Πιθανότητες ΙΙ / Τρέβεζας

<u>Πρόταση</u>: Έστω ο χώρος μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ με $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$ (πεπ. μέτρο). Θέτουμε: $F_\mu : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$ και την καλούμε <u>συνάρτηση κατανομής</u> του μέτρου μ. Τότε:

i) $F_\mu \uparrow$

ii) F_μ δεξιά συνεχής

iii) $F_\mu(-\infty) = 0$ και $F_\mu(+\infty) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty$

↳ άνω φραγμένη (και κάτω φραγ, προφανώς)

<u>Απόδειξη</u>

i) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \underset{\uparrow \text{ μονοτ. μετρ.}}{\overset{(-\infty, x] \subset (-\infty, y]}{\leq}} \mu((-\infty, y]) =$

$= F_\mu(y) \Rightarrow F_\mu \uparrow$

ii) $F_\mu \uparrow \Rightarrow \exists$ τα πλευρικά όρια και άρα παίρνουμε $(x_n)\downarrow$ και $(x_n) \downarrow x$ συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$

($\forall x \in \mathbb{R}$ μπορώ να βρω τέτοια ακολ)

Έχουμε $F_\mu(x+) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_n]) \underset{x_n \downarrow \Rightarrow (-\infty, x_n] \downarrow \text{ ακολ. συνόλων}}{\overset{\mu \text{ πεπερ μέτρο } \uparrow}{=\!=\!=}}$

$$= \mu\left(\bigcap_n (-\infty, x_n]\right) = \mu((-\infty, x]) = F_\mu(x) \Rightarrow$$

$\to F_\mu$ δεξιά συνεχής.

iii) αντίστοιχα παίρνουμε $A_n = (-\infty, -n]$, $n \geq 1$. Έχουμε $(A_n)\downarrow$ και

$$F_\mu(-\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty,-n]) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \xrightarrow[+(A_n)\downarrow]{\mu \text{ πεπ. μέτρο}} \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \mu(\emptyset) \Rightarrow$$

$\Rightarrow F_\mu(-\infty) = 0.$

Αντίστοιχα, θεωρούμε τα $A_n = (-\infty, n]$, $n \geq 1$ και έχουμε ότι $(A_n)\uparrow$, $\bigcup_n A_n = \mathbb{R}$,

$$F_\mu(+\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty,n]) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \xrightarrow[+(A_n)\uparrow]{\mu \text{ πεπ. μέτρο}} \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty.$$

<u>Παρατήρηση</u>: $\mu \longmapsto F_\mu$ τη συνάρτηση κατανομής της. Από προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι η F_μ χαρακτηρίζει το μέτρο (το καθορίζει μονοσήμαντα)

<u>Ερώτημα</u>: Από τις προηγούμενες ιδιότητες της F_μ, αν κάποιος μου δώσει μια F που τις ικανοποιεί, μπορώ να κατασκευάσω μέτρο; ΝΑΙ

Υπενθυμίζουμε ότι ένα <u>εξωτερικό μέτρο</u> $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ είναι μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί:

i) $\varphi(\emptyset) = 0$

ii) φ μονότονη

iii) σ-υποπροσθετική

<u>Ορισμός</u> (φ-μετρήσιμα σύνολα) Αν $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ εξωτερικό μέτρο, τότε το $B \subset X$ καλείται <u>φ-μετρήσιμο</u>, αν

$$\forall A \subset X \quad \varphi(A) = \varphi(AB) + \varphi(\underbrace{AB^c}_{A\setminus B}).$$

Θέτουμε

$$\mathcal{M}_\varphi = \{ B \subset X : B \text{ είναι } \varphi\text{-μετρήσιμο} \}.$$

Παράδειγμα: Θέτουμε $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ με

$$\varphi(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ υπεραριθμήσιμο} \\ 0, & A \text{ αριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Το φ είναι μέτρο? ΌΧΙ

Πράγματι, $\mathbb{R} = \underbrace{(-\infty,0]}_{\text{υπεραρ.}} \cup \underbrace{(0,+\infty)}_{\text{υπεραρ.}}$, και αν φ ήταν μέτρο,

$$1 = \underbrace{\varphi(\mathbb{R})}_{\text{υπερ.}} = \varphi((-\infty,0]) + \varphi((0,+\infty)) = 1+1 = 2 \quad \text{άτοπο.}$$

Άρα το φ δεν είναι μέτρο.

Σχόλια: (1) Για νδο $B \in \mathcal{M}_\varphi$, αρκεί νδο

$$\varphi(A) \geq \varphi(AB) + \varphi(AB^c) \quad \forall A \subset X,$$

διότι $A = AB \cup AB^c$ και άρα

$$\varphi(A) = \varphi[(AB) \cup (AB^c)] \underset{\sigma\text{-υποπρ.}}{\leq} \varphi(AB) + \varphi(AB^c) \quad \text{(ισχύει πάντα)}$$

(2) Αν $B \subset X$ με $\varphi(B) = 0$, τότε

$$\varphi(A) \geq \underbrace{\varphi(\underbrace{AB}_{\subset B})}_{0} + \varphi(AB^c) \quad (\text{ισχύει αφού } AB^c \subset A)$$

Θδο φ είναι εξωτερικό μέτρο

i) $\varphi(\underbrace{\emptyset}_{\text{αριθμ}}) = 0$

ii) Αν $A \subset B \xrightarrow{?} \varphi(A) \leq \varphi(B)$

<u>1η περ</u> : Αν το A αριθμήσιμο ισχύει

<u>2η περ</u> : Αν το A υπεραριθμήσιμο $\Rightarrow B$ υπεραριθμήσιμο $\Rightarrow \varphi(A) = 1 = \varphi(B)$ ✓

iii) Έστω (A_n) στην $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\varphi\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \varphi(A_n)$$

<u>1η περ</u> : Αν A_n αριθμ $\forall n \Rightarrow \bigcup_n A_n$ είναι αριθμήσιμο $\Rightarrow \varphi\left(\bigcup_n A_n\right) = 0 =$

$= \varphi(A_n) \ \forall n$ ✓

<u>2η περ</u>: Αν A_{n_0} υπεραριθμήσιμο για κάποιο $n_0 \geq 1 \Rightarrow$

$\bigcup_n A_n \supset A_{n_0}$ είναι υπεραριθμήσιμο και άρα

$$\varphi\left(\bigcup_n A_n\right) = 1 \leq \underbrace{\varphi(A_{n_0})}_{=1} + \sum_{n \neq n_0} \varphi(A_n) = \sum_n \varphi(A_n)$$

<u>Ισχυρισμός</u> :

$$\mathcal{M}_\varphi = \{ B \subset \mathbb{R} : B \text{ αριθμήσιμο ή } B^c \text{ αριθμήσιμο} \}$$

Αν B αριθμήσιμο $\Rightarrow \varphi(B) = 0 \xrightarrow{\text{Σχόλιο i)}} B \in \mathcal{M}_\varphi$

Αν B^c αριθμήσιμο και έστω $A \subset \mathbb{R}$: $\varphi(A) \geq \varphi(\underbrace{AB}_{\subset A}) + \underbrace{\varphi(\overbrace{AB^c}^{\text{αριθμ}})}_{0}$ ✓

 $AB^c \subset B^c$

Άρα αν B ή B^c αριθμήσιμο $\rightarrow B \in \mathcal{M}_\varphi$

Έστω B, με B υπεραριθμήσιμο και B^c υπεραριθμήσιμο. Τότε πρέπει: ~~προκύπτει~~:

$$\varphi(A) \geq \varphi(AB) + \varphi(AB^c) \quad \forall A \subset \mathbb{R}$$

Όμως, αν θέσω $A = \mathbb{R}$,

$$\varphi(\mathbb{R}) = 1$$

δεν ισχύει

$$\varphi(\mathbb{R}B) + \varphi(\mathbb{R}B^c) = \varphi(B) + \varphi(B^c) = 1 + 1 = 2$$

Τελικά, η $\mathcal{M}_\varphi$ ήταν η συλλογή που εικάσαμε στην αρχή. Έχουμε δείξει ότι αυτή η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Το $N \subset X$ καλείται <u>μ-μηδενικό</u> (μηδενικό ως προς το μέτρο μ) αν $\exists A \in \mathcal{A}$ με $N \subset A$ (το καπακώνει) και $\mu(A) = 0$.

Συμβολίζω $\mathcal{A}_\mu^0 = \{N \subset X : N \text{ μ-μηδενικό}\}$

~~Το μέτρο μ~~

<u>Ορισμός</u>: Το μέτρο μ θα καλείται <u>πλήρες μέτρο</u>, αν $\mathcal{A}_\mu^0 \subset \mathcal{A}$. Συμβολίζω

$$\mathcal{A}_\mu = \{A \subset X : \exists E, F \in \mathcal{A} : E \subset A \subset F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0\}$$

και καλείται η <u>πλήρωση της $\mathcal{A}$ ως προς το μέτρο μ</u>.

Αν $A \in \mathcal{A}_\mu$, τότε $\exists E \in \mathcal{A}$ και $N \in \mathcal{A}_\mu^0 : A = E \cup N$.

κάθε στοιχείο πλήρωσης στοιχείο $\mathcal{A}$ με αμελητέο σύνολο μέτρου 0.

συμμετρική διαφορά είναι σαν πρόσθεση σε σύνολα.

Τις παραπάνω δομές θέλω να τις αντιστοιχίσω με δακτυλίους Boole

έχω ουδέτερο στοιχείο $\emptyset$

Αν θεωρήσω $\cup$ σαν πρόσθεση $A \cup \emptyset = A$.

Θα έπρεπε να $\exists B: A \cup B = \emptyset$, αλλά $\nexists$

Αν πάρω "Δ" σαν πρόσθεση, $A \Delta A = \emptyset$ έχει αντίθετο τον εαυτό τ.

Είναι η σωστή πράξη που μπαίνει για το δεξί μέλος καλά.

Άλλη αναπαρ: αν $A \in \mathcal{A}_\mu$, $\exists E \in \mathcal{A}$ και $N \in \mathcal{A}_\mu^0 : A = E \Delta N$

Για μ-μηδενικά $\in \emptyset$.

Αν δω σαν πρόσθεση το "Δ", πάρε $E + \mathcal{A}_\mu^0$ (ρόλος συμπλόκου) και τα σύμπλοκα αυτά τα λέμε σύμπλοκα σ-ιδεώδη. (Τα ορίζω πάνω σε σ-αλγ ή στο $\mathcal{P}(X)$)

Αν $\mathcal{I}$ σ-ιδεώδες, έχει τις ιδιότητες

i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

ii) αν $N \in \mathcal{I}$ και $M \subset N \Rightarrow M \in \mathcal{I}$ (μηδενικά σύνολα, αν είχε μέτρο 0, θα ήταν στη συλλογή)

iii) αν (A_n) στο $\mathcal{I} \Rightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{I}$ τα θέλουμε τα υποσύνολα αλλά μέσα σε σ-αλγ.

αυτά παίζουν ρόλο σε κλάσεις ισοδυναμίας

<u>Άσκηση</u>: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ να φτιάξω απόσταση σύνολα

$d(\underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{A}}, \underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{B}}) = \mu(A \Delta B)$ → άρα d ψευδομετρική σε αρχ χώρο.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε,

i) η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$

ii) αν $\bar{\mu}: \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty]$ με $\bar{\mu}(A) = \mu(E)$, τότε:

το $\bar{\mu}$ είναι καλά ορισμένο πλήρες μέτρο και $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

iii) το $\bar{\mu}$ είναι μοναδικό ως επέκταση του μ στην $\mathcal{A}_\mu$

iv) το μ είναι πλήρες $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$

<u>Θεώρημα</u> (Καραθεοδωρή): Έστω φ ένα εξωτερικό μέτρο στο X. Τότε η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι <u>σ-άλγεβρα</u> επί του X και $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ ο περιορισμός του φ στο $\mathcal{M}_\varphi$ είναι <u>πλήρες μέτρο</u>.

(<u>Απόδειξη</u>: σελ 25-26 Καφ 8 Νεγρεπόντης)

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $F: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που είναι

i) αύξουσα

ii) δεξιά συνεχής

iii) $F(-\infty) = 0$ και $F(+\infty) < +\infty$ (δηλ. άνω φραγμένο).

Τότε $\exists$ ένα μοναδικό πεπερασμένο μέτρο Borel (το θεωρώ πάνω στα σύνολα Borel) $\mu_F = \mu$ στο $\mathbb{R}$:

$$\mu((-\infty, x]) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Το μέτρο μ καλείται το μέτρο Lebesgue - Stieltjes που παράγεται από την F.

<u>Απόδειξη</u>

(1) Το $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{\mu^*(A)} = \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} (F(\beta_n) - F(a_n)) : A \subset \bigcup_n (a_n, \beta_n], \ a_n, \beta_n \in \mathbb{R} : a_n < \beta_n \right\}$

αποτελεί εξωτερικό μέτρο

(2) $\mu^*((-\infty, x]) = F(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$

(4) είναι μοναδικό το μέτρο μ.

Για το (1)

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$. Από τη δεξιά συνέχεια της F προκύπτει εύκολα. Έστω ε>0 ~~Μπορο~~ Μπορούν να επιλεγούν $\{(a_n, \beta_n]\}_{n \geq 1} : F(\beta_n) - F(a_n) < \varepsilon/2^n,\ n \geq 1$:

$\Rightarrow \emptyset \subset \bigcup_n (a_n, \beta_n]$ και $\sum_n F(\beta_n) - F(a_n) \leq \varepsilon$ τυχόν $\Rightarrow$

; δεξιά συνέχεια επιτρέπει να πάμε όσο κοντά θέλω.

$\Rightarrow \mu^*(\emptyset) = 0$

ii) αν $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ προφανές καθώς οποιοδήποτε κάλυμμα του B είναι και κάλυμμα του A (αφού $A \subset B$)

iii) σ-υποπροσθετικότητα. Θέλουμε νδο

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

Έστω $\{(a_{n,i}, \beta_{n,i}]\}_{i \geq 1}$ $\forall n \geq 1$ κάλυμμα του A_n:

$$\sum_i \left(F(\beta_{n,i}) - F(a_{n,i})\right) < \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$$

Άρα

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \bigcup_i (a_{n,i}, \beta_{n,i}] \text{ και } \sum_n \sum_i F(\beta_{n,i}) - F(a_{n,i}) < \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \text{ τυχόν}} \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$$

Από i), ii), iii) $\Rightarrow$ μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

(2) $\mu^*((-\infty, x]) = F(x)$

$\mu^*((-\infty,x]) \leq F(x)$

$(-\infty, x] = \bigcup_{n\geq 0} (x-n-1, x-n]$ (άρα αποτελεί και κάλυψη $(-\infty,x]$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (-\infty, x] \subset \bigcup_{n \geq 0} (x-n-1, x-n] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu^*((-\infty,x]) \leq \sum_{n\geq 0} \big(F(x-n) - F(x-n-1)\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(F(x-k) - F(x-k-1)\big) \overset{\text{τηλεσκοπική}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \big(F(x) - F(x-n-1)\big) = F(x) - \underbrace{F(-\infty)}_{0} = F(x).$$

$\mu^*((-\infty,x]) \geq F(x)$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\{(a_n, \beta_n]\}_{n\geq 1}$: $(-\infty, x] \subset \bigcup_n (a_n, \beta_n]$. Λόγω ότι

$F(-\infty) = 0 \Rightarrow \exists y < x : F(y) < \varepsilon$.

Επίσης, από τη δεξιά συνέχεια της F, $\exists \gamma_n > 0$:

$F(\beta_n + \gamma_n) - F(\beta_n) < \varepsilon/2^n, \ \forall n \geq 1$.

Τότε $[y, x] \subset \bigcup_n (a_n, \beta_n + \gamma_n)$ (ανοιχτό κάλυμμα συμπαγούς). Λόγω συμπάγειας του

$[y,x]$, $\exists m \geq 1$:

$[y, x] \subset \bigcup_{n=1}^{m} (a_n, \beta_n + \gamma_n)$

Επαγωγικά, δείχνεται ότι

$$F(x)-F(y) \le \sum_{n=1}^{m} F(\beta_n+\gamma_n)-F(a_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) \le F(y) + \sum_{n\ge 1}\big(F(\beta_n+\gamma_n)-F(a_n)\big) =$$

$$= F(y) + \sum_{n\ge 1}\big(\underbrace{F(\beta_n+\gamma_n)-F(\beta_n)}_{\le \varepsilon/2^n}\big) + \sum_{n\ge 1}\big(F(\beta_n)-F(a_n)\big) =$$

$$= \varepsilon+\varepsilon+\sum_{n\ge 1}\big(F(\beta_n)-F(a_n)\big) \underset{\text{τυχόν κάλυμμα}}{\overset{\text{τυχόν } \varepsilon \,+}{\Longrightarrow}}$$

$$= F(x) \le \mu^*((-\infty,x])$$

(3) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. Αρκεί νδο $(-\infty,x] \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ $\forall x\in\mathbb{R} \underset{\text{τότε}}{\overset{\text{διότι}}{\Longrightarrow}}$

$$\sigma\{(-\infty,x], x\in\mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$$

$$|||$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Με τον ορισμό, αρκεί νδο

$$\forall A\subset\mathbb{R} \quad \mu^*(A) \ge \mu^*(A\cap \overbrace{(-\infty,x]}^{B}) + \mu^*(A\cap \overbrace{(x,+\infty)}^{B^c}).$$

<u>Υπόδ</u>: Έστω $(I_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία από $(a_n,\beta_n]$ που καλύπτουν A:

$A\subset \bigcup_n I_n$. Τότε $AB \subset \bigcup_n I_n B$

$$AB^c \subset \bigcup_n I_n B^c$$

τομή με αυτ είτε θα είναι ξανά I_n ή ~~$(a_n, x]$~~ $(a_n, x]$.

Αυτή η σειρά που θα έπαιρνα σε όλα τα F σπάει σε 2 κομμάτια

~~Από κάτω~~ $I_n B$ θα είναι πολλά ακριβώς I_n.

$A \cap (-\infty, x])$ θα έχω $\nearrow (a_n, \beta_n]$ ή $(x, \beta_n]$

Μόνο πρόβλημα $A \cap (-\infty, x]$ προσθαφαίρεση $F(x)$

(4) ισχύει η μοναδικότητα αφού έχουμε πει ότι είναι μέτρο ήδη και λόγω Θ. Καραθεοδωρή μέτρο χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα σε αυτά τα διαστήματα. (πρόταση + Θ. Καραθεοδωρή $\Rightarrow$ όπου το μέτρο χαρακτηρίζεται σε αυτήν την οικογένεια των $(-\infty, x]$).

Σχόλιο: Άρα έχουμε αντιστοιχία 1-1 και επί μεταξύ των F που ικανοποιούν τις i), ii) και iii) και των πεπερασμένων μέτρων Borel στο $\mathbb{R}$.