Πιθανότητες ΙΙ | Ζερβέζας

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$. Τότε η $\mathcal{D}$ καλείται <u>κλάση Dynkin</u> στο X εάν:

i) $X \in \mathcal{D}$

ii) $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$ (κλειστή στις μονότονες διαφορές)

iii) αν $(A_n) \uparrow$ στην $\mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$ (κλειστή στις αριθμήσιμες μονότονες ενώσεις)

<u>Πρόταση</u>: σ-άλγεβρα $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ κλάση Dynkin

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα. Τότε θδο είναι και κλάση Dynkin

i) $X \in \mathcal{A}$ (πράγματι, αφού X είναι στοιχείο μιας σ-άλγεβρας)

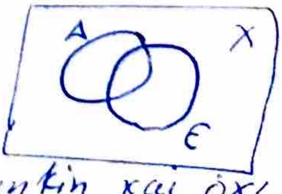
ii) $A, B \in \mathcal{A} \overset{A \subset B}{\Rightarrow} B \setminus A \in \mathcal{A}$ ως σ-άλγεβρα (ιδιότητα που δείχθηκε)

iii) $(A_n) \uparrow$ στην $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ από κλειστότητα στις αριθμ. ενώσεις

$\not\Leftarrow$: Έστω $X = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{D} = \{\emptyset, \underbrace{\{1,2\}}_{\Delta}, \underbrace{\{2,3\}}_{E}, \underbrace{\{3,4\}}_{\Delta^c}, \underbrace{\{1,4\}}_{E^c}, X\}$

[<u>Παρατήρηση</u> Μια κλάση Dynkin είναι κλειστή στα συμπληρώματα, διότι $X \in \mathcal{D}$ και αν $A \subset X \overset{ii)}{\Longrightarrow} X \setminus A = A^c \in \mathcal{D}$]

<u>Άσκηση</u>: Έστω $\Delta, E \subset X$: $\emptyset \subsetneq \overset{\leftarrow \text{τομή}}{\Delta E} \subsetneq \Delta, E \subsetneq \Delta \cup E \subsetneq X$.



ΝΔΟ η οικογένεια $\mathcal{D} = \{\emptyset, \Delta, \Delta^c, E, E^c, X\}$ είναι κλάση Dynkin και όχι σ-άλγεβρα

$\mathcal{D}$ κλάση Dynkin. Πράγματι,

i) $X \in \mathcal{D}$

ii) $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subset B \rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$ (

- Αν $A = \emptyset$ ισχύει τετριμμένα
- Αν A μονοσύνολο $\rightarrow B = A$ ✓, $B = X \Rightarrow B \setminus A = A^c \in \mathcal{D}$ από κατασκευή
- Αν $A = X$, $B = X$ ισχύει.

iii) Όμως η $\mathcal{D}$ δεν είναι σ-άλγεβρα αφού π.χ. $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

και $\{1,2,3\} \notin \mathcal{D}$.

<u>Άσκηση 2</u>: i) Μπορεί να παραληφθεί κάποια από τις υποθέσεις;

$\Delta E \neq \emptyset$ ή $\Delta \cup E \neq X$

ii) Πόσα τουλάχιστον στοιχεία πρέπει να έχει το X για να ισχύουν οι υποθέσεις αυτές?

και πόσα γενικότερα για κατασκευή κλάσης Dynkin

<u>Άσκηση 3</u>: Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{D}$ καλείται <u>λ-κλάση</u> αν

i) $\mathcal{D} \neq \emptyset$

ii) είναι κλειστή στα συμπληρώματα

iii) είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις, δηλ. αν (A_n) σ[...]

$\mathcal{D}: A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}.$

Νδο η $\mathcal{D}$ λ-κλάση $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin (άλλος χαρακτηρισμός)

Κλειστή σε πεπ τομές: πεπερασμένο πλήθος από σύνολα μέσα σε συλλογή.

Την ιδιότητα αυτή την έχει μια τοπολογία

P-system αναφέρεται σε πεπ. κλειστότητα.

<u>Ορισμός</u>: Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{C}$ καλείται π-σύστημα αν έχει την κλειστότητα στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν

$C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ για κάποιο $n \geq 1$, τότε:

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{C}$$

<u>Πρόταση</u>: Κλάση Dynkin + π-σύστημα $\Rightarrow$ σ-άλγεβρα

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin που είναι και π-σύστημα. Νδο $\mathcal{D}$ σ-άλγεβρα

i) $X \in \mathcal{D}$ ως κλάση Dynkin $\Rightarrow \mathcal{D} \neq \emptyset$.

ii) Αν $A \in \mathcal{D}$, τότε $X \in \mathcal{D}$ και $A \subset X \overset{ii)}{\Rightarrow} X \setminus A = A^c \in \mathcal{D}$

iii) Αν (A_n) στη $\mathcal{D} \overset{?}{\rightarrow} \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$.

Θέτουμε $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $n \geq 1$. Τότε $(B_n)\uparrow$. Επιπλέον [illegible]

$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$. (*)

Όμως, $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Big(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{A_i^c}_{ii)}}_{\text{π-σύστημα}}\Big)^{(c)\to ii)}$.

Τελικά $B_n \in \mathcal{D}$ $\forall n \geq 1$ και από ιδιότητα iii) της κλάσης Dynkin έχουμε

$$\bigcup_n B_n \in \mathcal{D} \quad (\text{αριθμήσιμη μαιόταυη ένωση})$$

Τελικά από την (*) ισχύει ότι $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$

<u>Πρόταση</u>: Τομή κλάσεων Dynkin (οποιουδήποτε πλήθους) $\Rightarrow$ κλάση Dynkin

Αποδ: Εξάσκ (όπως στις σ-άλγεβρες)

<u>Σχόλιο</u>: ένωση κλάσεων Dynkin $\not\Rightarrow$ κλάση Dynkin

π.χ. $\mathcal{D}_1 = \{\emptyset, \underset{A}{\{1\}}, \underset{A^c}{\{2,3,4\}}, X\}$ (είναι σ-άλγεβρα $\Rightarrow$ κλάση Dynkin)

$\mathcal{D}_2 = \{\emptyset, \underset{B}{\{2\}}, \underset{B^c}{\{1,3,4\}}, X\}$ ομοίως

$\Rightarrow \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, X\}$.

$\underset{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2}{\underset{\cap}{\{2,3,4\}}} \setminus \underset{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2}{\underset{\cap}{\{2\}}} = \{3,4\} \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ άρα δεν ικανοποιείται η ii)

$\Rightarrow$ δεν είναι κλάση Dynkin

<u>Παραγόμενες Δομές</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset P(X)$ και ~~(...)~~

$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα $\}$

$\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \{ \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ και $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin $\}$.

→ C καλλιγραφικό

Ορίζω

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}(\mathcal{C})} \mathcal{A} \quad \text{και η} \quad \delta(\mathcal{C}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{C})} \mathcal{D}$$

καλούνται η σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{C}$ και η κλάση Dynkin που παράγεται από το $\mathcal{C}$ αντίστοιχα

<u>Σχόλια</u> 1) Αντιπροσωπεύουν την ελάχιστη σ-άλγεβρα και την ελάχιστη κλάση Dynkin που περιέχουν τη $\mathcal{C}$ (προκύπτει άμεσα)

2) $\delta(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ αφού $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{C})$

<u>Παραδείγματα</u>: 1) Έστω X με $|X| \geq 2$ και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Έχουμε:

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

$$\delta(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

<u>Απόδειξη</u>

$\delta(\{A\}) \subset \sigma(\{A\})$.

Παίρνω το $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ και παρατηρώ ότι είναι κλάση Dynkin (λ-κλάση)

Άρα (αφού δ μικρότερη) $\delta(\{A\}) \subset \{\emptyset, A, A^c, X\}$

↳ κλάση Dynkin που περιέχει τη $\mathcal{C} = \{A\}$ ε

Θέλω νδο $\{\emptyset, A, A^c, X\} \subset \delta(\{A\})$

$A \in \delta(\{A\}) \Rightarrow A^c \in \delta(\{A\}) \xrightarrow{\{\emptyset, X\} \in \delta(\{A\})} \{\emptyset, A, A^c, X\} \in \delta(\{A\})$

Δείξαμε ότι $\delta(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Όμως η $\delta(\{A\})$ είναι και σ-άλγεβρα ~~⇒ σ({A})~~
που περιέχει το $\{A\}$

$\Rightarrow \sigma(\{A\}) \subset \delta(\{A\})$.

μικρότερη

μία σ-άλγεβρα που περ. A

Αλλά γενικά $\delta(\{A\}) \subset \sigma(\{A\})$, επομένως $\delta(\{A\}) = \sigma(\{A\})$.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $X = \{1,2,3,4\}$.

$\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$, τότε

$\delta(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, X\}$.

Δείξαμε ότι η παραπάνω ~~συλλ~~ συλλογή είναι κλάση Dynkin. Επίσης

$\{1,2\} \in \delta(\mathcal{C}) \Rightarrow \{1,2\}^c = \{3,4\} \in \delta(\mathcal{C})$ αφού $\delta(\mathcal{C})$ Dynkin

$\{3,4\} \in \delta(\mathcal{C}) \Rightarrow \{1,2\} \in \delta(\mathcal{C})$

Άρα όντως $\delta(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, X\}$.

Θέλουμε την $\sigma(\mathcal{C})$.

$\{1,2\} \in \sigma(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sigma\text{-αλγ}} \{3,4\} \in \sigma(\mathcal{C})$

$\{2,3\} \in \sigma(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sigma\text{-αλγ}} \{1,4\} \in \sigma(\mathcal{C})$

πάει σε τομή διότι είναι από σύνολα τα παίρνω σε γινόμενα

$\{1,2\}, \{2,3\} \in \sigma(\mathcal{C}) \xRightarrow{\sigma\text{-αλγ}} \{2\} = \{1,2\} \cap \{2,3\} \in \sigma(\mathcal{C})$.

Παρόμοια $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \in \sigma(\mathcal{C})$

Λόγω κλειστότητας στις ενώσεις, συνεπάγεται ότι

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(X).$$

Άρα: $\delta(\mathcal{C}) \subsetneq \sigma(\mathcal{C})$

<u>Ορισμός</u>: Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα (αντ. κλάση Dynkin) και $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ όπου $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ (αντ. $\mathcal{A} = \delta(\mathcal{C})$), τότε λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι <u>γεννήτορας</u> της $\mathcal{A}$.

Αν η $\mathcal{C}$ έχει αριθμήσιμο (αντ. πεπερασμένο) πλήθος στοιχείων, τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμα (ή πεπερασμένα) παραγόμενη.

Προφανώς κάθε σ-άλγεβρα ή κλάση Dynkin δεν έχει μοναδικό γεννήτορα

π.χ. $\{\emptyset, X\}$

Έχουμε ότι $\sigma(\{\emptyset\}) = \sigma(\{X\}) = \{\emptyset, X\}$

για Dynkin $\{2,3\}, \{3,4\}$ αλλά μπορεί κ $\{1,2\}, \{2,3\}$

<u>Παράδειγμα 3</u> (σ-άλγεβρα παραγόμενη από διαμέριση)

Έστω $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I : (A_i)_{i \in I}$ είναι αριθμήσιμη διαμέριση του $X\}$

Τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i : J \subset I \right\}$ (Άσκηση)

<u>Θεώρημα</u> (π-λ) : Έστω $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ που είναι π-σύστημα. Τότε

$\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$