ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ - QUIZ 1, 9 Μαρτίου 2018

1. Μία σ-άλγεβρα είναι κλειστή στα/στις

   ◯ συμπληρώματα ◯ πεπερασμένες ενώσεις ◯ διαφορές ◯ τομές

2. Μία κλάση Dynkin είναι κλειστή στα/στις

   ◯ αριθμήσιμες τομές ◯ συμπληρώματα ◯ αριθμήσιμες ξένες ενώσεις ◯ αύξουσες ακολουθίες

3. Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση υποσυνόλων του $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Εξετάστε αν ισχύει $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, όταν η $\mathcal{C}$ είναι

   ◯ $\{\{1\}\}$ ◯ $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ ◯ $\{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ ◯ $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

4. Ποιές απο τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ παράγουν τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$;

   ◯ τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα ◯ τα διαστήματα με ρητά άκρα ◯ τα υπεραριθμήσιμα ◯ τα κλειστά υποσύνολα

5. Έστω $I_n = [a_n, b_n]$ και (a_n), (b_n) είναι γνήσια φθίνουσες και συγκλίνουν στα $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε το $\lim I_n$:

   ◯ $= (a, b)$ ◯ $= [a, b)$ ◯ $= (a, b]$ ◯ $= [a, b]$

6. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία του, το μέτρο $\mu = 0.3\delta_0 + 0.7\delta_1$ είναι/έχει :

   ◯ σ-πεπερασμένο μέτρο ◯ στήριγμα το $\{0, 1\}$ ◯ ένα μέτρο Dirac ◯ μία κατανομή Bernoulli

7. Ποιά σύνολα έχουν μέτρο Lebesgue 0 ;

   ◯ οι φυσικοί αριθμοί ◯ $\cap_{n\geq 1}[0, 1/n)$ ◯ το σύνολο Cantor ◯ οι ρητοί του $[0, 100]$

8. Το μέτρο $\sum_{q\in\mathbb{Q}} \delta_q$ είναι/έχει:

   ◯ πεπερασμένο μέτρο ◯ σ-πεπερασμένο μέτρο ◯ συγκεντρωμένο στο $\mathbb{Q}$ ◯ στήριγμα το $\mathbb{Q}$

9. Σε χ.π. $(X, \mathcal{A}, P)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;

   ◯ $P(\cap A_n) \leq P(\liminf A_n)$ ◯ $P(\cup A_n) \leq P(\limsup A_n)$ ◯ $P(\cap A_n) \leq P(\limsup A_n)$

10. Σε χ.μ. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;

    ◯ $(A_n)\uparrow \Rightarrow \mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$ ◯ $(A_n)\downarrow \Rightarrow \mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$ ◯ $\mu(\limsup A_n) \leq \limsup \mu(A_n)$

11. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;

    ◯ 0 ◯ $\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ ◯ $\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ ◯ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) + 0.5 * \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)$

12. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$;

    ◯ 0 ◯ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ ◯ $0.5 * \mathbb{1}_{(0,+\infty)}$ ◯ 1

13. Αν f είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε ισχύει πάντα ότι:

    ◯ $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα ◯ $\mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ ◯ $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ ◯ $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$

14. Η $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι τυχαία μεταβλητή αν $\forall b \in \mathbb{R}$:

    ◯ $\{X \leq b\} \in \mathcal{A}$ ◯ $\{X \geq b\} \in \mathcal{A}$ ◯ $\{-b \leq X \leq b\} \in \mathcal{A}$ ◯ $\{X^3 \leq b\} \in \mathcal{A}$

15. Αν $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ποιές από τις επόμενες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι απλές ;

    ◯ $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ ◯ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \mathbb{1}_{\{n\}}$ ◯ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{n\}}$ ◯ $\sum_{n\in\mathbb{N}} n \, \mathbb{1}_{\{n\}}$