ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ - ΛΥΣΕΙΣ QUIZ 1, 10 Μαρτίου 2017

1. Μία σ-άλγεβρα είναι κλειστή στα/στις

   $\surd$ **συμπληρώματα** $\surd$ **αριθμήσιμες ενώσεις** ◯ ενώσεις $\surd$ **πεπερασμένες τομές**

2. Μία κλάση Dynkin είναι κλειστή στα/στις

   $\surd$ **συμπληρώματα** ◯ αριθμήσιμες ενώσεις $\surd$ **αριθμήσιμες ξένες ενώσεις** ◯ πεπερασμένες τομές

3. Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση υποσυνόλων του $\{1,2,3,4\}$. Εξετάστε αν ισχύει $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, όταν η $\mathcal{C}$ είναι

   $\surd$ $\{\emptyset\}$ $\surd$ $\{\{1,2\}\}$ ◯ $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ $\surd$ **τοπολογία**

4. Ποιές απο τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ παράγουν τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$;

   $\surd$ **τα κλειστά** ◯ τα μονοσύνολα ◯ τα αριθμήσιμα ◯ τα υπεραριθμήσιμα

5. Έστω (I_n) ακολουθία μη κενών ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Αν θέσουμε $I_n = (a_n, b_n)$ και υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) είναι γνήσια αύξουσες και συγκλίνουν στα a, b αντίστοιχα, τότε το $\lim I_n$:

   ◯ μπορεί να μην υπάρχει ◯ $= (a,b)$ $\surd$ $= [a,b)$ $\surd$ **μπορεί να είναι το κενό σύνολο**

6. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία του, το μέτρο Dirac στο 0 :

   $\surd$ **είναι μέτρο πιθανότητας** ◯ έχει στήριγμα το $[-1,1]$ $\surd$ **συγκεντρώνεται στο** $[-1,1]$

7. Ποιά σύνολα έχουν μέτρο Lebesgue 1 ;

   $\surd$ $\cup_{n\geq 1}(0,1/n)$ $\surd$ $\cap_{n\geq 1}(0,1+1/n)$ ◯ το σύνολο Cantor $\surd$ **οι άρρητοι του** $[1,2]$

8. Το μέτρο περιορισμός $\lambda_{(0,1)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ του μέτρου Lebesgue λ στο $(0,1)$ είναι:

   $\surd$ **είναι σ-πεπερασμένο μέτρο** $\surd$ **έχει στήριγμα το** $[0,1]$ $\surd$ **συμπίπτει με την Unif**$(0,1)$

9. Σε χ.π. $(X, \mathcal{A}, P)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;

   ◯ $P(\cup A_n) \leq P(\limsup A_n)$ $\surd$ $P(\cap A_n) \leq P(\limsup A_n)$ $\surd$ $P(\cap A_n) \leq P(\liminf A_n)$

10. Σε χ.μ. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;

    ◯ $(A_n)\!\downarrow \Rightarrow \mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$ $\surd$ $(A_n)\!\uparrow \Rightarrow \mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$ ◯ $\mu(\limsup A_n) \leq \limsup \mu(A_n)$

11. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;

    ◯ $\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x)$ $\surd$ $\mathbb{1}_{[2,+\infty)}(x)$ $\surd$ $(1-e^{-x})\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ ◯ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$

12. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$;

    $\surd$ $\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ $\surd$ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ ◯ $0.5 * \mathbb{1}_{(0,+\infty)}$ $\surd$ 0.5

13. Αν f είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε ισχύει πάντα ότι:

    $\surd$ $f^{-1}(\mathcal{B})$ **είναι σ-άλγεβρα** ◯ $f(\mathcal{A})$ είναι σ-άλγεβρα $\surd$ $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ ◯ $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$

14. Η $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι τυχαία μεταβλητή αν $\forall b \in \mathbb{R}$:

    $\surd$ $\{X \leq b\} \in \mathcal{A}$ $\surd$ $\{X \geq b\} \in \mathcal{A}$ ◯ $\{-b \leq X \leq b\} \in \mathcal{A}$ $\surd$ $\{X^3 \leq b\} \in \mathcal{A}$

15. Αν $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών ποιές από τις επόμενες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι απλές ;

    $\surd$ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ $\surd$ $\sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{1}_{\{q\}}$ ◯ $\sum_{q\in\mathbb{Q}} q\,\mathbb{1}_{\{q\}}$

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ QUIZ

Οι ερωτήσεις καλύπτουν αρκετά απο αυτά που έχουμε δεί τις 3 πρώτες εβδομάδες. Ένας φοιτητής που είχε διαβάσει τις σημειώσεις θα μπορούσε να απαντήσει εύκολα στην πλειοψηφία των ερωτήσεων. Λίγες ερωτήσεις ήταν πιο απαιτητικές, και χρειαζόταν καθαρό μυαλό και καλύτερη προετοιμασία για αποφυγή κάποιων παγίδων που εύκολα μπορεί να πέσει κάποιος αν δεν έχει ξεκαθαρίσει καλά κάποιες έννοιες. Η δοκιμασία λοιπόν αυτή βοηθά και στο ξεκαθάρισμα τέτοιων μελανών σημείων και συνεισφέρει στην ενδυνάμωση για τη συνέχεια. Ακολουθεί σχολιασμός κάποιων σημείων που δυσκόλεψαν ή κάποιων σημείων που χρήζουν προσοχής.

(2) Μία κλάση Dynkin είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις απο τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό της ως λ-κλάση.

(3) Όλες οι οικογένειες που προκύπτουν ως λύση είναι κλειστές στις πεπερασμένες τομές και άρα το συμπέρασμα έπεται απο το θεώρημα του Dynkin.

(4) Τα υπεραριθμήσιμα δεν παράγουν τα Borel υποσύνολα αλλά όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θα μπορούσε να παρατηρήσει κανείς ότι κάθε αριθμήσιμο είναι συμπλήρωμα κάποιου υπεραριθμήσιμου συνόλου, άρα θα περιέχονταν στην παραγόμενη σ-άλγεβρα των υπεραριθμήσιμων. Διαφορετικά θα μπορούσε κάποιος να θυμηθεί ότι υπάρχουν σύνολα που δεν είναι Borel (το σχολιάσαμε αυτό), τα οποία προφανώς είναι υπεραριθμήσιμα (αφού όλα τα αριθμήσιμα είναι Borel) και άρα δεν μπορεί η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων να περιέχει όλα τα υπεραριθμήσιμα.

(5) Θα μπορούσε κάποιος να θυμηθεί την ακολουθία $(-1/n, 1-1/n)$ (την οποία σχολιάσαμε) που έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες και συγκλίνει στο $[0,1)$. Η αναλογία με τη λύση $[a,b)$ προκύπτει εύκολα. Προφανώς αν $a=b$ τότε το όριο θα ήταν το $\emptyset$. Μία τέτοια είναι η $(-2/n, -1/n)$. Μία τυπική απόδειξη γίνεται με όλους τους τρόπους που σας είπα στο μάθημα για την εύρεση του ορίου της ακολουθίας $(-1/n, 1-1/n)$.

(7) Η ακολουθία $(0,1/n)$ είναι φθίνουσα άρα η $\cup_{n\geq 1}(0,1/n)=(0,1)$ και άρα συμπεριλαμβάνεται στις λύσεις. Το σημείο αυτό μπέρδεψε αρκετούς.

(8) Το μέτρο περιορισμός $\lambda_{(0,1)}:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ έχει πεδίο ορισμού τα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και όχι τα $\mathcal{B}((0,1))$ άρα συμπίπτει ακριβώς με αυτήν που γνωρίζουμε ως ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και συμβολίζουμε $\mathrm{Unif}(0,1)$. Το σημείο αυτό μπέρδεψε επίσης πολλούς. Έχει όλες τις ιδιότητες που προτείνονται στις επιλογές.

(9) Ισχύει πάντα

$$P(\cap A_n)\leq P(\liminf A_n)\leq \liminf P(A_n)\leq \limsup P(A_n)\leq P(\limsup A_n)\leq P(\cup A_n)$$

(10) Η πρώτη ανισότητα ισχύει πάντα όταν $\mu(A_n)<\infty$ για κάποιο n. Διαφορετικά, αν π.χ. πάρουμε την ακολουθία $(n,+\infty)$, τότε δεν ισχύει.

Οι σωστές ανισότητες για τυχόν μέτρο μ είναι

$$\mu(\cap A_n)\leq \mu(\liminf A_n)\leq \liminf \mu(A_n)\leq \limsup \mu(A_n)\leq \mu(\limsup A_n)\leq \mu(\cup A_n)$$

όταν $\mu(\cup A_n)<\infty$.

(12) Εδώ έγινε ναυάγιο. Αν δ_x είναι το μέτρο Dirac στο $x\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε η πρώτη επιλογή συνάρτησης κατανομής αντιστοιχεί στο δ_0 (όλη η πιθανότητα στο 0), η δεύτερη στο $0.5\delta_0+0.5\delta_{+\infty}$ (ισοπίθανα το 0 και το $+\infty$) και η τέταρτη στο $0.5\delta_{-\infty}+0.5\delta_{+\infty}$ (ισοπίθανα το $-\infty$ και το $+\infty$). Η τρίτη δεν είναι δεξιά συνεχής, άρα δεν αντιστοιχεί σε σ.κ..

(13) Ότι είναι σωστό έχει δειχθεί. Το ότι $f(\mathcal{A})$ δεν είναι πάντα σ-άλγεβρα προκύπτει εύκολα, π.χ. αν $f=c$, δηλ. είναι σταθερή, τότε $f(\mathcal{A})=\{\emptyset,\{c\}\}$ που δεν είναι γενικά σ-άλγεβρα, εκτός αν ο χώρος άφιξης $Y=\{c\}$.

(14) Εύκολα βλέπουμε ότι η τρίτη επιλογή οδηγεί στο ότι η $|X|$ είναι τ.μ. και όχι η X. Άρα για παράδειγμα το $\{X=1\}$ δεν μπορούμε να ξέρουμε αν ανήκει στην $\mathcal{A}$ ή όχι. Η τελευταία επιλογή οδηγεί στο ότι η X^3 είναι τ.μ. και άρα και η X. Για παράδειγμα

$$\{X^3\leq b\}\in\mathcal{A}\Leftrightarrow\{X\leq b^{1/3}\}\in\mathcal{A}\Leftrightarrow\{X\leq u\},\quad \forall u=b^{1/3}\in\mathbb{R}.$$

(15) Προσοχή στις δείκτριες! Σε αντίθεση με την τελευταία επιλογή, οι δύο πρώτες είναι απλές, αφού

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}=\sum_{q\in\mathbb{Q}}\mathbb{1}_{\{q\}}$$