Λύσεις Θεμάτων Προόδου Πιθ. II (Εαρινό 2017).

Θέμα 1

α) Η κατανομή P_X της τ.μ. X στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι το μέτρο πιθανότητας που επάγει η X στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, και ορίζεται ως $P_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

β) Η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ με $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, είναι πράγματι μέτρο πιθανότητας, αφού είναι καλά ορισμένη (με τιμές στο $[0,1]$) και

(i) $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = \underline{\underline{1}}$ και

(ii) αν $(B_n)_{n\geq 1}$ στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ακολουθία ξένων ανά δύο Borel-υποσυνόλων, τότε $P_X\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = P\left[X^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)\right] = P\left(\bigcup_{n\geq 1} X^{-1}(B_n)\right) \overset{(*)}{=}$

$$\sum_{n\geq 1} P(X^{-1}(B_n)) = \sum_{n\geq 1} P_X(B_n) \quad \underline{\underline{\sigma\text{-προσθετικότητα}}},$$

όπου στην $(*)$, χρησιμ. ότι $(B_n) + \Rightarrow (X^{-1}(B_n)) +$ και την σ-προσθετικότητα του P.

γ) $\underline{X \text{ διακριτή}} \overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} P_X$ είναι διακριτό μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

δηλ. $\exists A$ αριθμήσιμο $\subset \mathbb{R}$: $P_X(A) = 1$.

$\underline{X \text{ συνεχής}} \overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} P_X$ είναι συνεχές μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

δηλ. $P_X((-\infty, x])$ είναι συνεχής συνάρτηση του $x \in \mathbb{R}$.

(ισοδ. $P_X(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

δ) • $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\{Y \in B\} = Y^{-1}(B) = (h \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(h^{-1}(B)),$$

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{h \text{ Borel}}{\Longrightarrow} h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{X \text{ τ.μ.}}{\Longrightarrow} X^{-1}(h^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$$

Άρα $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow Y$ τ.μ.

• Η h εμφανίζεται στη σχέση $Y = h \circ X$.

Είναι φυσιολογικό λοιπόν να θεωρήσουμε ως χ.π., τον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$, και τότε η h είναι τυχαία μεταβλητή

από τον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε άλλη επιλογή μέτρου πιθανότητας, κάνει την h τυχαία μεταβλητή.

ε) • X διακριτή τ.μ $\Rightarrow \exists A$ αριθμ. : $P(X \in A) = 1$.

όμως A αριθμ. $\Rightarrow$ $h(A)$ αριθμήσιμο, και

$$P(Y \in \underbrace{h(A)}_{\text{αριθμ.}}) = P(h(X) \in h(A)) \overset{*}{=} 1 \Rightarrow Y \text{ διακριτή τ.μ.}$$

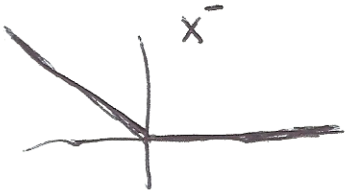
, αφού $(*)$: $X(\omega) \in A \Rightarrow h(X(\omega)) \in h(A)$ και άρα $\underbrace{\{X \in A\}}_{\text{έχει πιθ. 1 (υπόθεση)}} \subseteq \{h(X) \in h(A)\}$

Αν $h(\mathbb{R})$ αριθμ. $\subset \mathbb{R}$, τότε

• $P(Y \in h(\mathbb{R})) = P(h(X) \in h(\mathbb{R})) = 1 \Rightarrow Y$ διακριτή τ.μ.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ αν Y διακριτή τ.μ. της μορφής $Y = h(X) \not\Rightarrow X$ διακριτή ή $h(\mathbb{R})$ αριθμήσιμο.

Πράγματι παίρνουμε $X \geq 0$, με X συνεχή τ.μ., π.χ. $X \sim Exp(1)$, και $h(x) = x^- = \max(0, -x)$. Τότε $h(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$:



Όμως $Y = X^- = h(X) = 0$, και άρα διακριτή.

ζ) **B1** Για X απλή + θετική τ.μ., ορίζουμε

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(X = a_i),$$

όπου $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, με $A_i = X^{-1}(\{a_i\})$, $1 \le i \le n$,

η αναπαράσταση της X σε κανονική μορφή, $a_i \geq 0$.

B2 Για X θετική τ.μ. ορίζουμε

$$E(X) = \sup \{ E(Y) : 0 \le Y \le X \text{ και } Y \text{ απλή τ.μ.} \}.$$

B3 Για X τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$.

$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$, όταν

κάποιο απο τα $E(X^+)$ ή $E(X^-)$ είναι πεπερασμένο.

η) Ακολουθούμε την κλασική τεχνική αποδειξης.

B1 X απλή + θετική τ.μ. (προαιρετικό, βλέπε σχόλια στο B2).

Αυτές οι X είναι προφανώς διακριτές

και το $S = \{ x : P(X=x) > 0 \}$ είναι πεπερασμένο.

Προφανως απο το ζ), αν $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{\{X = x_i\}}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i : x_i \in S} (\cdot) + \underbrace{\sum_{i : x_i \notin S} ()}_{0}$$

$$= \sum_{x \in S} x \cdot P(X = x).$$

B2] X θετική τ.μ.

$$E(X) = E[X \mathbb{1}_{\{X\in S\}}] + E[X \mathbb{1}_{\{X\in S^c\}}].$$

Όμως $P(X\in S^c) = 0$, από υπόθεση $\Rightarrow$

$$E[X \mathbb{1}_{\{X\in S^c\}}] = \int_{\{X\in S^c\}} X \, dP = 0 \quad \text{(από γνωστή Πρόταση).}$$

Άρα $E(X) = E[X \mathbb{1}_{\{X\in S\}}] = E\left[\sum_{x\in S}' x \mathbb{1}_{\{X=x\}}\right] \quad (*)$

Παρατήρηση.

- Αν κάναμε μία αρίθμηση του $S = \{x_i\}_{i\geq 1}$, τότε.

$$\sum_{x\in S}' x \mathbb{1}_{\{X=x\}} = \sum_{i\geq 1}' x_i \mathbb{1}_{\{X=x_i\}} \overset{x_i\geq 0}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}{}' x_i \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} X_n, \quad \text{όπου } (X_n)\nearrow \text{ απλών θετικών τ.μ.}$$

Από Θ.Μ.Σ.

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n) \overset{B1}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}{}' x_i P(X=x_i) = \sum_{i\geq 1}' x_i P(X=x_i)$$

$$= \sum_{x\in S}' x P(X=x).$$

- Κάποιος θα μπορούσε εδώ να χρησιμοποιήσει το Beppo-Levi, (άρα το B1 γίνεται περιττό) και να γράψει στη σχέση $(*)$.

$$E\left(\sum_{x\in S}' x \mathbb{1}_{\{X=x\}}\right) = \sum_{x\in S}' x E(\mathbb{1}_{\{X=x\}}) = \sum_{x\in S}' x P(X=x)$$

B3] X τ.μ. με πραγμ. τιμές.

Έστω $S^+ = \{x\geq 0 : P(X=x)>0\}$, $S^- = \{x<0 : P(X=x)>0\}$. Τότε

$$E(X^+) = 0\cdot \underbrace{P(X\leq 0)}_{0} + \sum_{x\in S^+}' x P(X=x), \text{ από B2] αφού } X^+ \geq 0 \text{ \& διακριτή}$$

$$E(X^-) = 0\cdot P(X\geq 0) + \sum_{x\in S^-}' (-x) P(X=x) \text{ από B2], αφού } X^- \geq 0 \text{ \& διακριτή}$$

Αν $E(X^+) < +\infty$ ή $E(X^-) < +\infty$, τότε ορίζεται η

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) = \sum_{x\in S^+}' x P(X=x) - \sum_{x\in S^-}' (-x) P(X=x) = \sum_{x\in S}' x P(X=x) \quad \checkmark$$

θ) Γνωρίζουμε ότι $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = C_2 < +\infty$. $\left(C_2 = \frac{\pi^2}{6}\right)$

Άρα και $\sum_{n \leq -1} \frac{1}{n^2} = C_2 < +\infty$.

(στους αρνητικούς ακέραιους)

Αν X τ.μ. : $P(X=k) = \frac{1}{2C_2} \frac{1}{k^2}$, $k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$

τότε η X είναι προφανώς διακριτή, και

η $f(k) = \frac{1}{2C_2} \frac{1}{k^2}$ είναι πράγματι συνάρτ. πιθανότητας.

Η X ως διακριτή τ.μ. έχει

$$E(X^+) = \sum_{n \geq 1} n \cdot P(X=n) = \frac{1}{2C_2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$$

και όμοια $E(X^-) = +\infty$.

Άρα δεν ορίζεται η μέση τιμή της.

<u>Παρατήρηση.</u>

Θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί μια θετική διακριτή τ.μ. με $E(X) = +\infty$.

Στη συνέχεια θέτει $Y = \begin{cases} X & , \text{ με πιθ. } \frac{1}{2} \\ -X & , \text{ με πιθ. } \frac{1}{2} \end{cases}$

Τότε η $E(Y)$ δεν ορίζεται (γιατί ?)

Για X : $P(X=n) = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$.

τότε καταλήγουμε στο 1ο αντιπαράδειγμα (δείξτε το).

<u>Ερώτηση</u>

Θα άλλαζε κάτι αν $Y = \begin{cases} X & , \text{ με πιθ. } p \\ -X & , \text{ με πιθ. } 1-p \end{cases}$?

Μπορούμε να φανταστούμε αυτήν την κατασκευή αν ρίχνουμε ένα νόμισμα, που με πιθ. p έρχεται Γ και με πιθ. $1-p$ έρχεται Κ. Αν έρθει Γ, τότε θέτουμε $Y = X$, και αν έρθει Κ, τότε θέτουμε $Y = -X$.

Θέμα 2

α) Έστω $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(B,\mathcal{B})$, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ μετρήσιμη.

Τότε η $f(\mathcal{A})$ δεν είναι πάντα σ-άλγεβρα επί του B.

Πράγματι, αν $f(\omega)=c$, $\forall \omega\in\Omega$, τότε

$$f^{-1}(\mathcal{B})=\{\emptyset,\Omega\}\subset\mathcal{A}$$, άρα είναι

πάντα $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ μετρήσιμη.

Πράγματι αν $G\in\mathcal{B}$, τότε $f^{-1}(G)=\begin{cases}\emptyset, & \text{αν } c\notin G\\ \Omega, & \text{αν } c\in G.\end{cases}$

Όμως $f(A)=\{c\}$, $\forall A\in\mathcal{A}$ με $A\neq\emptyset$ (αφού $f(a)=c, \forall a\in A$).

και $f(\emptyset)=\emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι

$$f(\mathcal{A})=\{\emptyset,\{c\}\}$$, που δεν είναι γενικά

σ-άλγεβρα επί του B, εκτός αν ο B είναι το $\{c\}$.

<u>Σχόλιο</u>: (1) Σκεφτείτε ότι η $\mathcal{B}$ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, παρά μόνο στον έλεγχο μετρησιμότητας της f. Η απαίτηση $f(\mathcal{A})$ να είναι σ-άλγεβρα, επί του B, εξαρτάται μόνο από τη δομή του $f(\mathcal{A})$.

(2) Στο αντιπαράδειγμα που δώθηκε, είχαμε ότι η f δεν είναι επί του B. Φανερά, κάθε άλλη f που δεν είναι επί, θα δούλευε επίσης, αφού αν $f(\mathcal{A})$ είναι σ-άλγεβρα επί του B, θα πρέπει να περιέχει το B, που είναι το σύνολο άφιξης.

Συμπεραίνουμε ότι αν $f(\mathcal{A})$ είναι σ-άλγεβρα, τότε αναγκαία συνθήκη είναι η f να είναι επί.

<u>Ερώτηση</u>: Είναι αυτή η συνθήκη ικανή?

β) $X \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow X \in \mathcal{L}^2$.

Πράγματι, έστω X διακριτή τ.μ. :

$P(X=n) = \frac{1}{C_3}\frac{1}{n^3}$, $n \geq 1$, όπου $C_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$. Τότε

$$E(X) = \sum_{n\geq 1} n\, P(X=n) = \frac{1}{C_3}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{C_2}{C_3} < +\infty.$$

Όμως $E(X^2) = \sum_{n\geq 1} n^2 P(X=n) = \frac{1}{C_3}\sum_{n\geq 1} n^2 \frac{1}{n^3} = \frac{1}{C_3}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = +\infty$.

Άρα $X \in \mathcal{L}^1$ και $X \notin \mathcal{L}^2$.

<u>Σχόλιο (ερωτ).</u> : Αναζητείστε συνεχή τ.μ. με $X \in \mathcal{L}^1$ και $X \notin \mathcal{L}^2$.

γ) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \not\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} g(X)$, για g συνεχή, $0<p<+\infty$.

Έστω $X_n = n^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n^2})}$ με $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$.

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0$. Πράγματι, $E|X_n - 0|^p = E|X_n|^p = E\left[\left(n^{\frac{1}{p}}\right)^p \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n^2})}\right] = n\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$

Θέτουμε $g(x) = x^2$, $x \geq 0$, που είναι προφανώς συνεχής.

Εξετάζουμε αν $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} g(0) = 0$.

$$E|g(X_n) - 0|^p = E\left[\left(n^{\frac{2}{p}}\right)^p \cdot \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n^2})}\right] = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \not\to 0.$$

Άρα $g(X_n) \not\xrightarrow{\mathcal{L}^p} g(0)$.

<u>Σχόλιο</u> : Θα μπορούσε κάποιος να πάρει και ειδικές περιπτώσεις.

π.χ. από β) $\exists X \in \mathcal{L}^1$ και $X \notin \mathcal{L}^2$. Άρα.

αν $X_n = X$, τότε $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$, αφού $E|X_n - X| = E|X-X| = 0 \to 0$.

Όμως ~~αν~~ θέσουμε $g(x) = x^2$, για $x \geq 0$, έχουμε g συνεχής.

και $g(X_n) = X_n^2 = X^2 \notin \mathcal{L}^1$ από υπόθεση αφού $EX^2 = +\infty$,

άρα προφανώς $g(X_n) \not\xrightarrow{\mathcal{L}^1} g(X)$. (λόγω ότι $X \notin \mathcal{L}^2$).

δ) Δείτε Σημειώσεις : $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$, και (A_n) της τριγων. διαμερ. του $((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$.