Συγκέντρωση του Μέτρου – Φυλλάδια 4 και 5

Παραδίδετε δώδεκα από τις ασκήσεις του φυλλαδίου. Προθεσμία: 10 Φεβρουαρίου 2017

1. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\beta > 0$. Αν $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση και αν $d\nu = \frac{1}{\mathbb{E}_\mu(e^F)} e^F d\mu$, δείξτε ότι το ν ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\beta e^{-4\|F\|_\infty}$.

2. Έστω ν το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f d\nu = f(0) + \int \mathrm{sign}(x) f'(x) d\nu(x)$$

και συμπεράνατε ότι

$$\mathrm{Var}_\nu(f) \leqslant 4 \int [f'(x)]^2 d\nu(x).$$

3. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y) dy.$$

Δείξτε ότι η f_ε είναι διαφορίσιμη και $\|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε επίσης ότι

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon n}{n+1} \leqslant \varepsilon,$$

δηλαδή $f_\varepsilon \to f$ ομοιόμορφα καθώς το $\varepsilon \to 0^+$.

4. Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι

$$\|\nabla f_\varepsilon(x) - \nabla f_\varepsilon(y)\|_2 \leqslant \frac{c\sqrt{n}}{\varepsilon} \|x - y\|_2$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

5. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και έστω $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση που ορίζεται από την $F(x, y) = ax + by$. Δείξτε ότι $F(\gamma_n \otimes \gamma_n) = \gamma_n$, όπου

$$[F(\gamma_n \otimes \gamma_n)](A) = (\gamma_n \otimes \gamma_n)(\{(x, y) : F(x, y) \in A\}).$$

Υπόδειξη. Ο $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ με $U(x, y) = (ax + by, bx - ay)$ είναι ορθογώνιος.

6. Έστω L ο γεννήτορας της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck στον $\mathbb{R}^n$. Αν f είναι μια λεία συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{2} L(|\nabla f|^2) - \langle \nabla f, \nabla(Lf) \rangle \geqslant |\nabla f|^2.$$

Για κάθε $t \geqslant 0$ θέτουμε $\alpha(t) = \mathrm{Ent}_{\gamma_n}(T_t f)$. Σταθεροποιούμε $t \geqslant 0$ και θέτουμε $F = \log T_t f$. Δείξτε ότι

$$\alpha''(t) = 2 \int \langle \nabla F, \nabla L(\log F) \rangle d\gamma_n - \int L(|\nabla \log F|^2) F d\gamma_n.$$

Δείξτε ότι $\alpha''(t) \leqslant -2\alpha'(t)$ και συμπεράνατε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev.

7. Έστω ν το εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \rho < 1$ και για κάθε Lipschitz συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $|f'| \leqslant \rho < 1$ σχεδόν παντού, ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\nu(e^f) \leqslant \frac{2}{1-\rho} \int (f')^2 e^f d\nu.$$

8. Έστω $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Αποδείξτε ότι:

(α) $\mathbb{E}_\mu(Lf) = 0$ για κάθε $f \in D(L)$.

(β) Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση και $f, \phi(f) \in L^2(\mu)$ τότε $P_t\phi(f) \geqslant \phi(P_t f)$ για κάθε $t \geqslant 0$.

(γ) Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση και $f, \phi(f) \in D(L)$ τότε $L\phi(f) \geqslant \phi'(f)Lf$.

9. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ συμμετρική, εργοδική ημιομάδα Markov με αναλλοίωτο μέτρο μ. Ορίζουμε $\mathrm{Cov}_\mu(f,g) = \langle f - \mathbb{E}_\mu(f), g - \mathbb{E}_\mu g\rangle_\mu$. Αποδείξτε ότι:

$$\mathrm{Cov}_\mu(f,g) = 2\int_0^\infty \mathcal{E}(P_t f, P_t g)\, dt = \int_0^\infty \mathcal{E}(f, P_t g)\, dt.$$

10. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Ορίζουμε

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\,[L(fg) - f\,Lg - g\,Lf].$$

Αποδείξτε ότι:

(α) $\mathcal{E}(f,f) = \int \Gamma(f,f)\, d\mu$ και αν η $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ είναι συμμετρική τότε, επιπλέον, $\mathcal{E}(f,g) = \int \Gamma(f,g)\, d\mu$.

(β) $\Gamma(f,f) \geqslant 0$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε την $P_t(f^2) \geqslant (P_t f)^2$ και τον ορισμό του L.]

(γ) $\Gamma(f,g)^2 \leqslant \Gamma(f,f)\Gamma(g,g)$.

11. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Αποδείξτε ότι:

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = 2\int_0^t P_{t-s}\Gamma(P_s f, P_s f)\, ds.$$

12. Έστω $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_X f^2 \ln(1+f^2)\, d\mu < \infty$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ent}_\mu((f+a)^2) \leqslant \mathrm{Ent}_\mu(f^2) + 2\int_X f^2\, d\mu.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τη συνάρτηση $\psi(r) = \mathrm{Ent}_\mu((rf+a)^2) - \mathrm{Ent}_\mu((rf)^2) - 2\int_X (rf)^2 d\mu$.]

13. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Αποδείξτε ότι: για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ και για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\int f^2 \ln(f^2)\, d\mu \leqslant 2t\mathcal{E}(f,f) + \int f^2 \ln(P_t f)^2\, d\mu.$$

14. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Αποδείξτε ότι: αν το μ ικανοποιεί τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά β τότε, για κάθε $p \geqslant 2$ και για κάθε $f \in L^p(\mu)$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{p-2}{\beta}\left(\int \Gamma(f)^{p/2} d\mu\right)^{2/p}.$$

15. Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα f ως προς το μέτρο Lebesgue, και έστω $m \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\mu([m,+\infty)) \geqslant \frac{1}{2}$ και $\mu((-\infty,m]) \geqslant \frac{1}{2}$. Ορίζουμε

$$\alpha_+(x) = \int_m^x \frac{1}{f(t)}\, dt, \qquad x \geqslant m$$

και

$$\alpha_-(x) = \int_x^m \frac{1}{f(t)}\, dt, \qquad x \leqslant m.$$

Αποδείξτε ότι: αν

$$b_+ = \int_m^\infty \alpha_+(x)f(x)dx < \infty \quad \text{και} \quad b_- = \int_{-\infty}^m \alpha_-(x)f(x)dx < \infty,$$

τότε το μ ικανοποιεί ανισότητα Poincaré με σταθερά $\beta = 1/\min\{b_+, b_-\}$.

16. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $\mu(A\cap B) > 0$ και $\mu(A\cup B) < \infty$. Αποδείξτε ότι: αν η $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις

$$\int_{A\cup B} f^2 d\mu < \infty \quad \text{και} \quad \int_{A\cup B} f\, d\mu = 0,$$

τότε

$$\frac{1}{\mu(A)}\left(\int_A f\, d\mu\right)^2 + \frac{1}{\mu(B)}\left(\int_B f\, d\mu\right)^2 \leqslant \left(1 - \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A\cup B)}\right)\int_{A\cup B} f^2 d\mu.$$

17. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Αποδείξτε ότι: αν το μ ικανοποιεί τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά β τότε, για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$,

$$\|f\|_2^2 \ln\left(\frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_p^2}\right) \leqslant \frac{2-p}{p\beta}\,\mathcal{E}(f,f).$$

18. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα L και αναλλοίωτο μέτρο μ. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Sobolev με εκθέτη $p > 2$ και σταθερές $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, αν για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$

$$\|f\|_p^2 \leqslant \alpha\|f\|_2^2 + \gamma\mathcal{E}(f,f).$$

Αποδείξτε ότι: αν το μ ικανοποιεί την ανισότητα Sobolev με εκθέτη $p > 2$ και σταθερές $\alpha = 0$, $\gamma > 0$, τότε το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\beta = \frac{p-2}{\gamma}$.

19. Με τον ορισμό της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι αν το μ ικανοποιεί την ανισότητα Sobolev με εκθέτη n και σταθερές $\alpha \geqslant 0$, $\gamma > 0$, τότε για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int f^2 d\mu = 1$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln(\alpha + \gamma\mathcal{E}(f,f)).$$

Επίσης,

$$\|f\|_2^{n+2} \leqslant \big(\alpha\|f\|_2^2 + \gamma\mathcal{E}(f,f)\big)^{n/2}\,\|f\|_1^2.$$

20. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\int f^2 d\lambda(x) = 1$ και $f \in D(\mathcal{E})$, όπου $\mathcal{E}(f,f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\lambda(x)$ και λ είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Ent}_\lambda(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{n\pi e}\mathcal{E}(f,f)\right).$$

21. Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ομαλή, γνήσια θετική συνάρτηση με $\int g\, d\gamma_n = 1$ και τέτοια ώστε οι Δg και $g\Delta(\ln g)$ να είναι γ_n-ολοκληρώσιμες. Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(g) \leqslant \frac{1}{2}\int \Delta g\, d\gamma_n + \frac{n}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\int g\Delta(\ln g)\, d\gamma_n\right).$$

22. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{a^2}{2}\ln a^2 + \frac{b^2}{2}\ln b^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}(a-b)^2.$$

23. Ξεκινώντας από την προηγούμενη ανισότητα αποδείξτε τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev για τον διακριτό κύβο.

24. Αποδείξτε ότι: για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ και για κάθε $p \in (0,1)$,

$$\mathrm{Ent}_{\mu_{n,p}}(f^2) \leqslant c_p \mathcal{E}(f,f),$$

όπου

$$c_p := \frac{1}{1-2p} \ln \frac{1-p}{p}$$

και $\mu_{n,p} = \mu_{1,p} \otimes \cdots \otimes \mu_{1,p}$, όπου $\mu_{1,p}(\{1\}) = p$ και $\mu_{1,p}(\{-1\}) = 1-p$. Παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{p \to \frac{1}{2}} c_p = 2$.