Θέμα 1)

Σε μία άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος να βρεθούν (πλήρης αιτιολόγηση):

(α) η πιθανότητα άπειρων εμφανίσεων και των 2 ενδείξεων.

(β) η πιθανότητα τελικά να εμφανίζεται Κορώνα.

(γ) η πιθανότητα άπειρες φορές να έχουμε 100 συνεχόμενα Γράμματα.

Λύση

Έστω $\Gamma_n =$ "η ν-οστή ρίψη να είναι Γράμματα", $n=1,2,\dots$

και $K_n = \Gamma_n^c =$ "η ν-οστή ρίψη να είναι Κορώνα", $n=1,2,\dots$

(α) Έστω $A =$ "άπειρες εμφανίσεις και των 2 ενδείξεων".

Τότε $A = \limsup_n \Gamma_n \cap \limsup_n K_n$.

Όμως $\sum_n P(\Gamma_n) = \sum_n P(K_n) = \sum_n \frac{1}{2} = +\infty$.

Απο $2^{\text{ο}}$ Λήμμα Borel−Cantelli $\Rightarrow$ $P(\limsup_n \Gamma_n) = P(\limsup_n K_n) = 1$

(λόγω ανεξαρτησίας των ενδεχομένων)

$\Rightarrow P(\limsup_n \Gamma_n \cap \limsup_n K_n) = 1 \Rightarrow \boxed{P(A) = 1}$

(β) Έστω $B =$ "τελικά να εμφανίζεται Κορώνα". Τότε

$B = \liminf_n K_n$. Όμως

$P(B^c) = P\left[(\liminf K_n)^c\right] = P\left[\limsup K_n^c\right] = P(\limsup \Gamma_n) = 1$

$\Rightarrow \boxed{P(B) = 0.}$

(γ) Έστω $\Gamma =$ "άπειρες φορές να έχουμε 100 συνεχόμενα Γράμματα".

Θέτουμε $\Delta_1 = \Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_{100}$, $\Delta_2 = \Gamma_{101}\cdots\Gamma_{200}, \dots, \Delta_n = \Gamma_{(n-1)\cdot 100+1}\cdots\Gamma_{n\cdot 100}, \dots$

Τα $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξ. ενδεχ. και $\limsup \Delta_n \subseteq \Gamma$.

$P(\Delta_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \Rightarrow \sum_n P(\Delta_n) = +\infty \xRightarrow{2^{\text{ο}}\ \Lambda.\ B\text{-}C} P(\limsup \Delta_n) = 1 \Rightarrow \boxed{P(\Gamma) = 1}$

Θέμα 2

Έστω (ε_n) μία ακολουθία θετικών πραγμ. αριθμών που συγκλίνει στο μηδέν και (X_n) ακολουθία πραγμ. τ.μ. Θέτουμε $u_n = P(|X_n| > \varepsilon_n)$.

(α) Να δείξετε ότι αν $u_n \to 0$, τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(β) Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα για το οποίο η παραπάνω συνθήκη δεν αρκεί για να συμπεράνουμε την πιθ. 1 σύγκλιση της (X_n) στο 0.

(γ) Δείξτε ότι αν $u_n \leq e^{-n}$, τότε η (X_n) συγκλίνει με πιθανότητα 1 στο 0.

Λύση

(α) Έστω $\varepsilon > 0$, τότε εφ' όσον $\varepsilon_n \to 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$, έχουμε $\varepsilon_n < \varepsilon$.

Όμως τότε $\{|X_n| > \varepsilon\} \subseteq \{|X_n| > \varepsilon_n\}$, $\forall n \geq n_0$.

Άρα $0 \leq P(|X_n| > \varepsilon) \leq P(|X_n| > \varepsilon_n) = u_n \longrightarrow 0$

Τελικά $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$.

(β) Έστω $X_n \sim Be\left(\frac{1}{n}\right)$, $\forall n \geq 1$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, και (ε_n) τυχούσα ακολ. πραγμ. αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$.

Τότε $u_n = P(|X_n| > \varepsilon_n) = P(X_n > \varepsilon_n) \leq P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

Αν θέσουμε $A_n = \{X_n = 1\}$, τότε $\sum_n P(A_n) = \sum_n P(X_n = 1) = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$

$$\overset{(A_n)\text{ ανεξάρτητα}}{\underset{2^o\text{ Λήμ. B-C}}{\Longrightarrow}} P(\limsup_n A_n) = 1.$$

Όμως $\omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow X_n(\omega) = 1$, για άπειρα n.

Συμπεραίνουμε ότι $\limsup_n A_n \subseteq \{X_n \not\to 0\}$,

και άρα $P(X_n \not\to 0) = 1 \Rightarrow X_n \overset{a.s.}{\not\to} 0$.

(γ) Όμοιως όπως πριν, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$, $P(|X_n| > \varepsilon) \leq P(|X_n| > \varepsilon_n) = u_n$ για τυχόν $\varepsilon > 0$. Άρα $\sum_{n \geq n_0} P(|X_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n \geq n_0} u_n \leq \sum_{n \geq n_0} e^{-n} = \sum_{n \geq n_0} \left(\frac{1}{e}\right)^n < +\infty$

Συμπεραίνουμε ότι $\sum_n P(|X_n| > \varepsilon) < +\infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{c} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} 0$.

Θέμα 3

Έστω (X_n), (Y_n) 2 ανεξ. μεταξύ τους ακολ. τ.μ., όπου $X_n \xrightarrow{d} X$ και $Y_n \xrightarrow{d} Y$ για X, Y ανεξ. τ.μ. Ν.δ.ο.

(α) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$

(β) Ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα χωρίς την υπόθεση ανεξαρτησίας των X και Y?
Τί μπορούμε να πούμε για την οριακή κατανομή της $X_n + Y_n$?

(γ) Αν $X_n \sim Geo(p_n)$ και $Y_n \sim Geo(p)$ (με στήριγμα το $\mathbb{N}$), όπου $0 < p_n, p < 1$ και $p_n \longrightarrow 1$, τότε ν.δ.ο. οι ακολουθίες (X_n) και (Y_n) συγκλίνουν κατά κατανομή και να βρεθεί η οριακή κατανομή της $(X_n + Y_n)$. Δίνεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $Geo(p)$ είναι η $\phi(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}$.

Λύση

(α) $X_n \xrightarrow{d} X \overset{\Theta\Sigma L}{\Longrightarrow} \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t), \forall t \in \mathbb{R}$
$Y_n \xrightarrow{d} Y \overset{\Theta\Sigma L}{\Longrightarrow} \phi_{Y_n}(t) \longrightarrow \phi_Y(t), \forall t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \phi_{X_n+Y_n}(t) \underset{X_n, Y_n}{\overset{\text{ανεξ}}{=}} \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t) \longrightarrow$

$$\phi_X(t)\phi_Y(t) \underset{X,Y}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} \phi_{X+Y}(t), \forall t \in \mathbb{R} \overset{\Theta\Sigma L}{\Longrightarrow} X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$$

(β) ΟΧΙ, δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα:
Έστω $X \sim N(0,1)$. Επιλέγουμε $Y \sim N(0,1)$ με X, Y ανεξάρτητες.
Τότε αν $X_n = X$, $\forall n \geq 1$ και $Y_n = Y$, $\forall n \geq 1$, έχουμε ότι η (X_n) και (Y_n) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού X και Y ανεξ.
$X_n \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$ και $Y_n \xrightarrow{d} -X$, αφού $-X \sim N(0,1)$.
Αν ίσχυε το α) θα έπρεπε $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X - X = 0$.
Όμως $X_n + Y_n = X + Y \xrightarrow{d} X + Y \sim N(0,2)$, αφού X, Y ανεξ. $N(0,1)$.
Παρ'όλα αυτά η οριακή κατανομή της $X_n + Y_n$ υπάρχει πάντα,

αφού $\phi_{X_n+Y_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t)\phi_Y(t) = \phi_{X'+Y'}(t)$,

όπου $X' \overset{d}{=} X$, $Y' \overset{d}{=} Y$, και X', Y' είναι ανεξάρτ. μεταξύ τους, δηλ. η οριακή κατανομή αντιστοιχεί στο άθροισμα 2 ανεξ. τ.μ. που η μία έχει την κατανομή της X, και η άλλη την κατανομή της Y.

(γ) $X_n \sim Geo(p_n) \Rightarrow \phi_{X_n}(t) = \dfrac{p_n}{1-(1-p_n)e^t}$

Όταν $p_n \to 1$, έχουμε $\phi_{X_n}(t) \longrightarrow \dfrac{1}{1-0\cdot e^t} = 1 = \phi_0(t)$.

Απο Θ.Σ.L συμπεραίνουμε ότι $X_n \xrightarrow{d} 0$.

Προφανώς $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Geo(p)$, αφου $Y_n \sim Geo(p)$.

Απο το (α) έχουμε ότι $X_n + Y_n \xrightarrow{d} 0 + Y = Y \sim Geo(p)$, αφού η Y είναι ανεξάρτητη απο οποιαδήποτε εκφυλισμένη τ.μ.

<u>Παρατήρηση</u>

Εδώ δεν χρειάζεται ούτε καν η ανεξαρτησία των (X_n) και (Y_n).

Απο το Λήμμα του Slutsky, έχουμε

$X_n \xrightarrow{d} \underset{c}{\overset{X}{\shortparallel}}$ και $Y_n \xrightarrow{d} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + Y$

(μόνο για εκφυλισμένες)

Το γενικότερο αυτό αποτέλεσμα ισχύει αν κάποια απο τις 2 ακολουθίες εκφυλίζεται οριακά κατά κατανομή.

Θέμα 4

Στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue, ορίζουμε $f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Θέτουμε

$$\mu(A) = \int_A f(x)\, d\lambda(x), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(α) Ν.δ.ο. η συνολοσυνάρτηση μ είναι μέτρο πιθανότητας σαν $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(β) Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$, αλλά όχι το αντίστροφο.

Λέμε τότε ότι το μέτρο μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο λ (αλλά όχι το αντίστροφο) και γράφουμε $\mu << \lambda$.

Η $f(x)$ λέγεται και παράγωγος Radon-Nikodym του μέτρου μ ω προς λ και τη συμβολίζουμε $f(x) = \dfrac{d\mu(x)}{d\nu(x)}$.

(γ) Αν περιορίσουμε την f στο $(0,+\infty)$ και θεωρήσουμε ως χ.μ. τον $((0,+\infty), \mathcal{B}((0,+\infty)), \lambda)$, τότε να αποδείξετε ότι $\mu << \lambda$ και $\lambda << \mu$.

Σε αυτήν την περίπτωση τα μέτρα λέγονται ισοδύναμα, με την έννοια ότι έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού, άρα και θετικού μέτρου.

Λύση

(α) • Κατ'αρχήν η **f είναι Borel-μετρήσιμη**, αφού είναι γινόμενο 2 Borel-μετρησίμων συναρτήσεων, της e^{-x} που είναι συνεχής, άρα Borel-μετρήσιμη, και της $1_{(0,+\infty)}(x)$ που είναι δείκτρια ενός Borel-συνόλου (ανοικτού διαστήματος) άρα και αυτή Borel-μετρήσιμη.

• Επειδή $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, **ορίζεται πάντα** το $\mu(A) = \int_A f(x)\, d\lambda(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x) 1_A(x)\, d\lambda(x)$

και είναι $\mu(A) \geq 0$, δηλ. **μη αρνητικό**.

Δείχνουμε τώρα ότι η συνολοσυνάρτηση $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$ είναι **μέτρο πιθανότητας**. Πράγματι

(i) $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} 1_{(0,+\infty)}(x)\, d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ ✓

(ii) Αν (A_n)+ στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \int_{\bigcup_n A_n} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) 1_{\left(\bigcup_n A_n\right)}(x)\, d\lambda(x) \overset{(A_n)+}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\sum_n{}' 1_{A_n}(x)\right) d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_n{}' f(x) 1_{A_n}(x)\, d\lambda(x) \overset{B\text{-}L}{=} \sum_n{}' \int_{\mathbb{R}} f(x) 1_{A_n}(x)\, d\lambda(x)$$

$$= \sum_n{}' \int_{A_n} f(x)\, d\lambda(x) = \sum_n{}' \mu(A_n)$$ (ισχύει δηλ. η σ-προσθετικότητα ✓)

(β) Έστω s, απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \leq s \leq f 1_A$.

Τότε $s = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, όπου $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ μετρήσιμη διαμέριση του A (έξω απο το A η s είναι μηδέν).

Άρα $\int s\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i) = 0$, αφού $A_i \subseteq A$, και $\lambda(A)=0$.

Συμπεραίνουμε ότι $\int_A f\, d\lambda = \sup\left\{\int s\, d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, 0\leq s\leq f 1_A\right\} = 0$, και άρα $\mu(A) = 0$.

Προφανώς, εδώ δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού $\mu((-\infty,0)) = \int_{(-\infty,0)} e^{-x} 1_{(0,+\infty)}\, \lambda(dx) = 0$, όμως $\lambda((-\infty,0)) = +\infty$.

(γ) Προφανώς όπως πριν $\mu << \lambda$, όπου

$$\mu(A) = \int_A f\, d\lambda \quad , \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*) \quad , \text{και } f(x) = e^{-x}, \forall x > 0.$$

Μένει να δείξουμε ότι $\lambda << \mu$.

Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ με $\mu(A) = 0$. Έχουμε $f(x) = e^{-x} > 0, \forall x > 0$,

άρα $\{f > 0\} = \bigcup_n \{f \geq \frac{1}{n}\} = (0, +\infty) \implies$

$$\lambda(A) = \lambda\left(A \cap (0,+\infty)\right) = \lambda\left[A \cap \left(\bigcup_n \{f \geq \tfrac{1}{n}\}\right)\right] = \lambda\Big(\bigcup_n \underbrace{\left(A \cap \{f \geq \tfrac{1}{n}\}\right)}_{\text{αύξουσα ακολουθία}}\Big)$$

$$= \lim_n \lambda\left(A \cap \{f \geq \tfrac{1}{n}\}\right) \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mu(A) = 0 \xrightarrow{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\} \subset A} \mu\left(A \cap \{f \geq \tfrac{1}{n}\}\right) = 0 \ , \forall n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Όμως $\mu\left(A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}\right) = \int_{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}} f\, d\lambda \geq \int_{A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}} \frac{1}{n}\, d\lambda = \frac{1}{n} \lambda\left(A \cap \{f \geq \frac{1}{n}\}\right)$

$$\xrightarrow{(2)} \lambda\left(A \cap \{f \geq \tfrac{1}{n}\}\right) = 0 \ , \forall n = 1, 2, \dots \xrightarrow{(1)} \lambda(A) = 0.$$

<u>Εναλλακτικά</u>, κάποιος θα μπορούσε με παρόμοια επιχειρήματα να δείξει ότι αν $f \geq 0$ και $\int f\, d\lambda = 0 \implies f = 0$, λ-σ.π.

Τότε $\int_A f\, d\lambda = 0 \Rightarrow \int f \mathbb{1}_A\, d\lambda = 0 \implies f \mathbb{1}_A = 0$, λ-σ.π.

Όμως $f > 0$, άρα $\mathbb{1}_A = 0$, λ-σ.π. και απ' αυτό έπεται

ότι $\lambda\left(\{\mathbb{1}_A \neq 0\}\right) = 0 \implies \lambda\left(\{\mathbb{1}_A = 1\}\right) = \lambda(A) = 0.$

Θέμα 5

Έστω $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι, όπου $X_1, X_2 \subset X'$ με $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Θέτουμε $X = X_1 \cup X_2$ και ορίζουμε $\mathcal{A} := \{A \subset X : A = A_1 \cup A_2,\ A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$

(α) Ν.δ.ο. η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X. Τη συμβ. $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$

(β) Έστω μ_1, μ_2 δύο μέτρα στον $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ αντίστοιχα. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mu(A) = \mu_1(A_1) + \mu_2(A_2)$, $\forall A \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Ν.δ.ο η συνολοσυνάρτηση μ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$. Το συμβολίζουμε $\mu_1 \oplus \mu_2$.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε μέτρο μ στον $(X, \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$, αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2$.

Λύση

(α) (i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$, αφού $\emptyset = \underset{\mathcal{A}_1}{\underset{\cap}{\emptyset}} \cup \underset{\mathcal{A}_2}{\underset{\cap}{\emptyset}} \in \mathcal{A}$ (ως σ-άλγεβρες).

(ii) Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \in \mathcal{A}_1$ και $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

$$X \setminus A = (X_1 \cup X_2) \setminus A = (X_1 \setminus A) \cup (X_2 \setminus A)$$

$$= \underset{\mathcal{A}_1 (\sigma\text{-άλγ})}{\underset{\cap}{(X_1 \setminus A_1)}} \cup \underset{\mathcal{A}_2 (\sigma\text{-άλγ})}{\underset{\cap}{(X_2 \setminus A_2)}}, \text{ αφού } X_1 A_2 = X_2 A_1 = \emptyset$$

$$\Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}.$$

(iii) Έστω (A_n) στην $\mathcal{A}$. Τότε $A_n = A_{n,1} \cup A_{n,2}$, $A_{n,1} \in \mathcal{A}_1, A_{n,2} \in \mathcal{A}_2$.

$$\Longrightarrow \bigcup_n A_n = \underset{\mathcal{A}_1 (\sigma\text{-άλγ})}{\underset{\cap}{\Big(\bigcup_n A_{n,1}\Big)}} \cup \underset{\mathcal{A}_2 (\sigma\text{-άλγ})}{\underset{\cap}{\Big(\bigcup_n A_{n,2}\Big)}} \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$$

Απο (i), (ii) + (iii) συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X.

(β) Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν $A \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, τότε η αναπαράσταση $A = A_1 \cup A_2$, με $A_1 \in \mathcal{A}_1$ και $A_2 \in \mathcal{A}_2$ είναι μοναδική, αφού $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, και άρα

$A_1 = A \cap X_1$ και $A_2 = A \cap X_2$. Άρα

η συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\mu(A) = \mu_1(A_1) + \mu_2(A_2)$ είναι <u>καλά ορισμένη</u> με $\mu(A) = \mu_1(A_1) + \mu_2(A_2) \in \underline{[0, +\infty]}$

Επιπλέον (i) $\mu(\underset{\emptyset \cup \emptyset}{\underset{\shortparallel}{\emptyset}}) = \mu_1(\emptyset) + \mu_2(\emptyset) = 0$ ✓

(ii) αν $(A_n)+$ στην $\mathcal{A}$, τότε $A_n = A_{n,1} \cup A_{n,2}$, $\forall n \geq 1$ και $(A_{n,1})+$ στην $\mathcal{A}_1^{(*)}$ και $(A_{n,2})+$ στην $\mathcal{A}_2$.$^{(**)}$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \mu\Big(\big(\underset{\mathcal{A}_1}{\underset{\cap}{\bigcup_n A_{n,1}}}\big) \cup \big(\underset{\mathcal{A}_2}{\underset{\cap}{\bigcup_n A_{n,2}}}\big)\Big) = \mu_1\Big(\bigcup_n A_{n,1}\Big) + \mu_2\Big(\bigcup_n A_{n,2}\Big)$$

$$\underset{(**)}{\overset{(\sigma\text{-προσθ}).\ (*)}{=}} \sum_n{}' \mu_1(A_{n,1}) + \sum_n{}' \mu_2(A_{n,2}) = \sum_n{}' \big(\mu_1(A_{n,1}) + \mu_2(A_{n,2})\big)$$

$$= \sum_n{}' \mu(\underbrace{A_{n,1} \cup A_{n,2}}_{\shortparallel \atop A_n}) = \sum_n{}' \mu(A_n) \quad ✓ \quad (\sigma\text{-προσθετ.}).$$

Τελικά από (i)+(ii) το μ είναι μέτρο.

(γ) Έστω μ μέτρο στον μ.χ. $(X, \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$.

Αν $(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)_{X_1} = \{A \cap X_1 : A \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2\}$, δηλ. η σ-άλγεβρα ίχνος της $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ στο X_1, τότε προφανώς $(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)_{X_1} = \mathcal{A}_1$ και παρόμοια $(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)_{X_2} = \mathcal{A}_2$. Εδώ $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, και άρα $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ και $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

Θέτουμε $\mu_1 = \mu|\mathcal{A}_1$ και $\mu_2 = \mu|\mathcal{A}_2$, δηλ. τα αντίστοιχα μέτρα ίχνη του μ στο $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ αντίστοιχα. Είναι μέτρα στους μ.χ. $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ αντίστοιχα.

Εφ' όσον $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Σύμφωνα με το (β) το $\mu_1 \oplus \mu_2$ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2)$. Επιπλέον αν $A \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, τότε $A = A_1 \cup A_2$ και

$$\mu(\underset{\substack{A_1 \cup A_2 \\ \text{ξένα}}}{\underset{\shortparallel}{A}}) = \mu(\underset{\mathcal{A}_1}{\underset{\cap}{A_1}}) + \mu(\underset{\mathcal{A}_2}{\underset{\cap}{A_2}}) = \mu_1(A_1) + \mu_2(A_2) = \mu_1 \oplus \mu_2(A), \ \forall A \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2.$$

Άρα $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2$.

Η ανάλυση αυτή είναι <u>μοναδική</u>. Πράγματι

Αν $\mu = \mu_1' \oplus \mu_2'$ με μ_1', μ_2' ορισμένα στον $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ αντίστοιχα,

τότε $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1$, έχουμε

$$\mu_1(A_1) = \mu_1(A_1) + \mu_2(\emptyset) = \mu_1 \oplus \mu_2 (A_1) = \mu(A_1) =$$
$$= \mu_1' \oplus \mu_2' (A_1) = \mu_1'(A_1) + \underbrace{\mu_2'(\emptyset)}_{=0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_1'$$

Όμοια $\mu_2 = \mu_2'$.

<u>Θέμα 6</u> | Απαντήστε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) $E|X| = +\infty \Rightarrow P\left(X \in \{-\infty, +\infty\}\right) > 0$

(Λ) π.χ. X με $P(X=n) = \frac{c}{n^2}$, $n=1,2,\dots$ $\left(c = \frac{6}{\pi^2}\right)$, $E|X| = +\infty$ και $P(|X| = +\infty) = 0$

β) $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$, για f συνεχή.

(Σ) Είναι το Θεώρημα Συνεχούς Απεικόνισης

γ) $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ για f συνεχή

(Λ) Θέλει f συνεχή & φραγμένη, π.χ. $X_n \xrightarrow{d} X \not\Rightarrow EX_n^k \to EX^k$

(η $f(x) = x^k$ είναι συνεχής συνάρτηση)

*: μπορεί να μην υπάρχουν καν οι ροπές, άλλο παράδειγμα

$$X_n = \begin{cases} n & , \text{πιθ. } \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{πιθ } 1-\frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} 0 . \text{ Όμως } EX_n = 1 \not\to 0 = E(X).$$

δ) Υπάρχει διακριτό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με στήριγμα υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(Σ) Στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, θέτουμε $\mu = \sum_{n}' \frac{1}{2^n} \delta_{q_n}$, όπου (q_n) μία αρίθμηση των ρητών.

Είναι μέτρο πιθανότητας με $\mu(\mathbb{Q}) = 1$, άρα διακριτό αφού

συγκεντρώνεται σε αριθμήσιμο σύνολο. Όμως στήριγμα είναι το $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

ε) Κάθε Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση είναι και Borel-μετρήσιμη.

(Λ) Ισχύει Borel-μετρήσιμη $\Longrightarrow$ Lebesgue-μετρήσιμη, όχι το αντίστροφο.

π.χ. $\exists A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (Leb.-μετρ.) και $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\left(\begin{array}{l} |\mathcal{B}(\mathbb{R})| = c \\ |\mathcal{M}_{\lambda^*}| = 2^c \end{array}\right)$

άρα $\mathbb{1}_A$ είναι Leb-μετρ, όχι Borel-μετρήσιμη.

(Σ) Ναι, και ...

ι) Η $\phi(t) = e^{-t}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τ.μ.

(Λ) π.χ. για $t=-1$, $\phi(-1) = e > 1$, αδύνατο, αφού $|\varphi(t)| \leq 1$.

κ) Για μια αρνητική τ.μ. ορίζεται πάντα η μέση τιμή της.

(Σ) $X \leq 0 \implies E(X) \in [-\infty, 0]$.

λ) Σύγκλιση κατά πιθανότητα σε σταθερά $\implies$ σύγκλιση με πιθ. 1.

(Λ) $X_n \sim Be\left(\frac{1}{n}\right)$, ανεξάρτητες $\implies X_n \xrightarrow{P} 0$, όμως $X_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$.

μ) $|X| \overset{d}{=} |Y| \implies E|X| = E|Y|$

(Σ) Ναι ορίζονται οι μέσες τιμές, και είναι ίσες, αφού η μέση τιμή είναι χαρακτηριστικό της κατανομής.

ν) Η $F(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτ. κατανομής κάποιας εκτετ. τ.μ

(Σ) Είναι η X με $P(X=-\infty) = P(X=+\infty) = \frac{1}{2}$

ξ) $X_i \overset{d}{=} Y_i$, $i=1,2 \implies (X_1, X_2) \overset{d}{=} (Y_1, Y_2)$

(Λ) Οι περιθώριες κατανομές δεν καθορίζουν την κατανομή ενός ζεύγους.

ο) Το $\liminf A_n^c$ περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν μόνο σε πεπερασμένο πλήθος A_n.

(Σ) $x \in \liminf A_n^c \Leftrightarrow x \in A_n^c$, τελικά $\forall n \Leftrightarrow x \notin A_n$ τελικά $\forall n$

$\Leftrightarrow x \in$ μόνο σε πεπερασμένο πλήθος A_n.