

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών
Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I
11 Σεπτεμβρίου 2025

1. [2μ] Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} xu_x + u_y = x^2 + u, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

όπου $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεδομένη διαφορίσιμη συνάρτηση.

2. [2μ] Να βρεθεί γενικευμένη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $f(x) = x + 2$ για $x < 0$ και $f(x) = 1$ για $x > 0$.

3. [2μ] Έστω $u(x, t)$ λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(i) Να γραφεί η $u(x, t)$ σε μορφή δυναμοσειράς. (ii) Να αποδειχθεί ότι $0 \leq u(x, t) \leq \pi^2/4$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $t > 0$. (iii) Να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi u^2(x, t) dx$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.

4. [2μ] Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x, y) = 3, & x^2 + y^2 = 1, \\ u(x, y) = 1 + x, & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε πολικές συντεταγμένες (οπότε $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$).]

5. [2μ] Έστω $u(x, t)$ λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = x^2 u_{xx} + xu_x, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = x, & x > 0. \end{cases}$$

Να βρεθεί το $u(1, t)$, $t > 0$. [Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $v(z, t) = u(x, t)$ όπου $x = e^z$ (αλλαγή (της μίας) ανεξάρτητης μεταβλητής).]

6. [2μ] Έστω ότι η C^2 συνάρτηση $u(x, t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Έστω ακόμη ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_t(x, t) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) u_t(x, t) dx$$

είναι σταθερή.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Διάρκεια 2 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Δίνεται ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.