$\boxed{\Theta.1}$

α) • Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, όπου $X \neq \emptyset$ σύνολο, λέμε ότι είναι <u>σ-άλγεβρα</u> (επί του X), αν

(i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (ή $\emptyset \in \mathcal{A}$)

(ii) αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$ (κλειστή στα συμπληρώματα)

(iii) αν $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ (κλειστή στις αριθμ. ενώσεις).

• Δύο σ-άλγεβρες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι <u>ανεξάρτητες</u>, αν

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B} \implies P(AB) = P(A)P(B).$$

β) $\boxed{\Rightarrow)}$ Έστω $A \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (υπόθεση) $\Rightarrow A \in \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ ανεξάρτητες} \overset{A\in\mathcal{A},\, A\in\mathcal{B}}{\Longrightarrow} P(A) = P(AA) = P(A)P(A) = P^2(A)$$

$$\Rightarrow P(A) \in \{0,1\}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Έστω $P(A) \in \{0,1\}$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

• Αν $P(A) = 0$, τότε $AB \subset A \Rightarrow 0 \leq P(AB) \leq P(A) = 0$

$$\Rightarrow P(AB) = 0 = P(A)P(B),\ \forall B \in \mathcal{B}$$

• Αν $P(A) = 1$, τότε $P(B) = P[\underbrace{B(A\cup A^c)}_{BA\,\cup\, BA^c}] \overset{\text{ξένα}}{=} P(BA) + P(BA^c) = P(AB)$,

αφού $P(A^c) = 0$, και άρα $P(BA^c) = 0$.

Άρα $P(AB) = \underbrace{P(A)}_{1} \cdot P(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Τελικά $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$, $P(AB) = P(A)P(B) \Rightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}$ ανεξάρτητες.

γ) • $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$.

$$Y = g(X) \Rightarrow \sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = (g\circ X)^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$= X^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))}_{\text{Borel-μετρήσ.}}\big) \subseteq X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X).$$

δ) Έχουμε X και X^2 ανεξ. τ.μ $\iff$

$\sigma(X)$ και $\sigma(X^2)$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες.

Όμως $Y = X^2 = g(X) \overset{\gamma)}{\Longrightarrow} \sigma(X^2) \subset \sigma(X)$.

Απο το β) $\sigma(X^2)$ και $\sigma(X)$ ανεξάρτητες $\iff$

$P(A) \in \{0,1\}$, $\forall A \in \sigma(X^2)$.

Λόγω των ιδιοτήτων της σ.κ. της $Y = X^2$, εύκολα προκύπτει

ότι τότε πρέπει $F_Y(y) = P(\underbrace{Y \leq y}_{\in \sigma(Y)}) = \begin{cases} 0 & , y < c \\ 1 & , y \geq c, \end{cases}$

για κάποιο $c \geq 0$ (αφού $X^2 \geq 0$, με πιθ. 1).

Άρα έχουμε $X^2 = c$, με πιθ. 1., και άρα η μορφή

των τ.μ. X είναι $X = \begin{cases} \sqrt{c} & , \text{με πιθ. } p \\ -\sqrt{c} & , \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$, όπου $0 \leq p \leq 1$

που περιλαμβάνει βέβαια και τις εκφυλισμένες τ.μ. για τις ακραίες τιμές του p.

$\boxed{\theta.2.}$ α) Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε

$$P(g(X) \in A) = P(X \in g^{-1}(A)) \overset{X \overset{d}{=} Y}{=} P(Y \in g^{-1}(A)) = P(g(Y) \in A).$$

$$\Longrightarrow g(X) \overset{d}{=} g(Y).$$

β) • $X^+ = \max(0, X) = g(X)$, όπου $g(x) = \max(0,x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$X^- = \max(0, -X) = g(-X)$.

Όμως $X \overset{d}{=} -X \overset{a)}{\Longrightarrow} g(X) \overset{d}{=} g(-X) \Rightarrow X^+ \overset{d}{=} X^-$.

• Παρατηρούμε ότι $X^k = (X^+)^k - (X^-)^k$, όταν k-περιττός.
$k = 1, 3, 5, \ldots$

Άρα όταν υπάρχουν οι ροπές k-τάξης, έχουμε

$$E(X^k) = E\left[(X^+)^k\right] - E\left[(X^-)^k\right].$$

Όμως $X^+ \overset{d}{=} X^- \Rightarrow (X^+)^k \overset{d}{=} (X^-)^k \Rightarrow E\left[(X^+)^k\right] = E\left[(X^-)^k\right]$.

Τελικά $E(X^k) = 0$, $\forall k = 1, 3, \ldots$

γ) Δίνεται ότι $n(X_n - 2) \xrightarrow{d} X$.

Άρα $X_n = X_n - 2 + 2 = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{n(X_n-2)}_{\downarrow d\ X} + \underbrace{2}_{\downarrow\, 2} \xrightarrow{d} 2$

απο Slutsky.

$Y_n = n(X_n^3 - 8) = n\left(g(X_n) - g(2)\right)$, όπου $g(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $n(X_n - 2) \xrightarrow{d} X$ και η g είναι παραγωγίσιμη, έχουμε απο τη μέθοδο Δέλτα, ότι

$$n\left(g(X_n) - g(2)\right) \xrightarrow{d} g'(2)\cdot X.$$

Όμως $g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(2) = 12$, και άρα τελικά

$$n(X_n^3 - 8) \xrightarrow{d} 12 \cdot X.$$

$\boxed{\theta 3}$ α) Η ακολουθία $\left\{|X-Y| > \frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα,

και $\left\{|X-Y| > 0\right\} = \lim_n \left\{|X-Y| > \frac{1}{n}\right\} \left(= \bigcup_n \left\{|X-Y|>\frac{1}{n}\right\}\right)$

Άρα $P(|X-Y|>0) = P\left(\lim_n \left\{|X-Y| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_n \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ (υπόθεση)}}}{P\left(|X-Y| > \frac{1}{n}\right)} = 0$

$\Rightarrow P(|X-Y|=0) = P\left[\left(|X-Y|>0\right)^c\right] = 1 \Rightarrow P(X=Y)=1 \Rightarrow X \overset{a.s.}{=} Y$.

β) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή

$$|X-Y| \leq |X-X_n| + |X_n - Y| \quad , \text{ έχουμε}$$

$$\left\{|X-Y|>\varepsilon\right\} \subseteq \left\{|X-X_n| + |X_n-Y| > \varepsilon\right\} \subseteq \left\{|X-X_n|>\frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n-Y|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Άρα $P(|X-Y|>\varepsilon) \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \ (X_n \xrightarrow{P} X)}}{P\left(|X-X_n|>\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \ (X_n \xrightarrow{P} Y)}}{P\left(|X_n-Y|>\frac{\varepsilon}{2}\right)}$

Τελικά $P(|X-Y|>\varepsilon) = 0 \ , \forall \varepsilon > 0 \overset{\alpha)}{\Longrightarrow} X \overset{a.s.}{=} Y$

γ) Επειδή $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

και $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

λόγω της μοναδικότητας της κατά πιθανότητα σύγκλισης από το β), συμπεραίνουμε ότι και η $\xrightarrow{a.s.}$ και η $\xrightarrow{L^p}$ ικανοποιούν τη μοναδικότητα του ορίου σύγκλισης.

δ) Έστω $X_n \sim N(0,1)$. Ως ισόνομες προφανώς $X_n \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$ για οποιαδήποτε X έχει κατανομή την $N(0,1)$. Όμως $X \overset{d}{=} -X$, και αυτές <u>διαφέρουν με πιθ. 1</u>, άρα όχι $X \overset{a.s.}{=} -X$.

Όμως $X_n \xrightarrow{d} X$ και $X_n \xrightarrow{d} Y \Longrightarrow X \overset{d}{=} Y$, δηλ. έχουμε τη μοναδικότητα του ορίου με την έννοια της ισονομίας.

Αυτό έπεται άμεσα απο το χαρακτηρισμό της κατά κατανομής σύγκλισης μέσω σύγκλισης των αντίστοιχων χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Οι 2 οριακές τυχ. μεταβλ. θα έχουν κοινή χαρακτηριστική συνάρτηση, άρα θα είναι και ισόνομες.

$\boxed{\theta.4}$

α) Απο υπόθεση έχουμε $\underline{(i)\ f_n \xrightarrow{a.s.} f}$. Επίσης αν θέσουμε $g_n = g$, τότε (ii) $\underline{|f_n| \le g \ ,\ n \geq 1}$, δηλ. η ακολουθία (f_n) κυριαρχείται απο μία κοινή συνάρτηση g.

Τότε προφανώς $g_n = g \xrightarrow{\kappa.\sigma.} g$ (άρα και a.s.)

και (iii) $\int g_n \, d\mu = \underline{\int g \, d\mu < +\infty}$ (απο υπόθεση γενικότερης διατύπωσης).

Αυτές είναι και οι 3 υποθέσεις του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης το οποίο προκύπτει με την εξειδίκευση $g_n = g$, στην παραπάνω γενικότερη διατύπωση που δίνεται απο την Εκφώνηση της Άσκησης.

β) Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της <u>γενικότερης διατύπωσης</u> του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue όπως διατυπώθηκαν στην εκφώνηση, για την ακολουθία $(f_n - f)_{n\geq 1}$.

Έχουμε $f_n \xrightarrow{a.s.} f \Rightarrow f_n - f \xrightarrow{a.s.} 0$, άρα η (i) ✓.

Για $g_n = f_n + f \geq 0$, $n \geq 1$ έχουμε, $g_n \xrightarrow{a.s.} 2f \equiv g$, ✓ (ii).

και $|f_n - f| \le |f_n| + |f| = f_n + f$, άρα και η (iii) ✓.

Επιπλέον $\int g_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) + f(x)) \, dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx}_{=1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx}_{=1} \to 2$,

άρα και η (iv) ✓ [(i), (ii), (iii), (iv) μία αρίθμηση των υποθέσεων].

Συμπεραίνουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0$

γ) Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, άρα αντιστοιχεί σε (άπολυτα) συνεχή τ.μ. και άρα η συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ είναι συνεχής.

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff F_n(x) \longrightarrow F(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{αφού } F \text{ συνεχής})$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$.

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_{(-\infty, x]} f_n(x)dx - \int_{(-\infty, x]} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{(-\infty, x]} (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_{(-\infty, x]} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\geq 0}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow{(β)} 0.$$

Άρα $F_n(x) \longrightarrow F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το συμπέρασμα έπεται.

$\boxed{Θ5}$

α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ζ) Σ η) Σ θ) Σ ι) Σ κ) Λ

λ) Σ μ) Λ ν) Λ ξ) Λ ο) Λ