Συγκέντρωση του Μέτρου – Φυλλάδιο 1

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του φυλλαδίου. Προθεσμία: 1 Νοεμβρίου 2016

1. Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu_B(tM) \leqslant a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$e^{-|x|^2/2}\gamma_n(A) \leqslant \gamma_n(A+x) \leqslant \gamma_n(A).$$

3. Έστω $f, g, h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h(\sqrt{rs}) \geqslant \sqrt{f(r)} \cdot \sqrt{g(s)}$$

για κάθε $r, s > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty h(x)dx \geqslant \left(\int_0^\infty f(x)dx \cdot \int_0^\infty g(x)dx\right)^{1/2}.$$

4. Έστω $f, g, h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$h\left(\frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right) \geqslant f(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}}$$

για κάθε $r, s > 0$. Θεωρούμε $p > 0$ και θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^\infty f(r)r^{p-1}\,dr\right)^{1/p}, \\ B &= \left(\int_0^\infty g(r)r^{p-1}\,dr\right)^{1/p}, \\ C &= \left(\int_0^\infty h(r)r^{p-1}\,dr\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι

$$C \geqslant \frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}}.$$

5. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και $\varphi : (X, d) \to (Y, \sigma)$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά 1. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας μ_φ στην $\mathcal{B}(Y)$ που ορίζεται από την

$$\mu_\varphi(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{B}(Y).$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\alpha_{\mu_\varphi}(t) \leqslant \alpha_\mu(t).$$

6. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$ και για κάποιο $t>0$ ισχύει $\alpha_\mu(t)<\varepsilon$. Αποδείξτε ότι: αν $A\in\mathcal{B}(X)$ και $\mu(A)\geqslant\varepsilon$, τότε $1-\mu(A_{t+r})\leqslant\alpha_\mu(r)$ για κάθε $r>0$.

7. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν $F:(X,d)\to\mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση, τότε

$$(\mu\otimes\mu)\left(\{(x,y)\in X\times X : |F(x)-F(y)|\geqslant t\}\right)\leqslant 2\alpha_\mu(t/2)$$

για κάθε $t>0$.
(β) Αν $A,B\in\mathcal{B}(X)$ και $\mathrm{dist}(A,B)=\delta>0$, τότε

$$\mu(A)\mu(B)\leqslant 4\alpha_\mu(\delta/2).$$

8. Σταθεροποιούμε έναν (μικρό) θετικό αριθμό κ. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Ορίζουμε τη *μερική διάμετρο* του (X,d) ως προς το μ ως εξής:

$$PD_\mu(X,d):=\inf\Big\{\mathrm{diam}(A) : A\in\mathcal{B}(X), \mu(A)\geqslant 1-\kappa\Big\}.$$

Στη συνέχεια, για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $F:(X,d)\to\mathbb{R}$ θεωρούμε το μέτρο μ_F που ορίζεται στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$ μέσω της

$$\mu_F(A)=\mu(F^{-1}(A)),\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και ορίζουμε την *παρατηρήσιμη διάμετρο* $OD_\mu(X,d)$ θέτοντας

$$OD_\mu(X,d)=\sup\{PD_{\mu_F}(\mathbb{R}) : \text{η } F:(X,d)\to\mathbb{R} \text{ είναι } 1-\mathrm{Lipschitz}\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$OD_\mu(X,d)\leqslant 2\alpha_\mu^{-1}(\kappa/2).$$

9. Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι $\alpha_\mu(t)\leqslant Ce^{-ct^2}$ για κάποιες σταθερές $C,c>0$ και για κάθε $t>0$. Αποδείξτε ότι (αν η σταθερά $\kappa>0$ της προηγούμενης άσκησης είναι αρκετά μικρή σε σχέση με τις C,c) τότε

$$OD_\mu(X,d)\leqslant 2\sqrt{\frac{1}{c}\,\ln\frac{2C}{\kappa}}.$$

Εκτιμήστε τις

$$OD_\sigma(S^{n-1}),\qquad OD_{\gamma_n}(\mathbb{R}^n),\qquad OD_{\mu_n}(E_2^n).$$

10. (α) Για κάθε $u\in S^{n-1}$ και για κάθε $\varepsilon\in(0,1)$ ορίζουμε $C(u,\varepsilon)=\{\theta\in S^{n-1} : \langle u,\theta\rangle\geqslant\varepsilon\}$. Αποδείξτε ότι

$$\sigma(C(u,\varepsilon))\leqslant\exp(-\varepsilon^2 n/2).$$

(β) Για κάθε $u\in S^{n-1}$ και για κάθε $\varepsilon\in(0,1)$ ορίζουμε $B(u,\varepsilon)=\{\theta\in S^{n-1} : |\theta-u|\leqslant\varepsilon\}$. Αποδείξτε ότι

$$\sigma(B(u,\varepsilon))\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2}\right)^n\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n.$$

(γ) Έστω $v_1,\dots,v_m\in\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K=\{y\in\mathbb{R}^n : |\langle y,v_j\rangle|\leqslant 1 \text{ για κάθε } j=1,\dots,m\}$$

ικανοποιεί την $B_2^n\subseteq K\subseteq\alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha>1$. Δείξτε ότι $m\geqslant\exp(n/(2\alpha^2))$.