ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, εξέταση 23 Σεπτεμβρίου 2017

Θέμα 1: Θεωρούμε δύο σ-άλγεβρες $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ (επί του Ω) για τις οποίες ισχύει $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

α): Δώστε τον ορισμό της σ-άλγεβρας και της ανεξαρτησίας δύο σ-αλγεβρών.

β): Αποδείξτε ότι οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}, \ \forall A \in \mathcal{A}$.

γ): Δώστε τον ορισμό της παραγόμενης σ-άλγεβρας $\sigma(X)$ και βρείτε τη σχέση που συνδέει τη $\sigma(X)$ με τη $\sigma(Y)$, όπου $Y = g(X)$ και g Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

δ): Ποιά είναι η μορφή των τ.μ. X για τις οποίες ισχύει ότι X και X^2 είναι ανεξάρτητες τ.μ.;

Θέμα 2:

α): Έστω X, Y τ.μ. και g Borel-μετρήσιμη. Δείξτε ότι $X \stackrel{d}{=} Y \ \Rightarrow \ g(X) \stackrel{d}{=} g(Y)$.

β): Έστω X τ.μ. με συμμετρική κατανομή, δηλ., $X \stackrel{d}{=} -X$. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις κατανομές των X^+ και X^- (θετικό και αρνητικό μέρος της X) και να προσδιοριστούν όταν υπάρχουν οι ροπές περιττής τάξης της X, δηλ., $\mathbb{E}(X^k), \ k = 1, 3, \ldots$

γ): Έστω (X_n) ακολουθία τ.μ. με $n(X_n - 2) \xrightarrow{d} X$. Να βρεθούν τα κατά κατανομή όρια σύγκλισης των (X_n) και (Y_n), όπου $Y_n = n(X_n^3 - 8)$.

Θέμα 3:

α): Δείξτε ότι αν $P(|X - Y| > \epsilon) = 0$, για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $X \stackrel{a.s.}{=} Y$.

β): Δείξτε ότι αν $X_n \xrightarrow{p} X$ και $X_n \xrightarrow{p} Y$, τότε $X \stackrel{a.s.}{=} Y$. Λέμε λοιπόν ότι το όριο της σύγκλισης κατά πιθανότητα, εφόσον υπάρχει είναι μοναδικό (σχεδόν βεβαίως).

γ): Εξετάστε με τη βοήθεια του (β) (ή διαφορετικά) τη μοναδικότητα της με πιθανότητα 1 ($\xrightarrow{a.s.}$) και της L^p ($\xrightarrow{L^p}$, $p > 0$) σύγκλισης.

δ): Δώστε αντιπαράδειγμα για τη μη μοναδικότητα (με την έννοια $a.s.$) του ορίου της σύγκλισης κατά κατανομή (θεωρείστε ότι όλες οι τ.μ. είναι ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας). Με ποιά ασθενέστερη έννοια θα μπορούσε να θεωρηθεί μοναδικό;

Θέμα 4: Έστω (f_n), (g_n) ακολουθίες πραγματικών μετρησίμων συναρτήσεων με $f_n \xrightarrow{a.s.} f$, $g_n \xrightarrow{a.s.} g$ και $|f_n| \leq g_n, \ n \geq 1$, όπου f, g πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Ας δεχθούμε την ισχύ της παρακάτω γενικότερης διατύπωσης του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι αν $\int g_n d\mu \to \int g d\mu < +\infty$, τότε $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$, όπου όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κοινό χώρο μέτρου με μέτρο αναφοράς μ.

α): Πώς προκύπτει το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue απο το παραπάνω θεώρημα; (ως προς το συμπέρασμα που διατυπώθηκε παραπάνω)

β): Έστω (X_n), X πραγματικές τ.μ. με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (f_n), f αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν $f_n \xrightarrow{a.s.} f$, τότε $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \to 0$.

γ): Με τη βοήθεια του (β) συμπεράνετε ότι αν $f_n \xrightarrow{a.s.} f$, τότε $X_n \xrightarrow{d} X$ (Λήμμα Scheffé)

Θέμα 5: Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

α): Αν $E(|X|) = +\infty$, τότε $E(X^2) = +\infty$

β): $X_n \xrightarrow{L^p} X \;\Rightarrow\; f(X_n) \xrightarrow{L^p} f(X)$ για f συνεχή και φραγμένη.

γ): Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ έχουν γεννήτορα τα υπεραριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

δ): Τα υπεραριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν θετικό μέτρο Lebesgue.

ε): Αν $E(X_n) = 0,\ \forall n \geq 1$ και $Var(X_n) \to 0$, τότε $X_n \xrightarrow{p} 0$.

ζ): Η $\phi(t) = \cos t + i \sin t,\ t \in \mathbb{R}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τ.μ..

η): Πάντα ορίζεται η μέση τιμή μίας τ.μ. που είναι αρνητική με πιθανότητα 1.

ϑ): Κάθε ακολουθία τ.μ. που συγκλίνει κατά κατανομή είναι σφιχτή.

ι): Υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο που δεν είναι στήριγμα καμίας τ.μ..

κ): Οι έννοιες λ-κλάση και σ-άλγεβρα είναι ισοδύναμες.

λ): Κάθε τ.μ. έχει χαρακτηριστική συνάρτηση.

μ): Μία ακολουθία τ.μ. που συγκλίνει κατά κατανομή, συγκλίνει και κατά πιθανότητα.

ν): Μία ακολουθία διακριτών τ.μ. δε μπορεί να συγκλίνει κατά κατανομή σε συνεχή τ.μ..

ξ): Κάθε συνεχής τ.μ. έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

ο): Αν $\omega \in \limsup A_n$, τότε $\omega \in A_n$ τελικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απαντήσετε όλοι στο θέμα 5 και επιλέξτε 3 απο τα θέματα 1-4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ