ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ - QUIZ 1, 10 Μαρτίου 2017

1. Μία σ-άλγεβρα είναι κλειστή στα/στις
   ○ συμπληρώματα ○ αριθμήσιμες ενώσεις ○ ενώσεις ○ πεπερασμένες τομές
2. Μία κλάση Dynkin είναι κλειστή στα/στις
   ○ συμπληρώματα ○ αριθμήσιμες ενώσεις ○ αριθμήσιμες ξένες ενώσεις ○ πεπερασμένες τομές
3. Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση υποσυνόλων του $\{1,2,3,4\}$. Εξετάστε αν ισχύει $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, όταν η $\mathcal{C}$ είναι
   ○ $\{\emptyset\}$ ○ $\{\{1,2\}\}$ ○ $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ ○ τοπολογία
4. Ποιές απο τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ παράγουν τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$;
   ○ τα κλειστά ○ τα μονοσύνολα ○ τα αριθμήσιμα ○ τα υπεραριθμήσιμα
5. Έστω (I_n) ακολουθία μη κενών ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Αν θέσουμε $I_n = (a_n, b_n)$ και υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) είναι γνήσια αύξουσες και συγκλίνουν στα a, b αντίστοιχα, τότε το $\lim I_n$:
   ○ μπορεί να μην υπάρχει ○ $= (a,b)$ ○ $= [a,b)$ ○ μπορεί να είναι το κενό σύνολο
6. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία του, το μέτρο Dirac στο 0 :
   ○ είναι μέτρο πιθανότητας ○ έχει στήριγμα το $[-1,1]$ ○ συγκεντρώνεται στο $[-1,1]$
7. Ποιά σύνολα έχουν μέτρο Lebesgue 1 ;
   ○ $\cup_{n\geq 1}(0,1/n)$ ○ $\cap_{n\geq 1}(0,1+1/n)$ ○ το σύνολο Cantor ○ οι άρρητοι του $[1,2]$
8. Το μέτρο περιορισμός $\lambda_{(0,1)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ του μέτρου Lebesgue λ στο $(0,1)$ είναι:
   ○ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο ○ έχει στήριγμα το $[0,1]$ ○ συμπίπτει με την $\mathrm{Unif}(0,1)$
9. Σε χ.π. $(X, \mathcal{A}, P)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;
   ○ $P(\cup A_n) \leq P(\limsup A_n)$ ○ $P(\cap A_n) \leq P(\limsup A_n)$ ○ $P(\cap A_n) \leq P(\liminf A_n)$
10. Σε χ.μ. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;
    ○ $(A_n)\!\downarrow\, \Rightarrow \mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$ ○ $(A_n)\!\uparrow\, \Rightarrow \mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$ ○ $\mu(\limsup A_n) \leq \limsup \mu(A_n)$
11. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
    ○ $\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x)$ ○ $\mathbb{1}_{[2,+\infty)}(x)$ ○ $(1-e^{-x})\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ ○ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$
12. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$;
    ○ $\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ ○ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ ○ $0.5 * \mathbb{1}_{(0,+\infty)}$ ○ 0.5
13. Αν f είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε ισχύει πάντα ότι:
    ○ $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα ○ $f(\mathcal{A})$ είναι σ-άλγεβρα ○ $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ ○ $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$
14. Η $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι τυχαία μεταβλητή αν $\forall b \in \mathbb{R}$:
    ○ $\{X \leq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{X \geq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{-b \leq X \leq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{X^3 \leq b\} \in \mathcal{A}$
15. Αν $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών ποιές από τις επόμενες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι απλές ;
    ○ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ○ $\sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{1}_{\{q\}}$ ○ $\sum_{q\in\mathbb{Q}} q\, \mathbb{1}_{\{q\}}$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!