ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, τελική εξέταση Ιουνίου 2018

Θέμα 1: Σε μία άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος να βρεθούν (πλήρης αιτιολόγηση) :

α): η πιθανότητα άπειρων εμφανίσεων και των δύο ενδείξεων.

β): η πιθανότητα τελικά να εμφανίζεται Κορώνα.

γ): η πιθανότητα άπειρες φορές να έχουμε 100 συνεχόμενα Γράμματα.

Θέμα 2: Έστω (ϵ_n) μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο μηδέν και (X_n) ακολουθία πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Θέτουμε $u_n = P(|X_n| > \epsilon_n)$.

α): Να δείξετε ότι αν $u_n \to 0$, τότε η (X_n) συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 0.

β): Δώστε ένα αντιπαράδειγμα για το οποίο η παραπάνω συνθήκη δεν αρκεί για να συμπεράνουμε την με πιθανότητα 1 σύγκλιση της (X_n) στο 0.

γ): Δείξτε ότι αν $u_n \leq e^{-n}$, τότε η (X_n) συγκλίνει με πιθανότητα 1 στο 0.

Θέμα 3: Έστω (X_n), (Y_n) δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, όπου $X_n \stackrel{d}{\to} X$ και $Y_n \stackrel{d}{\to} Y$ για κάποιες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y.

α): Να δείξετε ότι $X_n + Y_n \stackrel{d}{\to} X + Y$.

β): Ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα χωρίς την υπόθεση της ανεξαρτησίας των X και Y; Τί μπορούμε να πούμε τότε για την οριακή κατανομή της $X_n + Y_n$;

γ): Αν $X_n \sim Geo(p_n)$ και $Y_n \sim Geo(p)$ (με στήριγμα το $\mathbb{N}$), όπου $0 < p_n, p < 1$ και $p_n \to 1$ τότε να δείξετε ότι οι ακολουθίες (X_n) και (Y_n) συγκλίνουν κατά κατανομή και να βρεθεί η οριακή κατανομή της $(X_n + Y_n)$. Δίνεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $Geo(p)$ είναι η

$$\phi(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

Θέμα 4: Στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue, ορίζουμε $f(x) = e^{-x}1_{(0,+\infty)}(x)$. Θέτουμε $\mu(A) = \int_A f(x)d\lambda(x)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

α): Να δείξετε ότι η συνολοσυνάρτηση μ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

β): Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0 \;\Rightarrow \mu(A) = 0$, αλλά όχι το αντίστροφο. Λέμε τότε ότι το μέτρο μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο λ και γράφουμε $\mu << \lambda$. Η $f(x)$ λέγεται και παράγωγος Radon-Nikodym του μέτρου μ ως προς λ και τη συμβολίζουμε $f(x) = d\mu(x)/d\lambda(x)$.

γ): Αν περιορίσουμε την f στο $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$ και θεωρήσουμε ως χώρο μέτρου τον $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \lambda)$, τότε να αποδείξετε ότι $\mu << \lambda$ και $\lambda << \mu$, όπου τα μ, λ ορίζονται τώρα στον μετρήσιμο χώρο $\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)\right)$. Σε αυτήν την περίπτωση τα μέτρα λέγονται ισοδύναμα, με την έννοια ότι έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου και άρα τα ίδια σύνολα θετικού μέτρου.

Θέμα 5: Έστω $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι, όπου $X_1, X_2 \subset X'$ με $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Θέτουμε $X = X_1 \cup X_2$ και ορίζουμε $\mathcal{A} := \{A \subset X : A = A_1 \cup A_2,\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$

- **α):** Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X. Τη συμβολίζουμε $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.
- **β):** Έστω $\mu_1,\ \mu_2$ δύο μέτρα στον $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ αντίστοιχα. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \to \mathbb{R}$, όπου $\mu(A) = \mu_1(A_1) + \mu_2(A_2)$, για κάθε $A \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Να δείξετε ότι η συνολοσυνάρτηση μ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$. Το συμβολίζουμε $\mu_1 \oplus \mu_2$.
- **γ):** Αποδείξτε ότι κάθε μέτρο μ στον $(X, \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2$.

Θέμα 6: Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

- **α):** $E|X| = +\infty \ \Rightarrow\ P\big(X \in \{-\infty, +\infty\}\big) > 0$
- **β):** $X_n \xrightarrow{d} X \ \Rightarrow\ f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$ για f συνεχή.
- **γ):** $X_n \xrightarrow{d} X \ \Rightarrow\ E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ για f συνεχή.
- **δ):** Υπάρχει διακριτό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με στήριγμα υπεραριθμήσιμο σύνολο.
- **ε):** Κάθε Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση είναι και Borel-μετρήσιμη.
- **ζ):** Η ακολουθία $X_n = X 1_{\{|X| \leq n\}}$ είναι αύξουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.
- **η):** Κάθε σ-άλγεβρα είναι και κλάση Dynkin.
- **ϑ):** Κάθε τυχαία μεταβλητή έχει χαρακτηριστική συνάρτηση.
- **ι):** Η $\phi(t) = e^{-t}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τυχαίας μεταβλητής.
- **κ):** Για μία αρνητική τυχαία μεταβλητή ορίζεται πάντα η μέση τιμή της.
- **λ):** Σύγκλιση κατά πιθανότητα σε σταθερά $\Rightarrow$ σύγκλιση με πιθανότητα 1.
- **μ):** $|X| \stackrel{d}{=} |Y| \ \Rightarrow\ E|X| = E|Y|$.
- **ν):** Η $F(x) = 1/2,\ \forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής κάποιας εκτεταμένης τ.μ. X.
- **ξ):** $X_i \stackrel{d}{=} Y_i,\ i = 1, 2,\ \Rightarrow (X_1, Y_1) \stackrel{d}{=} (X_2, Y_2)$.
- **ο):** Το $\liminf A_n^c$ περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν μόνο σε πεπερασμένο πλήθος A_n.

Επιλέξτε 2 από τα θέματα 1-3, 1 από τα θέματα 4-5, και υποχρεωτικό το θέμα 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ