Πιθανότητες ΙΙ - Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1 *Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα. Τότε, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα (ιδιότητες (i) και (ii) της σ-άλγεβρας). Έστω $A_1, A_2, ..., A_n$ πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Αφού $\mathcal{A}$ κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, έχουμε:*
$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \emptyset \in \mathcal{A}$, *επομένως* $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$.
Άρα, $\mathcal{A}$ κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και άρα η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

Δείχνουμε τώρα ότι η $\mathcal{A}$ είναι δακτύλιος. Έχουμε ήδη δείξει ότι $\emptyset \in \mathcal{A}$ και ότι $\mathcal{A}$ κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{A}$ κλειστή στις συνολοθεωρητικές διαφορές.
Έστω $A, B \in \mathcal{A}$. Τότε, $A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \cup B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ (χρησιμοποιούμε ότι $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα και τις πεπερασμένες ενώσεις).
Άρα πράγματι, $\mathcal{A}$ δακτύλιος.

Ένας δακτύλιος δεν είναι απαραίτητα άλγεβρα: Έστω $X = \{1, 2\}$ και $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}\}$. Τότε, $\mathcal{A}$ δακτύλιος διότι: $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\{1\} \setminus \emptyset = \{1\} \in \mathcal{A}$ και $\{1\} \cup \emptyset = \{1\} \in \mathcal{A}$.
Όμως, $\emptyset^c = X \notin \mathcal{A}$, δηλαδή $\mathcal{A}$ όχι κλειστή στα συμπληρώματα. Άρα, η $\mathcal{A}$ δεν είναι άλγεβρα.
Μία άλγεβρα δεν είναι απαραίτητα σ-άλγεβρα: Έστω $X = \mathbb{Z}$ και
$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{Z} : |A| < \infty \ \text{ ή } |\mathbb{Z} \setminus A| < \infty\}$. *Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή, κλειστή στα συμπληρώματα και τις πεπερασμένες ενώσεις, άρα είναι άλγεβρα. Όμως, η $\mathcal{A}$ δεν είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Αν για παράδειγμα πάρουμε την ένωση όλων των μονοσυνόλων $A_k = \{2k\}$, $k \in \mathbb{N}$, τότε* $|\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k| = |\mathbb{N}| = \infty$ *και* $|\mathbb{Z} \setminus (\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)| = |\mathbb{N}| = \infty$, *άρα* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \notin \mathcal{A}$. *Συνεπώς, $\mathcal{A}$ όχι σ-άλγεβρα.*

Άσκηση 2 *Έστω μία οικογένεια υποσυνόλων του X,η οποία είναι λ-κλάση.Θα δείξουμε ότι είναι κλάση Dynkin.*
(i) $\mathcal{D} \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{D} \Rightarrow$X$\in \mathcal{D}$, αφού $\mathcal{D}$ κλειστή στα συμπληρώματα.
(ii) Έστω $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subset B$.Θα δείξουμε ότι $B \setminus \mathcal{A} \in \mathcal{D}$. Πράγματι, $B \backslash A = B \cap A^c \overset{DM}{=} (B^c \cup A)^c \in \mathcal{D}$, αφού $B^c \in \mathcal{D}$, $B^c \cap A \in \mathcal{D}$ διότι $B^c \cap A = \emptyset$ και άρα $(B^c \cap A)^c \in \mathcal{D}$,γιατί $\mathcal{D}$ κλειστή στα συμπληρώματα.
(iii) Έστω $(A_n) \nearrow$ στην $\mathcal{D}$,δηλαδή $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ....$ Παρατηρούμε το εξής:

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup ... \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup ...$, όπου $A_{i+1} \setminus A_i \in \mathcal{D}$ (από το (ii)) και $(A_i \setminus \mathcal{A}_{i-1}) \cap (A_j \setminus \mathcal{A}_{j-1}) = \emptyset$,$\forall i \neq j$.
Δηλαδή έχουμε αριθμήσιμες,ξένες ανα δύο ενώσεις και συνεπώς,από τις ιδιότητες της $\mathcal{D}$ έχουμε ότι : $\bigcup_{i=1}^{n} A_1 \cup (A_{i+1} \setminus A_i) \in \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$.

Αντίστροφα,έστω μία οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{D}$,η οποία είναι κλάση Dynkin.Θα δείξουμε ότι $\mathcal{D}$ είναι λ-κλάση.
(i) $X \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} \neq \emptyset$
(ii) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Έχουμε ότι $X, A \in \mathcal{D}$ και $A \subset X \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$
(iii) Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.Θέτουμε $B_n = \bigcup_{k \leq n} A_k$ και έχουμε ότι $(B_n) \nearrow, (B_n) \in \mathcal{D}$ και $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$.
Για το δεύτερο αρκεί να το δούμε για δύο σύνολα $(n = 2)$:
Αν $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c \Rightarrow B^c \setminus A = A^c \cap B^c \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B = [(A \cup B)^c]^c = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}$,αφού $A^c \cap B^c \in \mathcal{D}$.
Επομένως,επαγωγικά προκύπτει ότι πράγματι $(B_n) \in \mathcal{D}$.

Άσκηση 3 Δίνουμε αντιπαράδειγμα: Έστω $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και έστω οι οικογένεις συνόλων $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\}\}$,
$\mathcal{D}_2 = \{\emptyset, X, \{3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}\}$. Μπορούμε να δούμε ότι οι $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ είναι κλάσεις Dynkin. Όμως, $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, δηλαδή η $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ δεν είναι κλειστή στις πεπρασμένες ενώσεις, άρα δεν είναι κλάση Dynkin.

Άσκηση 4 Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (i) $A \cap B = \emptyset$, (ii) $A \cap B \neq \emptyset$.
Αρχικά, θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C} = \{A, B\}$.
(i) Έστω ότι $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B \subsetneqq X$. Θα δείξουμε ότι για την οικογένεια $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A^c \cap B^c\}$, ισχύει ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$.
Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι λ-κλάση (και άρα κλάση Dynkin).Πράγματι:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
- $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα.
- $\mathcal{A}$ κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις.

Άρα, αφού $\mathcal{A}$ κλάση Dynkin και $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, έπεται ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Αντίστροφα, αφού $A, B \in \mathcal{C} \subset \delta(\mathcal{C})$ και $\delta(\mathcal{C})$ κλάση Dynkin (εξ ορισμού), θα πρέπει $\mathcal{A} \subset \delta(\mathcal{C})$. Τελικά, $\mathcal{A} = \delta(\mathcal{C})$.
Γνωρίζουμε ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ (για οποιαδήποτε οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{C}$ του X). Παρατηρούμε όμως ότι η $\mathcal{A}$ είναι και σ-άλγεβρα αφου είναι μη κενή, κλειστή στα συμπληρώματα και κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Αφού $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα, έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A} = \delta(\mathcal{C})$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$.
Έστω τώρα ότι $A \cup B = X$, δηλαδή ότι τα A, B διαμερίζουν τον X. Με τον ίδιο τρόπο, αν θεωρήσουμε την οικογένεια $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, A, B\}$, μπορούμε να δείξουμε πάλι ότι $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$.
(ii) Έστω ότι $A \cap B \neq \emptyset$ και ότι $B \subset A$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, A, B, A \setminus B, A^c, B^c, A^c \cup B\}$. Ομοίως με πριν, μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_2$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την $\mathcal{C}$ και κατόπιν ότι $\delta(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_2$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $\mathcal{A}_2$ σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{C}$ και καταλήγουμε στο ότι $\mathcal{A}_2 = \delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.
Έστω τώρα ότι τα A, B δεν συγκρίνονται και ότι $A \cup B \subsetneq X$.
Τότε, δείχνουμε ότι $\delta(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_3 = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c\}$: είναι έυκολο να δούμε ότι η $\mathcal{A}_3$ ειναι λ-κλάση και άρα κλάση Dynkin και αφού $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_3$, έπεται $\delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_3$. Αντίστροφα, αφού $A, B \in \delta(\mathcal{C})$ και η $\delta(\mathcal{C})$ είναι κλάση Dynkin, έπεται $\mathcal{A}_3 \subset \delta(\mathcal{C})$. Θεωρούμε τώρα την οικογένεια:
$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A^c \cap B^c, A \cap B, A^c \cup B^c, A \setminus B, B \setminus A, (A \setminus B)^c, (B \setminus A)^c,$
$(A \setminus B) \cap (B \setminus A), A \triangle B\}$. *Η $\mathcal{A}_4$ είναι σ-άλγεβρα καθώς ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού και επίσης $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_4$. Άρα, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_4$. Αντίστροφα, αφού $A, B \in \mathcal{A}_4$ και $\mathcal{A}_4$ σ-άλγεβρα, θα πρέπει $\mathcal{A}_4 \subset \sigma(\mathcal{C})$. Άρα, $\mathcal{A}_4 = \sigma(\mathcal{C})$.*
Η τελευταία περίπτωση είναι ότι τα A, B δεν συγκρίνονται και ότι διαμερίζουν τον X, δηλαδή $A \cup B = X$. Τότε, θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}_5 = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c, A \cap B, A^c \cup B^c\}$ και δείχνουμε με τα ίδια επιχειρήματα ότι $\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_5$.

Άσκηση 5 *Βλ. Θεωρία Μέτρου*

Άσκηση 6 *Έστω $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.Αρχικά ζητάμε η ακολουθία (A_n) να ικανοποιεί την $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.Επομένως,ζητάμε $1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow 1 \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$.*

Στη συνέχεια θέλουμε $\liminf \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$*.Ζητάμε* $2 \in A_n, \forall n \geq 2$*,ώστε το 2 να ανήκει τελικά σε όλα τα* A_n*.Άρα* $\liminf A_n = \{1,2\}$.
Στη συνέχεια προσθέτουμε στοιχείο που να ανήκει σε άπειρα A_n*,αλλά όχι σε όλα τα* A_n *τελικά,έτσι ώστε* $\liminf A_n \neq \limsup A_n$*,δηλαδή ζητάμε* $3 \in A_n$*,για* $n = 2k, k = 1,2,...$ *(στους άρτιους) και έτσι προκύπτει ότι* $\limsup \mathcal{A}_n = \{1,2,3\}$.
Τέλος,θέλουμε $\limsup A_n \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$*,άρα ζητάμε* $4 \in A_n$ *(τουλάχιστον σε ένα),έτσι ώστε το 4 να μην ανήκει σε άπειρα* A_n*.Οπότε,* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{1,2,3,4\}$.
Έτσι έχουμε ορίσει την ακολουθία $A_1 = \{1,4\}, A_2 = \{1,2,3\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{1,2,3\}, A_5 = \{1,2\},...$ *και επειδή* $\emptyset \subsetneqq \{1\} \subsetneqq \{1,2\} \subsetneqq \{1,2,3\} \subsetneqq \{1,2,3,4\} \subsetneqq \{1,2,3,4,5\}$
έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 7 ***(i)(a)*** *Έστω* $n = 1,2,...$ *και έστω* $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Έχουμε: $\mathbb{1}_{\limsup A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ 0, & x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \\ 0, & x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in B_n, \forall n = 1,2,... \\ 0, & x \notin B_{n_0},\ \text{για κάποιο } n_0 = 1,2,... \end{cases}$

Όμως, $\mathbb{1}_{B_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_n \\ 0, & x \notin B_n \end{cases}, n = 1,2,...$ *, άρα μπορούμε να δούμε ότι*
$\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \inf_n \mathbb{1}_{B_n}$.

Επίσης, $\forall n = 1,2,...$ $,\mathbb{1}_{B_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ 0, & x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in A_k \text{ για κάποιο } k = n, n+1,... \\ 0, & x \notin A_k, \forall k = n, n+1,... \end{cases}$.

Συνεπώς, $\mathbb{1}_{B_n} = \sup_{k \geq n} \mathbb{1}_{A_k}$ *. Άρα τελικά,* $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \inf_n \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k} \Rightarrow \mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$.

(b) *Μπορούμε να το δείξουμε με την ίδια λογική που δείξαμε το (a). Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: Θέλουμε ισοδύναμα να δείξουμε ότι* $1 - \mathbb{1}_{\liminf A_n} = 1 - \liminf \mathbb{1}_{A_n}$ *. Έχουμε:*

$-\liminf \mathbb{1}_{A_n} = -\sup_n \inf_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k} = \inf_n(-\inf_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}) = \inf_n \sup_{k\geq n}(-\mathbb{1}_{A_k}) = \limsup(-\mathbb{1}_{A_n})$.
Άρα, $1-\liminf \mathbb{1}_{A_n} = 1+\limsup(-\mathbb{1}_{A_n}) \Rightarrow 1-\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \limsup(1-\mathbb{1}_{A_n}) \Rightarrow$
$1-\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \limsup \mathbb{1}_{{A_n}^c}$ *(1)* .
Επίσης: $1-\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \mathbb{1}_{(\liminf A_n)^c} = \mathbb{1}_{\limsup {A_n}^c}$ *(2).*
Εφαρμόζοντας τη σχέση που δείξαμε στο (a) για την ακολουθία $({A_n}^c)$ *παίρνουμε ότι:*
$\limsup \mathbb{1}_{{A_n}^c} = \mathbb{1}_{\limsup {A_n}^c}$.
Συνεπώς, από τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε αυτό που θέλαμε να δείξουμε:
$1-\mathbb{1}_{\liminf A_n} = 1-\liminf \mathbb{1}_{A_n} \Leftrightarrow \mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$.

(ii) *Έχουμε:* $\lim_n A_n = A \Leftrightarrow \liminf A_n = \limsup A_n = A \Leftrightarrow \mathbb{1}_{\liminf A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n} = \mathbb{1}_A$
$\Leftrightarrow \liminf \mathbb{1}_{A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \Leftrightarrow \lim_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A$ *(κατα σημείο όριο)* .

Άσκηση 8 ***(i)*** *Θα δείξουμε ότι οι οικογένεις* $\mathcal{T} = \{(-\infty,q) : q\in\mathbb{Q}\}$ *και*
$\mathcal{C} = \{(q,r) : q,r\in\mathbb{Q}\}$, *οι οποίες είναι αριθμήσιμες, παράγουν τη σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$, *δηλαδή ότι* $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Για την $\mathcal{T}$ *: Γνωρίζουμε ότι για την οικογένεια* $\mathcal{A} = \{(-\infty,b] : b\in\mathbb{R}\}$, *ισχύει* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Θεωρούμε τυχόν $b\in\mathbb{R}$. *Από την πυκνότητα του* $\mathbb{Q}$ *στο* $\mathbb{R}$, *υπάρχει φθίνουσα ακολουθία* (q_n) *ρητών αριθμών με* $q_n \geq b, \forall n\in\mathbb{N}$ *τέτοια ώστε* $q_n \to b$. *Τότε,* $\bigcap_n(-\infty,q_n) = (-\infty,b]$.
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $(-\infty,q_n)\in\mathcal{T}\subset\sigma(\mathcal{T})$ *και* $\sigma(\mathcal{T})$ *κλειστή στις αριθμήσιμες τομές, ως σ-άλγεβρα, άρα* $\bigcap_n(-\infty,q_n)\in\sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow (-\infty,b]\in\sigma(\mathcal{T})$. *Συνεπώς,* $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{T})$ *και επειδή η* $\sigma(\mathcal{T})$ *είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{A}$, *θα περιέχει και την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{A}$. *Άρα,* $\sigma(\mathcal{A})\subset\sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\sigma(\mathcal{T})$. *Έστω τώρα τυχόν* $q\in\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. *Το* $(-\infty,q)\in\mathcal{T}$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$, *άρα προφανώς* $(-\infty,q)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Άρα* $\mathcal{T}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *και επειδή* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{T}$, *θα περιέχει και την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την* $\mathcal{T}$. *Άρα,* $\sigma(\mathcal{T})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *και συνεπώς* $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Για την $\mathcal{C}$: *Γνωρίζουμε ότι για την οικογένεια* $\mathcal{F} = \{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$, *ισχύει* $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Θεωρούμε $a,b\in\mathbb{R}$. *Από πυκνότητα του* $\mathbb{Q}$ *στο* $\mathbb{R}$, *υπάρχουν ακολουθίες ρητών* $(q_n),(r_n)$, *όπου* (q_n) *φθίνουσα και* (r_n) *αύξουσα, με* $q_n > a$ *και* $r_n < b$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *τέτοιες ώστε* $q_n\to a$, $r_n\to b$. *Τότε,* $\bigcup_n(q_n,r_n) = (a,b)$. *Για κάθε* $n\in\mathbb{N}$, $(q_n,r_n)\in\mathcal{C}\subset\sigma(\mathcal{C})$ *και* $\sigma(\mathcal{C})$ *κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις ως σ-άλγεβρα, άρα* $\bigcup_n(q_n,r_n)\in\sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow (a,b)\in\sigma(\mathcal{C})$. *Συνεπώς,*

$\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{C})$ και, ομοίως με πριν, έπεται ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. Τώρα, για οποιαδήποτε $q, r \in \mathbb{Q}$, το $(q,r) \in \mathcal{C}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, οπότε $(q,r) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Άρα, $C \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και επομένως $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τελικά, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Δείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα και μάλιστα παράγεται από διαφορετικές οικογένειες συνόλων.
(ii) Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του διαχωρίσιμου μ.χ. X. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $U \subset X$ ανοικτό, τότε το U γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση από ανοικτές μπάλες του X. Έστω $x \in U$. Αφού U ανοικτό, υπάρχει $r_x > 0$ ώστε $B(x, r_x) \subset U$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε επιπλέον ότι $r_x \in \mathbb{Q}$. Αφού D πυκνό στον X , $D \cap B(x, r_x) \neq \emptyset$, άρα παίρνουμε ένα $y_x \in D \cap B(x, r_x)$. Τότε, $x \in B(y_x, \frac{r_x}{2}) \subset B(y_x, r_x)$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε το U ως: $U = \bigcup\{B(y_x, r_x) : x \in U\}$. Η ένωση αυτή είναι αριθμήσιμη αφού $y_x \in D$ και $r_x \in \mathbb{Q}$, άρα γράψαμε το U ως αριθμήσιμη ένωση από ανοικτές μπάλες στο X. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{C}$ ανοικτών συνόλων, για την οποία, κάθε ανοικτό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{C}$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X)$: Πράγματι, ισχύει ότι $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(X)$ αφού η $\mathcal{C}$ περιέχει ανοικτά σύνολα και άρα $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(X)$. Επίσης, για κάθε $U \in \mathcal{B}(X)$ ανοικτό, ισχύει ότι $U \in \sigma(\mathcal{C})$, αφού το U γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{C}$, και άρα στοιχείων της $\sigma(\mathcal{C})$, η οποία είναι σ-άλγεβρα. Επομένως, $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\mathcal{C})$.
Δείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{B}(X)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα.
Από αυτό έπεται άμεσα και το ***(i)***: ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι διαχωρίσιμος και άρα η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.

Άσκηση 9

Άσκηση 10 (α) Δείχνουμε πρώτα ότι το δ_B,με $\delta_B(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } B \subset A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$, $A \in \mathcal{P}(X)$ είναι μέτρο :
$\delta_B(\emptyset) = 0$, γιατί $B \supsetneqq \emptyset$

Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων του $\mathcal{P}(X)$. Έχουμε $\delta_B(\bigcup\limits_n A_n) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B \subset \bigcup\limits_n A_n \overset{*}{\Longleftrightarrow} B \subset A_{n_0}$ για μόνο ένα $n_0 \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \delta_B(A_n) = 1$ και $\delta_B(A_n) = 0$,
$\forall n \neq\ n_0 \overset{*}{\Longleftrightarrow} \sum\limits_n \delta_B(A_n) = 1$. Στις $(*)$ χρησιμοποιούμε ότι τα A_n είναι ξένα ανά δύο.Άρα δ_B

πράγματι μέτρο.
Το μέτρο Dirac στο $x \in \ X$ *είναι:*
$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in X \\ 0, & \text{αν } x \notin X \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{x\} \subset A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, A \in \mathcal{P}$.*Δηλαδή το* δ_x *είναι ειδική περίπτωση του* δ_B,*για* $B = \{x\} \subset X (B \neq \emptyset)$
Πράγματι λοιπόν,το δ_B *είναι γενίκευση του μέτρου Dirac.*

(β) Ελέγχουμε αν το δ'_B *είναι μέτρο.Θέτουμε* $B = \{B_1, B_2\}, B_1 \neq B_2$ *και* $A = B$.*Τότε :* $A \cap B \neq \emptyset$,*άρα* $\delta'_B(A) = 1 \Rightarrow \delta'_B(B) = 1$ *Όμως* $B = \{B_1\} \cup \{B_2\}$,*όπου* $\{B_1\} \cap \{B_2\} = \emptyset$ *(ξένα μεταξύ τους) και* $\delta_B(\{B_1\}) = \delta_B(\{B_2\}) = 1$,*αφού* $\{B_1\} \cap \{B_2\} \neq \emptyset$ *και* $\{B_2\} \cap B \neq \emptyset$.
Αν το δ'_B *είναι μέτρο,θα πρέπει* $\delta'_B(B) = \delta'_B(\{B_1\} \cup \{B_2\}) = \delta'_B(\{B_1\}) + \delta'_B(\{B_2\}) \Longleftrightarrow 1 = 1 + 1 = 2$,*άτοπο.*
Άρα δ'_B *δεν είναι μέτρο και άρα δεν αποτελεί γενίκευση του μέτρου Dirac.*

Άσκηση 11 *(i) Ισχύει ότι* $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \forall A, B \in \mathcal{A}$.
Άρα $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup (B \setminus (A \cap B)))$ *και επειδή* $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$,*έχουμε :*
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B))$.
Τέλος,επειδή $\mu(A \cap B) < \infty$ *(λόγω πεπερασμένου μέτρου) ,έπεται ότι* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B))$.
(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) ,έχουμε :
$\mu(A \cup B \cup \Gamma) = \mu(A \cup (B \cup \Gamma)) = \mu(A) + \mu(B \cup \Gamma) - \mu(A \cap (B \cup \Gamma)) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\Gamma) - \mu(B \cap \Gamma) - \mu(A \cap (B \cup \Gamma))$
Όμως, $\mu(A \cap (B \cup \Gamma)) = \mu((A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap \Gamma) - \mu(A \cap B \cap A \cap \Gamma) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap \Gamma) - \mu(A \cap B \cap \Gamma)$.
Άρα, $\mu(A \cup B \cup \Gamma) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\Gamma) - \mu(B \cap \Gamma) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap \Gamma) + \mu(A \cap B \cap \Gamma)$
(iii) Η γενίκευση των προηγουμένων για $n \geq 2$ *είναι ο τύπος :*
$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap \ A_{i_k})$ *(δείχνεται με επαγωγή).*

Άσκηση 12 *(i)* $\mu(\emptyset) = \sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i(\emptyset) = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot 0 = 0$
Έστω (A_n) *ξένα ανά δύο σύνολα της* $\mathcal{A}$. *Τότε :*
$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i \in I} \lambda_i (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(A_n)) = \sum_{i \in I} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i(A_n) =$

$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. *Άρα το* μ *είναι μέτρο.*

(ii) Έστω ότι $\mu, \nu, \mu_n, n \in \mathbb{N}$ *μέτρα και* $\lambda \geq 0$. *Ισχυριζόμαστε ότι το* $\mu + \nu$ *είναι μέτρο. Πράγματι,* $(\mu+\nu)(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \nu(\emptyset) = 0$. *Επιπλέον,αν* (A_n) *ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της* $\mathcal{A}$*,τότε :*

$$(\mu+\nu)(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) + \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(A_n)+\nu(A_n)) = (\mu+\nu)(A_n).$$

Για το λ_μ*,έχουμε :*

$(\lambda\mu)(\emptyset) = \lambda(\mu(\emptyset)) = 0$

Αν τώρα (A_n) *ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της* $\mathcal{A}$*,τότε :*

$$(\lambda\mu)(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \lambda(\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\mu)(A_n).$$

Τέλος,για το $\sum_n \mu_n$*,έχουμε ότι είναι μέτρο ως ειδική περίπτωση του (i) για* $I = \mathbb{N}$ *και* $\lambda_i = 1$.

(iii)Τα επαγώμενα μέτρα των διακριτών τυχαίων μεταβλητών είναι τα διακριτά μέτρα πιθανότητας.Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* $\{\omega\} \in \mathcal{A}, \forall\omega \in \Omega$*.Τότε το μέτρο* P *είναι διακριτό μέτρο πιθανότητας αν και μόνο αν,υπάρχει αριθμήσιμο* $S \in \mathcal{A}$ *και ακολουθία* $(p_\omega)_{\omega\in S}$ *πραγματικών αριθμών,με* $p_\omega \geq 0, \forall\omega \in S$ *και* $\sum_{\omega\in S} p_\omega = 1$ *,ώστε :*

$P = \sum_{\omega\in S} p_\omega\delta_\omega$ *, όπου* δ_ω *το μέτρο Dirac στο σημείο* $\omega \in \Omega$.