

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
411. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι
24 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

I. 2M Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \ln(y+u) u_x + u_y = -1, & \text{στο } U := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, y) = f(x), & \text{στο } \Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (1)$$

II. 3.5M Δίνεται το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0, & \text{στο } (0, \pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) = 0, & \text{στο } \{0\} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) = 0, & \text{στο } \{\pi\} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) = \begin{cases} x, & \text{στο } (0, \frac{\pi}{2}) \times \{0\}, \\ \pi - x, & \text{στο } (\frac{\pi}{2}, \pi) \times \{0\}, \end{cases} \\ u_t(x, t) = 0, & \text{στο } [0, \pi] \times \{0\}. \end{cases} \quad (2)$$

- i. Λύστε το πρόβλημα (2).
- ii. Αποδείξτε τη μοναδικότητα της λύσης.

III. 2.5M

- i. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $x^3 - 3xy^2 + 3x$ στο $\bar{D} := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- ii. Έστω u αρμονική συνάρτηση στο $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ και συνεχής στο \bar{D} . Αν $u|_{\partial D} = x^2y^2$, να βρεθεί η $u(0, 0)$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πολικές συντεταγμένες.

IV. 2M Να αποδείξετε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = \phi, & \text{στο } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3)$$

δίνεται από τη σχέση

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy. \quad (4)$$

Βοηθητικό υλικό:

- $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$
- $\cos 2\phi = 1 - 2 \sin^2 \phi$
- $\sin^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$
- $\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$