

17-6-2025

① Γεννήτρια ποσοδιάστατης κανονικής κατανομής

$$X = (X_1, \dots, X_m) \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$$

$$\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$$

$$\Sigma_{m \times m} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \dots & \sigma_{mm}^2 \end{pmatrix}$$

συμμετρική) $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_{jj}^2)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$$

R: `library(MASS)`

`mvrnorm(n, mu, S)`

↓
αρ.
παρατηρ

↓
διάνυσμα
μέσων τιμών

↓
πίνακας
συνδιασπ.

Κάποιος φέρει δίνεται ο πίνακας συσχετίσεων

$$R = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1m} \\ p_{m1} & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij} = \text{Cor}(X_i, X_j) \quad -1 \leq p_{ij} \leq 1$$

$$p_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

Αν δίνεται κ' το διάνυσμα των τυπικών αποκλίσεων

$$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$$

Τότε από R κ' $\underline{\sigma} \Rightarrow$

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_i \sigma_j p_{ij}$$

$$\sigma_{ii}^2 = \sigma_i^2$$

$$\Sigma = D R D$$

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_m & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Σ_{20} R:

Esau R onivakus ovotet.

$d = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ Siavutpa un. anokf.

$$D = \text{diag}(d) : D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$S = D \% * \% R \% * \% D$$

givipao
nivakun.

② Προσομοίωση Μαρκοβιανών Αλυσίδων

$X_1, X_2, \dots$ αλτμ. (ακολουθία)

- ① π.χ. X_j = αποτέλεσμα j -πύσης φαριού
αλτμ. : ανεξάρτητες, ισόνομες (ίδια κατανομή)
-

- ② X_j = θερμοκρασία στην κρημνή σελήνη j
(ανά σταθερά χρονικά διαστήματα)

X_1	X_2	X_3
↓	↓	↓
18^{00}	18^{05}	18^{10}

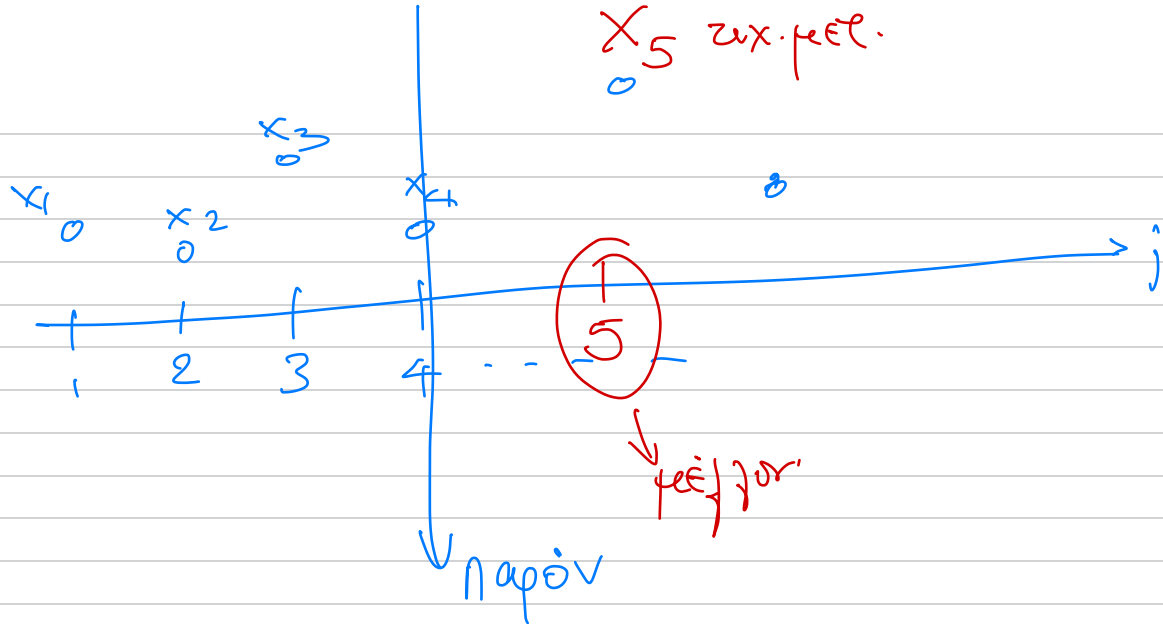
$(X_1, X_2, \dots)$ στοχαστική διαδικασία

X_j : κατάσταση συστήματος
στην περίοδο j

Γενικά η κατανομή της X_2 εξαρτάται
από την τιμή της X_1

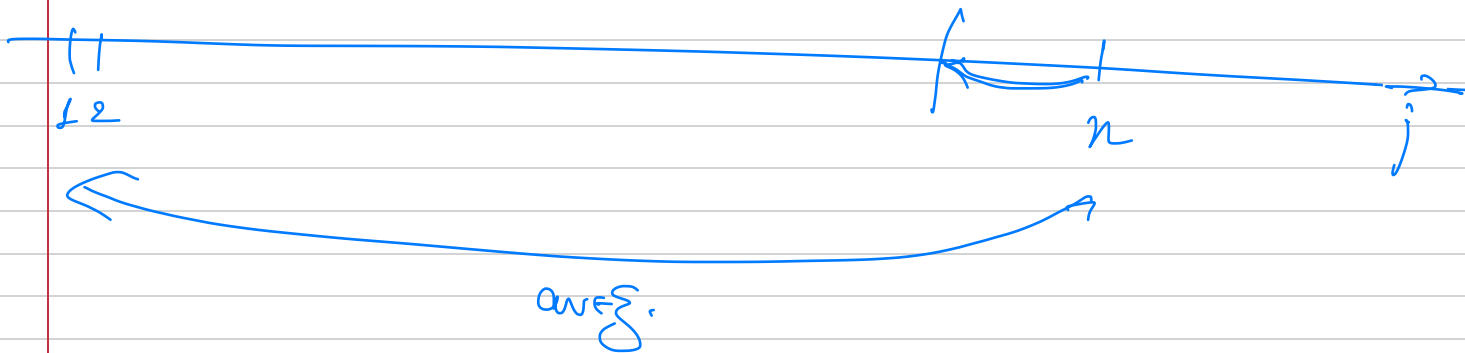
Η κατανομή της X_3 από τις X_1, X_2

Γενικά η κατανομή της X_n εξαρτάται από $X_1, \dots, X_{n-1}$



$\dot{t}$: μέρα.

Η X_{1000} εξαρτάται (συνεπείκειται)
μέσω X_1 ?



Μαρκοβιανή περίπτωση

Η κατανομή της X_n εξαρτάται
μόνο από την X_{n-1} (μνήμη
μιας περιόδου)

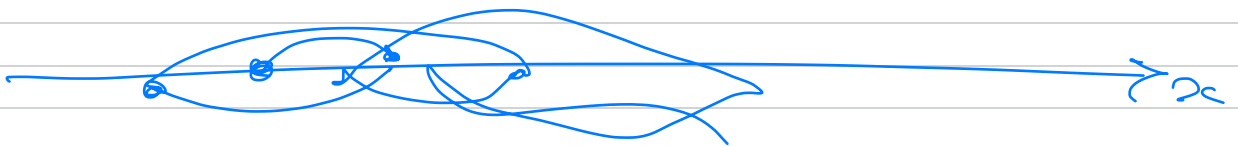
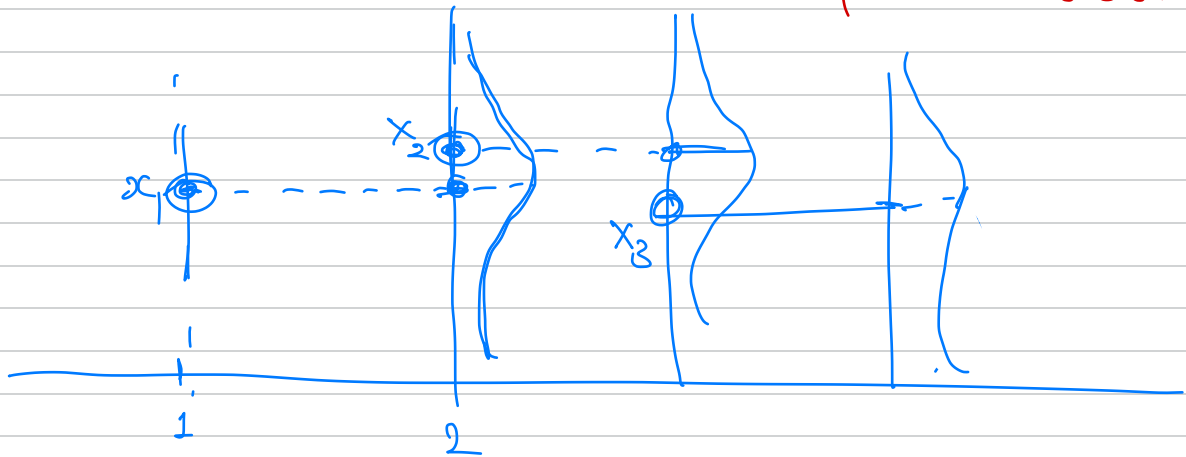
Παράδ. 1

$$X_n \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

Αν $X_n = x$ τότε

$$X_{n+1} \sim \mathcal{N}(x, 1)$$

Μαρκόβιαν διαδικασία



Παράδ. 2

X_n = κατάσταση ατόμου στο κάπνισμα

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{καθάρων} \\ 1 & \text{λίγο} \\ 2 & \text{μέτρια} \\ 3 & \text{πολύ} \end{cases}$$

διακρίνεται τεχ. μεταβλ.

$$P_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

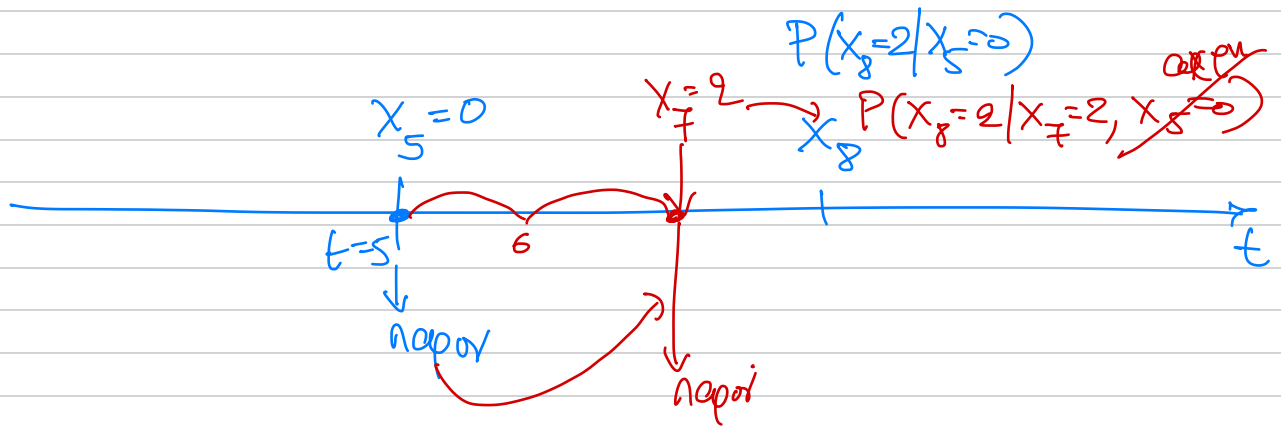
Πιδ. μεταβάσεων ενός βήματος.

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

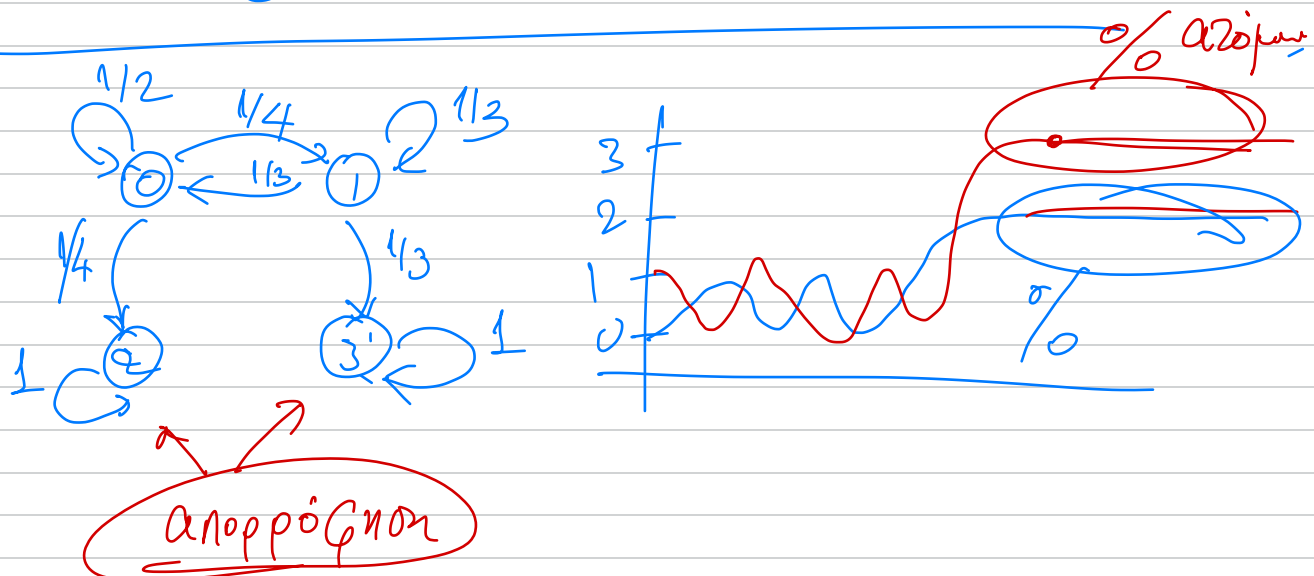
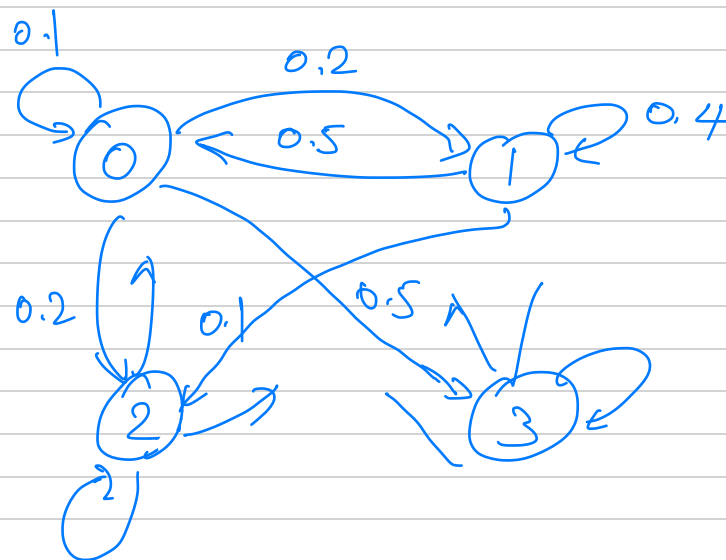
αθρ. γραμμών = 1

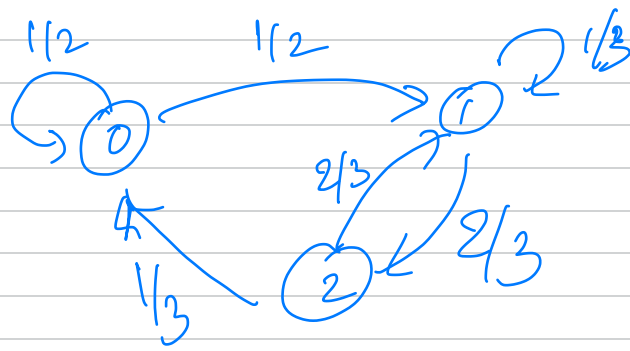
$S = \{0, 1, 2, 3\}$ χώρος καταστάσεων.

Μαρίνο Μαρκovιανή Αλυσίδα (Markov Chain)



Εστω $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$

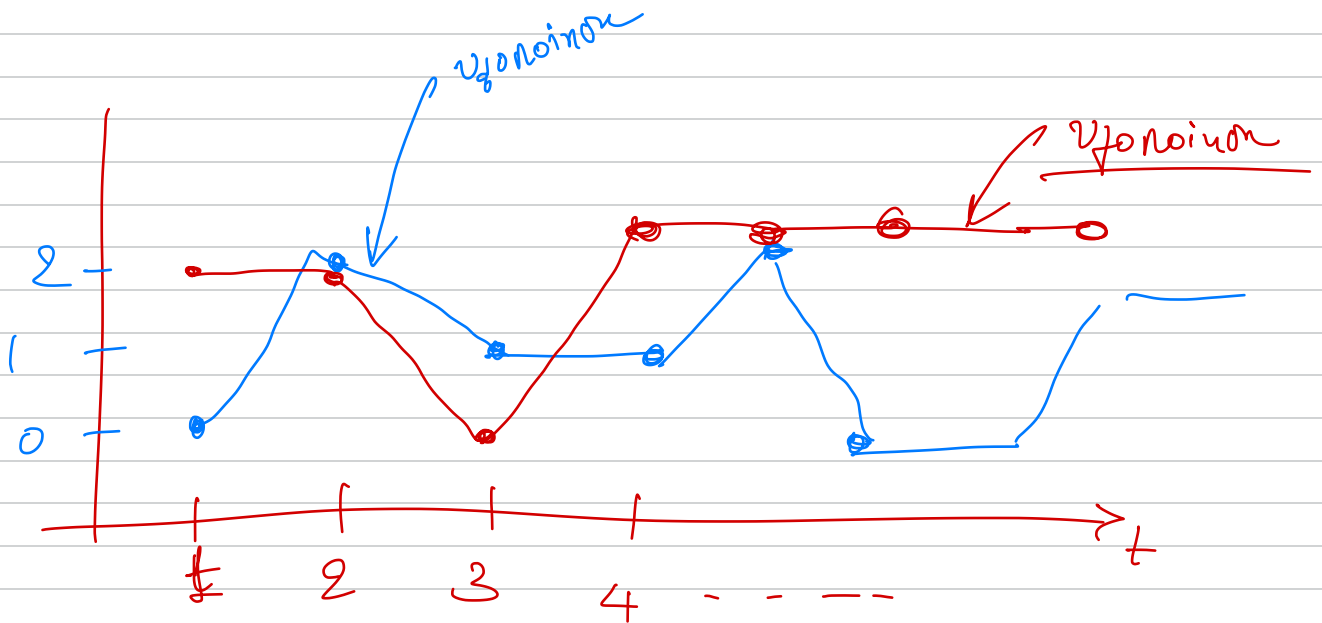




οφες οι καταστάσεις
επικοινωνούν

αδελφία
 πλοήγηση
 αμυνία

Τι ποσότητα χρόνου βρίσκεται στο 0, 1, ή 2?



Προσομοίωση Μακροβίωσης αλυσίδας
 με δεδομένο πίνακα P , αρχική κατάσταση
 για συγκεκρι. αρ. επηρώσεων.

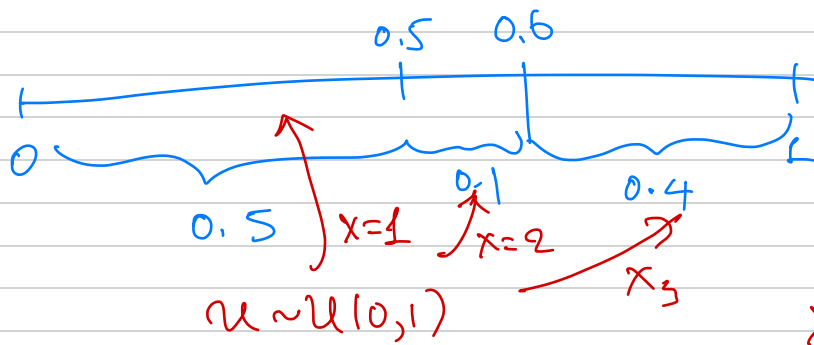
R function $\left(P, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{αρχ.} \\ \text{κατάσταση}}}{x_1}, T \right) \Rightarrow \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_T)}_{\substack{\text{κύρια} \\ \text{υπονοούν.}}}$

ορίσματα

Προσφοίωση διακριτών Τ.μ. Π.Χ. $P(X=1) = 0.5$

$$P(X=2) = 0.1$$

$$P(X=3) = 0.4$$



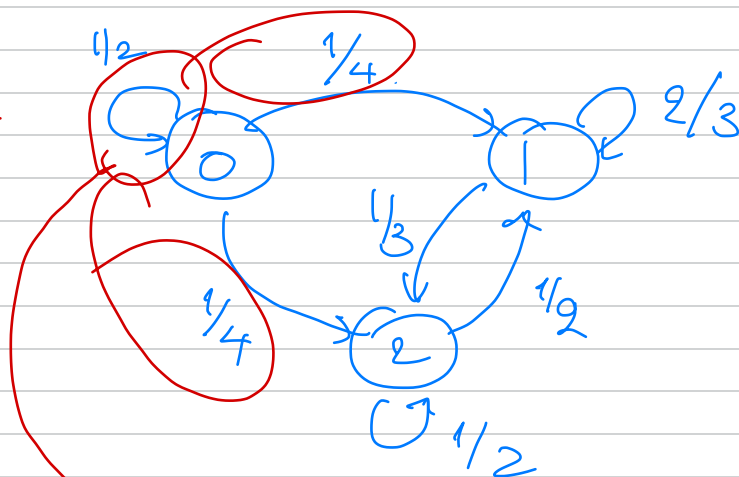
$$X = \begin{cases} 1 & \text{αν } U \leq 0.5 \\ 2 & \text{αν } 0.5 < U \leq 0.6 \\ 3 & \text{αν } U > 0.6 \end{cases}$$

ισοδυναμεία σε $\mathbb{R}$

$$\text{sample}(c(1,2,3), 1, \text{prob} = c(0.5, 0.1, 0.4))$$

Παράδειγμα 2 προσφοίωσης Markov Chain

Example 1

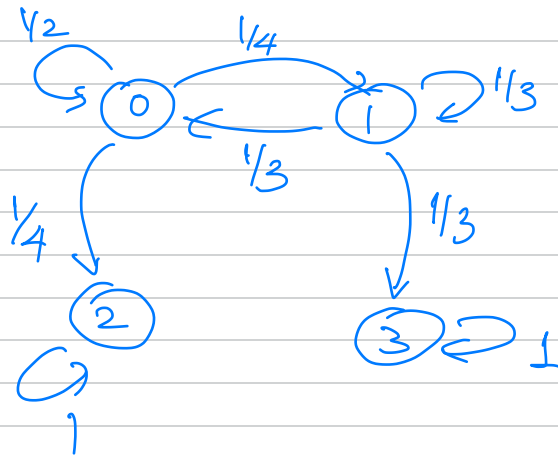


$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$S = \text{περίοδος σύνολο.}$

n.x. $S = \{-2, 7, 4, 0\}$

Example 2



$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

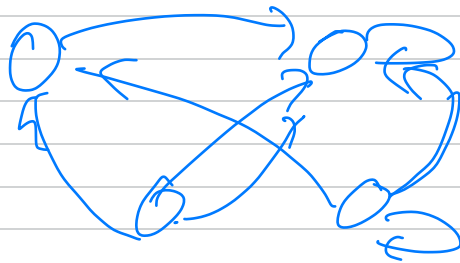
Μέθοδος Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

Έστω X τυχ. διακρ. με τιμές $X \in S$.

κ' πιθανότητες $f(j) = P(X=j)$, $j \in S$.

Εναλλακτικός τρόπος για να δημιουργήσω
παρατηρήσεις από κατανομή f .

- ① Παίρνω μια Markovian αλυσίδα με χώρο
κλωροάσεων S .



κ' αυθαίρετα πιδ. ενός βήματος P_{ij}
αρκεί να είναι αδιαχώριση

(π.χ. $P_{ij} = \frac{1}{|S|} \quad \forall i, j$)