ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ - QUIZ 1, 9 Μαρτίου 2018

1. Μία σ-άλγεβρα είναι κλειστή στα/στις

   $\surd$ **συμπληρώματα** $\surd$ **πεπερασμένες ενώσεις** $\surd$ **διαφορές** ○ τομές

2. Μία κλάση Dynkin είναι κλειστή στα/στις

   ○ αριθμήσιμες τομές $\surd$ **συμπληρώματα** $\surd$ **αριθμήσιμες ξένες ενώσεις** $\surd$ **αύξουσες ακολουθίες**

3. Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση υποσυνόλων του $X = \{1,2,3,4,5\}$. Εξετάστε αν ισχύει $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, όταν η $\mathcal{C}$ είναι

   $\surd$ $\{\{1\}\}$ $\surd$ $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ $\surd$ $\{\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$ ○ $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$

4. Ποιές απο τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ παράγουν τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$;

   ○ τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $\surd$ **τα διαστήματα με ρητά άκρα** ○ τα υπεραριθμήσιμα $\surd$ **τα κλειστά υποσύνολα**

5. Έστω $I_n = [a_n, b_n]$ και (a_n), (b_n) είναι γνήσια φθίνουσες και συγκλίνουν στα $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε το $\lim I_n$:

   ○ $= (a,b)$ ○ $= [a,b)$ $\surd$ $= (a,b]$ ○ $= [a,b]$

6. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία του, το μέτρο $\mu = 0.3\delta_0 + 0.7\delta_1$ είναι/έχει :

   $\surd$ **σ-πεπερασμένο μέτρο** $\surd$ **στήριγμα το** $\{0,1\}$ ○ ένα μέτρο Dirac $\surd$ **μία κατανομή Bernoulli**

7. Ποιά σύνολα έχουν μέτρο Lebesgue 0 ;

   $\surd$ **οι φυσικοί αριθμοί** $\surd$ $\cap_{n\geq 1}[0,1/n)$ $\surd$ **το σύνολο Cantor** $\surd$ **οι ρητοί του** $[0,100]$

8. Το μέτρο $\sum_{q\in\mathbb{Q}} \delta_q$ είναι/έχει:

   ○ πεπερασμένο μέτρο $\surd$ **σ-πεπερασμένο μέτρο** $\surd$ **συγκεντρωμένο στο** $\mathbb{Q}$ ○ στήριγμα το $\mathbb{Q}$

9. Σε χ.π. $(X, \mathcal{A}, P)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;

   $\surd$ $P(\cap A_n) \leq P(\liminf A_n)$ ○ $P(\cup A_n) \leq P(\limsup A_n)$ $\surd$ $P(\cap A_n) \leq P(\limsup A_n)$

10. Σε χ.μ. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την $\mathcal{A}$-ακολουθία (A_n) ;

    $\surd$ $(A_n)\uparrow \Rightarrow \mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$ ○ $(A_n)\downarrow \Rightarrow \mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$ ○ $\mu(\limsup A_n) \leq \limsup \mu(A_n)$

11. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;

    ○ 0 ○ $\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ $\surd$ $\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ $\surd$ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) + 0.5 * \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)$

12. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$;

    $\surd$ 0 $\surd$ $0.5 * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ ○ $0.5 * \mathbb{1}_{(0,+\infty)}$ $\surd$ 1

13. Αν f είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε ισχύει πάντα ότι:

    $\surd$ $f^{-1}(\mathcal{B})$ **είναι σ-άλγεβρα** ○ $\mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ $\surd$ $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ ○ $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$

14. Η $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι τυχαία μεταβλητή αν $\forall b \in \mathbb{R}$:

    $\surd$ $\{X \leq b\} \in \mathcal{A}$ $\surd$ $\{X \geq b\} \in \mathcal{A}$ ○ $\{-b \leq X \leq b\} \in \mathcal{A}$ $\surd$ $\{X^3 \leq b\} \in \mathcal{A}$

15. Αν $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ποιές από τις επόμενες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι απλές ;

    $\surd$ $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ ○ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \mathbb{1}_{\{n\}}$ $\surd$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{n\}}$ ○ $\sum_{n\in\mathbb{N}} n \mathbb{1}_{\{n\}}$