Πιθανότητες ΙΙ | Ζρέβεζας

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας μ.χ. Τότε, αν (A_n) στην $\mathcal{A}$, έχουμε:

i) $\mu(\liminf A_n) \underset{(1)}{\le} \liminf \mu(A_n) \le \limsup \mu(A_n) \underset{(2)}{\le} \mu(\limsup A_n)$

όπου η (2) ισχύει αν $\exists n_0 : \mu\left(\bigcup_{k \ge n_0} A_k\right) < \infty$

ii) αν το μ είναι πεπερασμένο, τότε αν $A_n \to A$ τότε $\mu(A_n) \to \mu(A)$

(ιδιότητα συνέχειας των πεπερασμένων μέτρων)

<u>Απόδειξη</u>

i) $$\mu(\liminf A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n \ge 1} \underbrace{\Big(\bigcap_{k \ge n} A_k\Big)}_{(B_n)\uparrow}\Big) \overset{\text{έχουμε δείξει}}{=\!=\!=} \lim_n \mu(B_n) =$$

$$= \liminf_n \mu(B_n) \overset{B_n \subset A_n}{\le} \liminf_n \mu(A_n) \qquad (1)$$

$$\mu(\limsup A_n) = \mu\Big(\bigcap_n \underbrace{\Big(\bigcup_{k \ge n} A_k\Big)}_{(\Gamma_n)\downarrow}\Big) \underset{\mu(\Gamma_{n_0}) < \infty}{\overset{(*)}{=}} \lim_n \mu(\Gamma_n) = \limsup \mu(\Gamma_n) \ge$$

$$\underset{\Gamma_n \supset A_n}{\ge} \limsup \mu(A_n) \qquad (2)$$

ii) μ: πεπερασμένο $\Rightarrow$ ισχύει και η (2)

Έχουμε ότι $A_n \to A \Rightarrow \liminf A_n = \limsup A_n = A$

Από την (i)

$$\mu(\underbrace{\liminf A_n}_{A}) \le \liminf \mu(A_n) \le \limsup \mu(A_n) \le \mu(\underbrace{\limsup A_n}_{A})$$

Άρα, $\liminf \mu(A_n) = \limsup \mu(A_n) = \mu(A)$

Άρα, $\exists \lim \mu(A_n)$ και $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$.

<u>Σχόλια</u>: i) Δεν ισχύει πάντα ότι $\limsup \mu(A_n) \le \mu(\limsup A_n)$

π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ μέτρο Lebesgue

Θεωρώ την $A_n = [n, n+1)$ $\forall n \ge 1$. Έχουμε $\lambda(A_n) = 1$ $\forall n \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup \lambda(A_n) = 1$

Έχουμε $\limsup A_n = \emptyset$ (κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει το πολύ σε 1 από αυτά)

Άρα, $\lambda(\limsup A_n) = \lambda(\emptyset) = 0 \Leftrightarrow 1 \le 0$ Άτοπο

π.χ. Αν $(B_n)\downarrow$ δεν ισχύει πάντα ότι $\underbrace{\mu(\underbrace{\bigcap_n B_n}_{\emptyset})}_{\emptyset} = \underbrace{\lim \mu(B_n)}_{+\infty}$

ii) Τυπικά ακόμα και το πεπερασμένο μέτρο δεν είναι συνεχής συνολοσυνάρτηση, αλλά μόνο ακολουθιακά συνεχής.

<u>Υποδ</u>: $A_n \to A \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbb{1}_A$ τοπολογία κατά σημείο σύγκλισης $\leftrightarrow$ τοπολογία γινομένου

ομοιόμορφη κατανομή στο 1 $\quad \lambda|_{[0,1]}$ ισχυος

$\{0,1\}^{[0,1]} \to$ χώρος γινόμενο

τοπολογία γινόμενο

Γράφτηκαν κι άλλα για τοπολογίες, δεν υπήρχαν στις σημειώσεις του νήμα

Άσκηση: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $Y \subset X$. Θέτουμε $\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ (οικογένεια υποσυνόλων του Y)

i) Νδο $\mathcal{A}_Y$ είναι σ-άλγεβρα επί του Y

ii) Υποθέστε ότι $Y \in \mathcal{A}$. Τότε, ορίζουμε $\mu|_Y (A) = \mu(A)$ όπου $A \in \mathcal{A}_Y$. Τότε $\mu|_Y$ είναι μέτρο στον $(Y, \mathcal{A}_Y)$

Λύση

i) • $\emptyset \in \mathcal{A}_Y$ $(\emptyset = \emptyset \cap Y)$

• Έστω $\Gamma \in \mathcal{A}_Y \Rightarrow \Gamma = A \cap Y$, για $A \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$Y \setminus \Gamma = Y \setminus (A \cap Y) = Y \cap (A \cap Y)^c = Y \cap (A^c \cup Y^c) = (Y \cap A^c) \cup \underbrace{(Y \cap Y^c)}_{\emptyset} =$$

$$= A^c \cap Y \Rightarrow Y \setminus \Gamma \in \mathcal{A}_Y.$$

• Έστω (Γ_n) στην $\mathcal{A}_Y$, τότε $\exists (A_n)$ στην $\mathcal{A}$: $\Gamma_n = A_n \cap Y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_n \Gamma_n = \bigcup_n (A_n \cap Y) = (\underbrace{\bigcup_n A_n}_{\in \mathcal{A}}) \cap Y \in \mathcal{A}_Y$$

Άρα $(Y, \mathcal{A}_Y)$ μετρήσιμος χώρος

ii) Προφανώς, $\mu|_Y$ διατηρεί τη σ-προσθετικότητα και μάλιστα $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}$, αφού $Y \in \mathcal{A}$ οπότε $\underbrace{A \cap Y}_{\in \mathcal{A}} \subset Y$

Σχόλια: i) Το μέτρο Lebesgue λ που είναι ορισμένο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ μπορούμε να το περιορίσουμε σε οποιοδήποτε Borel-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, π.χ. στο $[0,1]$. Άρα,

$([0,1], (\mathcal{B}(\mathbb{R}))_{[0,1]})$:

$\mathcal{T}_{[0,1]} = \{A \cap [0,1] : A \text{ ανοιχτό στο } \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}[0,1] = \sigma(\mathcal{T}_{[0,1]})$

Άσκηση: i) $(\mathcal{B}(X))_Y = \mathcal{B}(Y)$ όπου $Y \subset X$.

ii) $([0,1], \mathcal{B}[0,1]) \to ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda|_{[0,1]})$

Άσκηση: ΝΔΟ η συνολοσυνάρτηση $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ με $B \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο στην $(X, \mathcal{A})$

Λύση

$\mu_B(A) \geq 0$

$\mu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$

ξένα ανά 2

αν (A_n) ⫫ στην $\mathcal{A}$, $\mu_B(\bigcup_n A_n) = \mu((\bigcup_n A_n) \cap B) = \mu(\bigcup_n \widetilde{(A_n \cap B_n)}) \overset{\sigma\text{-προσ}}{=\!=}$

$= \sum_n \mu(A_n \cap B) = \sum_n \mu_B(A_n)$

Άσκηση: Έστω μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας στον $(X, \mathcal{A})$.

i) Αν $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$, τότε η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin στο X

ii) Νδο η $\mathcal{D}$ μπορεί να μην είναι σ-άλγεβρα

Λύση

i) κλάση Dynkin $\equiv$ λ-κλάση

α) $\mu(X) = \nu(X) = 1$ άρα $X \in \mathcal{D}$

β) αν $A \in \mathcal{D}$ τότε $\mu(A) = \nu(A)$. Έχουμε:

$$\mu(X \setminus A) = 1 - \mu(A) = 1 - \nu(A) = \nu(X \setminus A) \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$$

γ) αν $(A_n)+$ στην $\mathcal{D}$, τότε $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \overset{\sigma\text{-προσθ}}{=\!=} \sum_1' \mu(A_n) \overset{A_n \in \mathcal{D}}{=\!=}$

$$= \sum_1' \nu(A_n) \overset{\sigma\text{-προσθ}}{=\!=} \nu\left(\bigcup_n A_n\right)$$

Άρα έχουμε ότι ικανοποιούνται τα α), β), γ) και η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin

ii) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Έστω

$\mathcal{D} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, X\}$ και

2/4 2/4 2/4 2/4

$\nu(\{$σε αυτά τα σύνολα$\}) = \frac{1}{2}$

Άρα, $\nu(\{i\}) = \frac{1}{4}$ $\forall i \in \{1,2,3,4\}$ → διακριτό ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας

$\mu(\{1\}) = \frac{1}{8}$, $\mu(\{2\}) = \frac{3}{8}$, $\mu(\{3\}) = \frac{1}{8}$, $\mu(\{4\}) = \frac{3}{8}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ → μονοσύνολα διαφέρουν σε όλα

σύνολα σε αυτά στη $\mathcal{D}$ συμφωνούν.

$\mu(\{1,3\}) = \frac{1}{4}$, $\nu(\{1,3\}) = \frac{4}{8}$

$\mu(\{2,4\}) = \frac{6}{8}$, $\nu(\{2,4\}) = \frac{4}{8}$

προφανώς διαφέρουν σε όλα

Άρα δείξαμε ότι $\mathcal{D}$ όχι σ-άλγεβρα

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου που έχει τις ιδιότητες

α) $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$

β) είναι π-σύστημα, $\mu(C) = \nu(C)$ $\forall C \in \mathcal{C}$ και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

i) $\mu(X) = \nu(X)$ όταν μ, ν πεπερασμένα

ii) $\exists$ αύξουσα ακολουθία (C_n) στην $\mathcal{C}$: $\mu(C_n) = \nu(C_n) < \infty$ και $X = \bigcup_n C_n$

Τότε $\mu = \nu$.

<u>Απόδειξη</u>

i) $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$

$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ από υπόθεση (<u>άσκηση</u>: κλάση Dynkin (ισχύει και για πεπερασμένα μέτρα)) $\rightarrow \delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$

Από το π-λ θεώρημα, όταν η $\mathcal{C}$ π-σύστημα $\rightarrow \delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. Από υπόθεση $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$

Επιπλέον, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{A}$ και άρα $\mu = \nu$.

<u>Παράδειγμα</u>: $\tau = \{ (-\infty, x], x \in \mathbb{R} \}$ και P μέτρο πιθανότητας. Άρα, καθορίζεται μονοσήμαντα ένα μέτρο πιθανότητας σε αυτή την οικογένεια