20/6/2025 Markov Chain Monte Carlo.

X τυχ. μεταβλητή με γνωστή κατανομή
κ' θέλω να κατασκευάσω γεννήτρια τυχ.
αριθμών από αυτή

X μπορεί να είναι και διανυσματική $(X_1, X_2, \dots X_p)$

Η X : αν διακριτή $\quad f(x) = P(X=x)$ σμπ

ή αν συνεχής $\quad f(x) =$ σππ της X
(από κοινού)

δίνεται

Θεωρούμε μια μαρκοβιανή διαδικασία
με χώρο καταστάσεων τις δυνατές τιμές της X.

Έστω οποιοσδήποτε μηχανισμός πιθανοτήτων μετάβασης

$$q(x,y) = P[X_{n+1}=y \mid X_n=x] \quad \text{αν } X \text{ διακριτή}$$

ή $\quad q(x,y)$: σππ της $X_{n+1} \mid X_n=x \quad g(y|x)$

Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε
$q(x,y) = q(y)$ (ανεξ. του x)

Αλγόριθμος MCMC

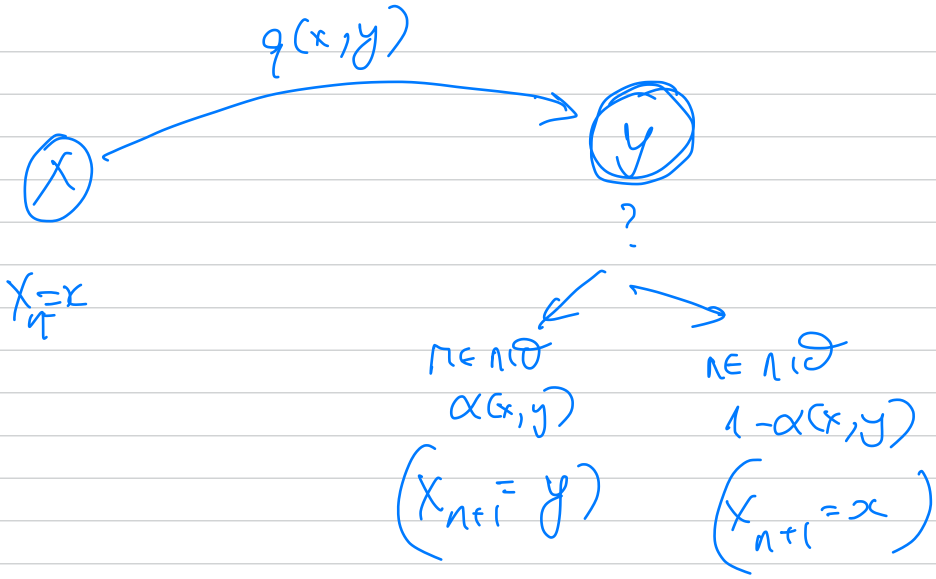
Ορίζω μια νέα Μαρκοβιανή διαδικασία ως εξής:

Αν η κατάσταση την στιγ. n είναι $X_n = x$ τότε:

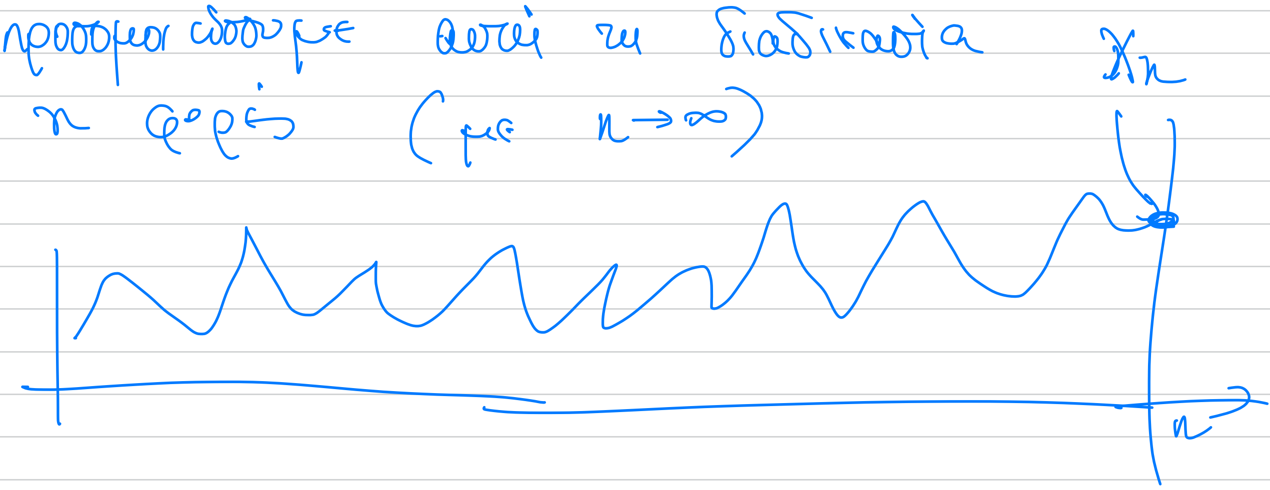
1) Προσομοιώνω μια νέα κατάσταση Y (υποψήφια X_{n+1}) σύμφωνα με την $q(x,y)$

2) Έστω $a(x,y) = \min\left\{\frac{f(y)\, q(y,x)}{f(x)\, q(x,y)}, 1\right\}$

3) Η νέα υποψήφια κατάσταση y γίνεται δεκτή με πιθανότητα $a(x,y)$
οπότε $X_{n+1} = y$
ή με πιθανότητα $1-a(x,y)$ απορρίπτεται κ' $X_{n+1} = x$ (παραμένει στο x)



Αν προσομοιώσουμε αυτή τη διαδικασία n φορές (με $n \to \infty$)

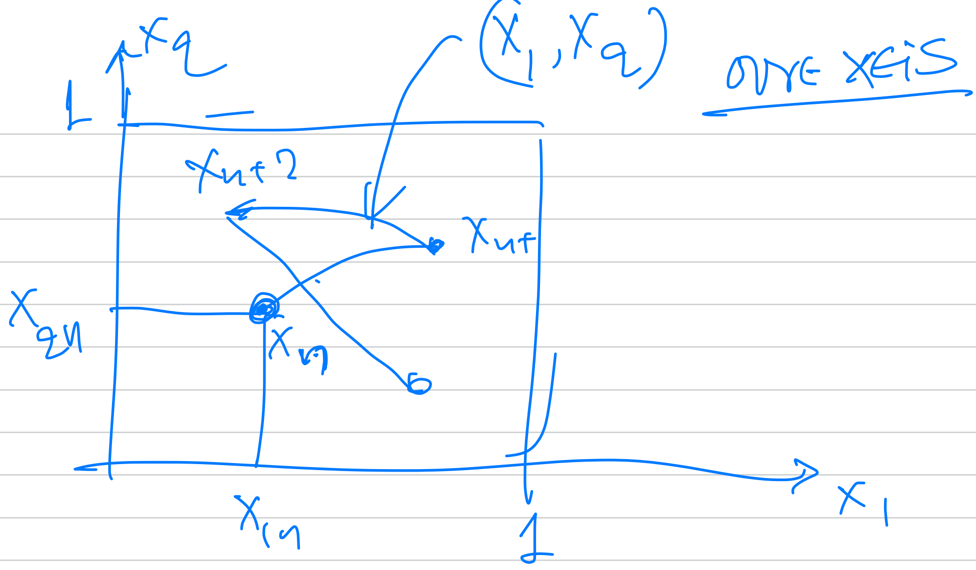


η X_n ακολουθεί οριακά την κατανομή f.

Παράδειγμα

Έστω $X = (X_1, X_2)$

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x_1^2 + x_2^2), & \text{αν } 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$



Ορίζω μια Μαρκοβιανή διαδικασία

$X_n = (X_{1n}, X_{2n})$

$x = (x_1, x_2)$

$y = (y_1, y_2)$

$$q(x,y) = q(y) = \begin{cases} K (=1) & 0 \le y_1 < 1, \ 0 \le y_2 < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

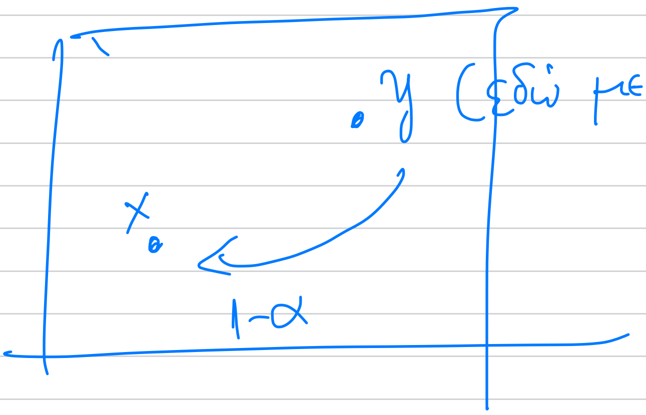
(διδ. Ομοιόμορφη)

[Γεννήτρια για q: $y_1 = \text{runif}(1, 0, 1)$
$y_2 = \text{runif}(1, 0, 1)$
$y = c(y_1, y_2)$]

ισοδύναμα $y = \text{runif}(2, 0, 1)$

$$a(x,y) = \min\left\{ \frac{f(y) \cdot \cancel{q(x)}}{f(x) \cdot \cancel{q(y)}} = \frac{\cancel{c} \cdot (y_1^2 + y_2^2) \cdot \cancel{K}}{\cancel{c} \cdot (x_1^2 + x_2^2) \cdot \cancel{K}}, 1 \right\}$$

$$a(x,y) = \min\left\{ \frac{y_1^2 + y_2^2}{x_1^2 + x_2^2},\ 1 \right\}$$

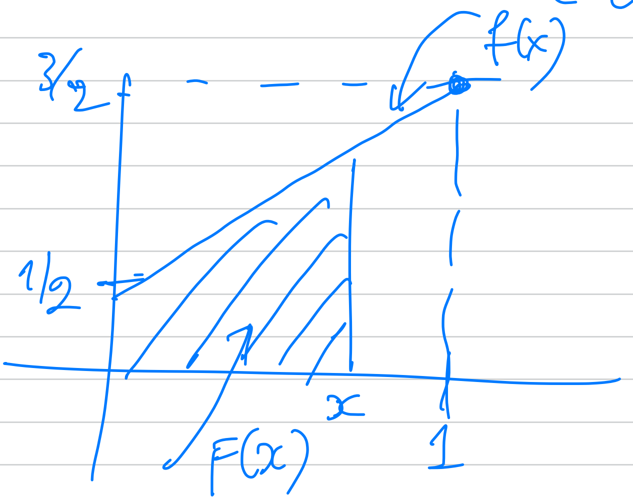


(εδώ με πιθ $\alpha(x,y)$)

Επαναληπτικές Ασκήσεις
(Σειρά eclass)

Πρ.1 X συνεχής τμ. σππ.

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Πρέπει να βρούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x)=P(X\le x)$$

$$F(x)=\int_0^x f(y)\,dy=\int_0^x \left(y+\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x+\left.\frac{1}{2}y\right|_0^x=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}=\frac{x^2+x}{2}$$

$$\left(F(0)=0,\quad F(1)=\frac{1+1}{2}=1\right)$$

Γεννήτρια αντίστροφου μετ/σμού:

1) Δημιουργούμε μια $U \sim U(0,1)$ (runif)

2) Λύνουμε $F(X) = U$ ως προς X

Εδώ $F(x) = \frac{x^2+x}{2} \Rightarrow F(X) = \frac{X^2+X}{2}$

$$\frac{X^2+X}{2} = U \Leftrightarrow X^2 + X = 2U \Leftrightarrow \underline{X^2+X-2U=0}$$

$$\Delta = (\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 1 + 8U > 0$$

$$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8U}}{2}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{1+8U}}{2} \text{ απορ. } (<0)$$

$$= \frac{-1+\sqrt{1+8U}}{2} = \text{δεκτή}$$

Τελικά

$$\boxed{X = \frac{\sqrt{8U+1}-1}{2} \quad \text{όπου } U \sim U(0,1)}$$

γεννήτρια

Πρόβλημα 2

Έστω N = αριθμός ατυχημάτων σε ένα έτος

$$N \sim \text{Binomial}(500,\ 0.05)$$ ← (rbinom)

Αν $N = n$ τότε τα ποσά αποζημιώσεων

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. ισόνομες τ.μ.

$$X_1 \sim \text{Exp}(1/600)$$

Η συνολική αποζ. $S = X_1 + \dots + X_n$

$$\theta = P(S > 35.000)$$

Σε κάθε επανάληψη:

1) Δημ. $N = n$ από $\text{Bin}(500,\ 0.05)$
2) Δημιουργία n ανεξ. εκθετικών $X = (X_1, \dots, X_n)$ (rexp)
3) $S = \text{sum}(X)$
4) $Z = 1(S > 35000) = \begin{cases} 1, & S > 35000 \\ 0, & S \le 35000 \end{cases}$

return(Z)

inscerone give

Προσομοιώνουμε K φορές $(k >>)$

$\Rightarrow Z_1, \dots, Z_k \in \{0,1\}$

$\hat{\theta} = \overline{Z}_k$

Πρόβλημα 3

Έστω X ηλικία ατόμου $X \sim \Gamma(5, 0,1)$

Y αρτηρ. πίεση

$Y|X=x \sim N\left(9+\frac{1}{12}x, (0{,}04x)^2\right)$

$E(Y|X=x) = 9+\frac{1}{12}x = b_0+b_1x$, $b_0=9$, $b_1=\frac{1}{12}$

1) $\theta_1 = P(Y>15)$

2) $\theta_2 = P(Y>15 \mid X \geq 65)$

Εκτίμηση μέσω προσομοίωσης

```
person-simulation = function( )
    X = rgamma( )        (age)
    Y ~ rnorm(1, 9+1/12 X, 0,04 X)
    return (c(X,Y))
```

1) Προσομοίωση N ατόμων

$$\left.\begin{matrix} X_1, \dots, X_N \\ Y_1, \dots, Y_N \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\max(Y_j - 15, 0)}_{\text{υπέρβαση άνω του 15}}$$

2) $\theta_2 = E(Y \mid X \geq 65)$

a) Από τα παραπάνω K άτομα επιλέγουμε μόνο εκείνα για τα οποία $X \geq 65$

Έστω K_1 άτομα

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{K_1} \sum_{j=1}^{K_1} \max(Y_j - 15, 0)$$

b) Για να επιλέξω K άτομα με $X \geq 65$ προσομοιώνουμε άτομα μέχρι να έχουν "δημιουργηθεί" <u>K άτομα</u> με $X \geq 65$

Κατανομή $X \sim \Gamma(\underbrace{\alpha}_{\text{shape}}, \underbrace{\beta}_{\text{rate}})$ $\qquad E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$

R : rgamma(n, shape, rate)

Προσέγγιση ολοκληρωμάτων

$$\theta = \int_a^b g(x)\,dx \quad ?$$

$g(x)$ αυθαίρετη συνάρτηση

Έστω $X \sim \mathcal{U}(a,b)$

σππ: $\underbrace{f(x)} = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$.

$$\theta = \int_a^b g(x)\,(b-a)\,\frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= (b-a)\int_a^b g(x)\,\underbrace{f(x)\,dx} =$$

$$= (b-a)\underbrace{E[g(X)]}_{\text{Εκτίμηση μέσω προσομοίωσης}}$$

Δημιουργώ $X_1, \ldots, X_N \sim \mathcal{U}(a,b)$

$G_1, \ldots, G_N$: $G_j = g(X_j)$

$$\hat{\theta} = (b-a)\,\overline{G}_N$$

← προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\theta = \int_0^\infty g(x)\,dx$$

$$X \sim Exp(1) \qquad 0 \le X < \infty$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 1 \cdot e^{-1x} = e^{-x}, \quad x \ge 0$$

$$\theta = \int_0^\infty g(x) \cdot e^{x} e^{-x}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty g(x) e^{x} \cdot f(x)\,dx =$$

$$= E\underbrace{\left[g(X) \cdot e^{X} \right]}_{Y}$$

Δημιουργώ $X_1, \dots, X_N \sim Exp(1)$

$$Y_1, \dots, Y_N$$

$$Y_j = g(X_j) \cdot e^{X_j}$$

$$\hat{\theta} = \overline{Y_N}$$ ⟸ προσέγγιση του θ.