \le \mu \le U \\ 0, & \text{αν δχ.} \end{cases}$

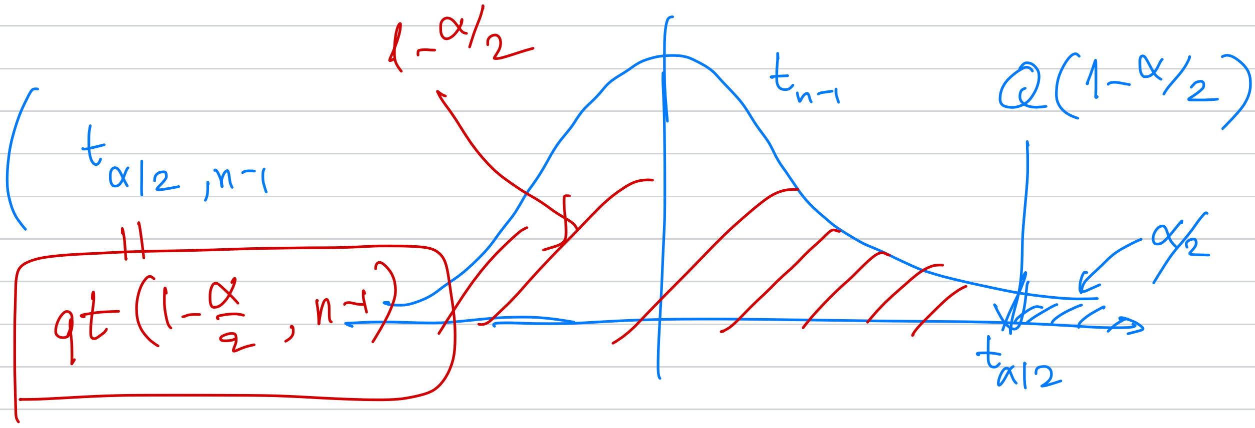
---

② Καλούμε την simconfint N φορές

$\Longrightarrow Y_1, \dots, Y_N$

Εκτίμηση $\hat{\theta} = \dfrac{Y_1 + \dots + Y_N}{N}$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν $\hat{\theta} \approx 1-\alpha$



Παράδειγμα 2

Έστω $X \sim Exp(\lambda)$ λ: άγνωστη

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Θέλουμε ΔΕ $(1-\alpha)$ για το μ από δείγμα μεγέθους n.

Έστω ότι <u>προσεγγιστικά χρησιμοποιούμε</u>:

$$L = \bar{X} - \frac{t_{\alpha/2, n-1}\, S}{\sqrt{n}}$$

$$U = \bar{X} + \frac{t_{\alpha/2, n-1}\, S}{\sqrt{n}}$$

P(κάλυψης του $\mu = \frac{1}{\lambda}$)

Γεννήτρια τυχαίων αριθμών

Γεννήτρια $\Rightarrow$ Αλγόριθμος $\rightarrow X \sim F$?

A) Δημιουργία ~~καθαρά~~ τυχαίων αριθμών

α) μέτρηση θερμοκρασίας από εσωτερικό του Η/Υ με αισθητήρα, } X

β) Ρολόι

B) Ψευδοτυχαίοι αριθμοί.

~~Γεννήτρια~~ Αλγόριθμος (f) $\longrightarrow$ ακολουθία τυχαίων αριθμών

$x_1, x_2, \ldots$ — ψευδοτυχαίοι ;!

x_0 : αρχική τιμή (δίνουμε εμείς)

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

$x_3 = f(x_2)$

1

?? Μπορώ να βρω μια f :

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ να περνάει οποιοδήποτε έλεγχο καλής προσαρμογής για την F?

(Αρκεί να βρω μια τέτοια f
που να παράγει $\boxed{X \sim \mathcal{U}(0,1)}$)

② Ψευδοτυχαίοι : πλεονέκτημα

αναπαραξιμότητα !!

X_0 : seed

R : $r(\ldots\ldots)$ | rnorm(n, ..παραμ)

κατανομή

rexp

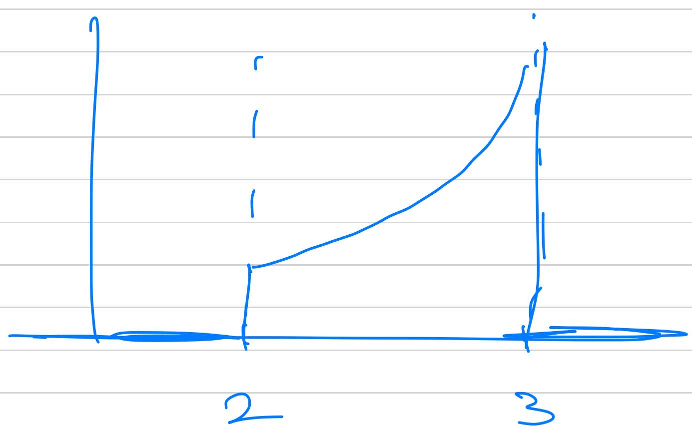
runif

rbinom

⋮

Συγκεκρ. κατανομές (όχι γενικές)

πχ. $X \sim F$, όπου $f(x) = kx^2$, $x \in [2,3]$



Ερώτημα: Έστω $X \sim \mathcal{U}(0,1)$

Θέλω g : $Y = g(X) \sim F$

Μέθοδος αντίστροφου μετασχηματισμού

Θεώρημα Πιθανοτήτων 1

Αν $X \sim F$ (συνεχής) $\left(F(x) = P(X \leq x) \right)$

Έστω $Y = F(X) \Rightarrow \boxed{Y \sim \mathcal{U}(0,1)}$

Αντίστροφο: Αν $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$

κ' θέτω $X = F^{-1}(Y)$ (λύνω ως προς Y)

τότε $X \sim F$

Πχ. 1 $X \sim Exp(\lambda)$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$Y = F(X) = 1 - e^{-\lambda X} \sim \mathcal{U}(0,1)$$

Λύνοντας ως προς X: $1 - e^{-\lambda X} = Y \Rightarrow$

$$e^{-\lambda X} = 1 - Y \Rightarrow -\lambda X = \ln(1-Y)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)}$$

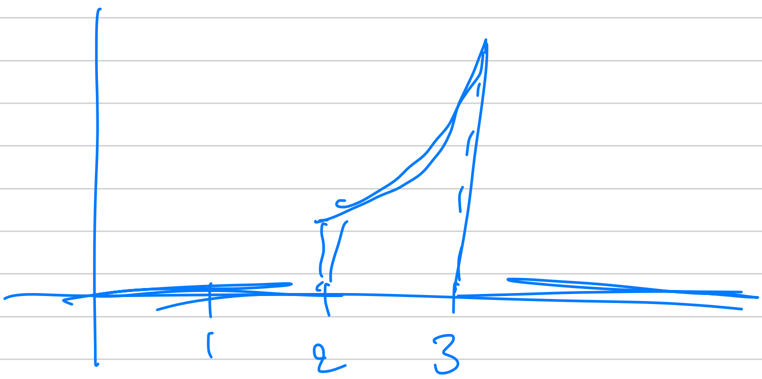
Αν $Y \sim \mathcal{U}(0,1) \Rightarrow X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y) \sim Exp(\lambda)$

---

2) $X \sim F \; : \; f(x) = kx^2 , \quad x \in [2,3]$

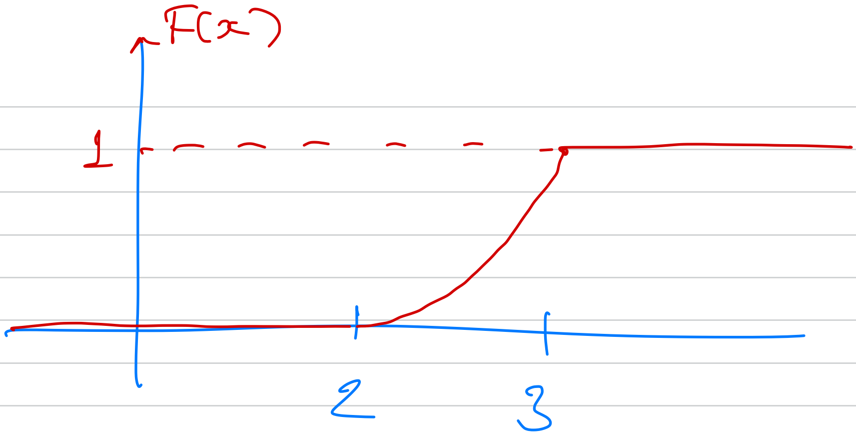
k : $\int_2^3 kx^2 = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow k = \frac{3}{19} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3}{19}x^2 , & 2 \le x \le 3 \\ 0 , & \text{διαφ.} \end{cases}$$



$$F(x) = \int_2^x f(y)dy = \int_2^x \frac{3}{19} \cdot y^2 dy =$$

$$= \frac{\cancel{3}}{19} \frac{y^3}{\cancel{3}}\Big|_2^x = \boxed{\frac{x^3-8}{19} = F(x)}$$



Αν $X \sim F \Rightarrow Y = F(X) = \frac{X^3 - 8}{19} \sim \mathcal{U}(0,1)$

Έστω $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$, λύνω ως προς X:

$$Y = \frac{X^3 - 8}{19} \Leftrightarrow X^3 = 19Y + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X = \sqrt[3]{19Y + 8}} \sim F$$

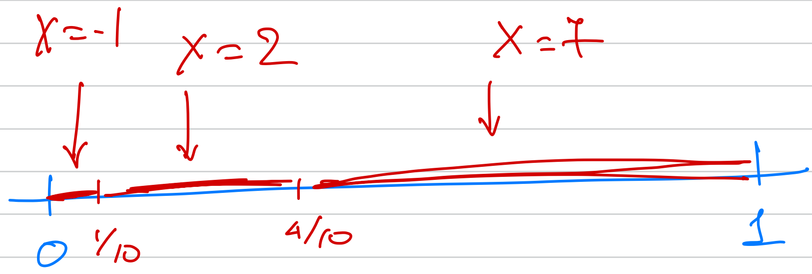
Αν η F δεν έχει κλειστό τύπο → ?

Αν έχει κλειστό τύπο μπορεί η $Y = F(X)$ να μην λύνεται αναλυτικά ως προς X

3 Διακριτές κατανομές

π.χ. $X = \begin{cases} -1 & \text{με πιθ. } 1/10 \\ 2 & \text{με πιθ. } 3/10 \\ 7 & \text{'' '' } 6/10 \end{cases}$

Γεννήτρια από X ??



αν $U \sim U(0,1)$

$$\left.\begin{aligned} P\left(0 \le U \le 1/10\right) &= \frac{1}{10} \\ P\left(1/10 \le U < 4/10\right) &= \frac{3}{10} \\ P\left(\frac{4}{10} \le U \le 1\right) &= \frac{6}{10} \end{aligned}\right\}$$

Γεννήτρια Πάρε $U \sim U(0,1)$

$$X = \begin{cases} -1 & \text{αν } U \le \frac{1}{10} \\ 2, & \text{αν } \frac{1}{10} \le U \le \frac{4}{10} \\ 7, & \text{αν } U > \frac{4}{10} \end{cases}$$

Bootstrap

Έστω ένα <u>πραγματικό</u> δείγμα $x_1, \dots, x_n$
από μια κατανομή (άγνωστη)

Έστω θ μια άγνωστη ποσότητα (παράμετρος)

$\hat{\theta}$ μια εκτιμήτρια του θ της οποίας
δεν γνωρίζουμε ούτε αν είναι αμερόληπτη
ούτε το MSE

Θέλουμε $MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$

Έστω δείγμα $x_1, x_2, \dots, x_n$ από F

π.χ. $\boxed{(1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7)}$ $(n = 11)$

<u>Εμπειρική κατανομή</u> $\hat{F}(x)$ = % παρατηρ. που $\leq x$

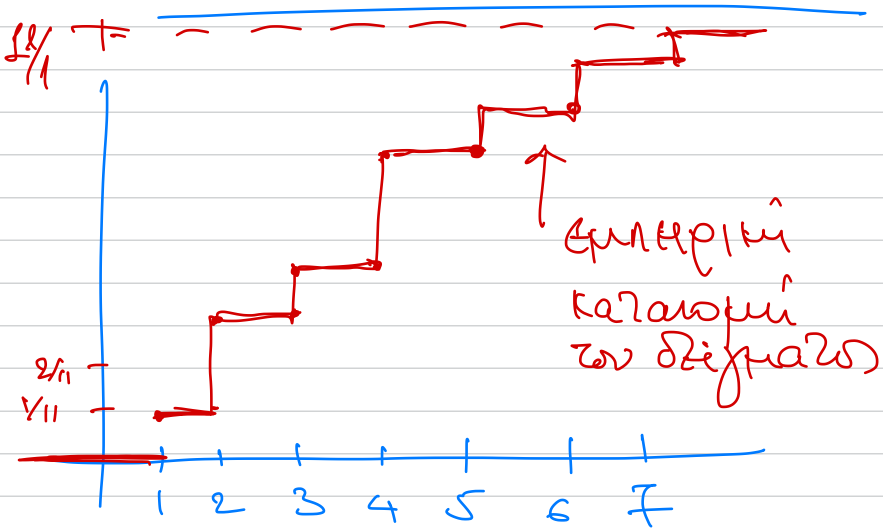
$\hat{F}(-2) = 0$

$\hat{F}(0) = 0$

$\hat{F}(1) = \frac{1}{11}$

$\hat{F}(1,5) = \frac{1}{11}$

$\hat{F}(2) = \frac{3}{11}$



$\hat{F}(7) = 1$, $\hat{F}(x) = 1 \quad \forall x \geq 7$

1) Θεωρία: Όταν $n \to \infty$ $\hat{F} \to F$ (ομοιόμορφα με πιθ. 1)

2) Πώς μπορούμε να προσομοιώσουμε την $\hat{F}$?

Bootstrap

Αν πάρω ένα τυχαίο δείγμα από το πραγματικό $(x_1, \dots, x_n)$ μεγέθους n με επανάθεση !!

(R : sample) → (replace = TRUE)

x = πραγματικό δείγμα

$\boxed{y = \text{sample}(x, n, \text{replace} = T)}$

$y \sim \hat{F} \approx F$ (για μεγάλο n)

Επαναλαμβάνουμε N φορές

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \to \hat{\theta}_1 \\ y_2 \to \hat{\theta}_2 \\ \vdots \qquad \hat{\theta}_N \end{array}\right\} \quad \frac{\hat{\theta}_1 + \dots + \hat{\theta}_N}{N} \text{ εκτίμηση της } E(\hat{\theta})$$

Από το πραγματικό $x \to \hat{\theta}$ συγκεκρ.

$|\hat{\theta} - E(\hat{\theta})|$ εκτίμηση για bias