ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Πρόοδος εαρινού εξαμήνου 2018

Θέμα 1: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και $B \subset \Omega$. Ορίζουμε την οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$.

- **α):** Να αποδείξετε ότι η $\mathcal{A}_B$ είναι σ-άλγεβρα επί του B. Είναι γνωστή ως σ-άλγεβρα ίχνος της $\mathcal{A}$ στο B.
- **β):** Υποθέτουμε τώρα ότι $B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$ και ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $P_B : \mathcal{A}_B \to \mathbb{R}$, όπου $P_B(\Gamma) = P(\Gamma)/P(B)$, $\forall \Gamma \in \mathcal{A}_B$. Αποδείξτε ότι είναι ένα καλά ορισμένο μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(B, \mathcal{A}_B)$.

Θέμα 2:

- **α):** Δώστε τον ορισμό της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλ. της οικογένειας των συνόλων Borel του $\mathbb{R}$.
- **β):** Αποδείξτε ότι τα διαστήματα της μορφής $[a, b)$ με $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, είναι σύνολα Borel.
- **γ):** Έστω (A_n) μία ακολουθία υποσυνόλων με $A_n = [1/n, 3 + (-1)^n)$, $n \geq 1$. Να βρεθεί το $\limsup A_n$ και το $\liminf A_n$ και να εξεταστεί αν υπάρχει το $\lim A_n$.
- **δ):** Αν μ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και (A_n) όπως στο (γ), τότε να δείξετε ότι
$$\mu(\liminf A_n) = \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) = \mu(\limsup A_n)$$
- **ε):** Βρείτε μέτρο μ για το οποίο η παραπάνω ανισότητα ισχύει γνήσια. Υποδείξτε και ένα αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας P.
- **ζ):** Βρείτε μέτρο πιθανότητας P για το οποίο η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα με κοινή τιμή 1.

Θέμα 3:

- **α):** Έστω (X_n) ακολουθία τ.μ. με $X_n \overset{a.s.}{=} X$, όπου $P(X \in \mathbb{R}) = 1$. Αφού ορίσετε τις συγκλίσεις (i) με πιθανότητα 1, (ii) κατά πιθανότητα, (iii) L^0 και (iv) L^p για $p > 0$, εξετάστε αν η (X_n) συγκλίνει στην X ως προς αυτούς τους τρόπους σύγκλισης.
- **β):** Έστω X τ.μ. με $E(X^2) < \infty$ και (X_n) ακολουθία τ.μ. με $X_n = X 1_{\{|X| \leq n\}}$. Αφού δείξετε ότι υπάρχουν οι $E(X_n)$ και η $E(X)$, εξετάστε αν $E(X_n) \to E(X)$.
- **γ):** Θεωρούμε την εξής ακολουθία δοκιμών. Στη n-οστή δοκιμή ($n = 1, 2, \ldots$) ρίχνουμε n-νομίσματα (αμερόληπτα) και αν όλα είναι Γράμματα τότε θεωρούμε ότι η n-οστή δοκιμή είναι επιτυχία, διαφορετικά αποτυχία. Όλες οι ρίψεις νομισμάτων θεωρούνται ανεξάρτητες. Έστω X το συνολικό πλήθος επιτυχιών (σε όλη την ακολουθία δοκιμών). Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $E(X)$ και την πιθανότητα $P(X = +\infty)$.

<u>Να απαντήσετε σε όσα περισσότερα μπορείτε.</u>

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ