Πιθανότητες ΙΙ / Ζορίβεζας

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ και (i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$, $\forall (A_n) \dagger$ στην $\mathcal{A}$ $(A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j)$ (σ-προσθετικότητα ή αριθμήσιμη προσθετικότητα)

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου

- Αν επιπλέον, $\mu(X) < +\infty$, τότε το μ καλείται <u>πεπερασμένο μέτρο</u>
- Αν $\mu(X) = 1$, τότε το μ καλείται <u>μέτρο πιθανότητας</u>
- Αν $\exists (A_n)$ στην $\mathcal{A}$: $X = \bigcup_n A_n$ με $\mu(A_n) < +\infty$ $\forall n$, τότε το μ καλείται <u>σ-πεπερασμένο μέτρο</u>

<u>Παραδείγματα</u>

(1) [μέτρο Dirac στο $x \in X$]

$$\forall x \in X,\ \delta_x(A) = 1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases},\ A \in \mathcal{A}$$

(2) [αριθμητικό μέτρο]

$\nu(A) = |A|$ ($= +\infty$, αν A απειροσύνολο)

(3) [μέτρο Lebesgue]

Αν $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τότε ορίζουμε $\lambda(A)$ για A Borel σύνολο,

$\lambda(A)$ = μήκος του A (δεν ορίζεται σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$)

Απόδειξη

(1) [μέτρο Dirac στο $x \in X$]

$\delta_x(A) \in [0, +\infty]$

i) $\delta_x(\emptyset) = 0$ διότι $x \notin \emptyset$

ii) αν (A_n) + στην $\mathcal{A}$, τότε $\delta_x\left(\bigcup_n A_n\right) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_n A_n \\ 0, & x \notin \bigcup_n A_n \end{cases} = \sum_n \delta_x(A_n)$

Αν $x \in \bigcup_n A_n$, αφού (A_n)+ , ακριβώς ένα A_i

Αν $x \notin \bigcup_n A_n$, $\delta_x(A_n) = 0$ $\forall n$.

(2) [αριθμητικό μέτρο]

$\nu(A) \in [0, +\infty]$ αφού είναι πλήθος στοιχείων

i) $\nu(\emptyset) = |\emptyset| = 0$

ii) αν (A_n)+ στην $\mathcal{A}$, τότε $\nu\left(\bigcup_n A_n\right) \overset{?}{=} \sum_n \nu(A_n)$

• Αν A_n είναι απειροσύνολο για τουλάχιστον ένα n, τότε

$\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \infty = \sum_n \nu(A_n)$

• Αν $A_n \neq \emptyset$ και πεπερασμένα για άπειρα n, τότε

$\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \infty = \sum_n \nu(A_n)$

Τα A_n είναι πεπερασμένα για πεπερασμένο πλήθος δεικτών

$\exists k \geq 1$ και $n_1, n_2, \dots, n_k$: A_{n_i} να είναι όπως παραπάνω $i = 1, 2, \dots, k$

$$v\left(\bigcup_n A_n\right) = v\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i}\right) = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i}\right| \overset{\text{ξένα ανά } 2}{=\!=} \sum_{i=1}^{k} |A_{n_i}| = \sum_{i=1}^{k} v(A_{n_i}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} v(A_n)$$

↳ αφού τα υπόλοιπα είναι $\emptyset$.

(3) Θα αναφερθούμε αργότερα

<u>Ιδιότητες μέτρου</u>

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε:

i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $AB = \emptyset$ (πεπερασμένη προσθετικότητα)

ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subset B$ (μονοτονία)

iii) $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$, $\forall (A_n)$ στην $\mathcal{A}$ (σ-υποπροσθετικότητα)

iv) $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$, $\forall (A_n) \uparrow$ στην $\mathcal{A}$

* ii, iii με $\mu(\emptyset) = 0$ ορίζει εξωτερικά μέτρα

(*)
v) $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$, $\forall (A_n) \downarrow$ στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_n) < \infty$ για κάποιο n_0

Λόγω ↓, θα συμβαίνει και για τα άλλα

(ισχύει πάντα στα μέτρα πιθανότητας)

Σχόλια

(1) $\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(AB)$, αν $\mu(AB) < +\infty$

, διαφορετικά δεν ισχύει γενικά

Ειδική περίπτωση: $A \subset B$, τότε:

$$\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A), \text{ αν } \mu(A) < +\infty$$

(2) $\mu(\emptyset) = 0$ και $\overset{\text{ισ}}{\text{ii)}}$ μονοτονία + $\overset{\text{ισ.}}{\text{iii)}}$ σ-υποπροσθετικότητα καθορίζουν την έννοια του εξωτερικού μέτρου που είναι ασθενέστερη έννοια από το μέτρο

(σημασία εξωτερικού μέτρου: $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\text{περιορισμός}} \mathcal{M}_\mu$ (μ-μετρήσιμα σύνολα) → θα είναι σ-άλγεβρα και θα φτιαχτεί μέτρο

λ^*: εξωτερικό μέτρο lebesgue

$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{\lambda^*}$: το μέτρο lebesgue ορίζεται πλέον εδώ

$$\underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_{\lambda^*}}_{\text{τεράστια διαφορά}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{M}_{\lambda^*}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: ίδιο πληθάριθμο

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ → δυναμοσύνολο $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \underset{\text{συνεχές}}{c}$ > τεράστια διαφορά

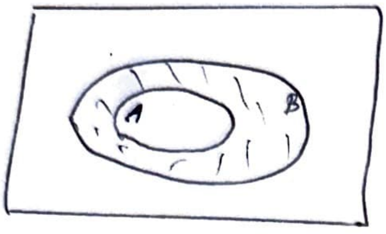
Απόδειξη

(i) $A\cup B = A\cup B\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\ldots \Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A\cup B\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\ldots) =$

$= \mu(A)+\mu(B)+\mu(\emptyset)+\ldots = \mu(A)+\mu(B)$

[αν ισχύει $\mu(\emptyset)=0$ και σ-προσθετικότητα χωρίς να θέλουμε ότι $\mu(A)\in$ $\in[0,+\infty]$, τότε αυτό ορίζει την έννοια των προσημασμένων μέτρων με $\mu(A)\in\mathbb{R}$ $\forall A\in\mathcal{A}$]

ii)



$B = A\cup(B\setminus A)$. Το A και $B\setminus A$ είναι ξένα ανά 2 $\overset{i)}{\Longrightarrow}$

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0} \Rightarrow \mu(B)\geq\mu(A)$$

iii) σ-υποπροσθετικότητα

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2\setminus A_1,\ \dots,\ B_n = A_n\setminus\bigcup_{i<n}A_i,\ \dots$$

Τα B_n είναι ξένα ανά δύο, είναι στην $\mathcal{A}$,

$$\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{και} \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_n B_n\Big) \overset{\sigma\text{-προσθ.}}{=} \sum_n \mu(B_n) \underset{\substack{\text{μονοτονία}\\ \text{ii)}}}{\overset{B_n\subset A_n}{\leq}} \sum_n \mu(A_n)$$

iv) νδο $\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \lim_n \mu(A_n)$ για $(A_n)\uparrow$ στην $\mathcal{A}$

Έχουμε $\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_n B_n\Big) = \sum_n \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k) \underset{\text{πεπερ. προσθ.}}{\overset{(B_k)_{1\leq k\leq n}}{=}}$

$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} A_k\Big) \underset{\text{ως αύξ.}}{\overset{\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n}{=}} \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

v) (Άσκηση)