

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ - QUIZ 1, 6/11/2024

1. Μία σ -άλγεβρα είναι κλειστή στα/στις
 - συμπληρώματα
 - αυθαίρετες ενώσεις
 - αυθαίρετες τομές
 - πεπερασμένες τομές
2. Μία κλάση Dynkin είναι κλειστή στα/στις
 - συμπληρώματα
 - αριθμίσ. ξένες ενώσεις
 - αριθμήσιμες ενώσεις
 - πεπερασμένες τομές
3. Έστω \mathcal{C} μία κλάση υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, 4\}$. Εξετάστε αν ισχύει $\sigma(\mathcal{C}) = \delta(\mathcal{C})$, όταν η \mathcal{C} είναι
 - $\{\{1, 4\}\}$
 - $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$
 - $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
 - $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
4. Ποιές απο τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του \mathbb{R} παράγουν τα Borel υποσύνολα του \mathbb{R} ?
 - τα ανοικτά
 - τα φραγμένα διαστήματα
 - τα Lebesgue μετρήσιμα
 - τα υπεραριθμήσιμα
5. Δίνονται οι ακολουθίες των διαστημάτων $\{(-1/n, 1/n)\}_{n \geq 1}$ και $\{[n-1, n)\}_{n \geq 1}$. Βρείτε τα όρια :
 - \emptyset
 - $\{0\}$
 - \mathbb{R}
 - δεν υπάρχει
6. Στο σύνολο \mathbb{R} με τη συνήθη τοπολογία του, το μέτρο $\mu = 0.2\delta_0 + 0.3\delta_1 + 0.5\delta_2$ είναι/έχει :
 - μέτρο πιθανότητας
 - στήριγμα το $[0, 2]$
 - ένα μέτρο Dirac
 - μία κατανομή Bernoulli
7. Αν $\{q_n\}_{n \geq 1}$ είναι μία αρίθμηση των ρητών \mathbb{Q} , τότε το μέτρο $\mu = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{q_n}$ είναι/έχει :
 - σ -πεπερασμένο μέτρο
 - μέτρο πιθανότητας
 - στήριγμα το \mathbb{Q}
 - στήριγμα το \mathbb{R}
8. Ποιά σύνολα έχουν μέτρο Lebesgue 0 ?
 - οι ρητοί αριθμοί
 - $\cap_{n \geq 1} (0, 1/n)$
 - το σύνολο Cantor
 - οι άρρητοι του \mathbb{R}
9. Σε $\chi.π.$ (X, \mathcal{A}, P) ποιές απο τις σχέσεις αυτές ισχύει πάντα για την \mathcal{A} -ακολουθία (A_n) ?
 - $P(\cup A_n) \leq P(\limsup A_n)$
 - $P(\cap A_n) \leq P(\limsup A_n)$
 - $P(\cap A_n) \leq P(\liminf A_n)$
10. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$?
 - 1
 - $\mathbf{1}_{(0, +\infty)}(x)$
 - $\mathbf{1}_{[2, +\infty)}(x)$
 - $0.5 * \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x) + 0.5 * \mathbf{1}_{[1, +\infty)}(x)$
11. Ποιές απο τις παρακάτω $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις κατανομής ενός μ.π. στον $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$?
 - $\mathbf{1}_{[0, +\infty)}$
 - $2 * \mathbf{1}_{[0, +\infty)}$
 - $0.5 * \mathbf{1}_{(0, +\infty)}$
 - 1
12. Αν f είναι \mathcal{A}/\mathcal{B} -μετρήσιμη συνάρτηση και $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ τότε ισχύει πάντα ότι:
 - $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$
 - $f(\mathcal{A})$ είναι σ -άλγεβρα
 - $\sigma(f(\mathcal{A}))$ είναι σ -άλγεβρα
 - $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$
13. Η $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι τυχαία μεταβλητή αν $\forall b \in \mathbb{R}$:
 - $\{X \leq b^2\} \in \mathcal{A}$
 - $\{X \geq b\} \in \mathcal{A}$
 - $\{-b \leq X \leq b\} \in \mathcal{A}$
 - $\{X^3 \leq b\} \in \mathcal{A}$
14. Αν \mathbb{Q} είναι το σύνολο των ρητών, ποιές από τις επόμενες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι απλές ?
 - $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$
 - $\sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathbf{1}_{\{q\}}$
 - $\sum_{q \in \mathbb{Q}} q \mathbf{1}_{\{q\}}$
 - $(+\infty) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$
15. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, αν είναι
 - σταθερή
 - απλή
 - μονότονη
 - φραγμένη
 - Lebesgue μετρήσιμη