ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Πρόοδος εαρινού εξαμήνου 2019

Θέμα 1: Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση υποσυνόλων του $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Να βρεθούν οι παραγόμενες κλάσεις Dynkin $\delta(\mathcal{C})$, και η παραγόμενη σ–άλγεβρα $\sigma(\mathcal{C})$, όταν

(α): $\mathcal{C} = \big\{\{1,2\},\{5,6\}\big\}$,

(β): $\mathcal{C} = \big\{\{3,4\},\{4,5\}\big\}$.

Θέμα 2: Θεωρούμε τον χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue ορισμένο πάνω στα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$. Έστω (a_n) μία ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to a$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και (A_n) η ακολουθία των διαστημάτων που προκύπτει με $A_n = (-a_n, a_n)$.

(α): Δώστε ένα παράδειγμα ακολουθίας (a_n) έτσι ώστε $\lim A_n = (-a,a)$ και ένα άλλο με $\lim A_n = [-a,a]$.

(β): Να εξεταστεί η οριακή συμπεριφορά της ακολουθίας (A_n). [υπόδειξη: ξεχωρίστε περιπτώσεις ανάλογα με τη σχετική θέση του a ως προς τους όρους της ακολουθίας (a_n)]

(γ): Να εξεταστεί η συμπεριφορά της ακολουθίας $\big(\lambda(A_n)\big)$, δηλ. των μηκών των διαστημάτων A_n.

Θέμα 3: Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος με $\{x\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $x \in X$ και B ένα μη κενό υποσύνολο του X με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Θέτουμε $\nu_B : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ τη συνολοσυνάρτηση με $\nu_B(A) = \nu(AB)/\nu(B)$, όπου ν είναι το αριθμητικό μέτρο.

(α): Να δείξετε ότι το ν_B είναι ένα διακριτό μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathcal{A})$.

(β): Να αποδείξετε ότι το ν_B γράφεται ως κυρτός συνδυασμός κατάλληλων μέτρων Dirac.

Θέμα 4: Διεξάγεται ένα πείραμα τύχης άπειρων κληρώσεων από μία κληρωτίδα που περιέχει σφαιρίδια αριθμημένα από το 0 μέχρι το 9. Η αρχική σύνθεση της κληρωτίδας είναι 9 σφαιρίδια με τον αριθμό 0 και 9 σφαιρίδια με τους υπόλοιπους αριθμούς, όπου κάθε ένας εμφανίζεται μία φορά. Θέτουμε A_n^i, $n \geq 1$, $i = 0,1,\ldots,9$, το ενδεχόμενο στην n-κλήρωση να επιλεγεί ο αριθμός i.

(α): Υποθέτουμε ότι στην πρώτη κλήρωση επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κληρωτίδα με βάση την αρχική σύνθεσή της. Μετά το πέρας κάθε κλήρωσης προστίθενται 9 σφαιρίδια, ένα για κάθε αριθμό από το 1 μέχρι το 9 και η επόμενη κλήρωση συνίσταται πάλι σε μία τυχαία επιλογή ενός σφαιριδίου με την καινούρια σύνθεση. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A_n^i)$, $n \geq 1$, $i = 0,1,\ldots,9$.

(β): Υπολογίστε την πιθανότητα να επιλεγεί άπειρες φορές το 0.

(γ): Υπολογίστε την πιθανότητα να σχηματιστεί ο αριθμός του κινητού σας τηλεφώνου $k_1 k_2 \ldots k_{10}$ άπειρες φορές στην ακολουθία των επιλεγμένων αριθμών.

(δ): Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι μπορεί να τροποποιήσει αυτό το πείραμα τύχης καταρρίπτοντας το νόμο $0-1$ του Kolmogorov. Συγκεκριμένα, ισχυρίζεται ότι αν στο τέλος κάθε κλήρωσης αφαιρεί το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε με πιθανότητα $1/2$ τότε με πιθανότητα 1 η κληρωτίδα θα μείνει με έναν μόνο αριθμό και άρα η πιθανότητα p_i να τερματίσει στον αριθμό i θα είναι $0 < p_i < 1$, παραβιάζοντας έτσι το νόμο $0-1$ του Kolmogorov. Τί είναι σωστό και τί λάθος σε αυτούς τους ισχυρισμούς;

Επιλέξτε 2 θέματα από 1-3 και υποχρεωτικά το 4.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ! ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2h30m