ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Πρόοδος εαρινού εξαμήνου 2017

Θέμα 1: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή (τ.μ.).

α): Δώστε τον ορισμό της κατανομής $\mathbb{P}_X$ της τ.μ. X στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

β): Αποδείξτε ότι η κατανομή $\mathbb{P}_X$ είναι πράγματι μέτρο πιθανότητας.

γ): Πότε λέμε ότι η τ.μ. X είναι διακριτή και πότε συνεχής;

δ): Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $Y = h(X)$ είναι τ.μ.. Με ποιά έννοια η h είναι τυχαία μεταβλητή;

ε): Αποδείξτε ότι αν η X είναι διακριτή τ.μ. ή αν $h(\mathbb{R})$ είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η Y είναι διακριτή τ.μ.. Ισχύει το αντίστροφο;

ζ): Δώστε τον ορισμό της μέσης τιμής μιας τ.μ. X κατά το πρότυπο του ολοκληρώματος Lebesgue μιας μετρήσιμης συνάρτησης, δηλ. πρώτα για απλή και θετική, μετά για θετική και τέλος για πραγματική τ.μ. X.

η): Αποδείξτε ότι αν X είναι διακριτή τ.μ. και $S = \{x : \mathbb{P}(X = x) > 0\}$, τότε όταν ορίζεται

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in S} x\, \mathbb{P}(X = x)$$

ϑ): Δώστε ένα παράδειγμα διακριτής τ.μ. που δεν ορίζεται η μέση τιμή της.

Θέμα 2: Δώστε αντιπαραδείγματα για τη μη ισχύ των παρακάτω συνεπαγωγών.

α): $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα επί του $\Omega \;\Rightarrow\; f(\mathcal{A})$ σ-άλγεβρα επί του B (η f είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ μετρήσιμη)

β): $X \in L^1 \;\Rightarrow\; X \in L^2$

γ): $X_n \xrightarrow{L^p} X \;\Rightarrow\; g(X_n) \xrightarrow{L^p} g(X)$ για g συνεχή.

δ): $X_n \xrightarrow{L^p} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{a.s.} X$

<u>Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.</u>

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ