7/2/2024 Διάλεξη 9η

Πιθανότητες II / Τρέβεζας

<u>Ορισμός</u>: Έστω X σύνολο και $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Αν:

↳ calligraphic T

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii) η $\mathcal{T}$ είναι π-σύστημα

iii) η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις ενώσεις (οποιουδήποτε πλήθους)

τότε λέμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X και τα στοιχεία της τα λέμε ανοιχτά σύνολα

<u>Παραδείγματα</u>

i) $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$

τετρ. τοπολογία | οποιαδ. τοπολογία $\mathcal{T}$ | διακριτή τοπολογία

ii) $X = \{1, 2\}$, τότε η $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ είναι τοπολογία (χώρος Sierpinski)

Όμως, η $\mathcal{T}$ δεν είναι σ-άλγεβρα

iii) <u>Υπενθύμιση</u>

Έστω X σύνολο. Τότε αν $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ που:

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

η d καλείται μετρική στο X και (X,d) μετρικός χώρος

Αν η i) γίνει i)' $\Rightarrow x=y \Rightarrow d(x,y)=0$ (και μόνο)

$\nLeftarrow$

τότε καλείται ψευδομετρική και ο (X,d) ψευδομετρικός χώρος.

Επιπλέον, $A\subset X$ είναι ανοιχτό (ως προς d) αν $\cancel{\forall x\in A}$

$$\forall x\in A:\ \exists \varepsilon_x>0:\ B(x,\varepsilon_x)=\{y\in X:\ d(x,y)<\varepsilon_x\}\subset A$$

- Αν (X,d) είναι μετρικός χώρος και $\subset A$,

$$\tau = \{A\subset X:\ A \text{ ανοιχτό ως προς } d\},$$

τότε η τ είναι τοπολογία στο X και λέμε ότι είναι η τοπολογία επαγόμενη από τη μετρική d (ικανοποιεί τα i), ii), iii)).

Συμβολίζουμε: $\tau = \tau_d$

Τα σύνολα Borel

<u>Ορισμός</u>: Έστω τ μια τοπολογία σε σύνολο X και θέτουμε $\mathcal{B}(X):=\sigma(\tau)$ και καλείται σ-άλγεβρα Borel του X και τα στοιχεία του σύνολα Borel

<u>Σχόλια</u>: i) Η $\mathcal{B}(X)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα (δηλαδή τα στοιχεία της τ)

ii) Αν (X,d) είναι μετρικός χώρος, τότε συνήθως $\mathcal{B}(X)=\sigma(\tau_d)$

π.χ. $X=\mathbb{R}^n$, $d=d_p$, όπου

$$d_p(x,y)=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}, & p\geq 1\\ \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|, & p=\infty\end{cases}$$

Τότε d_p είναι ισοδύναμες μετρικές $\longleftrightarrow$ τ_{d_p} ίσες $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ταυτίζονται.

Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{T}_{|\cdot|})$, όπου $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ είναι τα ανοικτά του μ.χ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Ερώτηση: Μπορούμε να βρούμε διαφορετικές ενδιαφέρουσες οικογένειες υποσυνόλων να παράγουν τα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ψάχνουμε ωραίους γεννήτορες).

Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$
- → φραγμένα (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$
- → μη-φραγμένα $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$

ii) Θεώρημα: Έστω $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} : F \text{ κλειστό στο } \mathbb{R}\}$. Θεωρώ $\mathcal{A}_1 = \{(-\infty,b] : b\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(a,b] : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

$\mathcal{A}_3 = \{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$ και μάλιστα από οποιοδήποτε από τους 8 τύπου διαστήματος (Άσκηση)

Υπόδειξη: $\sigma(\mathcal{A}_2) \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$

· Αν $\mathcal{A}_2 \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$ φτιάχνεται με πράξεις από σ-αλγ της $\mathcal{A}_1$

γεννήτορας μιας φτιάχνεται με πράξεις από άλλη

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_2) \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$.

π.χ. $(a,\beta] = (-\infty,\beta] \setminus (-\infty,a] \in \sigma(\mathcal{A}_1)$

· Για την $\mathcal{A}_3$: $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{A}_3)$, δηλ Borel $\subset \sigma(\mathcal{A}_3)$ → ανοιχτά και άρα ταυτίζονται

↳ $\sigma(\mathcal{T}) \subset \sigma($

κάθε ανοιχτό σύνολο γράφ σαν αριθμ. ένωση ραδιών

Πρόταση: Κάθε ανοιχτό A γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών φραγμένων διαστημάτων

Μέσα στο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι ανοιχτά, κλειστά, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, ...

Μας ενδιαφέρει και ο χώρος $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, οι επεκτεταμένοι πραγματικοί αριθμοί (το $\mathbb{R}$ συμπαγές). Ορίζουμε:

$f: \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|} &, x \in \mathbb{R} \\ -1 &, x = -\infty \\ 1 &, x = +\infty \end{cases}$$

Η f προκύπτει ότι είναι 1-1 και επί και αν ορίσουμε $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ τότε η d είναι μετρική, ο $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ γίνεται μετρικός χώρος και η f γίνεται ομοιομορφισμός (f και f^{-1} συνεχείς) ~~άρα ταυτίζο~~

Άρα ταυτίζονται τοπολογικά $\Rightarrow$ ταυτίζονται και τα Borel

Liminf, limsup μιας ακολουθίας συνόλων

Ορισμός: Έστω X σύνολο και (A_n) στην $\mathcal{P}(X)$. Τότε ορίζουμε

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k \to \text{κατώτερο όριο της ακολ. } (A_n)$$

$$= \underbrace{(A_1 A_2 \cdots)}_{B_1} \cup \underbrace{(A_2 A_3 \cdots)}_{B_2} \cup \ldots \cup \underbrace{(A_n A_{n+1} \cdots)}_{B_n} \cup \ldots$$

$x \in \liminf A_n \Leftrightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0,\ x \in A_n \Leftrightarrow x \in A_n$ τελικά $\forall n$.

(δυϊκό) $\limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k$ → ανώτερο όριο της ακολ. (A_n)

$$= \underbrace{(A_1 \overset{\cup}{\cancel{\cup}} A_2 \cup \dots)}_{B_1} \cap \underbrace{(A_2 \cup A_3 \cup \dots)}_{B_2} \cap \dots \cap \underbrace{(A_n \cup A_{n+1} \cup \dots)}_{B_n} \cap \dots$$

$x \in \limsup_n A_n \leftrightarrow \forall n, \exists k_n \geq n : x \in A_{k_n} \Leftrightarrow x$ ανήκει σε άπειρα A_n.

τελικά $\forall n$ άρα και άπειρα $\Rightarrow \liminf \subseteq \limsup$

Σχόλια - Ιδιότητες

1) $\bigcap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_n A_n$

(ανήκει σε όλα) (ανήκει τελικά σε όλα) (ανήκει σε άπειρα) (ανήκει τουλάχιστον σε ένα)

2) Υπενθύμιση: για (X_n) στο $\mathbb{R}$ $\liminf_n X_n = \sup_n \inf_{k\geq n} X_k$

$$\limsup_n X_n = \inf_n \sup_{k\geq n} X_k$$

Αν ορίσουμε $\inf_{k\geq n} A_k := \bigcap_{k\geq n} A_k$ και $\sup A_k := \bigcup_{k\geq n} A_k$ τότε οι αναλογίες είναι

προφανείς.

(3) Αν (A_n) στην $\mathcal{A}$ (σ-άλγεβρα) $\subset \mathcal{P}(X)$. Τότε $\liminf_n A_n = \bigcup_n \underbrace{\bigcap_{k\geq n} A_k}_{B_n \in \mathcal{A} \text{ (αριθ. τομή)}}$

αριθ. ένωση $\in \mathcal{A}$

Τελικά, $\liminf A_n \in \mathcal{A}$ και ανάλογα $\limsup A_n \in \mathcal{A}$.

$$\underbrace{\bigcap_n \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{B_n \in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$

(4) $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$

$(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

(5) Αν $\liminf A_n = \limsup A_n$, τότε λέμε ότι υπάρχει το όριο της (A_n), ή η (A_n) συγκλίνει, και ορίζουμε ως $\lim A_n$ την κοινή τιμή τους

(6) $\exists \lim_n A_n \iff \exists \lim_n A_n^c$ και τότε θα έχουμε ότι

$(\lim_n A_n)^c = \lim_n A_n^c$

Παράδειγμα:

1) Κάθε μονότονη ακολουθία (A_n) συγκλίνει και

i) αν $(A_n)\uparrow \Rightarrow \lim_n A_n = \bigcup_n A_n$

ii) αν $(A_n)\downarrow \Rightarrow \lim_n A_n = \bigcap_n A_n$

Απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} \limsup_n A_n &= \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_n \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \liminf_n A_n &= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$$

ii) παρόμοια από ορισμό ή εναλλακτικά:

νδο: $\lim A_n = \bigcap_n A_n \iff (\lim A_n)^c = (\bigcap_n A_n)^c$.

Παίρνουμε:

$$(\lim A_n)^c = \lim_n A_n^c \xlongequal[(A_n^c)\uparrow,\ i)]{(A_n)\downarrow} \bigcup_n A_n^c = \left(\bigcap_n A_n\right)^c.$$

2) αν $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ (ούτε αύξουσα, ούτε φθίνουσα)

π.χ. $A_1 = (-1, 0)$, $A_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Αναζητούμε το όριο αν $\exists$.

[Βήμα 1: συγκλίνουν οι ακολουθίες των άκρων?

Ναι!, $-\frac{1}{n} \to 0$, $1-\frac{1}{n} \to 1$]

Βήμα 2: τι είδους διάστημα προκύπτει $\{0, 1\}$.

υποψιαζόμαστε ότι είναι $[0, 1)$. πράγματι

Αν ~~...~~ $\exists \lim A_n = A$ και $\exists \lim B_n = B$, τότε $\exists \lim A_n \cup B_n = A \cup B$.

$\exists \lim A_n \cap B_n = A \cap B$.

(Άσκηση: απόδειξη με liminf και limsup)

Άσκηση: $A_n \to A \iff 1_{A_n} \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 1_A$

$A_n = \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \cup \left[0, 1-\frac{1}{n}\right)$.

$\left(-\frac{1}{n}, 0\right)\downarrow \Rightarrow \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \downarrow \emptyset$ με συγκλ. φθίνοντα τρόπο $\to$ στο $\emptyset$ τομής όλα τα A_n

A_n

$$[0, 1-\tfrac{1}{n}) \uparrow \to \underbrace{[0, 1-\tfrac{1}{n}]}_{} \uparrow [0,1)$$

$$\bigcup_n A_n$$

Τελικά:

$$\left(-\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}\right) \to [0,1)$$

(3) $A_n = \begin{cases} \emptyset, & n\text{-άρτιος} \\ X, & n\text{-περιττός} \end{cases}$

$\liminf_n A_n = \emptyset$, $\limsup_n A_n = X$ X άπειρες φορές άρα κάθε σημείο το έχει άπειρες φορές

Άσκηση: ΝΔΟ $1_{\limsup A_n} = \limsup_n 1_{A_n}$

$1_{\liminf_n A_n} = \liminf_n 1_{A_n}$

Με την ταύτιση $A_n \to 1_{A_n}$ αντί να κινούμαστε σε υποσύνολα, κινούμαστε σε δείκτριες

$A_n \to A \Leftrightarrow 1_{A_n} \xrightarrow{κσ} 1_A$