# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, εξέταση 1 Ιουλίου 2017

**Θέμα 1:** Έστω $X = \{1, 2, 3, 4\}$ και $\mathcal{A}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του $X$ που περιέχει το $\emptyset$, το $X$ και όλα τα δισύνολα του $X$.

**α):** Να εξεταστεί αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, $\sigma$-άλγεβρα, κλάση Dynkin, $\lambda$-κλάση.

**β):** Στις περιπτώσεις που η $\mathcal{A}$ έχει τη δομή που περιγράφεται στο (α), να βρεθεί γεννήτορας $\mathcal{C}$ με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό στοιχείων.

**γ):** Στις περιπτώσεις που η $\mathcal{A}$ δεν έχει τη δομή που περιγράφεται στο (α), να βρεθεί η οικογένεια $\mathcal{B}$ που παράγεται απο αυτήν μέσω της αντίστοιχης δομής (η ελάχιστη δυνατή που περιέχει την $\mathcal{A}$).

**Θέμα 2:** Σε μία άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός τίμιου ζαριού αποφανθείτε για τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων (πλήρης αιτιολόγηση) :

**α):** ακριβώς 5 φορές εμφάνιση ενός άρτιου αριθμού

**β):** άπειρες φορές ένας περιττός ακολουθείται απο έναν άρτιο αριθμό

**γ):** οριακό ποσοστό των φορών που η ένδειξη είναι μικρότερη ή ίση του 3 είναι 1/2.

**δ):** αν $X_n$ είναι το αποτέλεσμα της $n$-οστής ρίψης και $S_n$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της, τότε υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} P(S_{2n} > 7n)$.

**Θέμα 3:** Έστω $(X_n)$ μία ακολουθία ανεξάρτητων δίτιμων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \in \{-1, 1\}$ και $P(X_n = 1) = p$, $0 < p < 1$. Θέτουμε $\overline{X}_n$ το δειγματικό μέσο, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ και $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

**α):** Εξετάστε τη σύγκλιση με πιθανότητα 1 των $\overline{X}_n$, $S_n$ (για $p \neq 0.5$) και $X_{(n)}$.

**β):** Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_{S_n}(t)$ της $S_n$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

**γ):** Αφού ορίσετε το μετασχηματισμό Fourier ενός μέτρου πιθανότητας $\mu$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ δώστε τον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας πραγματικής τ.μ. $X$.

**δ):** Πώς μπορούμε να βρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της $S_n$ με τη βοήθεια του (β); Αιτιολογείστε πλήρως.

**Θέμα 4:** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και $\mathcal{X}$ ο χώρος όλων των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών $X : \Omega \to \mathbb{R}$, ταυτίζοντας εκείνες που είναι ίσες με πιθανότητα 1. Ο χώρος $\mathcal{X}$ μπορεί να εφοδιαστεί με διαφορετικές μετρικές $\sigma$. Έχουμε δει διάφορους τρόπους σύγκλισης μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών (π.χ., $\xrightarrow{a.s.}, \xrightarrow{L^p}, \xrightarrow{p}$). Η σύγκλιση λέγεται μετρικοποιήσιμη αν μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί μέσω μίας μετρικής σε κατάλληλο χώρο. Αποδείξτε ότι:

**α):** $X_n \xrightarrow{\sigma} X \Leftrightarrow$ κάθε υπακολουθία $(Y_n)$ της $(X_n)$ περιέχει μία υπακολουθία $(Z_n)$ που συγκλίνει στην $X$ ως προς τη μετρική $\sigma$, δηλ., $Z_n \xrightarrow{\sigma} X$.

**β):** $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow$ κάθε υπακολουθία $(Y_n)$ της $(X_n)$ περιέχει υπακολουθία $(Z_n)$ που συγκλίνει στην $X$ με πιθανότητα 1, δηλ., $Z_n \xrightarrow{a.s.} X$.

**γ):** η σύγκλιση με πιθανότητα 1 δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

**Θέμα 5:** Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

- **α):** $X \in L^3 \;\Rightarrow\; X \in L^2$
- **β):** $X_n \xrightarrow{L^p} X \;\Rightarrow\; f(X_n) \xrightarrow{L^p} f(X)$ για $f$ συνεχή.
- **γ):** Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ παράγονται και απο τα αριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
- **δ):** Σύνολα θετικού μέτρου Lebesgue είναι οπωσδήποτε υπεραριθμήσιμα.
- **ε):** Κάθε απλή τυχαία μεταβλητή είναι μετρήσιμη.
- **ζ):** Είναι αδύνατον $X^+ = X^-$ με πιθανότητα 1.
- **η):** θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης $\Rightarrow$ θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης.
- **ϑ):** Μία σφιχτή ακολουθία τ.μ. έχει υπακολουθία που συγκλίνει κατά κατανομή.
- **ι):** Το στήριγμα μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- **κ):** Υπάρχουν αριθμήσιμα σύνολα που δεν είναι στήριγμα κάποιας τυχαίας μεταβλητής.
- **λ):** Σύγκλιση κατά κατανομή $\Rightarrow$ σύγκλιση ροπών οποιασδήποτε τάξης.
- **μ):** Μία ακολουθία τ.μ. που συγκλίνει πλήρως, συγκλίνει και κατά πιθανότητα.
- **ν):** Η ακολουθία $n^{-1}N(0,1)$ συγκλίνει ασθενώς.
- **ξ):** Η ακολουθία των εκφυλισμένων τ.μ. $(-1)^n$ είναι σφιχτή.
- **ο):** Αν $(A_n)$ φθίνουσα ακολουθία μετρησίμων συνόλων, τότε $\limsup A_n = \liminf A_n$.

**Απαντήσετε όλοι στο θέμα 5 και επιλέξτε 3 απο τα θέματα 1-4**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ