Πρόοδος - Λύσεις

Θέμα 1

(α) $\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{5,6\}\}$.

Προφανώς $\delta(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C}')$, όπου $\mathcal{C}' = \{\{1,2\}, \{5,6\}, \emptyset\}$ και η $\mathcal{C}'$ είναι π-σύστημα. Από το Θεώρημα Dynkin έχουμε

$$\delta(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C}') = \sigma(\mathcal{C}') = \sigma(\mathcal{C}).$$

Επειδή $\{3,4\} = (\{1,2\} \cup \{5,6\})^c \in \sigma(\mathcal{C})$ έχουμε επίσης $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A})$, όπου $\mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$, αποτελεί <u>διαμέριση</u> του $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \left\{ A \subset X : A = \bigcup_{i \in I} A_i, \ I \subset \{1,2,3\}, \ \begin{matrix} A_1 = \{1,2\} \\ A_2 = \{3,4\} \\ A_3 = \{5,6\} \end{matrix} \right\}$$

(β) $\mathcal{C} = \{\{3,4\}, \{4,5\}\}$.

Όπως πριν,

$$\left. \begin{aligned} \{4\} &= \{3,4\} \cap \{4,5\} \in \sigma(\mathcal{C}) \\ \{3\} &= \{3,4\} \setminus \{4\} \in \sigma(\mathcal{C}) \\ \{5\} &= \{4,5\} \setminus \{4\} \in \sigma(\mathcal{C}) \\ \{1,2,6\} &= \{3,4,5\}^c \in \sigma(\mathcal{C}) \end{aligned} \right\} \Longrightarrow$$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{διαμέριση του } X}), \text{ όπου } \mathcal{A} = \{\underbrace{\{1,2,6\}}_{A_1}, \underbrace{\{3\}}_{A_2}, \underbrace{\{4\}}_{A_3}, \underbrace{\{5\}}_{A_4}\}.$$

Άρα

$$\sigma(\mathcal{C}) = \left\{ A \subset X : A = \bigcup_{i \in I} A_i, \ I \subset \{1,2,3,4\} \right\}$$

Όμως

$$\delta(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \underbrace{\{3,4\}}_{A}, \underbrace{\{1,2,5,6\}}_{A^c}, \underbrace{\{4,5\}}_{B}, \underbrace{\{1,2,3,6\}}_{B^c}, X\},$$

αφού $A^c, B^c \in \delta(\mathcal{C})$, και η παραπάνω οικογένεια είναι κλάση Dynkin.

Θέμα 2

Εδώ υποθέτουμε ότι $a > 0$ (διευκρινίστηκε προφορικά).

(α) Θέτουμε $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, και έχουμε

$$\lim_n A_n = \lim_n \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \overset{(A_n)\nearrow}{=} \bigcup_n A_n = (-1, 1) = (-a, a),$$

όπου $a = \lim_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$.

Επίσης αν $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, τότε $a = \lim_n a_n = 1$, και

$$\lim_n A_n = \lim_n \left(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \overset{(A_n)\searrow}{=} \bigcap_n A_n = [-1, 1] = [-a, a].$$

(β) Κατ'αρχήν είναι φανερό ότι

$$(-a, a) \subseteq \liminf_n A_n \subset \limsup A_n \subseteq [-a, a], \quad (1).$$

λόγω ότι $\lim_n a_n = a$ και $A_n = (-a_n, a_n)$, $\forall n \geq 1$.

Έστω $I = \{n : a < a_n\}$ και $I^c = \{n : a_n \leq a\}$.

Έχουμε $a \in \limsup_n A_n \iff |I| = +\infty$ (I, απειροσύνολο).

$a \in \liminf_n A_n \iff |I^c| < +\infty$ (I^c, πεπερασμένο).

Σε συνδυασμό με την (1) και τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_n A_n = \begin{cases} [-a, a], & \text{αν } a < a_n, \text{ τελικά } \forall n. \ (\Leftrightarrow I^c \text{ πεπερασμένο}) \\ \nexists, & \text{αν } |I| = +\infty \text{ και } |I^c| = +\infty \\ (-a, a), & \text{αν } |I| < +\infty, \text{ δηλ. τελικά } \forall n, \ a_n \leq a \end{cases}$$

(γ) Ανεξάρτητα από την ύπαρξη του $\lim_n A_n$, έχουμε προφανώς ότι

$$\lim_n \left(\lambda(A_n)\right) = \lim_n \lambda\left((-a_n, a_n)\right) = \lim_n 2a_n = 2a.$$

$\nu(B)$

καλά ορισμένη συνολοσυνάρτηση, αφού $\nu(B) > 0$ $\big(B \neq \emptyset$, και $\nu(B) = |B|\big)$, και επιπλέον $0 \leq \nu_B(A) \leq 1$.

πεπερασμένο

Έχουμε (i) $\nu_B(\emptyset) = \dfrac{\nu(\emptyset)}{\nu(B)} = 0$ και αν (A_n)+ στην $\mathcal{A}$,

τότε $\nu_B\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \dfrac{\nu\big((\bigcup_n A_n) \cap B\big)}{\nu(B)} = \dfrac{\nu\big(\bigcup_n A_n B\big)}{\nu(B)} \overset{(A_nB)+}{=} \dfrac{\sum_n' \nu(A_n B)}{\nu(B)}$

$= \sum_n' \dfrac{\nu(A_n B)}{\nu(B)} = \sum_n' \nu_B(A_n)$ (σ-προσθετικότητα).

Άρα η ν_B είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

Έχουμε $\nu_B(X) = \dfrac{\nu(XB)}{\nu(B)} = \dfrac{\nu(B)}{\nu(B)} = 1$, άρα μέτρο πιθανότητας

και είναι και διακριτό, αφού $\nu_B(B) = 1$, και το B είναι πεπερασμένο.

(β) Αν $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, τότε

$$\nu_B = \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{1}{n} \delta_{b_i}$$

, και άρα συμπίπτει με το διακριτό ομοιόμορφο μέτρο στο B. Πράγματι, αν $A \in \mathcal{A}$, τότε

$$\nu_B(A) = \frac{\nu(AB)}{\nu(B)} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in B}{}' \mathbb{1}_A(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}{}' \mathbb{1}_A(b_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}{}' \delta_{b_i}(A).$$

Θέμα 4

Έχει λυθεί στο Μάθημα 11 (Εαρινό 2019).