Συγκέντρωση του Μέτρου – Φυλλάδιο 2

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του φυλλαδίου. Προθεσμία: 15 Νοεμβρίου 2016

1. Έστω $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ η πυκνότητα μιας τυπικής τυχαίας μεταβλητής $X \sim N(0,1)$. Αποδείξτε ότι

$$\phi'(t) + t\phi(t) = 0$$

και χρησιμοποιώντας αυτή την ταυτότητα αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right)\phi(t) \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds \leqslant \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right)\phi(t)$$

για κάθε $t > 0$.

2. Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και έστω $t > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\inf\left\{\frac{\mathbb{E}(X^k)}{t^k} : k = 0, 1, 2, \ldots\right\} \leqslant \inf\left\{\frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda t}} : \lambda > 0\right\}.$$

3. Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(X) = 0$ και $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = 0$. Αν $\psi_X(\lambda) = \log(\mathbb{E}(e^{\lambda X}))$, αποδείξτε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi_X''(\lambda) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}\right).$$

4. Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mathbb{E}(X) = 0$ και $\sigma^2 := \mathbb{E}(X^2)$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{E}(X^k) \leqslant \frac{1}{2} k! \sigma^2 b^{k-2}$$

για κάθε $k \geqslant 3$, όπου b είναι μια θετική σταθερά. Αποδείξτε ότι

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leqslant e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2(1-b|\lambda|)}}$$

για κάθε $|\lambda| < \frac{1}{b}$, και συμπεράνατε ότι

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant 2e^{-\frac{t^2}{2(\sigma^2 + bt)}}$$

για κάθε $t > 0$.

5. Έστω $X_1, \ldots, X_N$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές ($X_i \sim N(0,1)$). Αποδείξτε ότι:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2 - 1\right| \geqslant t\right) \leqslant 2e^{-t^2 N/8}$$

για κάθε $0 < t < 1$.

6. Μια συνάρτηση $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ λέγεται συνάρτηση Orlicz αν είναι κυρτή, αύξουσα με $\psi(0) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = +\infty$. Λέμε ότι μια πραγματική τυχαία μεταβλητή X στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ανήκει στην κλάση $L^\psi(\mu)$ αν υπάρχει $\varrho > 0$ τέτοιος ώστε $\mathbb{E}(\psi(|X|/\varrho)) < \infty$. Αποδείξτε ότι η κλάση $L^\psi(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος και γίνεται χώρος με νόρμα αν θέσουμε

$$\|X\|_\psi = \inf\{\varrho > 0 : \mathbb{E}(\psi(|X|/\varrho)) \leqslant 1\}.$$

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση Orlicz $\psi_1(t) = e^t - 1$. Έστω X τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε: $\|X\|_{\psi_1} \leqslant \alpha$.

(β) Υπάρχει $\beta > 0$ ώστε: για κάθε $p \geqslant 1$ ισχύει $\|X\|_p \leqslant \beta p$.

(γ) Υπάρχει $\gamma > 0$ ώστε: για κάθε $t > 0$ ισχύει $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t/\gamma}$.

Επιπλέον, $\beta \leqslant c_1\alpha$, $\gamma \leqslant c_2\beta$, $\alpha \leqslant c_3\gamma$, όπου $c_i > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

8. Έστω X υποκανονική τυχαία μεταβλητή. Αποδείξτε ότι η $X - \mathbb{E}(X)$ είναι υποκανονική και

$$\|X - \mathbb{E}(X)\|_{\psi_2} \leqslant c_2 \|X\|_{\psi_2},$$

όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Ομοίως, έστω X υποεκθετική τυχαία μεταβλητή. Αποδείξτε ότι η $X - \mathbb{E}(X)$ είναι υποεκθετική και

$$\|X - \mathbb{E}(X)\|_{\psi_1} \leqslant c_1 \|X\|_{\psi_1},$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Ποιές είναι οι καλύτερες τιμές που μπορείτε να βρείτε για τις σταθερές c_2 και c_1;

9. Έστω $Q_n = [-1,1]^n$ ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ανεξάρτητες συμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $p \geqslant 1$ να συγκρίνετε τις ποσότητες

$$\left(\frac{1}{|Q_n|} \int_{Q_n} \Big| \sum_{i=1}^n a_i x_i \Big|^p dx \right)^{1/p}$$

και

$$\left(\mathbb{E} \Big| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \Big|^p \right)^{1/p} = \left(\int_{E_2^n} \Big| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \Big|^p d\mu_n(\varepsilon) \right)^{1/p}.$$

10. Έστω $p \geqslant 2$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E} \Big| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \Big|^p \right)^{1/p} \leqslant \sum_{i \leqslant p} a_i^* + c\sqrt{p} \left(\sum_{i > p} (a_i^*)^2 \right)^{1/2},$$

όπου $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη της n-άδας $(|a_1|, \ldots, |a_n|)$.

11. Έστω $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ανεξάρτητες συμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Για κάθε φραγμένο μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ αποδείξτε ότι

$$\sup_{a \in A} \mathrm{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right) = \sup_{a \in A} \sum_{i=1}^n a_i^2$$

όπου $a = (a_1, \ldots, a_n)$, και

$$\mathrm{Var} \left(\sup_{a \in A} \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right) \leqslant 4 \sup_{a \in A} \sum_{i=1}^n a_i^2.$$