30/9/2024 Διάλεξη 1η

Πιθανότητες ΙΙ / Τρέβεζας

Θεωρητική Θεμελίωση των Εισαγωγικών Πιθανοτήτων

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας

Ω: δειγματικός χώρος

$\mathcal{A}$: σ-άλγεβρα (οικογένεια υποσυνόλων - ενισχυμένος δακτύλιος)

P: μέτρο πιθανότητας

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή

$(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

↳ Borel σ-άλγεβρα

$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ μετρήσιμη συνάρτηση

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$E(X) = \int X dP$ (ολοκλήρωμα μετρήσιμης συνάρτησης ως προς μέτρο)

ολοκλήρωμα Lebesgue

Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

P_X $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$P_X(B) = P(X \in B)$

- διακριτή
- συνεχής
  - απόλυτα συνεχής
  - ιδιάζουσα συνεχής

Ανεξαρτησία για X και Y

Τρόποι σύγκλισης ακολουθίας για (X_n)

$X_n \xrightarrow[\text{με πιθ. } 1]{a.s.} X \rightarrow$ ΙΝΜΑ

$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad p \geq 1$

$X_n \xrightarrow{P} X \rightarrow$ ΑΝΜΑ
(κατά πιθανότητα)

$X_n \xrightarrow{d} X \rightarrow$ ΚΟΘ
(κατά κατανομή)

→ Ανάπτυξη Εργαλείων
Χαρακτηριστική συνάρτηση

σ-άλγεβρες και άλλες κλάσεις υποσυνόλων

X σύνολο $P(X) = \{A : A \subset X\}$ δυναμοσύνολο του X (2^X)

Πράξεις : $A \cup B$, $A \cap B$ ή AB, A^c

$B \setminus A$ συνολοθεωρητική διαφορά

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ορισμός : Μια συλλογή $\mathcal{A} \subset P(X)$ (κλάση / οικογένεια / συλλογή) καλείται σ-άλγεβρα στο X αν

i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (μη κενή συλλογή

ii) αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$ (κλειστή στα συμπληρώματα)

iii) αν (A_n) στο $\mathcal{A}$ τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ (κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις) ↳ αυστηρότερα : αριθμήσιμες ενώσεις όχι άπειρες ενώσεις

Το $(X,\mathcal{A})$ καλείται μετρήσιμος χώρος και το $A\in\mathcal{A}$ καλείται και $\mathcal{A}$-μετρήσιμο σύνολο.

<u>Σχόλια</u>

(1) $\emptyset, X\in\mathcal{A}$ (μπορεί να αντικατασταθεί το i) με $\emptyset\in\mathcal{A}$ ή $X\in\mathcal{A}$)

$$\left[\, A\in\mathcal{A} \Rightarrow A^c\in\mathcal{A} \Rightarrow X = A\cup A^c\cup A\cup A^c \ldots \in \mathcal{A} \,\right]$$
$$\Rightarrow \emptyset = X^c \in \mathcal{A}$$

(2) Κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις (n-ενώσεις) αν $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$ τότε

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

Αρκεί αν $A,B\in\mathcal{A}$ τότε $A\cup B\in\mathcal{A}$.

Πράγματι, έστω $A,B\in\mathcal{A}$. Τότε

$$A\cup B = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{A}}\cup \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{B}}\cup \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{\emptyset}}\cup \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{\emptyset}}\cup \ldots$$

(3) Κλειστή στις αριθμήσιμες και στις πεπερασμένες ~~ενώσεις~~ τομές

Αν (A_n) στην $\mathcal{A}$ πρέπει $\bigcap_n A_n\in\mathcal{A}$. Ισχύει ότι:

$$\bigcap_n A_n \overset{dM}{=} \underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_n \underbrace{A_n^c}_{ii)}}_{iii)}\Big)^c}_{ii}$$

(4) $A \setminus B = A \cap B^c$

(5) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

π.χ. 1) $\{\emptyset, X\} \to$ τετριμμένη σ-άλγεβρα (trivial)
(ελάχιστη δηλαδή)

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$
↳ διακριτή σ-άλγεβρα (μέγιστη δηλαδή

2) $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ τότε $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ σ-άλγεβρα

3) $X = \mathbb{R}$. Έστω $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ ή A^c αριθμήσιμο$\}$. Τότε η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ διότι το $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο

ii) αν $A \in \mathcal{A}$ τότε A ή A^c αριθμήσιμο άρα A^c ή $(A^c)^c = A$ αριθμήσιμο
$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) (A_n) στην $\mathcal{A} \Rightarrow A_n$ ή A_n^c αριθμήσιμο $\forall n \geq 1 \overset{?}{\Rightarrow} \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

Έχουμε i) A_n αριθμήσιμο $\forall n \geq 1$

ii) $\exists n_0 \geq 1 : A_{n_0}^c$ αριθμήσιμο

Για το i) έχουμε αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων $\bigcup_n A_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcup_n A_n$ είναι αριθμήσιμο $\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ | σ-άλγεβρα

ii) $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subset A_{n_0}^c \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

ισχυρότερο

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών στο X

Τότε η ~~αλγ~~

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A\subset X : A\in \mathcal{A}_i \ \forall i\in I\}$$ ~~και~~

είναι σ-άλγεβρα στο X. (δηλαδή τομή σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα)

<u>Απόδειξη</u>

i) $\emptyset\in \mathcal{A}_i \ \forall i\in I$ ($\mathcal{A}_i$ σ-άλγεβρα) $\Rightarrow \emptyset\in\mathcal{A}$

ii) $A\in\mathcal{A} \Rightarrow A\in \mathcal{A}_i \ \forall i\in I \overset{\mathcal{A}_i}{\underset{\sigma\text{-αλγ}}{\Rightarrow}} A^c\in\mathcal{A}_i \ \forall i\in I \Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$

iii) έστω (A_n) στην $\mathcal{A} \Rightarrow A_n\in\mathcal{A}_i \ \forall i\in I \ \forall n\geq 1 \overset{\mathcal{A}_i}{\underset{\sigma\text{-αλγ}}{\Rightarrow}} \bigcup_n A_n\in\mathcal{A}_i \ \forall i\in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_n A_n\in\mathcal{A}$

<u>Ερώτηση</u>: Είναι η ένωση σ-αλγεβρών σ-άλγεβρα;

ΌΧΙ!

π.χ. $X=\{1,2,3\}$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$

σ-άλγεβρες

$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, X\}$

Όμως

$A \cup B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, X\}$ (δεν είναι διαφή των 2)

π.χ. $\{3\} = \{2,3\} \setminus \{2\} \notin A \cup B$ άρα όχι σ-άλγεβρα

↳ συμπληρωματικές διαφοραί

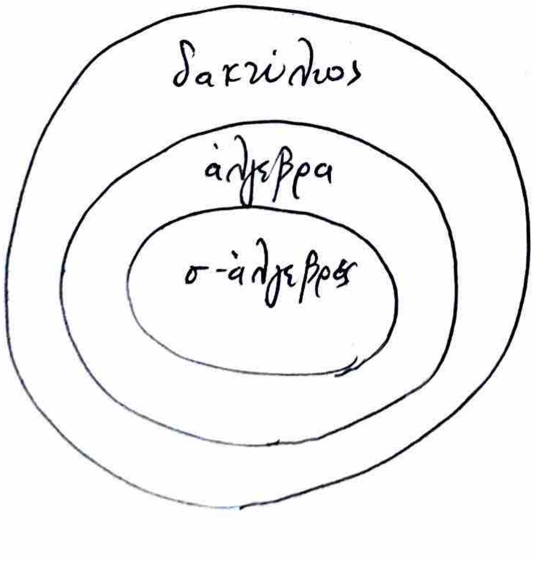
<u>Άσκηση</u>: Έστω $X = \mathbb{N}$ και ορίζουμε $\forall n \geq 0$ $\mathcal{A}_n := \{A \subset \mathbb{N} : A$ ή $A^c \subset \{0, 1, \dots, n\}\}$ και θέτουμε $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$. Νδο

i) η $(\mathcal{A}_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών

ii) $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A$ ή A^c πεπερασμένο$\}$

iii) $\mathcal{A}$ δεν είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{N}$

Άλλες κλάσεις υποσυνόλων



i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$

ii) $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα

ii)' $\mathcal{A}$ κλειστή στις διαφορές

iii) $\mathcal{A}$ κλειστή στις σ-ενώσεις

iii)' $\mathcal{A}$ κλειστή στις n-ενώσεις (πεπερασμέν

$\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα $\Leftrightarrow$ i) + ii) + iii)

$\mathcal{A}$ άλγεβρα $\longleftrightarrow$ i) + ii) + iii)'

$\mathcal{A}$ δακτύλιος $\Longleftrightarrow$ i) + ii)' + iii)'

Άσκηση: Νδο σ-άλγεβρα $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ άλγεβρα $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ δακτύλιος

Σχόλιο: i) αν $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα με $|\mathcal{A}|<\infty \Rightarrow \mathcal{A}$ είναι άλγεβρα

ii) $\mathcal{A}$ άλγεβρα $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ δακτύλιος ~~και~~ + $X\in\mathcal{A}$.

π.χ. $X=\{1,2,3\}$

	$R_1=\{\emptyset\}$	$R_2=\{\emptyset,\{1\}\}$	$R_3=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\}\}$
Δακτύλιοι	✓	✓	✗
Άλγεβρες	✗	✗	✗

$\mathcal{A}=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$, $X=\{1,2,3\}$

είναι σ-άλγεβρα $\Rightarrow$ άλγεβρα $\Rightarrow$ δακτύλιος