ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
411. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι
13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $3 + \frac{1}{2}$ μονάδες.
- Να αναφέρετε στο γραπτό σας αν έχετε παραδώσει εργασία.

$\boxed{\text{I.}}$ Δίνεται το ΠΣΤ Dirichlet για την εξίσωση Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο} \quad U, \\ u = f, & \text{στο} \quad \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

όπου U ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με επαρκώς ομαλό σύνορο ∂U και f συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στο ∂U.

(α΄) Να αποδειχθεί η Αρχή του Μεγίστου

(β΄) Να αποδειχθεί η μοναδικότητα της λύσης του ΠΣΤ, με ενεργειακή μέθοδο.

$\boxed{\text{II.}}$ Να βρεθεί η λύση του ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & \text{στο} \quad (0,\infty)^2, \\ u = 0, & \text{στο} \quad \{x=0\} \times [0,\infty), \\ u = 9x, & \text{στο} \quad [0,\infty) \times \{t=0\}, \\ u_t = 3x+1, & \text{στο} \quad [0,\infty) \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{2}$$

$\boxed{\text{III.}}$ 1. Να λυθεί το ακόλουθο ΠΑΤ με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

$$\begin{cases} \ln(y+u)\, u_x + u_y = -1, & \text{στο} \quad U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ u = f(x), & \text{στο} \quad \Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

2. Δίνεται το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = e^{-x^2}, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{4}$$

Να βρεθεί η αριθμητική τιμή του χρόνου θραύσης σε *sec*.

Υποδείξεις

$\boxed{\text{I.}}$ (α΄) Βλ. απόδειξη Θεωρήματος 5.9 των σημειώσεων.

(β΄) Βλ. Παρατήρηση 5.15 των σημειώσεων.

$\boxed{\text{II.}}$ Λύνοντας όπως στο Παράδειγμα 7.16 των σημειώσεων, βρίσκουμε ότι η λύση του ΠΑΤ (2) είναι

$$u(x,t) = \begin{cases} 3xt + \dfrac{28}{3}x, & x \le 3t \\ 3xt + 9x + t, & x \ge 3t \end{cases}$$

$\boxed{\text{III.}}$ 1. Βλ. Ενότητα 2.2 των σημειώσεων. Λύνουμε το ΠΑΤ των χαρακτηριστικών

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \ln(y+z), & x(0) = x_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 1, & y(0) = y_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = -1, & z(0) = u(x_0,y_0). \end{cases}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε ότι

$$z = -y + u(x_0, y_0) + y_0, \tag{5}$$

απ'όπου λύνοντας και τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε

$$x = \ln(u(x_0, y_0) + y_0)\, y + c.$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι

$$x = \ln(u(x_0, y_0) + y_0)\, y + x_0 - \ln(u(x_0, y_0) + y_0)\, y_0,$$

και από το σημείο τομής $(\bar{x}, 0)$ της χαρακτηριστικής με τον άξονα των x έχουμε (θέτοντας $y = 0$) ότι

$$\bar{x} = x_0 - \ln(u(x_0, y_0) + y_0)\, y_0,$$

άρα

$$u(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}) = f(x_0 - \ln(u(x_0, y_0) + y_0)\, y_0).$$

Από την (5) έχουμε $u(\bar{x}, 0) = u(x_0, y_0) + y_0$. Άρα η λύση του ΠΑΤ (3) σε πεπλεγμένη μορφή είναι

$$u(x, y) + y = f(x - \ln(u(x, y) + y)\, y).$$

2. Από την ενότητα 2.4.1 των σημειώσεων ξέρουμε ότι

$$t_\theta = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left[-\frac{1}{f'(y)\, a'(f(y))} \right] = \inf_{y \in \mathbb{R}} \frac{1}{2ye^{-y^2}}.$$

Άρα από τη σχέση $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{1}{2ye^{-y^2}}\right) = 0$ υπολογίζουμε ότι $t_\theta = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$.