Συγκέντρωση του Μέτρου – Φυλλάδιο 3

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις του φυλλαδίου. Προθεσμία: 13 Δεκεμβρίου 2016

1. Θεωρούμε n δοχεία, τα οποία συμβολίζουμε με $1, \dots, n$ και τοποθετούμε m βώλους στα δοχεία επιλέγοντας τυχαία και ανεξάρτητα, με πιθανότητα $\frac{1}{n}$, ένα δοχείο για κάθε βώλο. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που δίνει το πλήθος των δοχείων που μένουν κενά, τότε

$$\mathbb{E}(X) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant t\sqrt{m}) \leqslant 2e^{-t^2/2}.$$

2. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $x_1, \dots, x_n \in X$ με $\|x_i\| \leqslant 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$X = \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|,$$

όπου $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ είναι συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant t\sqrt{n}) \leqslant 2e^{-t^2/2}.$$

3. Έστω $Y_1, \dots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, P)$ με τιμές σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει $M_i \in \mathbb{R}$ ώστε $\|Y_i\| \leqslant M_i$. Αν $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, δείξτε ότι

$$P(\{\|S_n\| \geqslant \mathbb{E}(\|S_n\|) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n M_i^2$.

4. Έστω (X_i, μ_i) χώροι πιθανότητας $(i = 1, \dots, n)$ και έστω $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ το μέτρο γινόμενο στον $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Έστω $c_1, \dots, c_n > 0$ και $F : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{x_i \neq y_i}$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι

$$\mu(\{F \geqslant \mathbb{E}_\mu(F) + t\}) \leqslant e^{-t^2/(2D^2)}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $D^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$.

5. Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) έχει μήκος ℓ αν ο ℓ είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός με την εξής ιδιότητα: μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία $\{X\} = X^0, X^1, \dots, X^n = \{\{x\} : x \in X\}$ διαμερίσεων του X (αύξουσα σημαίνει ότι η X^i είναι εκλέπτυνση της X^{i-1}) και θετικούς πραγματικούς αριθμούς $a_1, \dots, a_n$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \ell^2$ ώστε, αν $X^i = \{A_j^i\}_{1 \leqslant j \leqslant m_i}$, τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$, και για κάθε $p = 1, \dots, m_{i-1}$ και j, k με $A_j^i, A_k^i \subset A_p^{i-1}$, υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : A_j^i \to A_k^i$ ώστε $d(x, \phi(x)) \leqslant a_i$ για κάθε $x \in A_j^i$.

(α) Δείξτε ότι το μήκος ℓ του (X, d) είναι μικρότερο ή ίσο της διαμέτρου $\mathrm{diam}(X)$ του X.

(β) Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας με μήκος ℓ. Δείξτε ότι για κάθε 1-Lipschitz συνεχή συνάρτηση $F : X \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mu(\{F \geqslant \mathbb{E}_\mu(f) + t\}) \leqslant e^{-t^2/2\ell^2}.$$

Ειδικότερα, για κάθε $t > 0$,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant e^{-t^2/8\ell^2}.$$

6. Έστω $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με $\|F\|_{\mathrm{Lip}}\leqslant \alpha$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$|F(x)-F(y)|\leqslant b\|x-y\|_1$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, για κάθε $t>0$,

$$\xi_n(\{F\geqslant M+t\})\leqslant C\exp\left(-\frac{1}{C}\min\left(\frac{t}{b},\frac{t^2}{a^2}\right)\right),$$

όπου ξ_n είναι το συμμετρικό εκθετικό μέτρο γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και M είναι είτε ένας μέσος Lévy της F ή η μέση τιμή $\mathbb{E}(f)$ της f.

7. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα e^{-V}, όπου $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ ώστε

$$V(x)+V(y)-2V\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant w(x-y)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε $f:\mathbb{R}^n\to(-\infty,\infty]$ με $\int e^{-f}d\mu\in(0,\infty)$, ισχύει

$$\int e^{f\Box w}d\mu\cdot\int e^{-f}d\mu\leqslant 1.$$

8. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα e^{-V}, όπου $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $c>0$, $p\geqslant 1$ και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$V(x)+V(y)-2V\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant \frac{c}{2p}\|x-y\|^p$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\int e^{\frac{c}{2p}d(x,A)^p}d\mu(x)\leqslant\frac{1}{\mu(A)},$$

όπου $d(x,A)=\inf\{\|x-y\|:y\in A\}$. Συνεπώς, αν $\mu(A)\geqslant\frac12$ τότε, για κάθε $t>0$,

$$\mu(\{x:d(x,A)\geqslant t\})\leqslant 2\exp\left(-\frac{c}{2p}t^p\right).$$

9. Έστω μ ένα συμμετρικό Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\Lambda(u)=\log\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{\langle u,x\rangle}d\mu(x)\right)$$

και

$$\Lambda^*(v)=\sup\{\langle u,v\rangle-\Lambda(u):u\in\mathbb{R}^n\}.$$

Έστω $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ κυρτή συνάρτηση κόστους τέτοια ώστε το ζεύγος (μ,φ) να έχει την ιδιότητα (τ). Αποδείξτε ότι

$$\varphi(v)\leqslant 2\Lambda^*(v/2)\leqslant\Lambda^*(v).$$

10. Έστω A,B συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και p_A,p_B τα συναρτησοειδή Minkowski που αντιστοιχούν σε αυτά. Περιγράψτε το

$$\{x\in\mathbb{R}^n:(p_A\Box p_B)(x)<1\}.$$

[*Υπενθύμιση:* $p_C(x)=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda C\}$.

11. Για κάθε n-άδα σημείων $x_1,\dots,x_n\in[0,1]^2$ ορίζουμε

$$G(x_1,\dots,x_n)=\min_{\sigma\in S_n}\sum_{i=1}^n|x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(i+1)}|.$$

Θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1,\dots,X_n$ ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,1]^2$ και την τυχαία μεταβλητή $Y:=G(X_1,\dots,X_n)$. Αποδείξτε ότι

$$\mathbb{P}(|Y-\mathbb{E}(Y)|\geqslant t)\leqslant 2\exp\Big(-\frac{t^2}{c\ln n}\Big),$$

για κάθε $t>0$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.