

ΜΕΤΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

16^οΥπόθεση:

Ένα μέτρο μ , σε μ_X $(X, \mathcal{A})$ λέγεται σ -νεγερτικό, αν $\exists \{C_n\}$ σενυ $A = X = \bigcup_n C_n$, $\mu(C_n) < +\infty$, $\forall n$

π.χ. (i) μέτρο Lebesgue λ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\text{έστω } \mathbb{R} = \bigcup_n [-n, n] \text{ , όπου } \lambda([-n, n]) = 2n < +\infty$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$

(ii) αριθμητικό μέτρο ν στο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

$$\text{έστω } \mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 1} \{0, 1, \dots, n\} \text{ και } \nu(\{0, 1, \dots, n\}) = n+1 < +\infty$$

$\forall n$

απειροστικότητα: το αριθμ. μέτρο ν στον $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Αν το ν ήταν σ -νεγερτικό, τότε

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} A_n \text{ , όπου } \nu(A_n) < +\infty$$

$\Downarrow$

Αν είναι νεγερτ. σύνολο $\forall n$

έστω $\mathbb{R}$ θα ήταν αριθμητικό, ως αριθμ. ένωση

νεγερτικών συνόλων. Άρα $\Rightarrow \forall$ όχι σ -νεγερτικό

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ 2 μέτρ. χώροι. Λέμε μετρικό γινόμενο στον $X \times Y$, κάθε σύνολο της μορφής $A \times B$, όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. Εμφάνει ορίζεται $A \otimes B := \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$ (η σ -άλγεβρα που παράγεται από τα μετρικά γινόμενα) και το λέμε σ -άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$.

Πρόταση: Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 2 χώροι σ -νεγερτικού μέτρου, τότε $\exists$ μοναδικό μέτρο m

στον π.χ. $(X \times Y, A \otimes B)$, τότε ισχύει
 $m(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ και $\forall B \in \mathcal{B}$.

Το μέτρο αυτό, το ονομάζουμε $\mu \otimes \nu$ και λέγεται μέτρο
γινόμενο των μ και ν . Ο χώρος $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$
 λέγεται χώρος γινόμενο των αρχικών.

Παραδείγματα: (i) Έστω ν_1 το αριθμ. μέτρο στο $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$.
 Τότε από $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \nu_1)$ είναι χώρος σ-παραγ. μέτρου,
 τότε ορίζεται ο χώρος γινόμενο $(\mathbb{N}^2, \underbrace{P(\mathbb{N}) \otimes P(\mathbb{N})}_{(1)}, \underbrace{\nu_1 \otimes \nu_1}_{(2)})$
 Θα δείξουμε ότι $(\mathbb{N}^2, P(\mathbb{N}^2), \nu_2)$ $\xrightarrow{(1)(2)}$ αριθμ. μέτρο στο $\mathbb{N}^2$.

$$1) P(\mathbb{N}) \otimes P(\mathbb{N}) = \sigma(\{A \times B : A, B \subseteq \mathbb{N}\}) \subsetneq P(\mathbb{N}^2)$$

Έστω $C \subset \mathbb{N}^2$

αριθμ. μέτρο

$$\text{Άρα } C = \bigcup_{\substack{i \in I \\ \text{αριθμ.}}} \{ (a_i, b_i) \} = \bigcup_{i \in I} (\underbrace{\{a_i\}}_{A_i} \times \underbrace{\{b_i\}}_{B_i})$$

$$\underbrace{\quad}_{m} P(\mathbb{N}) \otimes P(\mathbb{N})$$

$$\Rightarrow C \in P(\mathbb{N}) \otimes P(\mathbb{N})$$

$$\text{Τελικά, } P(\mathbb{N}) \otimes P(\mathbb{N}) = P(\mathbb{N}^2)$$

$$2) \nu_2(A \times B) = |A \times B| = |A| |B| = \nu_1(A) \nu_1(B)$$

$$= (\nu_1 \times \nu_1)(A \times B)$$

Άρα τελικά, από Πρόταση, λόγω μοναδικότητας της
 επέκτασης έχουμε $\boxed{\nu_2 = \nu_1 \otimes \nu_1}$

(ii) Έστω γ_1 το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.

Τότε, από $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \gamma_1)$ είναι σ-παραγ. χώρ. μέτρου
 ορίζεται ο χώρος γινόμενο $(\mathbb{R}^2, \underbrace{B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R})}_{\text{αριθμ.}}, \gamma_1 \otimes \gamma_1)$
 $(\mathbb{R}^2, B(\mathbb{R}^2), \gamma_2)$,

όπου γ_2 είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$ με

Δίνε το ελάχιστο ενός $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Πρόταση: Αν $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ είναι n -χώροι σ -μετρήσιμοι.

τότε, τότε $\exists$ μοναδικό μέτρο m , στο μέτρ. χώρο $(\prod_{i=1}^n X_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$, με $m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2) \dots \mu_n(A_n)$, $\forall A_i \in \mathcal{A}_i, i=1,2,\dots,n$

Το μέτρο m , λέγεται μέτρο γινόμενο των $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ και ορίζεται $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ ή $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$

Παραδείγματα: (i) $(\mathbb{N}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathbb{N}), \bigotimes_{i=1}^n \nu_i) =$

$= (\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), \nu_n) \rightarrow$ αριθμ. μέτρο

(ii) $(\mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}), \bigotimes_{i=1}^n \gamma_i) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \gamma_n)$

$\downarrow$
n-διάστατο μέτρο Lebesgue

Ολοκλήρωση σε χώρο Γινόμενο

Θεώρημα: Έστω $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ 2 μέτρ. χώροι και $f: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} / \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ μετρήσιμο.

Τότε: (i) $\forall x \in X$, η συνάρτηση $f_x(y) := f(x, y) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ με $f_x(y) = f(x, y)$ είναι $\mathcal{B} / \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ μέτρ.

(ii) $\forall y \in Y$, η συνάρτηση $f^y(x) := f(x, y)$ με $f^y(x) = f(x, y)$ είναι $\mathcal{A} / \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ μετρήσιμο.

Θεώρημα Tonelli (για θετικές συναρτήσεις):

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ -μετρήσιμοι. Τότε $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ είναι ο χώρος γινόμενο, και $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ μέτρ. συγμ., τότε

αι συναρτήσεις

$$x \mapsto \int S f(x,y) dv(y), \quad x \in X \quad \text{και}$$

$$y \mapsto \int S f(x,y) d\mu(x), \quad y \in Y.$$

Είναι $f \in B([0, +\infty])$ και $B \in B([0, +\infty])$ περ. αυξουσες.

$$\underline{\text{και}} \quad \int S f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int \left(\int S f(x,y) dv(y) \right) d\mu(x) \\ = \int \left(\int S f(x,y) d\mu(x) \right) dv(y)$$

Τα χαρακτηριστικά είναι κατά ορισμένα, δίνει exacte series και περριστες συναρτήσεις.

Θεώρημα Fubini: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-περ. περρι, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ περ. συνημιτον. Έσσε, αν

$\int |f(x,y)| d(\mu \otimes \nu)(x,y) < +\infty$, τότε ισχύουν τα αποτελέσματα του Tonelli. Η συνθήκη αυτή, εξηγεται με κάποιο από τα 2 διαδοχ. χαρακτηριστικά.

Προτάσεις (όταν ισχύουν οι συνθήκες):

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k}$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx$$

$$(iii) \quad E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(X_n)$$

$$(iv) \quad E\left[\int_{\mathbb{R}} f(x, \cdot) dx\right] = \int_{\mathbb{R}} E(f(x, \cdot)) dx,$$

όταν $\forall x$, exacte ότι η $f(x, \cdot)$ είναι ε/

$$\frac{0}{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow f(x, \omega)$$

Παράδειγμα: Για μια ρ.β. με ρ.β.ς στο $[0, \infty)$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} P(X > t) dt = \int_0^{\infty} E(\underbrace{1_{\{X > t\}}}_{P(t, \cdot)}) dt$$

 όπου $P(t, \cdot)$ είναι ρ.

όπου $f(t, \omega) = 1_{\{X(\omega) > t\}} = 1_{\{X > t\}}(\omega)$

$\frac{1}{A_t} \underbrace{X^{-1}(t, \infty)}_{A_t} = \boxed{1_{A_t}} \rightarrow \text{είναι ρ.β.}$

Έχουμε $\int_0^{\infty} E(1_{\{X > t\}}) dt \stackrel{\text{Tonelli}}{=} E\left(\int_0^{\infty} 1_{\{X > t\}} dt\right)$

$E \int_0^{\infty} 1_{(t, \infty)}(x) dt = E\left(\int_0^x 1 dt\right) = E(X)$

Λήμμα 9.2: Έστω X ρ.β. με ρ.β.ς στο $[0, \infty)$

(α) Για $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ραβ. με συνεχή παράγωγο
 v.δ. $E[g(X)] = g(0) + \int_0^{\infty} g'(t) P(X > t) dt$,

αν $g' \geq 0$ ή οι ολοκληρώματα αλγεβρικοί αριθμοί.

(β) v.δ. $E(X^p) = p \int_0^{\infty} t^{p-1} P(X > t) dt$

Λύση: (α) Έχουμε, $\forall x \geq 0$, $g(x) = g(0) + \underbrace{\int_0^x g'(t) dt}_{g(x) - g(0)}$

$\Rightarrow g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t) dt$

$\Rightarrow E[g(X)] = g(0) + E\left[\int_0^X g'(t) dt\right] =$

$= g(0) + E\left[\int_0^{\infty} g'(t) 1_{\{X > t\}} dt\right]$

Fubini

$g(0) + \int_0^{\infty} g'(t) P(X > t) dt$

(b) $E(x^p) = ?$

Έστω $g(x) = x^p \quad \forall x \geq 0$, οπ. είναι παραγωγ. στο $(0, \infty)$

Άρα $g'(x) = p \cdot x^{p-1}$

Άρα, από (i) : $E(x^p) = E[g(x)] = \underbrace{g(0)}_0 + \int_0^\infty \underbrace{g'(t)}_{p \cdot t^{p-1}} \underbrace{P(x > t)}_{\text{απόφραξη } n} dt$
= $p \int_0^\infty t^{p-1} P(x > t) dt$, όταν τα όρια της ολοκλήρωσης αφορούν $g' \geq 0$.

Παρασκευή

28

Απρίλιος

2018

17:00

Αναζητήσεις

Σάββατο 13 Μαΐου 10⁰⁰ - 14⁰⁰ (4 ώρες)

Δευτέρα 29 Μαΐου 13⁰⁰ - όσο νάχει (max 16³⁰) (ελευθερία)

ΔΕΝ ΘΑ ΓΙΝΕΙ Τετάρτη 31 Μαΐου + Παρασκευή 2 Ιουνίου

* Τετάρτη 24 Μαΐου + Παρασκευή 26 Μαΐου (αλλαγές αιθουσών)
(θα βγει ανακοίνωση)

Γνωμένο Χώρου Πιθανότητας / (αυθαίρετα ηθικά)

Ορισμός : Έστω $I \neq \emptyset$, και $(\Omega, \mathcal{F}_i, P_i)_{i \in I}$ γ.π.

Θέτουμε $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i = \{ (\omega_i)_{i \in I} : \omega_i \in \Omega_i, \forall i \in I \}$

= $\{ \omega : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i \mid \omega_i \in \Omega_i \forall i \in I \}$

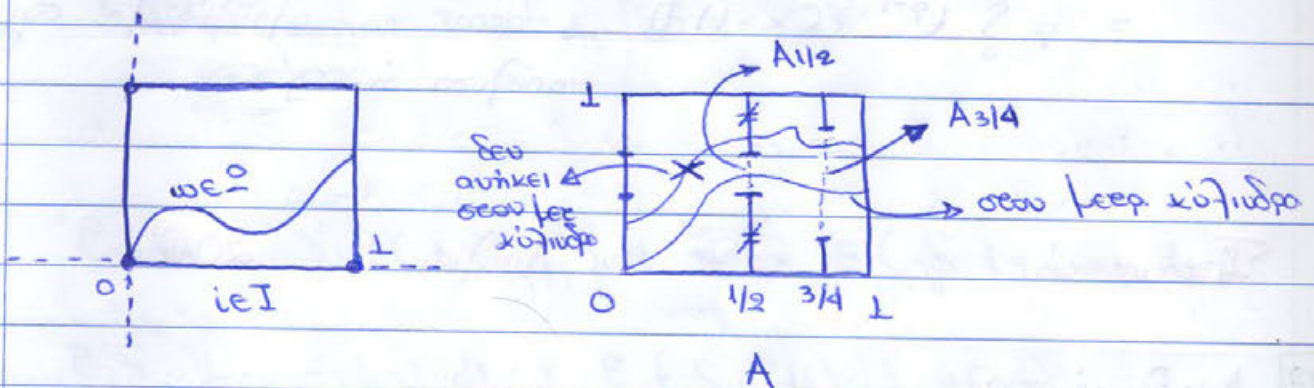
Λέμε πεπερασμένο χώρο πιθανότητας όταν Ω , τότε $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, όπου

$\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i : \mathcal{A}_i \subset \mathcal{F}_i, \forall i \in I$ και $J = \{ i \in I : \mathcal{A}_i \neq \Omega_i \}$
είναι πεπερασμένο

Θεωρούμε $\bigotimes_{i \in I} A_i := \sigma(\{A_i \subseteq \Omega : A \text{ περιήλθε ως υποσύνολο}\})$,

δηλ. τη σ -άλγεβρα που παράγεται από τους περιήλθε υποσύνολα.

Παράδειγμα: $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i) = ([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \gamma) \quad \forall i \in \mathbb{N}$



(ii) Στο $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}} = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$
 όπου $\Omega_i = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \gamma)$
 $\hookrightarrow i \geq 0$

περιήλθε υποσύνολο

$$A = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [\frac{3}{4}, \frac{5}{6}] \times [0, 1] \times \dots$$

$$B = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times \dots$$

↑
 άπειρα στοιχεία $[0, \frac{1}{2}]$ (που δεν είναι όλος ο χώρος)

Θεώρημα: Αν $\forall A$ περιήλθε υποσύνολο, ορίσουμε

$$P(A) = \prod_{i \in I} P_i(A_i) = \prod_{i \in I} P_i(A_i) \quad \left(\begin{array}{l} \text{όλα τα } \mathcal{A}_i \\ P_i(A_i) = P_i(\Omega_i) = 1 \\ i \in I / J \end{array} \right)$$

τότε το P ενεργεί ως μοναδικά σε κάθε πιθανότητα στον $\mathcal{P}$.
 $(\Omega, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i)$ το ορίζουμε $\bigotimes_{i \in I} P_i$, και

το γίγνεσθαι γεγονός των $(P_i)_{i \in I}$ και το χώρο

$(\underset{||}{\circ}, \bigotimes_{i \in I} A_i, \bigotimes_{i \in I} P_i)$ του γίγνεσθαι γεγονός των

$\prod_{i \in I} \circ_i$

$(\circ_i, A_i, P_i)_{i \in I}$

Παράδειγμα: Έστω το π.ε. μιας ακοφιδίας φίλων ενός υψίστατος, να φέρνεται x με π.δ. p και r με π.δ. $1-p$. Αναζητείται το χ.π. του περιβάλλοντος κύκλου.

Εδώ $(\circ_i, A_i, P_i) = (\{x, r\}, P(\{x, r\}), P_p)$, $0 \leq p < 1$
 $\forall i \geq 1$

Σύμφωνα με το θεώρημα ο χ.π. του π.ε. είναι

$$(\circ, A, P) = (\{x, r\}^{N^*}, \bigotimes_{i \geq 1} P(\{x, r\}), \bigotimes_{i \geq 1} P_p) \\ \neq P(\{x, r\}^{N^*})$$

Παράδειγμα: $P(\text{"3" φίλη } x, \text{"10" φίλη } r)$

θεώρημα $P_p(\{x\}) P_p(\{r\}) = p(1-p)$

Ανεξαρτησία

• ανεξαρτησία ενδεχόμενων

Ορισμός: Έστω $(\circ, A, P)$ χ.π. και $(A_i)_{i \in I}$ σαν A .

Τα $(A_i)_{i \in I}$ (οικογένεια ενδεχόμενων) λέγονται ανεξάρτητα αν $\forall$ πεπερασμένο $J \subset I$, ισχύει $P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$

• ανεξαρτησία οικογένειας συλλογίου ενδεχόμενων

Έστω $(A_i)_{i \in I}$ (οικογένεια αλληλοχών ευδερχμένων),
 $A_i \subset A_j$. Τότε η $(A_i)_{i \in I}$ λέγεται αυξάνουσα,
 αν $\forall$ πεπερασμένο $J \subset I$ και $A_i \in J, i \in J$, ισχύει

$$P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

• αυξανουσα ευχαιων θεωρηματα

Έστω $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ p.x. και $(X_i)_{i \in I}$ οικογένεια ρ.φ.
 με $X_i : \Omega \rightarrow E_i, \forall i \in I$. Τότε, οι $(X_i)_{i \in I}$
 λέγονται αυξανουσες ρ.φ. αν η οικογένεια των σ-αλγεβρών
 $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ είναι αυξανουσα.

Παρατήρηση, οι $(X_i)_{i \in I}$ είναι αυξ. ρ.φ., αν $\forall n \geq 2$,
 $\forall$ επιλογή δεικτών $i_1, \dots, i_n \in I$ και $B_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, B_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$
 έχουμε $P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_n} \in B_{i_n}) = P(X_{i_1} \in B_{i_1}) \dots$

Παρατήρηση, $(X_i)_{i \in I}$ αυξ. $\iff (\sigma(X_i))_{i \in I}$ είναι
 αυξ. $\iff (X_i^{-1}(\mathcal{E}_i))_{i \in I}$ είναι αυξ. (=)

$(\{X_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathcal{E}_i\})_{i \in I}$ είναι αυξ.
 $= (\{\{X_i \in B_i\} : B_i \in \mathcal{E}_i\})_{i \in I}$, δηλ. ορ. αυξ. της.

Ευδερ. $\forall J \subset I, \forall B_i \in \mathcal{E}_i, i \in J$, έχουμε

$$P(\bigcap_{i \in J} \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i \in J} P(X_i \in B_i)$$

Ειδικά, για $n=2$, X και Y είναι αυξ. ρ.φ. $\iff$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B), \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

Θεώρημα: Έστω $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ 2 p.x. και

$x : \Omega \rightarrow E, y : \Omega \rightarrow F$ ρ.φ., τότε x και y
 αυξ. ρ.φ. $\iff P(X \in A)P(Y \in B) \quad \forall A \in \mathcal{C}, \forall B \in \mathcal{D}$,

όπου $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ οικογένειες κλειστές ως προς πεπερασμένες
 ενότητες και $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}, \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$

Πρόταση: Έστω $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ελ.

Τότε X και Y αυτ. ελ $\Leftrightarrow P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$

Απόδειξη:

$$(F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow): P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \in (-\infty, x], Y \in (-\infty, y]) = \\ &= P(X \in (-\infty, x]) P(Y \in (-\infty, y]) = P(X \leq x) P(Y \leq y) \\ &\quad \forall x,y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$(\Leftarrow): \mathcal{E} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}, \mathcal{F} = \{(-\infty, y], y \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{E} = \mathcal{F}$ είναι σ-γεννημένα σελς ανεξαρτητές τοιές
και $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έχει δείξει.

Από το προηγούμενο θέμα θα πάρει το αποτέλεσμα.

Θεώρημα: Έστω $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ αυτ. ελ, όπου X, Y
δεσμευ ή $E|X|, E|Y| < +\infty$.

$$\text{Τότε } E(XY) = E(X)E(Y) \quad (1)$$

Μάλιστα, αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ βεβαιωμένες με $f, g \geq 0$
ή $E|f(X)|, E|g(Y)| < +\infty$, τότε

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \quad (2)$$

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξει το (2). Αποδεικνύεται με
ευχρηστική πρόταση (βλ. Σημειώσεις)

$$(2) \Rightarrow (1).$$

Έστω $E|X|, E|Y| < +\infty$

Επιλέγουμε $f(x) = x$, και $g(y) = y$.

Τότε $E|f(X)| = E|X| < +\infty$ και $E|g(Y)| = E|Y| < +\infty$

Άρα $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$, δηλ.

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Αν $X, Y \geq 0$

$$\text{τότε } f(x) = x^+ = \max(0, x) \geq 0$$

$$g(y) = y^+ \geq 0$$

$$\text{Άρα } E[f(x)g(y)] = E[f(x)]E[g(y)], \text{ δηλ.}$$

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

επειδή όμως από υπόθεση, $x \geq 0$, δηλ. $x^+ \equiv x$

$y \geq 0$, δηλ. $y^+ \equiv y$

$$\text{άρα } E(xy) = E(x)E(y)$$

Γενίκευση: Αν $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ανεξ. εφ., $1 \leq i \leq n$, και $f_i, 1 \leq i \leq n$, πεπεσμένες, συνεχείς ή $E|f_i(X_i)| < +\infty$, $\forall 1 \leq i \leq n$, τότε

$$E[f_1(X_1) \dots f_n(X_n)] = E[f_1(X_1)] \dots E[f_n(X_n)]$$

(επαγωγικά)

Πρόταση: Αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. εφ., με $E(X_i^2) < +\infty$, $\forall 1 \leq i \leq n$, τότε

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

Απόδειξη: Για οποιαδήποτε n -εφ. ζεύγη

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Όμως, $\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ (δεν ανεξάρτητες)

$$= E(X_i)E(X_j) - E(X_i)E(X_j) = 0$$

Άσκηση 10.6: Έστω X ανεξ. εφ. με $E|X+Y| < +\infty$.

Να δ.ο. $E|X| < +\infty$, $E|Y| < +\infty$.

Το πρώτο όσων είναι εμφανές;

Απόδειξη: Έστω $E|X+Y| < +\infty$

Αν $X = c$ μ.π. 1, τότε $E|X| = E|X+c-c| \leq E|X+c| + c < +\infty$

" $\leq \infty$

και παρόμοια $E|Y| = |c| < +\infty$

Αν Y όχι εκφυλισμένη εφ., τότε $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$P(Y < c) > 0 \quad \text{και} \quad P(Y \geq c) > 0 \quad (\text{δείξε το})$$

Θέτουμε $Y' = Y - c$, τότε

$$E|X + Y'| < +\infty \Leftrightarrow E|X + Y| < +\infty \quad \text{και}$$

$$E|Y'| < +\infty \Leftrightarrow E|Y| < +\infty$$

Τότε $P(Y' < 0) > 0$ και $P(Y' \geq 0) > 0$

Αρα λοιπόν χ.β.γ. υποθέτουμε ότι το $c = 0$

δηλ. $P(Y < 0) > 0$ και $P(Y \geq 0) > 0$.

$$E(X^+) = \frac{1}{P(Y \geq 0)} E(\underbrace{1_{\{Y \geq 0\}}}_{g(Y)}) E(\underbrace{X^+}_{h(X)}) \quad \begin{matrix} x, y \\ \text{ ανεξ.} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[X^+ 1_{\{Y \geq 0\}}] = \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[X 1_{\{X \geq 0\}} 1_{\{Y \geq 0\}}]$$

$$= \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[X 1_{\{X \geq 0, Y \geq 0\}}]$$

$$\leq \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[(X+Y) 1_{\{X \geq 0, Y \geq 0\}}] = \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[(X+Y)^+ 1_{\{X \geq 0, Y \geq 0\}}]$$

$$\leq \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[(X+Y)^+ 1_{\{X+Y \geq 0\}}] = \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[(X+Y)^+] \quad (\leq +\infty)$$

$$\text{Διότι } E|X+Y| < +\infty \Rightarrow E(X+Y)^+ < +\infty$$

$$\text{και } E(X+Y)^- < +\infty$$

$$\leq \frac{1}{P(Y \geq 0)} E[(X+Y) 1_{\{X+Y \geq 0\}}]$$

$$= E(X+Y)^+ \leq +\infty$$

Συμπερ. ότι $E(X^+) < +\infty$

Όμοια $E(X^-) < +\infty$

$$\underline{\text{Υπόδειξη}}: E(X^-) = \frac{1}{P(Y < 0)} E[1_{\{Y < 0\}}] E(X^-) =$$

$$= \frac{1}{P(Y < 0)} E[(-X) 1_{\{X < 0\}} 1_{\{Y < 0\}}] = E[-X 1_{\{X < 0, Y < 0\}}]$$

Τελικά, $\varepsilon(x^+) < \infty$, $\varepsilon(x^-) < \infty \Rightarrow \varepsilon|x| < \infty$
 Όπως, $\varepsilon|y| = \varepsilon|x+y-x| \leq \underbrace{\varepsilon|x+y|}_{< \infty} + \underbrace{\varepsilon|x|}_{< \infty} < \infty$
 υνόθ.

Τετάρτη 3 Μαΐου 2017

18: Αυξιάσμενα και Οπαδωμένα

Θεώρημα: Έστω $(A_i)_{i \in I}$ αυξιάσμενες οικογένειες ευδεχόμενων
 με $A_i \subset A$, $\forall i \in I$ και $(I_j)_{j \in J}$ μια διαμέριση του
 συνόλου δείκτων I $\left(\begin{array}{l} I_j \neq \emptyset, j \in J \\ \bigcup_{j \in J} I_j = I \text{ και } I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset, j_1 \neq j_2 \end{array} \right)$

Αν θέσουμε $B_j = \sigma(\bigcup_{i \in I_j} A_i)$, $\forall j \in J$, τότε οι $(B_j)_{j \in J}$ είναι
 αυξιάσμενες σ-αλγεβρές.

Πρόταση: Αν $A_1, \dots, A_n$ n -αυξ. ευδεχόμενα, τότε τα
 $A_1^c, \dots, A_n^c$ είναι αυξ. ευδεχόμενα.

Απόδειξη: $A_1, \dots, A_n$ ευδεχ. n -αυξ. $\xrightarrow{\text{Θεώρ.}}$ $\sigma(\{A_1\}), \dots, \sigma(\{A_n\})$
 είναι αυξιάσμενες σ-αλγεβρές.

(για $I = \{1, 2, \dots, n\}$ και $I_j = \{j\}$, $j = 1, \dots, n$)

$\Rightarrow \{\emptyset, A_1, A_1^c, \Omega\}, \dots, \{\emptyset, A_n, A_n^c, \Omega\}$ είναι αυξ.

$\Rightarrow A_1^c, \dots, A_n^c$ είναι αυξ. ευδεχ.

Παραδειγμα: A_1, A_2, A_3, A_4 αυξ. ευδεχ. $\xrightarrow{\text{Θεώρ.}}$
 $\underbrace{A_1 \cup A_2}_m$ και $\underbrace{A_3 \cap A_4}_m$

$\sigma(\{A_1, A_2\}) = \sigma(\{A_3, A_4\})$

Θεώρημα: Έστω $(X_i)_{i \in I}$ αυτ. ρ. και $(I_j)_{j \in J}$ μια διαμέριση του I , και $f_j: \mathbb{R}^{I_j} \rightarrow \mathbb{R}$ πεπερασμένα συναρτήσεις $\forall j \in J$. Αν $Y_j = f_j[(X_i)_{i \in I_j}]$ τότε οι $(Y_j)_{j \in J}$ θα είναι αυτ. ρ.

Παραδείγματα:

(1) Αν x, y, z είναι αυτ. ρ., τότε $x^2 + y^2, e^z$ αυτ. ρ.
 $f_1(x, y)$ $f_2(z)$

(2) Αν $(x_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία αυτ. ρ., τότε
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \min(|x_{2n+1}|, 1)$, $(\sin x_{2n})_{n \geq 1}$ είναι αυτ. ρ.
 $f(x_1, x_3, \dots)$ $g(x_2, x_4, \dots)$
 $g_n(x_{2n})_{n \geq 1}$

Ανεξαρτησία - Μέτρο Γινόμενο

Πρόταση: Έστω $X = (X_1, \dots, X_n)$ ρ. με τιμές στον $\mathbb{R}^n$.
 Οι ρ. $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξαρτητές $\Leftrightarrow$
 $P_X = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$

$(\Rightarrow)$: Αν $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ πεπερασμένα σφαιρικά
 τότε αρκεί να δούμε $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), 1 \leq i \leq n$

$$P_X(A) = P_{X_1}(A_1) \dots P_{X_n}(A_n)$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως, } P_X(A) &= P(X \in A) = P((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) \\ &= P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) \stackrel{\text{unid. αυτ.}}{=} P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P_{X_1}(A_1) \dots P_{X_n}(A_n) = (P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n})(A_1 \times \dots \times A_n) \\ \Rightarrow P_X &= P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n} \text{ από προηγούμενη θεωρία (παραδείγματα)} \end{aligned}$$

$$(\Leftarrow): P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P_X(A_1 \times \dots \times A_n) \stackrel{\text{unid.}}{=}$$

$$= P_{x_1}(A_1) \dots P_{x_n}(A_n) = P(x_1 \in A_1) \dots P(x_n \in A_n)$$

άρα, οι $x_1, \dots, x_n$ αυξ. εφ.

Πρόβλημα (έργονος ζήτησε εως Άσκ. 10.6):

Αν $E|x+y| < \infty$, και x, y αυξ. εφ. $\Rightarrow E|x|, E|y| < \infty$
 $\nearrow$ άρκει να δ.ο.

Λύση: $E|x+y| = \int \underbrace{|x+y|}_{g(x,y)} dP \stackrel{\text{FAM}}{=} \int |x+y| dP_{x,y}(x,y)$

$\underbrace{x,y \text{ αυξ.}}_{\text{+ θεωρ.}} \int |x+y| d(P_x \otimes P_y)(x,y) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int \underbrace{\left(\int |x+y| dP_x(x) \right)}_{g(y)} dP_y(y)$
 $\underbrace{\int |x+y| dP_x(x)}_{\text{unif. } < \infty}$

$\Rightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R} : g(y_0) < \infty$, δηλ. $\int |x+y_0| dP_x(x) < \infty$ ή
 $E|x+y_0| < \infty$. Άρα, $E|x| = E|x+y_0-y_0| \leq$
 $\leq \underbrace{E|x+y_0|}_{< \infty} + |y_0| < \infty$

Ναυ εντερενεται αν x, y αυξ. εφ και ισχυεται

$E[g(x,y)]$ να ειναι υπολογισατο με

$$E[g(x,y)] = \int \left(\int g(x,y) dP_x(x) \right) dP_y(y) \\ = \int \left(\int g(x,y) dP_y(y) \right) dP_x(x)$$

Χαρακτηρι αυξ. εφ με διαδοχικες παραβολες

Πρόβλημα: Έστω I σύνολο δείκτων και $(E_i, \mathcal{E}_i, P)_{i \in I}$ οικογένεια χ.π. Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε χ.π. $(\mathcal{O}, \mathcal{A}, P)$ και εφ $x_i : \mathcal{O} \rightarrow E_i$ εως (α) Η παραβολή $P_x = P, \forall i \in I$
 (β) $(x_i)_{i \in I}$ αυξ. εφ

Θέλουμε $\mathcal{O} = \prod_{i \in I} E_i$, $\mathcal{A} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$, $P = \bigotimes_{i \in I} P_i$

δηλ. $(\mathcal{O}, \mathcal{A}, P)$ είναι ο χώρος γινόμενου των $(E_i, \mathcal{E}_i, P_i)_{i \in I}$
 θέλουμε $X_r((\omega_i)_{i \in I}) = \omega_r$, δηλ. η προβολή στις r -συντεταγμένες.

Πρόταση : (i) $\{X_r\}$ είναι εφ και $P_{X_r} = P_r$
 (ii) Οι $(X_r)_{r \in I}$ είναι ανεξ εφ

Απόδειξη : (i) Έστω $A \in \mathcal{E}_r$, τότε $X_r^{-1}(A) = \prod_{i \in I} A_i$, όπου

$$A_i = \begin{cases} \mathcal{E}_i, & i \neq r \\ A, & i = r \end{cases} \quad \text{δηλ. είναι περνούχος κύβινδρος} \Rightarrow X_r^{-1}(A) \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \Rightarrow X_r \text{ είναι εφ } \forall r \in I$$

(Οότα είναι $\mathcal{E}_i$, εκτός από 1)

$$\text{Ενότητα, αν } A \in \mathcal{E}_i, \text{ τότε } P_{X_r}(A) = P(X_r^{-1}(A)) = P\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \text{όπως παραπάνω} \quad (*)$$

$$= P_r(A)$$

Άρα, $P_{X_r} = P_r$

(ii) Έστω I πεπερ. $\subset \mathbb{N}$ και $A_j \in \mathcal{E}_j, \forall j \in J$
 αρκεί να δό. $P(X_j \in A_j, j \in J) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$

$$\text{Όπως, } P(X_j \in A_j, j \in J) = P\left(\bigcap_{j \in J} X_j^{-1}(A_j)\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \quad (\text{όπου } A_i = \mathcal{E}_i, \text{ για } i \notin J) = \text{περ. κύβινδρος}$$

$$= \prod_{j \in J} P_j(A_j) \stackrel{(i)}{=} \prod_{j \in J} P_{X_j}(A_j) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$$

Άσκηση 10.3 : Έστω X, Y ανεξ εφ και $X=Y$ β.π. 1.

Τότε η X είναι εκφυλισμένη εφ.

Απόδειξη : Έστω κάποιος $x \in \mathbb{R}$. Τότε $P(X \leq x) = P(X \leq x, X=Y)$ β.π. 1

$$= P(X \leq x, Y=X, Y \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) \stackrel{\text{ανεξ}}{=} P(X \leq x) P(Y \leq x)$$

$$= P(X \leq x) P(Y \leq x, X=Y) = P(X \leq x) P(X \leq x, X=Y) =$$

$$= P(X \leq x) P(X \leq x) \Rightarrow P(X \leq x) \in \{0, 1\} \Rightarrow \text{βασιστική συνάρτηση σ.κ.}$$

(εις ιδιότητες της σ.κ.)

↳ να αποδειχθεί

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

για $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X$ εκφυλ. ε/.

Υπόθεση (1: Λήμμα B-C)

Αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και (A_n) σενυ $\mathcal{A}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

Πρόταση (2: Λήμμα B-C): Αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι χ.π. και $(A_n)_{n \geq 1}$ ανεξ. αμοιβά. ευδεχ. σενυ $\mathcal{A}$, τότε $\sum_n P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$

Απόδειξη: $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$

Αρκεί να δ.ο. $P[(\limsup A_n)^c] = 0$

$$P\left[\bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\bigcap_{k \geq n} A_k^c}_{\text{αύξουσα}}\right] = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right] = 0$$

$$\text{άρα } \forall n \geq 1, \quad P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0$$

$$\text{'Εστω } \lambda \text{ άρα για } n \geq 1, \quad P\left[\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right] = P\left[\lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^m A_k^c}_{\text{φθίνουσα}}\right]$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) \stackrel{\text{ανεξ.}}{\text{+prop.}} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m P(A_k^c)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m e^{-P(A_k)}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 - x_k = e^{-x_k} \\ 1 + x \leq e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^m P(A_k)} = e^{-\infty} = 0$$

όπου χρονοτ. ότι $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \infty$

Παρατηρήσεις: (1) Η υπόθεση της αυξ. στο 2^ο Ανήθα B-C.

Δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παράγεται, αν

$$(C, A, P) = (C_0, 1), (C_0, 1), 1) \text{ και } A_n = (0, \frac{1}{n})_{n \geq 1}$$

τότε $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty$

Όμως, $P(\limsup A_n) = P(\lim_n A_n) = P(\emptyset) = 0$

αφού $(0, \frac{1}{n}) \downarrow \emptyset$

Όμως, η $(A_n)_n$ δεν είναι αυξ. α.κ. ε.δ.

π.χ. $P(A_2 A_3) \stackrel{A_2 \supset A_3}{=} P(A_3) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A_2) \cdot P(A_3)$

(2) Το αντιστρόφιο του 2^{ου} Ανήθα B-C ισχύει δηλ. αν $(A_n)_n$ αυξ. ε.δ. τότε $P(\limsup A_n) = 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty$

Παράγεται, αν δεν ισχύει, τότε θα έπρεπε $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$

$\stackrel{1^{\circ} \text{ Ανήθα}}{\text{B-C}} \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0 \neq 1$, άτοπο

Παρατηρείτε ότι με την υπόθεση της αύξησης των $(A_n)_{n \geq 1}$:

$$\sum_n P(A_n) < \infty \Leftrightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

$$\sum_n P(A_n) = \infty \Leftrightarrow P(\limsup A_n) = 1$$

$P(\limsup A_n) \in \{0, 1\}$ (δεν μπορεί να πάρει ενδιάμεση τιμή).

Είναι ειδική περίπτωση του νόμου "0-1" του Kolmogorov για ενδεχόμενα που εξαρτώνται μόνο από την τελική συμπεριφορά ακολουθίας αυξ. ενδεχόμενων.

Άσκηση 11.4 (δείξε και παραδ.):

Αν $X_n \sim \text{Be}(\frac{1}{n})$, $n \geq 1$ αυξ. α.κ. ε.δ., τότε

$$(a) X_n \xrightarrow{P} 0$$

$$(b) X_n \not\xrightarrow{as} 0 \quad \text{Ναίστερα, } P(\lim X_n = 0) = 0$$

$$\text{Λύση: (a) Έστω } \varepsilon > 0 \quad P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0 \quad \text{Άρα } X_n \xrightarrow{P} 0$$

$$(b) \text{ Έστω } A_n = \{X_n = 1\} \text{ επειδή } (X_n)_{n \geq 1} \text{ από ανεξ. αυξ.}$$

$$\Rightarrow (A_n)_{n \geq 1} \text{ είναι αυξ. ακολουθ. ενδεχ.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\text{Από } \mathcal{L} \text{ ή } \text{Λήμμα B-C} \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1, \text{ δηλ.}$$

$$P(\limsup \{X_n = 1\}) = 1 \Rightarrow P((\limsup \{X_n = 1\})^c) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Όπως και } \{ \lim_n X_n = 0 \} \subset (\limsup \{X_n = 1\})^c \Rightarrow P(\lim X_n = 0) = 0$$

199 Λογικός Νόμος των Μεγίστων Αριθμών (LNN)

Θεώρημα: Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ α.ι.ε.λ. σπου $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με τιμές σπου $\mathbb{R}$, και $E|X_1| < +\infty$. Θεωρούμε $\mu = E(X_1)$ και $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\forall n \geq 1$. Τότε $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{as} \mu$.

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε όταν $E(X_1^2) < +\infty$:

B.1] Το αποδεικνύουμε πρώτα για $X_n \geq 0$

Θεωρούμε $Y_n = \frac{S_n}{n} - \mu$, $n \geq 0$.

Έχουμε $E(Y_n) = E(\bar{X}_n) - \mu = \mu - \mu = 0$

$E(Y_n^2) = \text{Var}(Y_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \text{Var}(\bar{X}_n) \stackrel{\text{ave}}{=} \frac{\text{Var}(X_1)}{n}$

$= \frac{\sigma^2}{n}$, όπου $\sigma^2 < +\infty$, αφού $E(X_1^2) < +\infty$.

Χρησιμ. ότι $E(\bar{X}_n) = \mu$ και $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n}$

Θεωρούμε την υπαχόμενη της $(Y_n)_{n \geq 1}$ που είναι η $(Y_n^2)_{n \geq 1}$.

Έχουμε $E\left(\sum_{n \geq 1} Y_n^2\right) \stackrel{B-L}{=} \sum_{n \geq 1} E(Y_n^2) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma^2}{n^2} =$

$= \sigma^2 \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right) < +\infty$

Άρα, $\sum_{n \geq 1} Y_n^2 < +\infty$, με πίθ. 1

$\Rightarrow Y_{n^2} \xrightarrow{as} 0 \stackrel{\text{ΘΔΑ}}{\Rightarrow} Y_{n^2} \xrightarrow{as} 0 \Rightarrow$
 $\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mu \xrightarrow{as} 0 \Rightarrow \left| \frac{S_{n^2}}{n^2} - \mu \right| \xrightarrow{as} 0 \quad (1)$

$\forall k \geq 1$, ορίζουμε $n(k) = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Τότε $\lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \sqrt{k} \leq \lfloor \sqrt{k} \rfloor + 1 \Rightarrow$

$$nC_k) \leq \sqrt{k} \leq nC_k) + 1$$

Άρα, $\frac{1}{nC_k) + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{nC_k)} \Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{(nC_k) + 1)^2} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n^2 C_k)} \right| \quad (2)$$

Επιπλέον, από $nC_k) \leq \sqrt{k} \leq nC_k) + 1 \Rightarrow$

$$n^2 C_k) \leq k \leq (nC_k) + 1)^2$$

$$\Rightarrow \left| S_{n^2 C_k)} \leq S_k \leq S_{(nC_k) + 1)^2} \right| \quad (3)$$

(Εξαρτά ότι $X_i \geq 0$)

$$(2) + (3) \Rightarrow \frac{S_{n^2 C_k)}}{(nC_k) + 1)^2} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{(nC_k) + 1)^2}}{n^2 C_k)} \quad (4)$$

$$\frac{S_{n^2 C_k)}}{(nC_k) + 1)^2} = \frac{S_{n^2 C_k)}}{n^2 C_k)} \left(\frac{nC_k)}{nC_k) + 1} \right)^2 \xrightarrow{\text{as}} \mu \cdot 1 = \mu$$

$\downarrow \text{as}$ $\downarrow$ (από $nC_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$)
 μ 1

$$\frac{S_{(nC_k) + 1)^2}}{n^2 C_k)} = \frac{S_{(nC_k) + 1)^2}}{(nC_k) + 1)^2} \left(\frac{nC_k) + 1}{nC_k)} \right)^2 \xrightarrow{\text{as}} \mu \cdot 1 = \boxed{\mu}$$

$\downarrow \text{as}$
 μ

Από τα ανωρ. αυτά και το (4) $\Rightarrow \frac{S_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{as}} \mu$

$$\text{δηλ. } \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{as}} \mu$$

B.2 όπου είναι με ρίψες από $\mathbb{R}$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1^+ + \dots + X_n^+}{n} = \frac{X_1^- + \dots + X_n^-}{n}$$

Εξαρτά (X_n) α.ι.ρ. $\Rightarrow (X_n^+)_{n \geq 1}$ και $(X_n^-)_{n \geq 1}$ είναι α.ι.ρ.

$$x_1^+ = x_1 \cdot \mathbb{1}_{\{x_1 \geq 0\}} \leq |x_1| \Rightarrow (x_1^+)^2 \leq \underline{x_1^2}$$

$$x_1^- = (-x_1) \cdot \mathbb{1}_{\{x_1 < 0\}} \leq |x_1| \Rightarrow (x_1^-)^2 \leq \underline{x_1^2}$$

$$\Rightarrow E(x_1^+)^2 \leq E(x_1^2) < +\infty$$

$$E(x_1^-)^2 \leq E(x_1^2) < +\infty$$

Ποιόταν οι προϋποθέτ. του B.1 Άρα

$$\frac{x_1^+ + \dots + x_n^+}{n} \xrightarrow[n(x_i^+ \geq 0)]{as} E(x_1^+) \in \mathbb{R} \quad \text{Αντιστοίχως}$$

$$\frac{x_1^- + \dots + x_n^-}{n} \xrightarrow[n(x_i^- \geq 0)]{as} E(x_1^-) \in \mathbb{R}$$

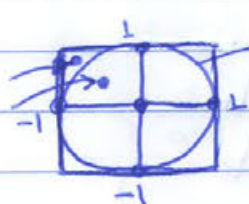
$$\text{Άρα, } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{as} E(x_1^+) - E(x_1^-) = \underline{E(x_1)}$$

Σημείωση: Ισχύει και για $E(x_1) = +\infty$ ή $E(x_1) = -\infty$
 ($E(x_1^+) = +\infty, E(x_1^-) < +\infty$) ($E(x_1^+) < \infty, E(x_1^-) = +\infty$)
 • INNA Αν $\bar{x}_n \xrightarrow{as} l$ και σε αυτές τις περιπτώσεις.

Εφαρμογή: (μέθοδος Monte Carlo)

Είναι μια μέθοδος προσέγγισης "άγνωστων τιμών", αποκλειστικά των (ή και γνωστών, αλλά δύσκολα υπολογιστών) ή προσέγγισης τέτοιων τιμών κάνοντας ευχ. παραβλάσεις που συνδυάζει μπορεί να προσομοιωθεί με κάποιο τρόπο.

Παράδειγμα: Προσέγγιση υπολογισμός του π .



$D=1$, τότε Εμβα. κυρ. δίσκου = $\underline{\pi}$

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx \, dy = 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{4} \, dx \, dy$$

$$\stackrel{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\parallel} \parallel$$

~ 124 ~

$$f_x(x) \parallel f_y(y)$$

Θεωρούμε $X \sim U(-1,1)$
 $Y \sim U(-1,1)$

ανεξ. ρ

Έχουμε $f_X(x) = \frac{1}{2}, -1 < x < 1$

$f_Y(y) = \frac{1}{2}, -1 < y < 1$

και $f_{X,Y}(x,y) \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{4},$
 $-1 < x, y < 1$

$$\text{'Εστω } n = 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}}_{g(x,y)} \cdot f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$

$$= 4 E[1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}] \Rightarrow E[1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}] = \frac{\pi}{4}$$

||

$$P(X^2+Y^2 \leq 1)$$

Αν $X_i, i \geq 1, Y_i, i \geq 1$ είναι α.λ.ρ. και
 ανεξ. μεταξύ τους, τότε

$$\frac{1_{\{x_1^2+y_1^2 \leq 1\}} + 1_{\{x_2^2+y_2^2 \leq 1\}} + \dots + 1_{\{x_n^2+y_n^2 \leq 1\}}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}}$$

$$\rightarrow E(1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}) = \frac{\pi}{4} \quad (X_i, Y_i \sim U(-1,1))$$

Άρα για μεγάλο n , δείχν. πέρας = ποσοστό των παρατηρήσεων
 ενός κύκλου $\approx \frac{\pi}{4}$

Πρόταση: (Ασθενής Νόμος του Μεγάλου Αριθμού)

Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ α.λ.ρ. με $E|X_1| < \infty$, τότε

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu = E(X_1)$$

Απόδειξη: Έχουμε από ΙΝΝΑ, έχουμε $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$

Οπότε, $\xrightarrow{\text{a.s.}} \Rightarrow \xrightarrow{P} \Rightarrow$ άρα $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

Ευχρηστικό: Με $E(X_1^2) < \infty$, έχουμε αν $\varepsilon > 0$

$$PC(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = PC(|\bar{X}_n - EC\bar{X}_n| > \varepsilon) \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\text{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n} 0, \text{ άρα } \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

Άσκηση 12.6: Έστω $(U_i)_{i \geq 1}$ α.ι.ρ. με $U_i \sim U(0,1)$.

N.δ.ο. (a) $(U_1 \dots U_n)^{1/n} \xrightarrow{as} e^{-1}$

(b) $U_1 \dots U_n \xrightarrow{as} 0$

(γ) $\frac{U_1^a + \dots + U_n^a}{n} \xrightarrow{as} \begin{cases} \frac{1}{1+a}, & a > -1 \\ +\infty, & a \leq -1 \end{cases}$

Ανάλυση: (a) $(U_1 \dots U_n)^{1/n} = e^{\log(U_1 \dots U_n)^{1/n}} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log U_i}$
Είναι από το β.δ.ο. $-\log U \sim \text{Exp}(1)$, άρα $U \sim U(0,1)$ (δείξτε το)

Άρα, $EC(-\log U) = E(\text{Exp}(1)) \Rightarrow E(\log U) = -1$

Άρα, από ΙΝΝΑ έχω $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log U_i \xrightarrow{as} E[\log U] = -1$

$\Rightarrow$ ΘΣΑ $e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log U_i} \xrightarrow{as} e^{-1}$

(b) $U_1 \dots U_n = e^{\sum_{i=1}^n \log U_i} = e^{n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log U_i} \xrightarrow[as]{-1} e^{-\infty} = 0$

(γ) $E(U^a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Από ΙΝΝΑ (όταν η π.ρ. σφίρεται) $(U_i^a, i \geq 1, \text{ α.ι.ρ.})$

$\frac{U_1^a + \dots + U_n^a}{n} \xrightarrow{as} E(U^a)$, $U \sim U(0,1)$

$$E(U^a) = \int_0^1 u^a \cdot 1 \, du = \begin{cases} \left[\frac{u^{a+1}}{a+1} \right]_0^1, & a \neq -1 \\ [\log u]_0^1, & a = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+1} \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{a+1}, & a \neq -1 \\ +\infty, & a = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a+1}, & a > -1 \\ +\infty, & a = -1 \\ \infty, & a < -1 \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier πέραν μιγαδικών

Έστω $(\mathbb{C}, \mathcal{A}, \mu)$ γ.π. και $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Borel-μετρήσιμη.

Τότε $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, όπου $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
Borel-μετρήσιμες

Οπότε $\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu \in \mathbb{C}$

αν $\int |\operatorname{Re} f| d\mu < \infty$, $\int |\operatorname{Im} f| d\mu < \infty$

Ιδιότητες

$$(1) \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

(2) $\int \bar{f} d\mu = \overline{\int f d\mu}$, όπου $|f|, \bar{f}$ είναι μέτρο και σφύγος
μέτρ. ου.

$$(1) \text{ και } \text{αρχικά } \int f d\mu \stackrel{\text{μετασχηματισμός}}{\text{μετρήσιμος}} e^{i\theta} \left| \int f d\mu \right|$$

$$z = |z| e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \int f d\mu = e^{-i\theta} \int f d\mu =$$

$$= \int e^{-i\theta} f d\mu = \int \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) d\mu + i \int \operatorname{Im}(e^{-i\theta} f) d\mu$$

$$= \int |e^{-i\theta} f| d\mu \quad (\operatorname{Re}(z) \leq |z|)$$

$$= \int |e^{-i\theta}| |f| d\mu = \int |f| d\mu$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ |e^{i\theta}| = 1, \forall \theta \end{pmatrix}$$

(2) άμεσα

Ορισμός (μετασχ. Fourier ενός μέτρου μιγαδικών):

Έστω μ μ.μ. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Λέμε μετασχ. Fourier

εάν μ , εν συντομία $\hat{\mu}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$

$$\hat{\mu}(t) = \int e^{itx} d\mu(x) = \int \cos(tx) d\mu(x) + i \int \sin(tx) d\mu(x)$$

Θεώρημα: Έστω μ μ.μ. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τότε

$$(i) |\hat{\mu}(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \hat{\mu}(0) = 1$$

(iii) $\hat{\mu}(t)$ είναι φασική συνάρτηση συνεχής.

Απόδειξη: (i) $|\hat{\mu}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) \right| \stackrel{\text{S.1}}{\leq} \int_{\mathbb{R}} (e^{itx}) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 1 d\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) = 1$

$$(ii) |\hat{\mu}(0)| = \int_{\mathbb{R}} e^{i0x} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 1 d\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) = 1$$

$$(iii) \text{αρκεί να δ.ο.} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+h)x} d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} (e^{ihx} - 1) d\mu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}| |e^{ihx} - 1| d\mu(x) \\ &\stackrel{①}{=} \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| d\mu(x) \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| d\mu(x) \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

$$(i) |e^{ihx} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) |e^{ihx} - 1| \leq |e^{ihx}| + 1 = 2 = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 2 d\mu(x) = 2\mu(\mathbb{R}) = 2 < \infty$$

γ. θ.ς.

$$\text{άρα } \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| d\mu(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu(x) = 0$$

Τετάρτη

10

Μαΐου

2017

20: Χαρακτηριστικές Συνάρτησεις

Ορισμός: Έστω X πραγ. ε.φ. σε γ.π. $(C, \mathcal{F}, P)$.

Λέμε χαρακτηριστική συνάρτηση της X , τη συνάρτηση

$$\phi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } \phi_X(t) = E(e^{itX})$$

Παρατήρηση: $\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP \stackrel{\text{ε.Α.Μ}}{=}$

$$= \int e^{itx} dP_X(t) = \hat{P}_X(t)$$

Άρα η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας ε.β. X είναι ο μετασχηματισμός Fourier του μ.π. P δηλ. της κατανομής της X .

Πρόταση: Αν X, Y indep. ε.β. σε $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε $\forall t \in \mathbb{R}$

- (i) $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$
- (ii) $\phi_{aX+bY}(t) = e^{itb} \phi_X(at)$

(iii) Αν X, Y ανεξ. ε.β. $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$

Απόδειξη: Είναι $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta - i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$
 $= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$$(i) \phi_X(-t) = E(e^{i(-t)X}) = E(e^{-itX}) = E(\overline{e^{itX}}) = \overline{E(e^{itX})} = \overline{\phi_X(t)}$$

$$(ii) \phi_{aX+bY}(t) = E(e^{it(aX+bY)}) = E(e^{itb} e^{iatX}) = e^{itb} E(e^{i(at)X}) = e^{itb} \phi_X(at)$$

$$(iii) \phi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(\underbrace{e^{itX}}_{g(X)} \cdot \underbrace{e^{itY}}_{g(Y)}) \xrightarrow[\text{X και Y ανεξ.}]{\text{}} = E(e^{itX}) E(e^{itY}) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$$

Παραδείγματα (uno). χαρακ. συναρτήσεις):

$$(i) X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow \phi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$$

$$\text{Απόδειξη: } \phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x=0}^n e^{itx} \cdot P(X=x) =$$

$$= \sum_{x=0}^n e^{itx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \underbrace{(pe^{it})^x}_a \underbrace{(1-p)^{n-x}}_b$$

$$= (pe^{it} + 1-p)^n$$

Β' ερώτηση: $X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^n X_i$, $X_i \sim \text{Be}(p)$, ανεξ.

$$\phi_X(t) = \phi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) \xrightarrow[\text{X}_i \sim \text{Be}(p)]{\text{ανεξ.}} \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t) = \phi_{X_1}^n(t) =$$

$$= E^n(e^{tx_1}) = [\rho e^t + (1-\rho) \cdot 1]^n$$

$$(ii) X \sim U(-a, a) \Rightarrow \phi_X(t) = \begin{cases} \frac{\sin(at)}{at}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

Απόδειξη: α' ερώση: Αν $X \sim U(-a, a)$, τότε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in (-a, a) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\phi_X(t) = E(e^{itx}) = \int_{-a}^a e^{itx} \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{itx} dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \cos(tx) dx + \frac{i}{2a} \int_{-a}^a \sin(tx) dx$$

άπειρα συσπενον
σε ούπλ. διάσεντα
γίω ανό το 0

νεγρεή συσπενον
σε ούπλ. διάσεντα
γίω ανό το 0

$$= \frac{2}{2a} \int_0^a \cos(tx) dx = \frac{1}{at} [\sin(tx)]_0^a = \frac{1}{at} \sin(at),$$

$$\text{β' ερώση: } \phi_X(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{itx} dx = \frac{1}{2ait} [e^{itx}]_{-a}^a =$$

$$(Είπαί (e^{itx})' = ite^{itx})$$

$$= \frac{1}{2ait} (e^{ita} - e^{-ita}) = \frac{1}{2ait} 2i \operatorname{Im}(e^{ita})$$

$$= \frac{1}{ait} \sin(ta) = \frac{\sin(ta)}{at} \quad (z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z))$$

Παρατήρηση: (i) Αν $X \sim \operatorname{Bin}(n, \rho) \Rightarrow M_X(t) = (\rho e^t + 1 - \rho)^n$

(ii) Αν $X \sim U(-a, a) \Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{2at} (e^{at} - e^{-at}), t \neq 0$

Για το (i) αν $t \rightarrow it$

$$M_X(it) = (pe^{it} + 1-p)^n = \phi_X(t)$$

$$\text{Είναι } M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$\phi_X(t) = E(e^{itx})$$

Θα δείξε ρίστε είναι εύκολο έχοντας υπολογίσει $M_X(t)$,
να πάρουμε $\phi_X(t) = M_X(it)$
(οσο εύκολο λιάντα).

(ii) $\rightarrow$ σαν Άσκηση να βιά. $t \rightarrow it$ και να προκ. η
χαράξε. συνάρτηση

(iii) Αν $X \sim N(0,1)$, τότε $M_X(t) = e^{t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Δεχόμενοι ότι $\phi_X(t) = M_X(it)$. Τότε

$$\phi_X(t) = e^{(it)^2/2} = e^{-t^2/2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Μετασχηματισμός Fourier στο $\mathbb{R}^n$

$$\text{Sub. } \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ορισμός: Έστω μ , μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

Λέμε μετασχηματισμό Fourier του μ , εν συνάρτηση

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } \hat{\mu}(u) = \int e^{i \langle u, x \rangle} d\mu(x) \\ = \int \cos(\langle u, x \rangle) d\mu(x) + i \int \sin(\langle u, x \rangle) d\mu(x) \\ \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Παρατηρήσεις:

(1) $|\hat{\mu}(u)| \leq 1$

(2) $\hat{\mu}(0) = 1$

(3) $\hat{\mu}(u)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση

Ορισμός: Έστω X τ.π. σε χ.π. $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, P)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$
 λέμε χαρακτηριστική συνάρτηση της X , τη συνάρτηση
 $\phi_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ με $\phi_X(u) = E(e^{i\langle u, X \rangle})$

Πρόταση: (i) $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\phi_{AX+B}(v) = e^{i\langle v, B \rangle} \phi_X(A^T v)$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 $B \in \mathbb{R}^m$

$u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$

(iii) αν X, Y ανεξ. n -διάστατ. τ.π., τότε
 $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u) \phi_Y(u)$

Πρόταση Μοναδικότητας: Έστω μ, ν χ.π. στον $(\mathcal{C}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
 Τότε $\hat{\mu}(u) = \hat{\nu}(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu = \nu$

Πρόταση: Αν $X, Y \in \mathbb{R}^n$, τ.π. τότε
 $\phi_X(u) = \phi_Y(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow P_X = P_Y$ ($X^d = Y$)

Πρόταση: Έστω $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ τ.π. Τότε
 $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ είναι ανεξ. τ.π. $\Leftrightarrow \phi_X(u_1, \dots, u_n) =$
 $= \phi_{X_1}(u_1) \dots \phi_{X_n}(u_n)$
 $\forall u \in \mathbb{R}^n$

Εφαρμογές:

(i) Αν $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ και X, Y ανεξ. $\Rightarrow$
 $X+Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$

(ii) Αν $X \sim \mathcal{G}(a_1, \delta)$, $Y \sim \mathcal{G}(a_2, \delta) \xrightarrow[\text{ανεξ.}]{X, Y} X+Y \sim \mathcal{G}(a_1+a_2, \delta)$,
 $a_1, a_2, \delta > 0$

(iii) Αν $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \xrightarrow[\text{ανεξ.}]{X, Y} X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

Απόδειξη: (i), (ii) άσκηση

(iii) Έστωτε αν $Z \sim N(0,1)$, τότε $\phi_Z(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$
 αν $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z$, όπου $Z \sim N(0,1)$

$$\text{Άρα } \phi_X(t) = \phi_{\mu + \sigma Z}(t) \stackrel{\text{ιδιότητα}}{=} e^{it\mu} \phi_Z(\sigma t) =$$

$$= e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^2} = \left[e^{it\mu - \frac{\sigma^2}{2} t^2} \right]$$

$$\text{Άρα, } \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t) = e^{it\mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2} t^2} e^{it\mu_Y - \frac{\sigma_Y^2}{2} t^2}$$

$$= e^{it(\mu_X + \mu_Y) - \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} t^2} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

$$\text{Ούτως } \mu = \mu_X + \mu_Y \text{ και } \sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$$= \text{χ.σ. } N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \mu \in \mu, \sigma^2 \text{ όπως παραπάνω}$$

$$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (\text{από Θεώρ. βασικών ενς χ.σ.})$$

→ Για εῤῥασηνον (με χαρακτ. συναρτ.)

$$\bullet \text{ Αν } X_i \sim P(\lambda_i), 1 \leq i \leq n, \text{ τότε } \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

$$\bullet \text{ Αν } X_i \sim \text{Geo}(p), 1 \leq i \leq n, \text{ τότε } \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Neg Bin}(n, p)$$

$$\bullet \text{ Αν } X_i \sim \text{Exp}(\theta), 1 \leq i \leq n, \text{ τότε } \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Erlang}(n, \theta)$$

$$\bullet \text{ Αν } X = \sum_{i=1}^n Z_i^2, \text{ όπου } Z_i \sim N(0,1), 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow X \sim \boxed{\chi_n^2} \equiv \boxed{G\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

Πονογευνίερες

Ορισμός: Αν X πραγτ. τ.μ., τότε λέτε πονογευνίερα
 ενς X εν συνάτηνον $M_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, με $M_X(t) = E(e^{tX})$

Λήμμα: (i) Αν $\varepsilon > 0$ και $M_X(\varepsilon) < +\infty \Rightarrow M_X(t) < +\infty, \forall t \in [0, \varepsilon]$
 Επινίτουν $E(X)^k < +\infty, \forall k \geq 1$

(ii) Αν $\varepsilon > 0$, και $M_X(-\varepsilon) < +\infty \Rightarrow M_X(t) < +\infty, \forall t \in [-\varepsilon, 0]$
 και $E(X)^k < +\infty, \forall k \geq 1$

Απόδειξη: (i) Θ.δ.ο. $M_X(t) = E(e^{tx}) < +\infty$, $\forall t \in [0, \varepsilon]$

Αν $\omega: X(\omega) \geq 0$. Τότε για $t \in [0, \varepsilon]$, έχουμε
 $tX(\omega) \leq e^{tX(\omega)} \Rightarrow e^{tX(\omega)} \leq e^{e^{X(\omega)}} < e^{e^{X(\omega)}} + 1$

Αν $\omega: X(\omega) < 0$. Τότε για $t \in [0, \varepsilon]$, έχουμε
 $tX(\omega) \leq 0 \Rightarrow e^{tX(\omega)} \leq e^0 = 1 < 1 + e^{e^{X(\omega)}}$

Άρα έχουμε $e^{tx} \leq 1 + e^{e^x} \Rightarrow$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) \leq 1 + E(e^{e^x}) = 1 + M_X(e) < +\infty$$

(από υπόθεση)

• Αν $\omega: X(\omega) \geq 0 \Rightarrow X^+(\omega) = X(\omega)$. Άρα

$$\frac{E^k(X^+(\omega))^k}{k!} = \frac{e^k X^k(\omega)}{k!} \leq e^{e^{X(\omega)}}$$

Αν $\omega: X(\omega) < 0 \Rightarrow X^+(\omega) = 0 \Rightarrow$ η παραπάνω ανισότητα ισχύει κατ'αυτομάτη.

Άρα $\frac{E^k(X^+)^k}{k!} \leq e^{e^x} \Rightarrow$

$$(X^+)^k \leq \frac{k!}{e^k} e^{e^x} \Rightarrow$$

$$E(X^+)^k \leq \frac{k!}{e^k} E(e^{e^x}) = \frac{k!}{e^k} M_X(e) < +\infty$$

(από υπόθεση)

$$\boxed{\forall k \geq 1}$$

(ανδείξεις και το (ii))

Πρόταση: Έστω $D_X = \{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < +\infty\}$. Τότε

(i) το D_X είναι διάστημα με $0 \in D_X$

(ii) $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$ (όταν δεν ορίζεται) $\Rightarrow D_X = \underline{\{0\}}$
 ή ίσως εφ'όσον

Πρόταση: Αν $\exists \varepsilon > 0 : M_X(\varepsilon) < +\infty, M_X(-\varepsilon) < +\infty$, τότε

(i) $M_X(t) < +\infty$, $\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

(ii) $E|X|^k < +\infty$, $\forall k \geq 1$ (έχει πολλές k -τάξεις, $\forall k \geq 1$)

$$(iii) M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k, \text{ με αρχικά ορίσματα κομψά.} \\ \text{εο ε.}$$

$$(iv) E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$$

Απόδειξη: (i) $\exists \varepsilon > 0 : M_X(\varepsilon) < +\infty \xrightarrow{\text{Πρότ.}} M_X(t) < +\infty, \forall t \in [0, \varepsilon]$
 $\exists \varepsilon > 0 : M_X(-\varepsilon) < +\infty \xrightarrow{\text{Πρότ.}} M_X(t) < +\infty, \forall t \in [-\varepsilon, 0]$

$$\Rightarrow M_X(t) < +\infty, \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$(ii) |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow |x|^k = \begin{cases} x^k, & x \geq 0 \\ (-x)^k, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|x|^k = x^k \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} + (-x)^k \mathbb{1}_{\{x < 0\}} =$$

$$= x^k \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}^k + (-x)^k \cdot \mathbb{1}_{\{x < 0\}}^k =$$

$$= (x \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}})^k + (-x \mathbb{1}_{\{x < 0\}})^k = (x^+)^k + (x^-)^k$$

(Ειδικά για $x=1$, $|x| = x^+ + x^-$)

$$\Rightarrow |x|^k = (x^+)^k + (x^-)^k$$

Επειδή $M_X(\varepsilon) < +\infty \xrightarrow{\text{νόμος. Πρότ.}} E(X^+)^k < +\infty, \forall x$

$M_X(-\varepsilon) < +\infty \xrightarrow{\text{νόμος. Πρότ.}} E(X^-)^k < +\infty, \forall x$

άρα $E|x|^k = \underbrace{E(X^+)^k}_{< +\infty} + \underbrace{E(X^-)^k}_{< +\infty} < +\infty, \forall x$

$$(iii) M_X(t) = E(e^{tx}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!}\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} t^k$$

Θα εφαρμόσω Beppo-Levi (για εξαρ. ομαλά) (αν
 αν $E(1 \cdot 1) < \infty$ (αρκ. εγγύηση.)

$$\varepsilon \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} \right| = \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|tx|^k}{k!} \right) = \varepsilon (e^{|tx|}) = \varepsilon (e^{tx} + e^{-tx})$$

Παρασκευή

12

Μαΐου

2019

21: Υπολογισμός χαρακ. συνάρτ. από πολλαπλότητα (όπου είναι εφικτό)

Παράδειγμα: $U_X(t) = e^{t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, όπου $X \sim N(0,1)$

Θα δείξω $\phi_X(t) = U_X(it) = e^{-t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

" $\mathcal{E}(e^{itX})$ " $\rightarrow$ το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$, και $it \notin \mathbb{R}$ (γενικά).

Πρόβλημα:

- Πρέπει να εντοπίσει το πεδίο ορισμού της $U_X(t)$ και να περιγράψει το it. Παρατηρούμε ότι η $e^{z^2/2}$ και η $e^{|z|^2/2}$
 $\downarrow e^{t^2/2}$ $\downarrow e^{t^2/2}$

ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C}$, και για $z = te \in \mathbb{R}$

δηλ. 2 διαφ. λυγδ. συναρτήσεις ουσιαστικά στο $\mathbb{R}$.

Πρέπει να βρούμε ότι είναι εφικτό για ένδειξη να να τις καλύψει.

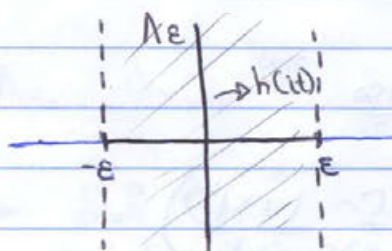
Πρόταση: Έστω X ποσ. εφ. με πολλαπλότητα M_X .

Αν $\exists \varepsilon > 0$: (i) $M_X(t) < +\infty$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

(ii) $\exists$ αναλυτική συνάρτηση $h: \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $h(t) = M_X(t)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, όπου

$\Lambda_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon\}$, τότε

$$\phi_X(t) = h(it).$$



$$U_X(t) = \mathcal{E}(e^{itX})$$

Απόδειξη: Θεωρούμε $g(z) = \mathcal{E}(e^{zx})$, $\forall z \in \Lambda_\varepsilon$ και $g: \Lambda_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$.

- Θα δούμε ότι η g είναι κατά ορισμόν και αναλυτική στο Λ_ε .
- Η g είναι κατά ορισμόν (έχει νόημα η έκφραση $+ \in \mathbb{C}$)
Πρέπει $\mathcal{E}|e^{zx}| < +\infty$, και τότε προφανώς $\mathcal{E}(e^{zx}) \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{E}|e^{zx}| = \mathcal{E}|e^{(\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z))x}| = \mathcal{E}|e^{\operatorname{Re}(z)x} \cdot e^{i\operatorname{Im}(z)x}|$$

(είναι $|e^{i\operatorname{Im}(z)x}| = 1$)

$$= \mathcal{E}|e^{\operatorname{Re}(z)x}| = \mathcal{E}(e^{\operatorname{Re}(z)x}) = M_x(\operatorname{Re}(z)) < +\infty$$

από υπόθεση (i), διότι $|\operatorname{Re}(z)| < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{Re}(z) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

- Θα δούμε ότι η $g(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση.
Έστω $z_0 \in \Lambda_\varepsilon$.



Πρέπει να βρούμε να γράψω

$$g(z) = g(z_0 + u) = \sum_{k \geq 0} a_k u^k$$

(z - z_0)

$$\left(a_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \right)$$

και λοιπά να υποβάλει

Άρα, με $u < \varepsilon - |\operatorname{Re}(z_0)|$
αρκούν ταύτα

$$g(z) = g(z_0 + u) = \mathcal{E}(e^{(z_0+u)x}) = \mathcal{E}(e^{z_0x} \cdot e^{ux}) =$$

$$= \mathcal{E}(e^{z_0x} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(ux)^k}{k!})$$

$$= \mathcal{E}\left(\sum_{k \geq 0} \frac{e^{z_0x} x^k}{k!} u^k\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{\mathcal{E}(e^{z_0x} x^k)}{k!} u^k =$$

$$= \sum_{k \geq 0} a_k u^k, \text{ με } a_k = \frac{\mathcal{E}(e^{z_0x} x^k)}{k!}$$

$$\text{Αρκεί } \mathcal{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{e^{z_0x} \cdot (ux)^k}{k!} \right| \right) < +\infty$$

$$\mathcal{E}\left(\sum_{k \geq 0} |e^{z_0x}| \cdot \frac{|ux|^k}{k!}\right) = \mathcal{E}\left(|e^{z_0x}| \sum_{k \geq 0} \frac{|ux|^k}{k!}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}[|e^{z_0 x}| |e^{lu x}|] = \mathbb{E}[|e^{\operatorname{Re}(z_0)x}| \underbrace{|e^{i \operatorname{Im}(z_0)x}|}_{=1} |e^{lu x}|] \\
 &= \mathbb{E}(e^{\operatorname{Re}(z_0)x} \cdot e^{|u||x|}) \leq \mathbb{E}(e^{|\operatorname{Re}(z_0)||x| + |u||x|}) = \\
 &= \mathbb{E}(e^{(|\operatorname{Re}(z_0)| + |u|)|x|}) = \mathbb{E}(e^{u^* |x|}) \leq \mathbb{E}(e^{u^* x} + e^{-u^* x}) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad M_X(u^*) + M_X(-u^*)
 \end{aligned}$$

όπου $u^* = |\operatorname{Re}(z_0)| + |u|$

$|u| < \varepsilon - |\operatorname{Re}(z_0)|$

$u^* = |u| + |\operatorname{Re}(z_0)| < \varepsilon - |\operatorname{Re}(z_0)| + |\operatorname{Re}(z_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < -u^* < u^* < \varepsilon$

$\Rightarrow M_X(u^*), M_X(-u^*) \stackrel{\text{und. (i)}}{<} +\infty$

$\Rightarrow \mathbb{E} 1 \cdot 1 < +\infty$. Συνεπώς ότι η $g(z)$ είναι αναλυτική στο $\underline{\Lambda}_\varepsilon$.

Από υπόθεση (ii) έχουμε λοιπόν ότι η h είναι επίσης αναλυτική στο $\underline{\Lambda}_\varepsilon$ και $h(t) = M_X(t)$. Η g είναι και αυτή αναλυτική στο $\underline{\Lambda}_\varepsilon$ και $g(t) = \mathbb{E}(e^{itx}) = M_X(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας, αν έχουμε g και h ορισμένες σε ένα χώρο (ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$) και συμφωνούν σε ένα τόπο μέσα στο χώρο τότε $g=h$, όταν είναι αναλυτικές στο χώρο.

Η g και η h είναι αναλυτικές στο χώρο $\underline{\Lambda}_\varepsilon$ και έχουμε $g(t) = h(t)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \underline{\Lambda}_\varepsilon$ (τόπος)



Άρα, $g \equiv h$



Άρα $\phi_X(t) \stackrel{\text{opp}}{=} \mathbb{E}(e^{itx}) = g(it) = h(it)$

→ 2^ο Quiz → Παρασκευή 19/5/16 → ύψ: όσα λέγατε και αόριο!

Εφαρμογές: (1) Αν $X \sim N(0,1) \Rightarrow \phi_X(t) = e^{-t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Λύση: Έχουμε $X \sim N(0,1) \Rightarrow M_X(t) = e^{t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Έτσι: (i) $M_X(t) < +\infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$

(ii) η $h(z) = e^{z^2/2}$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και

$$h(t) = M_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Πότε $\Rightarrow \phi_X(t) = h(it) = e^{(it)^2/2} = e^{-t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

(2) Αν $X \sim \text{Exp}(\theta) \Rightarrow \phi_X(t) = \frac{\theta}{\theta - it}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Λύση: Αν $X \sim \text{Exp}(\theta)$, $\theta > 0 \Rightarrow M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$, $\forall t \leq \theta$ ($\theta > 0$)

(i) $M_X(t) < +\infty$, $\forall t \in (-\theta, \theta)$ (θ -νεροχή)

(ii) $h(z) = \frac{\theta}{\theta - z}$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{\theta\}$.

και $h(t) = M_X(t)$, $\forall t \in (-\theta, \theta)$

Πότε $\Rightarrow \phi_X(t) = h(it) = \frac{\theta}{\theta - it}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Θεώρημα: Έστω X, Y πραγ. ε.β. Αν $\exists \varepsilon > 0$:

$M_X(t) = M_Y(t) < +\infty$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, τότε $X \stackrel{d}{=} Y$

Απόδειξη: Αρκεί να δ.ο. $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ από θεωρ. χαρακτηρισ. κατανομής

$$X \stackrel{d}{=} Y.$$

Από πραγμ. Απόδ. Πότε, έχουμε ότι

η $g_X(z) = E(e^{zX})$ είναι καλά ορισμ. + αναλυτ. στο Λ_ε
(λόγω υπόθ. (i))

Αντίστοιχα $g_Y(z) = E(e^{zY})$ είναι καλά ορισμ. + αναλυτική στο Λ_ε .

Όμως $g_X(t) = E(e^{tX}) = M_X(t) \stackrel{\text{υπόθ.}}{=} M_Y(t) = E(e^{tY}) = g_Y(t)$
 $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Επειδή $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \Lambda_\varepsilon$ συνέπ. από την αρχή της αναλυτ.

συνέχουσας ότι $g_X = g_Y$ στο Λ_ε

$$\phi_x(t) = \mathcal{E}(e^{itx}) = g_x(it) \quad \begin{array}{l} \text{σου φαντασ} \\ \text{αριθμ.} \end{array} \quad g_y(it) = \mathcal{E}(e^{ity}) \\ = \phi_y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 13.3: Αν X πραγ. ετ., τότε $\mathcal{E}|X| < \infty$ ($\exists$ η τέτοιη ετ. X), τότε να δ.ο. η ϕ_x είναι πραγ. στο $\mathbb{D}$ και $\boxed{\phi_x'(0) = i\mathcal{E}(X)}$

Ανάλυση: Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αναζητούμε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_x(t+h) - \phi_x(t)}{h}$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_x(t+h) - \phi_x(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E} \left(\frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E} \left(e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) \stackrel{?}{=} \mathcal{E} \left(\lim_{h \rightarrow 0} e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) \end{aligned}$$

Θα εστιάσουμε στο γ.θ.κ.

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0} \left(e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) = e^{itx} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ihx} - 1}{h}$$

Θέτουμε $g(t) = e^{itx}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = ix e^{itx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h} = e^{itx} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ihx} - 1}{h} = ix$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) = ix \cdot e^{itx}$$

$$(ii) \left| e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = \underbrace{|e^{itx}|}_1 \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| \stackrel{?}{\leq} |X|$$

$$\text{Αρκεί να δ.ο. } \boxed{|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|}$$

γιατί αν υποβάλει, τότε

$$|e^{ihx} - 1| \leq |h||x| \Rightarrow \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| \leq |x|$$

$$\int_0^{\theta} e^{it} dt = \frac{1}{i} [e^{it}]_0^{\theta} = \frac{1}{i} (e^{i\theta} - e^0) = \frac{1}{i} (e^{i\theta} - 1)$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} - 1 = i \int_0^{\theta} e^{it} dt \Rightarrow$$

$$|e^{i\theta} - 1| = |i| \left| \int_0^{\theta} e^{it} dt \right| \leq \int_0^{\theta} |e^{it}| dt = \theta$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{=1} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{=1}$

$$\text{άρα } |e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$$

(iii) $\varepsilon |x| < +\infty$, από υνιδεον, άρα λοιπόν το γ.θ.κ.δ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon \left(e^{itx} \cdot \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) \stackrel{(i)}{=} \varepsilon (ix \cdot e^{itx}) \quad \text{από } \parallel \phi'_x(t) \parallel$$

άρα παρ. $\forall t \in \mathbb{R}$

Ειδικά για $t=0$ $\phi'_x(0) = \varepsilon(ix \cdot e^{i0x}) = i\varepsilon(x)$