Θέμα 1: α) $\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του B. Θα δείξουμε ότι είναι σ-άλγεβρα επί του B.

(i) $\emptyset = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{\emptyset}} \cap B \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_B$, άρα $\mathcal{A}_B \neq \emptyset$.

(ii) Έστω $\Gamma \in \mathcal{A}_B$. Τότε $\Gamma = A \cap B$, για κάποιο $A \in \mathcal{A}$.
Συμπεραίναμε ότι $B \setminus \Gamma = B \cap (A \cap B)^c$
$= B \cap (A^c \cup B^c) = (B \cap A^c) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset} = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{A^c}} \cap B$,

διότι $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα, και άρα $B \setminus \Gamma \in \mathcal{A}_B$.

(iii) Έστω $(\Gamma_n) \subset \mathcal{A}_B \Rightarrow \Gamma_n = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{A_n}} \cap B$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \bigcup_n \Gamma_n = \bigcup_n (A_n \cap B) = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{\left(\bigcup_n A_n\right)}} \cap B$ (αφού $\mathcal{A}$-σ-άλγεβρα).

Άρα $\bigcup_n \Gamma_n \in \mathcal{A}_B$.

Από (i), (ii) + (iii) $\Rightarrow \mathcal{A}_B$ είναι σ-άλγεβρα επί του B.

(β) $P_B : \mathcal{A}_B \to \mathbb{R}$ με $P_B(\Gamma) = \dfrac{P(\Gamma)}{P(B)}$, $\forall \Gamma \in \mathcal{A}_B$.

Καταρχήν $\underline{B \in \mathcal{A}}$ με $\underline{P(B) > 0}$ και
$\Gamma \in \mathcal{A}_B \Rightarrow \Gamma = A \cap B$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \underline{\Gamma \in \mathcal{A}}$ (αφού $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα επί του Ω).

Συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{P(\Gamma)}{P(B)}$ είναι καλά ορισμένη ποσότητα.

Επιπλέον $\dfrac{P(\Gamma)}{P(B)} \geq 0$.

Αποδεικνύουμε ότι είναι μέτρο πιθανότητας.

(i) $P_B(B) = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ ✓

(ii) σ-προσθετικότητα:

A_ν (Γ_n) + στην $\mathcal{A}_B$ (αμοιβ. ξένων ανά δύο), τότε

$$P_B\left(\bigcup_n \Gamma_n\right) = \frac{P(\bigcup_n \Gamma_n)}{P(B)} \overset{\sigma\text{-προσθ του } P}{=} \frac{\sum_n P(\Gamma_n)}{P(B)} = \sum_n \frac{P(\Gamma_n)}{P(B)}$$

$$= \sum_n P_B(\Gamma_n) \quad ✓$$

Θέμα 2

(a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, όπου $\mathcal{C}$ είναι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, δηλ. η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από αυτά.

(β) Έχουμε $(-\infty, a), (-\infty, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, αφού είναι ανοικτά διαστήματα, και άρα ανοικτά σύνολα.
Τότε $[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, αφού οι σ-άλγεβρες είναι κλειστές στις συνολοθεωρητικές διαφορές.

(γ) $A_n = \left[\frac{1}{n}, 3 + (-1)^n\right)$, $n \geq 1$.

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \left[\frac{1}{k}, 3 + (-1)^k\right)$$

$$= \bigcap_{n \geq 1} (0, 4) = (0, 4), \quad \text{αφού}$$

$$\bigcup_{k \geq n} \left[\frac{1}{k}, 3 + (-1)^k\right) = (0, 4), \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \left[\frac{1}{k}, 3+(-1)^k\right) = \bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, 2\right)$$

$= (0,2)$ όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\bigcap_{k\geq n} \left[\frac{1}{k}, 3+(-1)^k\right) = \left[\frac{1}{n}, 2\right)$$

Παρατηρούμε ότι $\limsup_n A_n \neq \liminf_n A_n$ και άρα $\nexists \lim A_n$.

δ) Θεωρούμε την υπακολουθία $(A_{2n-1})_{n\geq 1}$, της (A_n).

Έχουμε $(A_{2n-1})_{n\geq 1} = \left(\left[\frac{1}{2n-1}, 2\right)\right)_{n\geq 1}$

Είναι αύξουσα, και άρα $\exists \lim_n A_{2n-1} = \bigcup_n \left[\frac{1}{2n-1}, 2\right)$

$= (0,2) = \liminf_n A_n$. Άρα

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) = \mu\left(\lim_n A_{2n-1}\right) \overset{(A_{2n-1})\nearrow}{=} \lim_n \mu(A_{2n-1})$$

$= \liminf_n \mu(A_{2n-1}) \geq \liminf_n \mu(A_n)$, (1).

αφού (A_{2n-1}) υπακ. της $(A_n) \Rightarrow \{\mu(A_{2k-1})\}_{k\geq n} \subseteq \{\mu(A_k)\}_{k\geq n}$

$$\inf_{k\geq n}\{\mu(A_{2k-1})\} \geq \inf_{k\geq n}\{\mu(A_k)\}.$$

Έχουμε πάντα ότι $\mu\left(\liminf A_n\right) \leq \liminf \mu(A_n)$ (2)

Από (1) + (2) έχουμε την ισότητα, δηλ.

$$\mu\left(\liminf_n A_n\right) = \liminf_n \mu(A_n)$$

Θα δείξουμε επίσης ότι
$$\limsup \mu(A_n) = \mu\left(\limsup_n A_n\right).$$

Προσοχή! $\limsup \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_n A_n\right)$
πάντα για πεπερασμένα μέτρα, όχι όμως για αυθαίρετα μέτρα (θυμηθείτε $A_n = [n, +\infty)$ και $\mu = \lambda$, το μέτρο Lebesgue).

Εδώ όμως $A_n \subseteq \limsup_n A_n \quad , \forall n \geq 1 \Rightarrow$
$$\mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup A_n\right) \quad , \forall n \geq 1 \Rightarrow$$
$$\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup A_n\right) \quad (3)$$

Επιπλέον $A_{2n} = \left[\frac{1}{2n}, 4\right) \quad , \forall n \geq 1 \Rightarrow$

$(A_{2n}) \uparrow$ και $\lim_n A_{2n} = \bigcup_n A_{2n} = (0,4)$.

άρα $\mu\left(\limsup_n A_n\right) = \mu\left(\lim_n A_{2n}\right) \overset{(A_{2n})\uparrow}{=} \lim_n \mu(A_{2n})$

$$= \limsup_n \mu(A_{2n}) \leq \limsup_n \mu(A_n) \quad (4).$$

Απο (3) + (4) έχουμε την ισότητα.

(ε) • Προφανώς αν $\mu = \lambda$, δηλ. το μέτρο Lebesgue, έχουμε
$$\lambda\big((0,2)\big) = 2 < 4 = \lambda\big((0,4)\big).$$

• Αν δ_3 είναι το μέτρο Dirac στο 3, τότε
$\delta_3\big((0,2)\big) = 0 < 1 = \delta_3\big((0,4)\big)$. Τα Dirac είναι μέτρα πιθ.
Πολλά άλλα βέβαια, π.χ. η ομοιόμορφη κατανομή στο (0,4).
$$\mu(A) = \frac{\lambda\big(A \cap (0,4)\big)}{4} \quad , \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad , \text{όπου } \lambda \text{ το μέτρο Lebesgue.}$$

(γ) Θέτουμε $P(A) = \frac{\lambda(A \cap (0,2))}{2}$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Αντιστοιχεί σε μέτρο πιθανότητας που είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,2)$.
Ισχύει $P((0,2)) = 1 = P((0,4))$.

Θέμα 3

(α) • $X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff P(\lim X_n = X) = 1$

όπου $\{\lim X_n = X\} = \{\omega \in \Omega : \exists \lim X_n(\omega) \text{ και } \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}$.

• $X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0,\ n \to \infty$.

• $X_n \xrightarrow{L^0} X \iff P(X_n \neq X) \longrightarrow 0,\ n \to \infty$.

• $X_n \xrightarrow{L^p} X \iff E|X_n - X|^p \longrightarrow 0,\ n \to \infty,$

όπου $X_n, X \in L^p$, $\forall n \geq 1$, δηλ. $E|X_n|^p, E|X|^p < +\infty\ (\forall n \geq 1)$.
(κοινός τρόπος ορισμού για $0 < p < 1$ και $p \geq 1$).
Για την $\xrightarrow{L^0}$, προϋποθέτουμε ότι $P(X_n \in \mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Αν $X_n \overset{a.s}{=} X$, τότε $P(X_n = X) = 1 \Rightarrow P(X_n \neq X) = 0$, $\forall n \geq 1$
Άρα $P(X_n \in \mathbb{R}) = P(X_n \in \mathbb{R}, \underset{\text{πθ } 1}{X_n = X}) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$.
Τελικά $X_n \in L^0$, και
$P(X_n \neq X) = 0 \longrightarrow 0,\ n \to \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^0} X$. (iii)

Επιπλέον $X_n \xrightarrow{L^0} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ (ii)

Μάλιστα έστω $\varepsilon>0$, έχουμε:

$$0 \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(X_n \neq X) = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

δηλ. $P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, $\forall n \geq 1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 < +\infty$$, και άρα

$X_n \xrightarrow{c} X$ (συγκλίνει πλήρως στη X).

Απο αυτό έπεται ότι $P(\lim_n X_n = X) = 1$, δηλ. $X_n \xrightarrow{a.s} X$ (i), όπως έχει δειχθεί στη θεωρία.

Οι υποθέσεις δεν αρκούν για να συμπεράναμε ότι $X_n \xrightarrow{L^p} X$, αφού θα πρέπει $X_n, X \in L^p$.

Έχουμε $X \in L^0 \not\Rightarrow X \in L^p$, για καμία τιμή του $p>0$. Μάλιστα είδαμε παράδειγμα με $X \in L^0$, αλλά $X \notin L^p$, $\forall p>0$.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>: Θέταμε Y, με $P(Y=n) = \frac{c}{n^2}$, $\forall n \geq 1$.

οπου $c = \frac{6}{\pi^2}$. Η τ.μ. $X = e^Y$, εύκολα προκύπτει ότι έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.

<u>Παρατήρηση</u>: $X_n \xrightarrow{a.s} X$ δείχνεται και άμεσα ως εξής:

Έστω $A_n = \{X_n = X\}$, $\forall n \geq 1$. Έχουμε $P(A_n) = 1$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow$

$P(\bigcap_n A_n) = 1$ (πράγματι $P(\bigcup_n A_n^c) \leq \sum_n \underbrace{P(A_n^c)}_{=0} = 0$)

Όμως $\bigcap_n A_n \subset \{\lim X_n = X\} \Rightarrow P(\lim X_n = X) = 1$

(β) Έχουμε $E(X^2) < +\infty \Rightarrow E|X| < +\infty$.
και $|X_n| = |X| \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}} \leq |X| \Rightarrow$

$E|X_n| \leq E|X| < +\infty$, άρα υπάρχουν $E(X_n)$ και $E(X)$.
Επιπλέον έχουμε,
$$X_n(\omega) = X(\omega) \mathbb{1}_{\{|X(\omega)| \leq n\}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} X(\omega) \mathbb{1}_{\{|X(\omega)| < +\infty\}}$$
$E|X| < +\infty \Rightarrow P(|X| < +\infty) = 1$, άρα

$X_n \xrightarrow{a.s} X$.
Όμως $|X_n| \leq |X|$, και $E|X| < +\infty$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $E(X_n) \to E(X)$.

(γ) Έστω $X = \#$ επιτυχιών στην ακολουθία δοκιμών.
Αν $A_n = \{$επιτυχία στην n-δοκιμή$\}$
και $A_{n,i} = \{$Γράμματα στην i-ρίψη της n-δοκιμής$\}$,
Τότε $P(A_n) = P(A_{n1} A_{n2} \cdots A_{nn}) \overset{\text{ανεξ}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(A_{n,i})$

$\overset{\text{αμφ. νόμισμα}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Έχουμε $X = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, όπου $\mathbb{1}_{A_n}$ είναι η δείκτρια

συνάρτηση του A_n $\forall n \geq 1$. Άρα
- $$E(X) = E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right) \overset{B-L}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} E(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$
- Επίσης $E(X) = 1 < +\infty \Rightarrow P(X = +\infty) = 0$

Προκύπτει και από 1ο Λήμμα Borel-Cantelli, αφού $\{X = +\infty\} = \limsup_n A_n$ και $\sum_n P(A_n) = 1 < +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$.