Μιχάλης Παπαδημητράκης

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Γενικά.

1.1 Μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών $u = u(x, y)$ θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \text{κλπ.}$$

Ομοίως, για συναρτήσεις τριών μεταβλητών $u = u(x, y, z)$ θα γράφουμε

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$u_{xy} = u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad u_{xz} = u_{zx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},$$

$$u_{yz} = u_{zy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \quad \text{κλπ.}$$

Όταν γράφουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της u, δηλαδή τις u_x, u_y, u_z, θα υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της u είναι συνεχείς. Όταν γράφουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της u, δηλαδή τις $u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy} = u_{yx}, u_{xz} = u_{zx}, u_{yz} = u_{zy}$, θα υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της u είναι συνεχείς. Εξ άλλου είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών ότι οι ισότητες των μεικτών παραγώγων $u_{xy} = u_{yx}, u_{xz} = u_{zx}, u_{yz} = u_{zy}$ ισχύουν στην περίπτωση που αυτές είναι συνεχείς. Φυσικά, ορίζονται και μερικές παράγωγοι τάξης ανώτερης του δύο και όποτε συναντάμε τέτοιες παραγώγους θα θεωρούμε ότι πρέπει να είναι συνεχείς.

Η γενική μορφή μιας **μερικής διαφορικής εξίσωσης** (μ.δ.ε.) πρώτης τάξης δύο μεταβλητών είναι η

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

όπου η $F = F(x, y, u, v, w)$ είναι ορισμένη σε κάποιο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^5$. Λέμε ότι η $u = u(x, y)$ είναι λύση της εξίσωσης αυτής σε κάποιο υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$ αν η u είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης u_x, u_y σε κάθε σημείο του Ω και ισχύει

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega.$$

Ομοίως, η γενική μορφή μιας μ.δ.ε. δεύτερης τάξης δύο μεταβλητών είναι η

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0,$$

όπου η $F = F(x, y, u, v, w, r, s, t)$ είναι ορισμένη σε κάποιο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^8$. Λέμε ότι η $u = u(x, y)$ είναι λύση της εξίσωσης αυτής σε κάποιο υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$ αν η u είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ σε κάθε σημείο του Ω και ισχύει

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y), u_{yy}(x, y), u_{xy}(x, y)) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega.$$

Τα ανάλογα μπορούμε να πούμε για τη γενική μορφή μιας μ.δ.ε. τριών, τεσσάρων, κλπ. μεταβλητών.

Μερικά παραδείγματα πολύ γνωστών μ.δ.ε. πρώτης και δεύτερης τάξης είναι τα εξής:

1. $u_x + u_y = 0$ (*εξίσωση μεταφοράς*)
2. $u_x + yu_y = 0$ (*εξίσωση μεταφοράς*)
3. $uu_x + u_y = 0$ (*εξίσωση Hopf*)
4. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (*εξίσωση Laplace*)
5. $u_y - u_{xx} = 0$ (*εξίσωση διάχυσης* ή *εξίσωση θερμότητας*)
6. $u_{yy} - u_{xx} = 0$ (*κυματική εξίσωση*)

Με αυτές κυρίως τις εξισώσεις θα ασχοληθούμε σ' αυτό το μάθημα.

1.2 Διαφορικοί τελεστές.

Κάπως χαλαρά, όταν λέμε **τελεστής** $\mathcal{L}$ θα εννοούμε μια απεικόνιση η οποία αντιστοιχίζει μια συνάρτηση σε μια άλλη συνάρτηση:

$$\mathcal{L} : u \mapsto \mathcal{L}(u),$$

όπου η u και η $\mathcal{L}(u)$ είναι συναρτήσεις.

Οι λεγόμενοι **διαφορικοί τελεστές** περιέχουν παραγώγους των εμπλεκόμενων συναρτήσεων. Τα πιο απλά παραδείγματα διαφορικών τελεστών είναι τα:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{με} \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{με} \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Φυσικά, έχουμε και συνδυασμούς:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{με} \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{με} \qquad \mathcal{L}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ένας τελεστής $\mathcal{L}$ χαρακτηρίζεται **γραμμικός** αν ισχύει

$$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v), \qquad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$$

για κάθε δύο συναρτήσεις u, v (για τις οποίες ορίζονται οι $\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v)$) και κάθε αριθμό c. Με επαγωγή βλέπουμε εύκολα ότι ένας γραμμικός τελεστής $\mathcal{L}$ ικανοποιεί την

$$\mathcal{L}(c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) = c_1\mathcal{L}(u_1) + \cdots + c_n\mathcal{L}(u_n)$$

για κάθε φυσικό n, κάθε $u_1, \ldots, u_n$ (για τις οποίες ορίζονται οι $\mathcal{L}(u_1), \ldots, \mathcal{L}(u_n)$) και κάθε $c_1, \ldots, c_n$.

Παράδειγμα 1.2.1. Οι διαφορικοί τελεστές $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}$ και $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial y}$ είναι γραμμικοί. Ας δούμε το λίγο πιο σύνθετο παράδειγμα του τελεστή $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.
Έχουμε

$$\mathcal{L}(u+v) = (u+v)_x + y(u+v)_y = (u_x+v_x) + y(u_y+v_y) = (u_x+yu_y)+(v_x+yv_y) = \mathcal{L}(u)+\mathcal{L}(v),$$

$$\mathcal{L}(cu) = (cu)_x + y(cu)_y = cu_x + ycu_y = c(u_x + yu_y) = c\mathcal{L}(u).$$

Παράδειγμα 1.2.2. Ο διαφορικός τελεστής με τύπο $\mathcal{L}(u) = u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = uu_x + u_y$ δεν είναι γραμμικός.
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u+v) &= (u+v)(u+v)_x + (u+v)_y = (u+v)(u_x+v_x) + (u_y+v_y)\\ &= uu_x + uv_x + vu_x + vv_x + u_y + v_y = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v) + uv_x + vu_x.\end{aligned}$$

Άρα για να ισχύει η $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$ θα πρέπει να ισχύει $uv_x + vu_x = 0$. Αυτό, όμως, δεν ισχύει για όλες τις u, v. Για παράδειγμα, για τις $u(x, y) = v(x, y) = x$ έχουμε $uv_x + vu_x = 2x$ και αυτή δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Αν ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι γραμμικός, η εξίσωση

$$\mathcal{L}(u) = 0,$$

όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση, χαρακτηρίζεται **ομογενής**. Ενώ, αν f είναι μη-μηδενική συνάρτηση, η εξίσωση

$$\mathcal{L}(u) = f$$

χαρακτηρίζεται **μη-ομογενής**.

Πρόταση 1.1. *Αν ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι γραμμικός, το σύνολο των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $\mathcal{L}(u) = 0$ είναι γραμμικός χώρος. Μάλιστα, κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της $\mathcal{L}(u) = 0$ είναι κι αυτός λύση της $\mathcal{L}(u) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $\mathcal{L}(u) = 0$.
Αν $u, v \in \mathcal{A}$, τότε

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v) = 0 + 0 = 0$$

και άρα $u + v \in \mathcal{A}$.
Επίσης, αν $u \in \mathcal{A}$ και c είναι αριθμός, τότε

$$\mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u) = c0 = 0$$

και άρα $cu \in \mathcal{A}$.
Άρα το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι γραμμικός χώρος.
Τώρα με επαγωγή αποδεικνύεται ότι, αν $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$, τότε $c_1u_1 + \cdots + c_nu_n \in \mathcal{A}$. □

Πρόταση 1.2. *Έστω ότι ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι γραμμικός και έστω u_0 μία λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης $\mathcal{L}(u) = f$. Αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο (γραμμικός χώρος) των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $\mathcal{L}(u) = 0$ και $\mathcal{B}$ είναι το σύνολο των λύσεων της μη-ομογενούς εξίσωσης $\mathcal{L}(u) = f$, τότε*

$$\mathcal{B} = \{v + u_0 \,|\, v \in \mathcal{A}\}.$$

Απόδειξη. Έστω $v \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\mathcal{L}(v + u_0) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}(u_0) = 0 + f = f$$

και άρα $v + u_0 \in \mathcal{B}$.
Επομένως, $\{v + u_0 \mid v \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{B}$.
Αντιστρόφως, έστω $u \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $v = u - u_0$ και τότε

$$\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(u - u_0) = \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u_0) = f - f = 0$$

και άρα $v \in \mathcal{A}$. Επειδή $u = v + u_0$, βλέπουμε ότι $u \in \{v + u_0 \mid v \in \mathcal{A}\}$.
Επομένως, $\mathcal{B} \subseteq \{v + u_0 \mid v \in \mathcal{A}\}$. □

Το περιεχόμενο της τελευταίας πρότασης συνήθως διατυπώνεται ως εξής:

Γενική λύση της μη-ομογενούς $=$ *γενική λύση της ομογενούς* $+$ *ειδική λύση της μη-ομογενούς.*

Ασκήσεις.

1.2.1. Ποιοί από τους παρακάτω τελεστές είναι γραμμικοί;

α. $\mathcal{L}(u) = u_x + {u_y}^2$.

β. $\mathcal{L}(u) = u_x + u_y + 1$.

γ. $\mathcal{L}(u) = \sqrt{1 + x^2}(\cos y)u_x + u_{yxy} - (\arctan \frac{x}{y})u$.

1.2.2. Βρείτε την τάξη των παρακάτω μ.δ.ε. και πείτε αν είναι μη-γραμμικές ή ομογενείς γραμμικές ή μη-ομογενείς γραμμικές.

α. $u_y - u_{xx} = 1$.

β. $u_y - u_{xx} + xu = 0$.

γ. $u_y - u_{xxy} + uu_x = 0$.

δ. $u_{yy} - u_{xx} + x^2 = 0$.

ε. $u_x(1 + {u_x}^2)^{-1/2} + u_y(1 + {u_y}^2)^{-1/2} = 0$.

στ. $u_x + e^y u_y = 0$.

ζ. $u_y + u_{xxxx} + \sqrt{1 + u} = 0$.

1.3 Μερικά πρώτα απλά παραδείγματα επίλυσης μ.δ.ε.

Παράδειγμα 1.3.1. Με άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ δύο μεταβλητών θεωρούμε την μ.δ.ε.

$$u_x = 0.$$

Θεωρώντας ότι η $u(x, y)$ είναι λύση της εξίσωσης και θεωρώντας το τυχόν y προσωρινά σταθερό, ολοκληρώνουμε την εξίσωση

$$u_x(x, y) = 0$$

ως προς x και βρίσκουμε ότι

$$u(x, y) = \int 0 \, dx = c,$$

όπου c είναι μια σταθερά. Πρέπει, όμως, να σκεφτούμε ότι c είναι σταθερά ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης x και *όχι απαραίτητα ως προς την άλλη μεταβλητή* y την οποία έχουμε προσωρινά θεωρήσει σταθερή. Αυτό είναι πολύ σημαντικό και θα το αναλύσουμε λίγο παραπάνω βλέποντάς το και λίγο διαφορετικά.
Έστω π.χ. ότι $y = 1$. Τότε από την $u_x(x, 1) = 0$ συνεπάγεται $u(x, 1) = c$, όπου c είναι μια

σταθερά. Τώρα έστω $y = -2$. Τότε από την $u_x(x,-2) = 0$ συνεπάγεται $u(x,-2) = c$, όπου c είναι μια σταθερά. Όμως, η νέα αυτή σταθερά c δεν είναι απαραίτητα ίση με την προηγούμενη σταθερά c. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η σταθερά που κάθε φορά προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης ως προς x εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή της μεταβλητής y. Με άλλα λόγια, η σταθερά c είναι συνάρτηση της y και άρα καταλήγουμε στον τύπο

$$u(x,y) = f(y)$$

για την λύση της $u_x = 0$.
Αποδείξαμε ότι κάθε λύση της $u_x = 0$ έχει τύπο $u(x,y) = f(y)$, όπου f είναι συνάρτηση του y.
Αντιστρόφως, έστω συνάρτηση με τύπο $u(x,y) = f(y)$, όπου f είναι συνάρτηση του y. Τότε, προφανώς,

$$u_x(x,y) = 0$$

διότι η $f(y)$ είναι σταθερή ως προς τη μεταβλητή x.
Άρα οι λύσεις της $u_x = 0$ περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x,y) = f(y) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής.
Υπάρχει, φυσικά, ένας αυτονόητος περιορισμός για την συνάρτηση f. Πρέπει η f να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ διότι έχουμε αποδεχθεί ότι η οποιαδήποτε λύση $u(x,y)$ πρέπει να είναι συνεχής και να έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $u_x(x,y), u_y(x,y)$. Επειδή η $u(x,y) = f(y)$ έχει $u_y(x,y) = f'(y)$, πρέπει η f να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αυτός είναι ο μοναδικός περιορισμός για την f.

Παράδειγμα 1.3.2. Με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$ δύο μεταβλητών θεωρούμε την μ.δ.ε.

$$u_y = 0.$$

Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι οι λύσεις της $u_y = 0$ περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x,y) = f(x) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.3.3. Με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$ δύο μεταβλητών θεωρούμε την μ.δ.ε.

$$u_{xx} = 0.$$

Όπως στο πρώτο παράδειγμα, ολοκληρώνουμε δύο φορές την εξίσωση ως προς x προσέχοντας ότι οι δύο διαδοχικές σταθερές που θα προκύψουν μετά από τις δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις είναι μεν ανεξάρτητες του x αλλά εξαρτώνται από το y, οπότε πρέπει να τις θεωρήσουμε συναρτήσεις του y.
Αν, λοιπόν, η $u(x,y)$ είναι λύση της εξίσωσης, έχουμε διαδοχικά:

$$u_{xx}(x,y) = 0$$

$$u_x(x,y) = \int 0\,dx = f(y)$$

$$u(x,y) = \int f(y)\,dx = f(y)x + g(y).$$

Αντιστρόφως, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, και η u έχει τύπο $u(x,y) = f(y)x + g(y)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$u_x(x,y) = f(y)$$

$$u_{xx}(x,y) = 0.$$

Άρα οι λύσεις της $u_{xx} = 0$ περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x,y) = f(y)x + g(y) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f, g είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής.
Ο αυτονόητος περιορισμός για τις f, g είναι ότι πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, διότι $u_y(x,y) = f'(y)x + g'(y)$.

Παράδειγμα 1.3.4. Με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$ δύο μεταβλητών θεωρούμε την μ.δ.ε.

$$u_{xy} = 0.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ολοκληρώνουμε δύο φορές την εξίσωση, πρώτα ως προς y και μετά ως προς x προσέχοντας ότι οι δύο διαδοχικές σταθερές που θα προκύψουν μετά από τις δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις είναι μεν ανεξάρτητες της μεταβλητής ολοκλήρωσης αλλά εξαρτώνται από την άλλη μεταβλητή.
Αν, λοιπόν, η $u(x,y)$ είναι λύση της εξίσωσης, έχουμε διαδοχικά:

$$u_{xy}(x,y) = 0$$

$$u_x(x,y) = \int 0\, dy = h(x)$$

$$u(x,y) = \int h(x)\, dx = f(x) + g(y),$$

όπου f είναι μία από τις αντιπαραγώγους της h.
Αντιστρόφως, αν f, g είναι δυο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, και η u έχει τύπο $u(x,y) = f(x) + g(y)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$u_x(x,y) = f'(x)$$

$$u_{xy}(x,y) = 0.$$

Άρα οι λύσεις της $u_{xy} = 0$ περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x,y) = f(x) + g(y) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f, g είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής.
Ο αυτονόητος περιορισμός για τις f, g είναι ότι πρέπει να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, διότι $u_x(x,y) = f'(x)$, $u_y(x,y) = g'(y)$, $u_{xx}(x,y) = f''(x)$, $u_{yy}(x,y) = g''(y)$ και $u_{xy}(x,y) = 0$.

Παράδειγμα 1.3.5. Με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$ δύο μεταβλητών θεωρούμε την μ.δ.ε.

$$u_{xx} + u = 0.$$

Θυμόμαστε από τη στοιχειώδη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων ότι η γενική λύση της

$$\phi''(x) + \phi(x) = 0$$

δίνεται από τον τύπο

$$\phi(x) = a\cos x + b\sin x,$$

όπου a, b είναι αυθαίρετες σταθερές.
Θεωρώντας το y προσωρινά σταθερό και υποθέτοντας ότι η $u(x,y)$ είναι λύση της $u_{xx} + u = 0$ με μεταβλητή x, βρίσκουμε ότι ισχύει $u(x,y) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιες σταθερές a, b. Όμως, οι

a, b είναι σταθερές ως προς τη μεταβλητή x και όχι απαραίτητα ως προς τη μεταβλητή y. Άρα οι a, b είναι συναρτήσεις του y. Επομένως, έχουμε διαδοχικά

$$u_{xx}(x, y) + u(x, y) = 0$$

$$u(x, y) = f(y)\cos x + g(y)\sin x.$$

Αντιστρόφως, αν f, g είναι δυο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, και η u έχει τύπο $u(x, y) = f(y)\cos x + g(y)\sin x$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$u_x(x, y) = -f(y)\sin x + g(y)\cos x$$

$$u_{xx}(x, y) = -f(y)\cos x - g(y)\sin x = -u(x, y).$$

Άρα οι λύσεις της $u_{xx} + u = 0$ περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x, y) = f(y)\cos x + g(y)\sin x \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f, g είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής.
Ο μοναδικός περιορισμός για τις f, g είναι ότι πρέπει να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, διότι $u_x(x, y) = -f(y)\sin x + g(y)\cos x$, $u_y(x, y) = f'(y)\cos x + g'(y)\sin x$, $u_{xx}(x, y) = -f(y)\cos x - g(y)\sin x$, $u_{yy}(x, y) = f''(y)\cos x + g''(y)\sin x$ και $u_{xy}(x, y) = -f'(y)\sin x + g'(y)\cos x$.

Ασκήσεις.

1.3.1. Λύστε τις παρακάτω μ.δ.ε. με άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$.

α. $uu_{xy} + u_x u_y = 0$.

β. $uu_{xy} - u_x u_y = 0$.

1.3.2. Λύστε την $3u_y + u_{xy} = 0$ με άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$.

Κεφάλαιο 2

Μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

2.1 Γραμμικές μ.δ.ε. πρώτης τάξης.

Θα μελετήσουμε τις γραμμικές μ.δ.ε. πρώτης τάξης μέσω χαρακτηριστικών παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2.1.1. Θεωρούμε μια πολύ απλή μ.δ.ε. πρώτης τάξης, την λεγόμενη *εξίσωση μεταφοράς*:

$$au_x + bu_y = 0 \tag{2.1}$$

με άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ δύο μεταβλητών και σταθερές a, b. Υποθέτουμε ότι $(a, b) \neq (0, 0)$ ώστε η (2.1) να έχει μη-τετριμμένη υπόσταση.
Είναι πολύ εύκολο να δει κάποιος ότι ο τελεστής $\mathcal{L}(u) = au_x + bu_y$ είναι γραμμικός, οπότε η μ.δ.ε. είναι γραμμική και ομογενής.
Θα επιλύσουμε την εξίσωση με δύο τρόπους, ίδιους ουσιαστικά.
Επίλυση με τη μέθοδο των ισοσταθμικών καμπυλών.
Υποθέτουμε ότι η $u(x, y)$ είναι λύση της (2.1), δηλαδή ότι ισχύει

$$au_x(x, y) + bu_y(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

για κάθε (x, y) σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και θα βρούμε τον τύπο της u καθώς και το μεγαλύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο ορίζεται η λύση u και στο οποίο η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους u_x, u_y.
Θεωρούμε τυχόντα αριθμό c και την αντίστοιχη ισοσταθμική καμπύλη

$$\sigma_c = \{(x, y) \,|\, u(x, y) = c\}$$

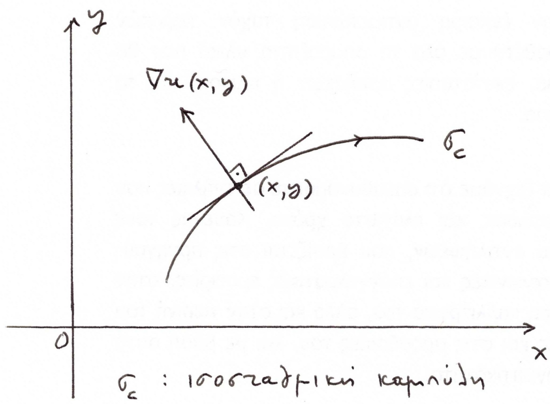
της u.
Γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό ότι σε κάθε σημείο (x, y) της σ_c το διάνυσμα

$$\nabla u(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))$$

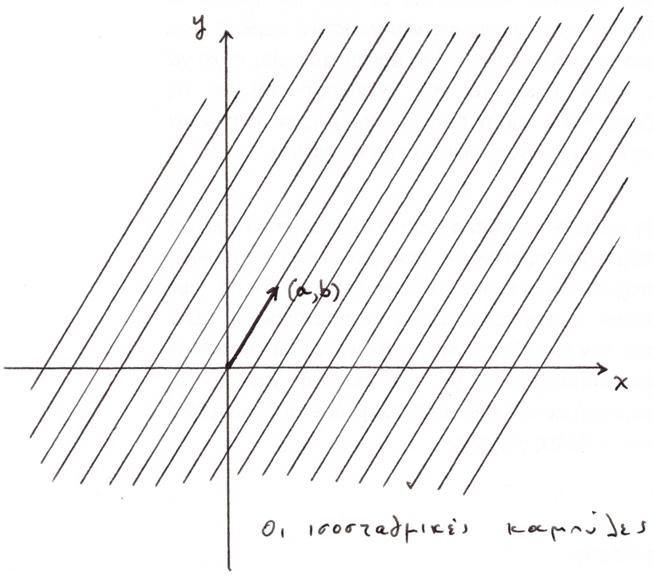
είναι κάθετο στην καμπύλη σ_c, δηλαδή κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης σ' αυτό το σημείο (x, y).
Τώρα παρατηρούμε ότι η ισότητα (2.2) γράφεται ισοδύναμα

$$(a, b) \cdot \nabla u(x, y) = 0$$

που σημαίνει ότι το διάνυσμα (a, b) είναι κάθετο στο $\nabla u(x, y)$.
Δηλαδή σε κάθε σημείο (x, y) της σ_c το (a, b) είναι παράλληλο με το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο ίδιο σημείο. Με άλλα λόγια, όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της σ_c είναι παράλληλα με το σταθερό διάνυσμα (a, b) και συμπεραίνουμε ότι η ισοσταθμική καμπύλη σ_c είναι ευθεία παράλληλη με το διάνυσμα (a, b).



Μια οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη με το διάνυσμα (a, b) έχει καρτεσιανή εξίσωση $bx - ay = k$, όπου k είναι μια σταθερά. Η τιμή της σταθεράς k καθορίζει μονοσήμαντα την αντίστοιχη ευθεία: όταν μεταβάλλεται το k μεταβάλλεται και η αντίστοιχη ευθεία, οι ευθείες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του k είναι διαφορετικές αλλά παράλληλες και όταν το k διατρέχει τους πραγματικούς οι αντίστοιχη ευθεία σαρώνει το xy-επίπεδο.



Ξαναγυρνώντας στην u, αποδείξαμε ότι η ισοσταθμική καμπύλη σ_c της u είναι κάποια ευθεία με εξίσωση $bx - ay = k$. Δηλαδή, στα σημεία (x, y) της ευθείας με εξίσωση $bx - ay = k$ η u έχει σταθερή τιμή $u(x, y) = c$. Φυσικά, αν αλλάξουμε την ευθεία, δηλαδή αν αλλάξουμε την τιμή του k, η u θα έχει μια σταθερή τιμή $u(x, y) = c$ πάνω στην νέα ευθεία, αλλά αυτή η σταθερή τιμή c δεν είναι απαραίτητα ίδια με την σταθερή τιμή c της u στην προηγούμενη ευθεία. Επομένως, η σταθερή τιμή $u(x, y) = c$ πάνω στην ευθεία με εξίσωση $bx - ay = k$ εξαρτάται από την ευθεία, δηλαδή από την παράμετρο k. Άρα η τιμή c είναι συνάρτηση της παραμέτρου k και αυτό το γράφουμε, φυσικά, $c = f(k)$.
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση f μίας μεταβλητής έτσι ώστε να ισχύει

$$u(x, y) = c = f(k) \qquad \text{όταν } bx - ay = k$$

Ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f(bx - ay). \tag{2.3}$$

Αντιστρόφως, έστω συνάρτηση f μίας μεταβλητής και έστω η συνάρτηση u που ορίζεται με τον τύπο (2.3) για κάθε (x, y). Τότε

$$au_x(x, y) + bu_y(x, y) = abf'(bx - ay) - baf'(bx - ay) = 0$$

και άρα η u είναι λύση της (2.1).
Άρα οι λύσεις της (2.1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x,y) = f(bx - ay) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής.
Ο μοναδικός περιορισμός για την f είναι ότι πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι $u_x(x,y) = bf'(bx - ay)$ και $u_y(x,y) = -af'(bx - ay)$.
Για παράδειγμα, παίρνοντας την $f(t) = e^t$ έχουμε ότι η $u(x,y) = e^{bx-ay}$ είναι λύση της (2.1) στο $\mathbb{R}^2$. Παίρνοντας την $f(t) = \cos t$ έχουμε ότι η $u(x,y) = \cos(bx - ay)$ είναι κι αυτή λύση της (2.1) στο $\mathbb{R}^2$.

Επίλυση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

Θεωρούμε πάλι την εξίσωσή μας

$$au_x(x,y) + bu_y(x,y) = 0 \tag{2.4}$$

με $(a,b) \neq (0,0)$ και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε μια **χαρακτηριστική καμπύλη** της εξίσωσης, δηλαδή μια καμπύλη $\vec{\sigma}(s) = (x(s), y(s))$ στο xy-επίπεδο με την εξής ιδιότητα: σε κάθε σημείο της καμπύλης το εφαπτόμενο διάνυσμά της να ισούται με το διάνυσμα (a,b) των συντελεστών των u_x και u_y της εξίσωσης. Δηλαδή θέλουμε να ισχύει

$$\vec{\sigma}'(s) = (x'(s), y'(s)) = (a,b)$$

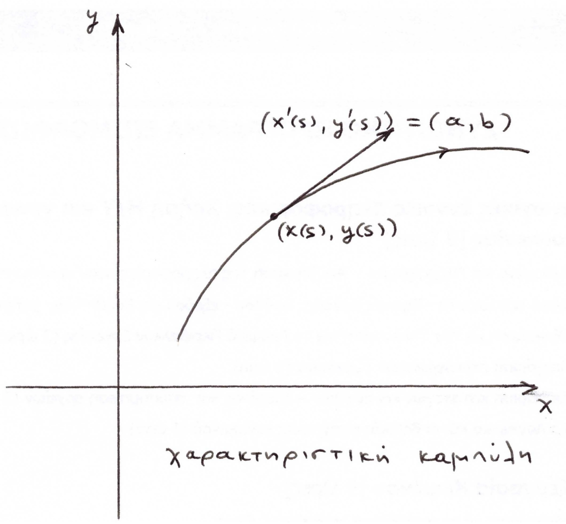
για κάθε s στο παραμετρικό διάστημα της καμπύλης. Αυτό γράφεται

$$\begin{cases} x'(s) = a \\ y'(s) = b \end{cases} \tag{2.5}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x(s) = as + c_1 \\ y(s) = bs + c_2 \end{cases} \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

όπου c_1, c_2 είναι δυο σταθερές.



Άρα η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης γράφεται

$$\vec{\sigma}(s) = (as + c_1, bs + c_2) = (a,b)s + (c_1, c_2) \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

οπότε η καμπύλη είναι η ευθεία η οποία είναι παράλληλη στο διάνυσμα (a,b) και διέρχεται από το σημείο (c_1, c_2) όταν $s = 0$.

Για να βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης απαλείφουμε την παράμετρο s από την παραμετρική εξίσωση. (Εδώ προσέξτε λίγο διότι τον συλλογισμό που θα αναπτύξουμε θα τον συναντήσουμε και παρακάτω σε άλλες περιπτώσεις.) Επειδή ένα από τα a, b είναι $\neq 0$, υποθέτουμε ότι $a \neq 0$ και λύνουμε την $x(s) = as + c_1$ ως προς s. Βρίσκουμε ότι $s(x) = \frac{1}{a}x - \frac{c_1}{a}$. (Η $s(x)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $x(s)$.) Αντικαθιστούμε το s με το $s(x)$ στην $y = bs + c_2$ (δηλαδή θεωρούμε τη σύνθεση των συναρτήσεων $y(s)$ και $s(x)$) και βρίσκουμε

$$y = y(x) = \frac{b}{a}x + \frac{ac_2 - bc_1}{a} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

ή, ισοδύναμα,

$$bx - ay = bc_1 - ac_2 = k,$$

όπου k είναι μια σταθερά.
Αν $a = 0$, τότε είναι $b \neq 0$, οπότε λύνουμε την $y(s) = bs + c_2$ ως προς s. Βρίσκουμε $s(y) = \frac{1}{b}y - \frac{c_2}{b}$. (Η $s(y)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y(s)$.) Αντικαθιστούμε το s με το $s(y)$ στην $x = as + c_1$ (δηλαδή θεωρούμε τη σύνθεση των συναρτήσεων $x(s)$ και $s(y)$) και βρίσκουμε

$$x = x(y) = \frac{a}{b}y + \frac{bc_1 - ac_2}{b} \qquad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

ή, ισοδύναμα,

$$bx - ay = bc_1 - ac_2 = k,$$

όπου k είναι μια σταθερά.
Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στην ίδια καρτεσιανή εξίσωση ευθείας $bx - ay = k$ ή σε μια έκφραση της ευθείας ως γραφικής παράστασης είτε της μεταβλητής y ως συνάρτησης $y(x)$ της μεταβλητής x είτε της μεταβλητής x ως συνάρτησης $x(y)$ της μεταβλητής y. (Οι συναρτήσεις $y(x)$ και $x(y)$ είναι αντίστροφες όταν ορίζονται ταυτόχρονα και οι δύο, δηλαδή όταν $a \neq 0$ και $b \neq 0$.)
Ας δούμε τώρα σε τί χρησιμεύουν οι χαρακτηριστικές καμπύλες στην επίλυση της μ.δ.ε. (2.4).
Θεωρούμε ότι η $u(x, y)$ είναι οποιαδήποτε λύση της μ.δ.ε. και θέλουμε να βρούμε τον τύπο της. Αυτό θα το πετύχουμε μελετώντας τη συμπεριφορά της u στα σημεία μιας τυχούσας χαρακτηριστικής καμπύλης της μ.δ.ε.
Θεωρούμε την παραμετρική εξίσωση (2.6) της καμπύλης με σταθερές c_1, c_2 (οι οποίες καθορίζουν την καμπύλη) και τότε οι τιμές της u στα σημεία της καμπύλης γράφονται $u(x(s), y(s)) = u(as + c_1, bs + c_2)$ για $s \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) &= x'(s)u_x(x(s), y(s)) + y'(s)u_y(x(s), y(s)) \\ &= au_x(x(s), y(s)) + bu_y(x(s), y(s)) = 0 \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

επειδή η u είναι λύση της (2.4).
Άρα η $u(x(s), y(s))$ είναι σταθερή συνάρτηση του s και επομένως η $u(x, y)$ είναι σταθερή πάνω στη συγκεκριμένη χαρακτηριστική καμπύλη. Με άλλα λόγια, κάθε χαρακτηριστική καμπύλη της μ.δ.ε. είναι ισοσταθμική καμπύλη της οποιασδήποτε λύσης $u(x, y)$ της μ.δ.ε.
Αυτό το διαπιστώνουμε χρησιμοποιώντας και την αναπαράσταση της χαρακτηριστικής καμπύλης είτε ως γράφημα της $y(x)$ είτε ως γράφημα της $x(y)$. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε την (2.7) και την εξ αυτής σχέση $y'(x) = \frac{b}{a}$ παίρνουμε για τις τιμές $u(x, y(x))$ στα σημεία $(x, y(x))$ της καμπύλης ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u(x, y(x)) &= u_x(x, y(x)) + y'(x)u_y(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) + \frac{b}{a}u_y(x, y(x)) \\ &= \frac{1}{a}\Big(au_x(x, y(x)) + bu_y(x, y(x))\Big) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ομοίως, αν χρησιμοποιήσουμε την (2.8) και την εξ αυτής σχέση $x'(y) = \frac{a}{b}$ παίρνουμε για τις τιμές $u(x(y), y)$ στα σημεία $(x(y), y)$ της καμπύλης ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}u(x(y), y) &= x'(y)u_x(x(y), y) + u_y(x(y), y) = \frac{a}{b}u_x(x, y(x)) + u_y(x, y(x))\\ &= \frac{1}{b}\Big(au_x(x, y(x)) + bu_y(x, y(x))\Big) = 0 \qquad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι η u είναι σταθερή πάνω στη χαρακτηριστική καμπύλη.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με τη μέθοδο των ισοσταθμικών καμπυλών: οι ισοσταθμικές καμπύλες της οποιασδήποτε λύσης u της μ.δ.ε. είναι οι ευθείες με καρτεσιανές εξισώσεις $bx - ay = k$. Μόνο που τώρα αυτές οι ευθείες ονομάζονται και χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. Θα δούμε σε επόμενα παραδείγματα άλλων μ.δ.ε. ότι η έννοια της χαρακτηριστικής καμπύλης δεν ταυτίζεται πάντοτε με την έννοια της ισοσταθμικής καμπύλης και ότι είναι εν γένει πιο χρήσιμη έννοια από την έννοια της ισοσταθμικής καμπύλης.
Στην περίπτωση που εξετάζουμε τώρα και στο σημείο που φτάσαμε, δηλαδή που αποδείξαμε ότι η u είναι σταθερή $u(x, y) = c$ πάνω στην οποιαδήποτε χαρακτηριστική καμπύλη $bx - ay = k$, συνεχίζουμε όπως με τη μέθοδο των ισοσταθμικών καμπυλών. Σκεφτόμαστε ότι η τιμή c είναι συνάρτηση της τιμής του k, έστω $c = f(k)$ και γράφουμε

$$u(x, y) = c = f(k) \qquad \text{όταν } bx - ay = k$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f(bx - ay).$$

Αποδεικνύουμε και το αντίστροφο: δηλαδή ότι, για κάθε συνάρτηση f μίας μεταβλητής, η συνάρτηση u που ορίζεται με τον τύπο $u(x, y) = f(bx - ay)$ είναι λύση της (2.4). Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της (2.4) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x, y) = f(bx - ay) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής. Και πάλι, ο μοναδικός περιορισμός για την f είναι ότι πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Το πρόβλημα αρχικής συνθήκης ή πρόβλημα Cauchy.

Εκτός από το πρόβλημα της επίλυσης της μ.δ.ε. (2.1) ή (2.4), πολλές φορές συναντάμε και μία επιπρόσθετη **αρχική συνθήκη**. Δίνεται μία καμπύλη γ η οποία τέμνει κάθε χαρακτηριστική καμπύλη της μ.δ.ε. σε ακριβώς ένα σημείο. Δίνεται, επίσης, και μία πραγματική συνάρτηση g ορισμένη στα σημεία της γ και επιδιώκουμε να βρούμε λύση της μ.δ.ε. η οποία να ταυτίζεται με τη δοσμένη g στα σημεία της δοσμένης γ. Δηλαδή, έχουμε το **πρόβλημα αρχικής συνθήκης**

$$\begin{cases} au_x + bu_y = 0 \\ u(x, y) = g(x, y) \quad \text{για κάθε } (x, y) \text{ στην } \gamma \end{cases} \tag{2.9}$$

Η ιδέα είναι η εξής. Γνωρίζουμε ότι η λύση u της μ.δ.ε. είναι σταθερή σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη. Αν υπολογίσουμε την αντίστοιχη σταθερή τιμή της u σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη, τότε θα έχουμε βρεί τις τιμές της u σε όλες τις χαρακτηριστικές καμπύλες και, επειδή οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι παράλληλες ευθείες οι οποίες καλύπτουν ολόκληρο το xy-επίπεδο, θα έχουμε βρει τις τιμές της u σε ολόκληρο το xy-επίπεδο, δηλαδή θα έχουμε προσδιορίσει την u. Τώρα, για να υπολογίσουμε την αντίστοιχη σταθερή τιμή της u σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη, αρκεί, προφανώς, να υπολογίσουμε την τιμή της u σε *ένα* σημείο κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης. Αυτό, όμως, μας το εξασφαλίζει η δοσμένη αρχική συνθήκη! Διότι παίρνουμε μια τυχαία χαρακτηριστική καμπύλη, βρίσκουμε το μοναδικό κοινό σημείο της (x, y) με τη δοσμένη καμπύλη γ, βρίσκουμε την τιμή $g(x, y)$ της δοσμένης g σ' αυτό το σημείο της γ και έχουμε την τιμή της u σ' αυτό το σημείο: $u(x, y) = g(x, y)$.

Άρα είναι αναμενόμενο να υπάρχει μοναδική λύση u του προβλήματος αρχικής συνθήκης (2.9).
Ας δούμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα.
Υποθέτουμε ότι $b \neq 0$, οπότε οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι παράλληλες ευθείες οι οποίες τέμνουν τον x-άξονα σε ένα μόνο σημείο. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ως δοσμένη καμπύλη γ τον x-άξονα και θα πάρουμε και μια δοσμένη συνάρτηση g ορισμένη στα σημεία του x-άξονα. Αντί να γράφουμε $g(x, 0)$ θα γράφουμε, φυσικά, $g(x)$ για τις τιμές της g στα σημεία του x-άξονα και άρα το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικής συνθήκης διατυπώνεται

$$\begin{cases} au_x + bu_y = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.10}$$

Όπως έχουμε αποδείξει, το ότι η u ικανοποιεί την μ.δ.ε. ισοδυναμεί με το ότι υπάρχει συνάρτηση f μίας μεταβλητής συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε η u να δίνεται από τον τύπο

$$u(x, y) = f(bx - ay) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Θα συνδυάσουμε τον τύπο της u μέσω της "αόριστης" συνάρτησης f με την αρχική συνθήκη με την δοσμένη συνάρτηση g, θα προσδιορίσουμε την f και έτσι θα προσδιορίσουμε την u.
Από τον τύπο της u έχουμε ότι ισχύει

$$u(x, 0) = f(bx) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε λόγω της αρχικής συνθήκης έχουμε ότι ισχύει

$$f(bx) = g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) = g\Big(\frac{x}{b}\Big) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και καταλήγουμε στο ότι η λύση του προβλήματος (2.10) έχει τύπο

$$u(x, y) = g\Big(\frac{bx - ay}{b}\Big) = g\Big(x - \frac{a}{b}y\Big) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

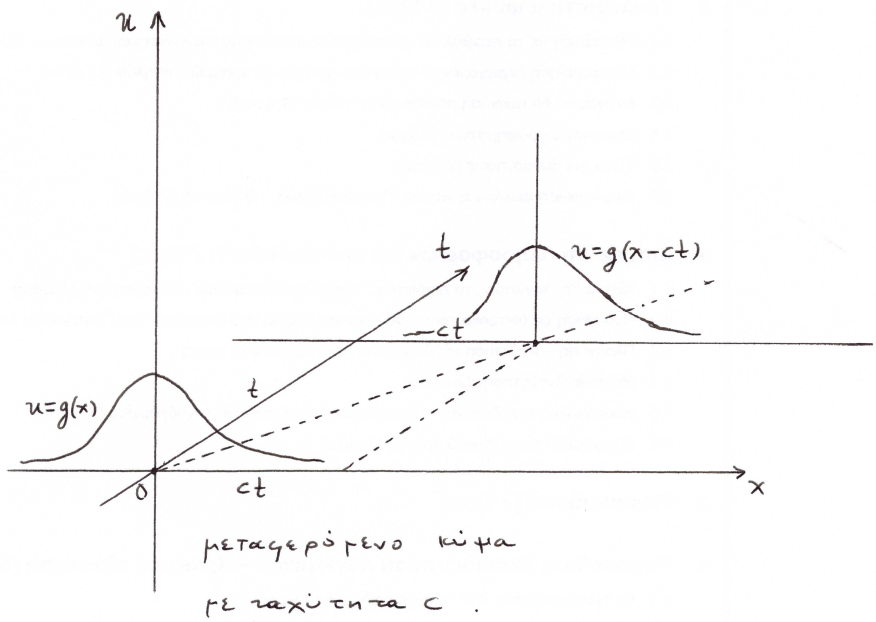
Επειδή η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και επειδή πρέπει να ισχύει $f(bx) = g(x)$ για κάθε x, ο μοναδικός περιορισμός πάνω στη δοσμένη συνάρτηση g είναι ότι αυτή πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Για να δούμε το *γεωμετρικό νόημα* του προβλήματος αρχικής συνθήκης (2.10), διαιρούμε την μ.δ.ε. με τον αριθμό $b \neq 0$ και θέτουμε $c = \frac{a}{b}$. Επίσης, αλλάζουμε το σύμβολο y σε t ώστε να του αποδώσουμε το περιεχόμενο του *μεταβαλλόμενου χρόνου*. Τότε το (2.10) γράφεται

$$\begin{cases} cu_x + u_t = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Είδαμε ότι η λύση έχει τύπο

$$u(x, t) = g(x - ct) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Άρα, αν η συνάρτηση u έχει τύπο $u(x, 0) = g(x)$ την χρονική στιγμή $t = 0$, τότε έχει τύπο $u(x, t) = g(x - ct)$ την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t. Δηλαδή, η αρχική g μεταφέρεται κατά ct καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος t. Με άλλα λόγια, η αρχική g μεταφέρεται με ταχύτητα c καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος. Έτσι διαμορφώνουμε την απλοϊκή εικόνα ενός κύματος το οποίο ταξιδεύει με ταχύτητα c.
Θα μιλήσουμε για το *φυσικό νόημα* του προβλήματος αρχικής συνθήκης (2.10) αργότερα όταν θα μιλήσουμε λίγο γενικότερα για τα *προβλήματα διατήρησης* στη φυσική.



Πριν προχωρήσουμε σε επόμενα παραδείγματα, ας μιλήσουμε λίγο πιο γενικά.

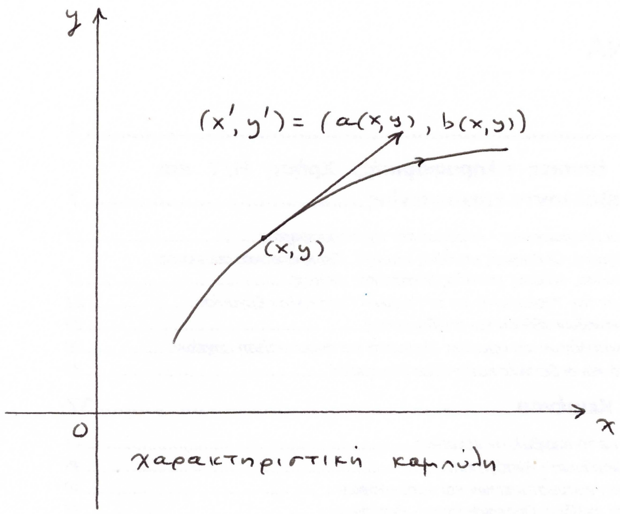
Η γενική μορφή της γραμμικής μ.δ.ε. πρώτης τάξης είναι η

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y).$$

Οι συναρτήσεις $a(x,y), b(x,y), c(x,y), d(x,y)$ θεωρούνται ορισμένες και συνεχείς σε κάποιο υποσύνολο Ω του xy-επιπέδου και σε κάθε σημείο του Ω μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις a, b δεν μηδενίζεται:

$$(a(x,y), b(x,y)) \neq (0,0) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \Omega.$$

Η δε λύση $u(x,y)$ υποτίθεται ότι είναι συνεχής και ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης $u_x(x,y), u_y(x,y)$ στο Ω.



Όταν λέμε ότι μία καμπύλη σ είναι **χαρακτηριστική καμπύλη** της μ.δ.ε. εννοούμε ότι περιέχεται στο Ω και ότι σε κάθε σημείο της (x,y) το εφαπτόμενο διάνυσμά της ταυτίζεται με το διάνυσμα $(a(x,y), b(x,y))$ στο ίδιο σημείο. Αν, λοιπόν, $\vec{\sigma}(s) = (x(s), y(s))$ είναι η παραμετρική εξίσωση της χαρακτηριστικής καμπύλης με την παράμετρο s να μεταβάλλεται σε κάποιο παραμετρικό διάστημα I, τότε ισχύει

$$(x'(s), y'(s)) = \Big(a(x(s), y(s)), b(x(s), y(s))\Big) \qquad \text{για κάθε } s \in I$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x'(s) = a(x(s), y(s)) \\ y'(s) = b(x(s), y(s)) \end{cases} \qquad \text{για κάθε } s \in I. \tag{2.11}$$

Επομένως, το να βρούμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. ισοδυναμεί με το να λύσουμε το σύστημα (2.11) δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με δύο άγνωστες συναρτήσεις $x(s), y(s)$. Μερικές φορές το σύστημα αυτό είναι σχετικά εύκολο να λυθεί. Για παράδειγμα, μπορεί η μία εξίσωση να εμπλέκει μόνο τη μία άγνωστη συνάρτηση και η άλλη εξίσωση μόνο την άλλη άγνωστη συνάρτηση. Μια τέτοια περίπτωση ήταν το σύστημα (2.5) στην επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς $au_x + bu_y = 0$. Πολλές φορές, όμως, αυτό δεν είναι εφικτό αλλά υπάρχει μία μέθοδος να μετατρέψουμε το σύστημα (2.11) σε μία μόνο διαφορική εξίσωση.

Ας υποθέσουμε για απλούστευση ότι ισχύει $a(x, y) \neq 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$. Τότε από την πρώτη εξίσωση του (2.11) συνεπάγεται ότι ισχύει $x'(s) \neq 0$ για κάθε $s \in I$ και αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $x(s)$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα I. Άρα η (συνεχής) $x(s)$ είναι γνησίως μονότονη στο I και, επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $s(x)$ στο διάστημα J, όπου J είναι το σύνολο τιμών της $x(s)$. Μάλιστα, η συνάρτηση $x(s)$ και η αντίστροφη συνάρτηση $s(x)$ έχουν παραγώγους που σχετίζονται μέσω της

$$\frac{ds}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{ds}.$$

Τώρα θεωρούμε την μεταβλητή s ως συνάρτηση $s(x)$ της μεταβλητής $x \in J$ και την αντικαθιστούμε στην συνάρτηση $y(s)$, θεωρώντας τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων. Έτσι η μεταβλητή y γίνεται συνάρτηση $y(s(x))$ της μεταβλητής $x \in J$. Τότε από τις ισότητες

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \qquad \frac{dy}{ds} = b(x, y)$$

της (2.11) βρίσκουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Με άλλα λόγια αντικαθιστούμε την αρχική παράμετρο $s \in I$ της χαρακτηριστικής καμπύλης με την παράμετρο $x \in J$ και η παραμετρική εξίσωσή της γράφεται

$$(x, y(x)) \qquad x \in J.$$

Το δε σύστημα (2.11) μετατρέπεται στην εξίσωση

$$y'(x) = \frac{b(x, y(x))}{a(x, y(x))} \qquad \text{για κάθε } x \in J. \tag{2.12}$$

Επομένως το να βρούμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. ισοδυναμεί με το να λύσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (2.12) με άγνωστη συνάρτηση την $y(x)$.

Αν δεν ισχύει $a(x, y) \neq 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$ και ισχύει $b(x, y) \neq 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$, τότε με τα ίδια "συμμετρικά" επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ως παράμετρο κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης τη μεταβλητή y και η παραμετρική εξίσωσή της γράφεται

$$(x(y), y) \qquad y \in J$$

το δε σύστημα (2.11) μετατρέπεται στην εξίσωση

$$x'(y) = \frac{a(x(y), y)}{b(x(y), y)} \qquad \text{για κάθε } y \in J. \tag{2.13}$$

Επομένως, το να βρούμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. ισοδυναμεί με το να λύσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (2.13) με άγνωστη συνάρτηση την $x(y)$.

Τέλος, αν δεν ισχύει $a(x,y) \neq 0$ για κάθε $(x,y) \in \Omega$ ούτε $b(x,y) \neq 0$ για κάθε $(x,y) \in \Omega$, τότε ισχύει $a(x,y) \neq 0$ για κάποια $(x,y) \in \Omega$ και $b(x,y) \neq 0$ για τα υπόλοιπα $(x,y) \in \Omega$, οπότε συνδυάζουμε τις δύο μεθόδους: σε κάποιο μέρος του Ω βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες χρησιμοποιώντας ως παράμετρο τη μεταβλητή x και σε κάποιο άλλο μέρος του Ω βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες χρησιμοποιώντας ως παράμετρο τη μεταβλητή y. Τα δύο αυτά μέρη του Ω καλύπτουν ολόκληρο το Ω, οπότε βρίσκουμε όλες τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε.

Στο παράδειγμα με την μ.δ.ε. $au_x + bu_y = 0$ χρησιμοποιήσαμε όλες αυτές τις μεθόδους: με την "τρίτη" παράμετρο s καθώς και με τις παραμέτρους x και y.

Τώρα, αφού έχουμε βρει τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. σε οποιαδήποτε από τις τρεις μορφές $(x(s), y(s))$ ή $(x, y(x))$ ή $(x(y), y)$ μελετάμε την οποιαδήποτε λύση $u(x,y)$ στα σημεία της χαρακτηριστικής καμπύλης: $u(x(s), y(s))$ ή $u(x, y(x))$ ή $u(x(y), y)$.

Με τη μορφή $(x(s), y(s))$ της χαρακτηριστικής καμπύλης και χρησιμοποιώντας το (2.11) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}u(x(s), y(s)) &= x'(s)u_x(x(s), y(s)) + y'(s)u_y(x(s), y(s)) \\
&= a(x(s), y(s))u_x(x(s), y(s)) + b(x(s), y(s))u_y(x(s), y(s)) \\
&= -c(x(s), y(s))u(x(s), y(s)) - d(x(s), y(s)) \qquad \text{για κάθε } s \in I.
\end{aligned}$$

Θέτουμε για απλούστευση $h(s) = u(x(s), y(s))$, $\phi(s) = c(x(s), y(s))$, $\psi(s) = -d(x(s), y(s))$ και η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$h'(s) + \phi(s)h(s) = \psi(s) \qquad \text{για κάθε } s \in I.$$

Έτσι η συνάρτηση $h(s) = u(x(s), y(s))$, δηλαδή ο περιορισμός της u στα σημεία της χαρακτηριστικής καμπύλης προκύπτει ως λύση της πολύ απλής γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $h' + \phi(s)h = \psi(s)$. Οι συναρτήσεις $\phi(s)$, $\psi(s)$ θεωρούνται γνωστές αφού προκύπτουν από τις γνωστές $c(x,y), d(x,y)$ και από τη γνωστή χαρακτηριστική καμπύλη $(x(s), y(s))$.

Ομοίως, με τη μορφή $(x, y(x))$ της χαρακτηριστικής καμπύλης και χρησιμοποιώντας την (2.12) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}u(x, y(x)) &= u_x(x, y(x)) + y'(x)u_y(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) + \frac{b(x, y(x))}{a(x, y(x))}u_y(x, y(x)) \\
&= \frac{1}{a(x, y(x))}\Big(a(x, y(x))u_x(x, y(x)) + b(x, y(x))u_y(x, y(x))\Big) \\
&= -\frac{c(x, y(x))}{a(x, y(x))}u(x, y(x)) - \frac{d(x, y(x))}{a(x, y(x))} \qquad \text{για κάθε } x \in J.
\end{aligned}$$

Γράφοντας για απλούστευση $h(x) = u(x, y(x))$, $\phi(x) = \frac{c(x,y(x))}{a(x,y(x))}$, $\psi(x) = -\frac{d(x,y(x))}{a(x,y(x))}$, η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$h'(x) + \phi(x)h(x) = \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in J.$$

Έτσι, πάλι, η συνάρτηση $h(x) = u(x, y(x))$, δηλαδή ο περιορισμός της u στα σημεία της χαρακτηριστικής καμπύλης προκύπτει ως λύση της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $h' + \phi(x)h = \psi(x)$. Οι συναρτήσεις $\phi(x)$, $\psi(x)$ θεωρούνται γνωστές αφού προκύπτουν από τις γνωστές $c(x,y), d(x,y)$ και από τη γνωστή χαρακτηριστική καμπύλη $(x, y(x))$.

Τα ίδια προκύπτουν με τη μορφή $(x(y), y)$ της χαρακτηριστικής καμπύλης.

Συνοψίζουμε λοιπόν ως εξής τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών. Βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. και πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη βρίσκουμε τη μορφή της οποιασδήποτε λύσης u. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τη μορφή της λύσης u στο υποσύνολο του xy-επιπέδου το οποίο καλύπτεται από τις χαρακτηριστικές καμπύλες.

Πάμε τώρα στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.2. Θεωρούμε την μ.δ.ε. πρώτης τάξης

$$u_x + yu_y = 0 \tag{2.14}$$

με άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ δύο μεταβλητών.
Είδαμε στο παράδειγμα 1.2.1 ότι ο τελεστής $\mathcal{L}(u) = u_x + yu_y$ είναι γραμμικός, οπότε η μ.δ.ε. είναι γραμμική και ομογενής.
Θα λύσουμε την (2.14) με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

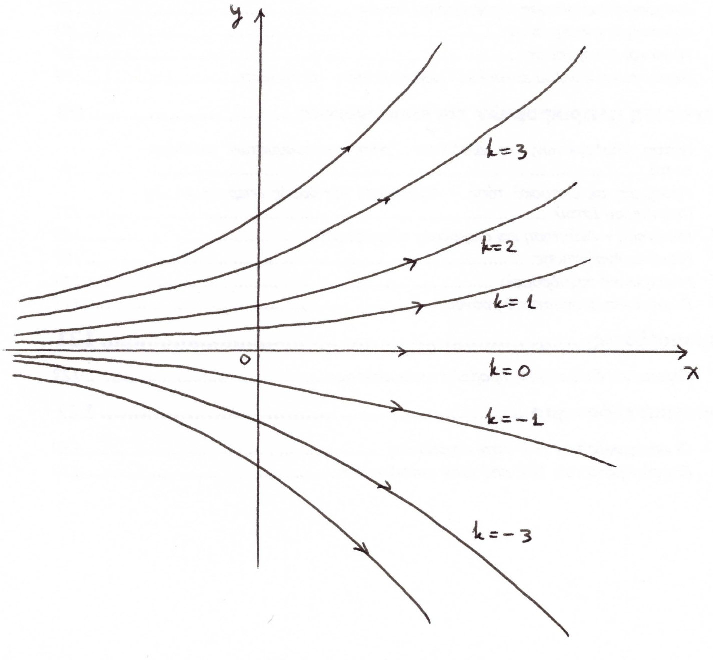
Ο συντελεστής του u_x στην μ.δ.ε. είναι η σταθερή συνάρτηση 1 και είναι $\neq 0$ σε ολόκληρο το xy-επίπεδο, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε χαρακτηριστική καμπύλη έχει παραμετρική εξίσωση $(x, y(x))$ σε κάποιο διάστημα J της μεταβλητής x και τότε πρέπει να ισχύει

$$y'(x) = y(x) \qquad \text{για κάθε } x \in J. \tag{2.15}$$

(Δείτε την προηγούμενη συζήτηση, όπου καταλήξαμε στην $y'(x) = \frac{b(x,y(x))}{a(x,y(x))}$ στην περίπτωση που ισχύει $a(x, y) \neq 0$. Στην παρούσα περίπτωση έχουμε $a(x, y) = 1 \neq 0$ και $b(x, y) = y$.)
Είναι γνωστό από στοιχειώδη μαθήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων ότι οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι οι

$$y(x) = ke^x \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου k είναι αυθαίρετη σταθερά.



Οι χαρακτηριστικές της $u_x + yu_y = 0$

Τα γραφήματα αυτών των λύσεων της (2.15) είναι οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (2.14) και αυτές οι καμπύλες είναι ξένες ανά δύο και καλύπτουν το xy-επίπεδο.
Τώρα σταθεροποιούμε μια από αυτές τις χαρακτηριστικές καμπύλες - δηλαδή σταθεροποιούμε το k - και μελετάμε την συμπεριφορά της οποιασδήποτε λύσης $u(x, y)$ της (2.14) στα σημεία της χαρακτηριστικής καμπύλης. Μελετάμε δηλαδή την $u(x, y(x)) = u(x, ke^x)$ ως συνάρτηση του $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) + y'(x)u_y(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) + y(x)u_y(x, y(x)) = 0.$$

(Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή η u είναι λύση της (2.14).)
Επομένως η $u(x, y(x)) = u(x, ke^x)$ είναι σταθερή συνάρτηση του $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ισχύει

$$u(x, ke^x) = c \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου c είναι κάποια σταθερά ανεξάρτητη του x. Όμως η c εξαρτάται από τη χαρακτηριστική καμπύλη την οποία έχουμε προσωρινά σταθεροποιήσει, δηλαδή εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς k. Άρα $c = f(k)$ για κάποια συνάρτηση f μίας μεταβλητής ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση f μίας μεταβλητής έτσι ώστε να ισχύει

$$u(x, ke^x) = f(k) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f(k) \qquad \text{όταν } y = ke^x$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f(ye^{-x}) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.16}$$

Αντιστρόφως, αν πάρουμε μία συνάρτηση f μίας μεταβλητής, τότε η $u = u(x, y)$ με τύπο (2.16) αποτελεί λύση της (2.14) στο xy-επίπεδο. Πράγματι,

$$u_x(x, y) + yu_y(x, y) = -ye^{-x}f'(ye^{-x}) + ye^{-x}f'(ye^{-x}) = 0$$

για κάθε (x, y).
Άρα ο τύπος (2.16) περιγράφει πλήρως όλες τις λύσεις της (2.14) στο $\mathbb{R}^2$. Ο μόνος περιορισμός για τη συνάρτηση f είναι ότι πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, όπως φάνηκε στον υπολογισμό των $u_x(x, y) = -ye^{-x}f'(ye^{-x})$, $u_y(x, y) = e^{-x}f'(ye^{-x})$.
Τώρα θεωρούμε και μία επιπρόσθετη αρχική συνθήκη. Παίρνουμε μία καμπύλη γ η οποία τέμνει μόνο μία φορά κάθε χαρακτηριστική καμπύλη της (2.14) και μία συνάρτηση g ορισμένη πάνω στην καμπύλη γ και απαιτούμε η λύση u να ταυτίζεται με τη g στα σημεία της γ.
Μια τέτοια καμπύλη γ είναι για παράδειγμα ο y-άξονας και με αυτήν την επιλογή διατυπώνουμε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{cases} u_x + yu_y = 0 \\ u(0, y) = g(y) \end{cases} \tag{2.17}$$

όπου $g(y)$ είναι δοσμένη συνάρτηση μίας μεταβλητής.
Είδαμε ότι η γενική λύση της μ.δ.ε. έχει τύπο $u(x, y) = f(ye^{-x})$ και τώρα πρέπει να προσδιορίσουμε την αόριστη συνάρτηση f μίας μεταβλητής ώστε να ισχύει η αρχική συνθήκη. Η αρχική συνθήκη $u(0, y) = g(y)$ γράφεται $f(ye^{-0}) = g(y)$ δηλαδή $f(y) = g(y)$ για κάθε y. Άρα, δοσμένης της g, η λύση του προβλήματος αρχικής συνθήκης (2.17) έχει τύπο

$$u(x, y) = g(ye^{-x}) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Παράδειγμα 2.1.3. Θεωρούμε τη (μη-ομογενή) γραμμική μ.δ.ε. πρώτης τάξης

$$au_x + bu_y + ku = 0, \tag{2.18}$$

όπου a, b, k είναι σταθερές και $u(x, y)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση.
Υποθέτουμε $a \neq 0$. Η περίπτωση $b \neq 0$ είναι παρόμοια.
Προσδιορίζουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x, y(x))$ μέσω της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) = \frac{b}{a}.$$

Βρίσκουμε

$$y(x) = \frac{b}{a}x + c \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες κλίσης $\frac{b}{a}$. Αυτές είναι παράλληλες ευθείες που καθορίζονται από τις τιμές της c και καλύπτουν το xy-επίπεδο.

Αν πάρουμε μία οποιαδήποτε χαρακτηριστική καμπύλη (δηλαδή μία οποιαδήποτε τιμή της c) και μία οποιαδήποτε λύση $u = u(x, y)$ της (2.18), τότε για την u στα σημεία της καμπύλης ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u(x, y(x)) &= u_x(x, y(x)) + y'(x)u_y(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) + \frac{b}{a}u_y(x, y(x)) \\ &= -\frac{k}{a}u(x, y(x)) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση $h(x) = u(x, y(x))$ ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$h'(x) + \frac{k}{a}h(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και άρα ισχύει

$$u\Big(x, \frac{b}{a}x + c\Big) = u(x, y(x)) = h(x) = Ce^{-\frac{k}{a}x} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου C είναι κάποια σταθερά.
Η τιμή της σταθεράς C εξαρτάται από τη χαρακτηριστική καμπύλη που έχουμε επιλέξει, δηλαδή από την τιμή της σταθεράς c. Επομένως, η C είναι συνάρτηση, έστω $f(c)$, της $c \in \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει συνάρτηση f μίας μεταβλητής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$u\Big(x, \frac{b}{a}x + c\Big) = f(c)e^{-\frac{k}{a}x} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f(c)e^{-\frac{k}{a}x} \qquad \text{όταν } y = \frac{b}{a}x + c$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f\Big(y - \frac{b}{a}x\Big)e^{-\frac{k}{a}x} \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.19}$$

Αντιστρόφως, μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε ότι, για κάθε συνάρτηση f μίας μεταβλητής στο $\mathbb{R}$, η u που δίνεται με τον τύπο (2.19) ικανοποιεί την μ.δ.ε. (2.18). Άρα ο τύπος (2.19) περιγράφει πλήρως όλες τις λύσεις της (2.18). Ο μοναδικός περιορισμός για την f είναι ότι πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού οι u_x, u_y υπολογίζονται μέσω της f ως εξής: $u_x(x, y) = -\frac{b}{a}f'(y - \frac{b}{a})e^{-\frac{k}{a}x} - \frac{k}{a}f(y - \frac{b}{a}x)e^{-\frac{k}{a}x}$ και $u_y(x, y) = f'(y - \frac{b}{a}x)e^{-\frac{k}{a}x}$.

Παράδειγμα 2.1.4. Θεωρούμε την ομογενή γραμμική μ.δ.ε. πρώτης τάξης

$$u_x + 2xy^2u_y = 0 \tag{2.20}$$

με άγνωστη συνάρτηση την $u(x, y)$.
Επειδή ο συντελεστής της u_x είναι $\neq 0$, προσδιορίζουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x, y(x))$ μέσω της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) = 2xy(x)^2. \tag{2.21}$$

Μία λύση της (2.21) είναι η μηδενική συνάρτηση $y(x) = 0$.
Οποιαδήποτε άλλη λύση $y(x)$ της (2.21) δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος ορισμού της J και άρα ισχύει είτε $y(x) > 0$ για κάθε $x \in J$ είτε $y(x) < 0$ για κάθε $x \in J$.
Σε κάθε περίπτωση ισχύει $y(x) \neq 0$ για κάθε $x \in J$ και η (2.21) γράφεται διαδοχικά

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 2x \qquad \text{για κάθε } x \in J$$

$$-\frac{1}{y(x)} = x^2 + c \qquad \text{για κάθε } x \in J,$$

όπου c είναι κάποια σταθερά.
Τώρα, έστω ότι ισχύει $y(x) > 0$ για κάθε $x \in J$. Τότε δεν είναι δυνατό να είναι $c \geq 0$, διότι αυτό συνεπάγεται $y(x) < 0$. Αν $c < 0$, προκύπτουν οι συναρτήσεις

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c} = -\frac{1}{(x - \sqrt{|c|})(x + \sqrt{|c|})} \qquad \text{για κάθε } x \in (-\sqrt{|c|}, \sqrt{|c|}).$$

Τέλος, έστω ότι ισχύει $y(x) < 0$ για κάθε $x \in J$. Αν $c > 0$, τότε προκύπτει η συνάρτηση

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c} \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, +\infty).$$

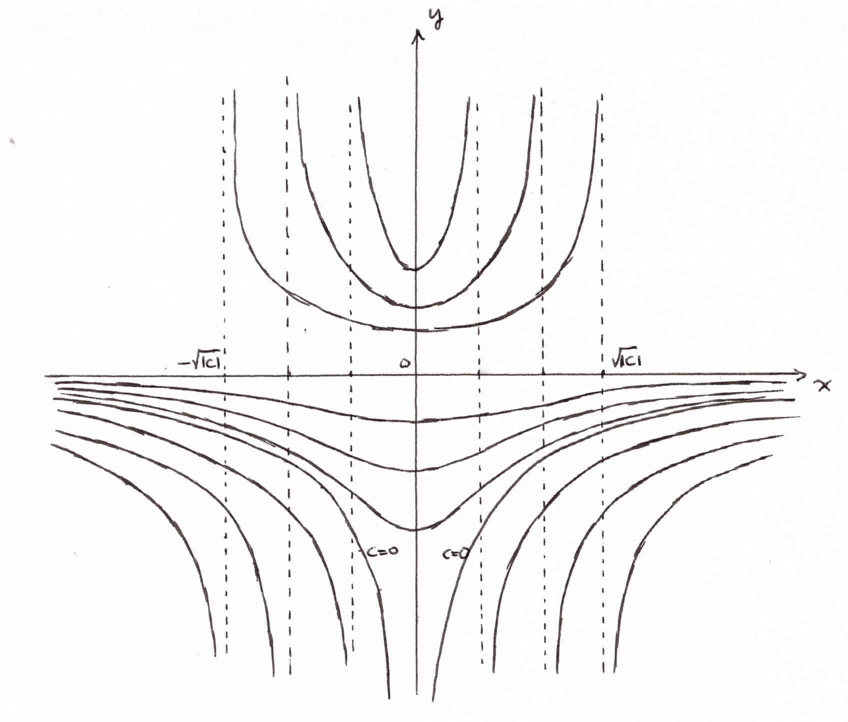
Αν $c = 0$, τότε προκύπτουν οι συναρτήσεις

$$y(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$
$$y(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Αν $c < 0$, τότε προκύπτουν οι συναρτήσεις

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c} = -\frac{1}{(x - \sqrt{|c|})(x + \sqrt{|c|})} \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, -\sqrt{|c|})$$
$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c} = -\frac{1}{(x - \sqrt{|c|})(x + \sqrt{|c|})} \qquad \text{για κάθε } x \in (\sqrt{|c|}, +\infty).$$

Τα γραφήματα όλων αυτών των συναρτήσεων $y(x)$ αποτελούν τις χαρακτηριστικές καμπύλες της (2.20) και αυτές καλύπτουν ολόκληρο το xy-επίπεδο.



Οι χαρακτηριστικές της $u_x + 2xy^2u_y = 0$

Τώρα, έστω οποιαδήποτε λύση $u(x, y)$ της (2.20). Θεωρούμε τις τιμές $u(x, y(x))$ της λύσης σε οποιαδήποτε από τις χαρακτηριστικές καμπύλες και λόγω της (2.21) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}u(x, y(x)) &= u_x(x, y(x)) + y'(x)u_y(x, y(x)) \\ &= u_x(x, y(x)) + 2xy(x)^2u_y(x, y(x)) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε x στο διάστημα J όπου ορίζεται η $y(x)$.
Άρα η u είναι σταθερή πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη: $u(x, y(x)) = k$ για κάθε $x \in J$. Φυσικά το k εξαρτάται από την σταθερά c η οποία προσδιορίζει την χαρακτηριστική καμπύλη, δηλαδή $k = f(c)$ για κάποια συνάρτηση f μιας μεταβλητής.
Ειδικά για την χαρακτηριστική καμπύλη με τύπο $y(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ έχουμε

$$u(x, 0) = k_0 \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, +\infty). \tag{2.22}$$

Για κάθε άλλη χαρακτηριστική καμπύλη με τύπο $y(x) = -\frac{1}{x^2+c}$ για x στο κατάλληλο διάστημα έχουμε ότι ισχύει

$$u\Big(x, -\frac{1}{x^2+c}\Big) = k = f(c)$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f(c) \qquad \text{όταν } y = -\frac{1}{x^2+c}$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = f\Big(-x^2 - \frac{1}{y}\Big) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } y \neq 0. \tag{2.23}$$

Βλέπουμε, επίσης, εύκολα ότι, για τυχούσα f μιας μεταβλητής στο $\mathbb{R}$, η u που προσδιορίζεται με τον τύπο (2.23) είναι λύση της (2.20) στο xy-επίπεδο αν από αυτό αφαιρεθεί ο x-άξονας. Ο μοναδικός περιορισμός για την f είναι ότι αυτή πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Άρα ο τύπος (2.23) περιγράφει πλήρως όλες τις λύσεις της (2.20) στο xy-επίπεδο αν από αυτό αφαιρεθεί ο x-άξονας.
Θεωρήστε ως άσκηση το να βρεθεί ποιές επιπλέον ιδιότητες πρέπει να είναι έχει η f ώστε ο τύπος (2.23) σε συνδυασμό με τον τύπο (2.22) να περιγράφει όλες τις λύσεις της (2.20) σε ολόκληρο το xy-επίπεδο. (Απάντηση: Αν και μόνο αν ισχύει $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = k_0$ και τα όρια $\lim_{t\to\pm\infty} t^2 f'(t)$ υπάρχουν και είναι ο ίδιος αριθμός.)
Ας θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{cases} u_x + 2xy^2 u_y = 0 \\ u(0, y) = g(y) \qquad \text{για κάθε } y > 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Έχουμε λοιπόν μία επιπρόσθετη αρχική συνθήκη στον θετικό y-ημιάξονα. Ο θετικός y-ημιάξονας τέμνει σε ένα μόνο σημείο καθεμιά από τις χαρακτηριστικές καμπύλες οι οποίες περιέχονται στο άνω xy-ημιεπίπεδο. Επομένως, θα προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τη λύση της μ.δ.ε. μόνο στο άνω xy-ημιεπίπεδο.
Όπως είδαμε η γενική λύση δίνεται από τον τύπο (2.23) και από αυτόν συνεπάγεται

$$u(0, y) = f\Big(-\frac{1}{y}\Big) \qquad \text{για κάθε } y \neq 0.$$

Άρα έχουμε

$$f\Big(-\frac{1}{y}\Big) = g(y) \qquad \text{για κάθε } y > 0$$

και άρα

$$f(y) = g\Big(-\frac{1}{y}\Big) \qquad \text{για κάθε } y < 0.$$

Έτσι προσδιορίζεται η f στο διάστημα $(-\infty, 0)$ από τη δοσμένη g στο $(0, +\infty)$, οπότε έχουμε τον τύπο

$$u(x, y) = g\Big(\frac{1}{x^2 + \frac{1}{y}}\Big) = g\Big(\frac{y}{1 + x^2 y}\Big) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \text{ με } y > 0.$$

Παράδειγμα 2.1.5. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{aligned} xyu_x - x^2u_y - yu &= xy \\ u(x,0) = g(x) \qquad &\text{για κάθε } x > 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$ στο δεξιό xy-ημιεπίπεδο $\{(x,y)\,|\,x > 0\}$.
Η μ.δ.ε. $xyu_x - x^2u_y - yu = xy$ είναι γραμμική (μη-ομογενής) πρώτης τάξης και επειδή ο συντελεστής του u_y είναι ίσος με $-x^2 \neq 0$ για κάθε (x,y) στο δεξιό xy-ημιεπίπεδο, θα προσδιορίσουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες της μ.δ.ε. στη μορφή $(x(y), y)$. Έχουμε λοιπόν

$$x'(y) = \frac{x(y)y}{-x(y)^2} = -\frac{y}{x(y)} \qquad \text{για κάθε } y \in J,$$

όπου J είναι το διάστημα ορισμού της $x(y)$.
Η συνήθης διαφορική εξίσωση γράφεται

$$x(y)x'(y) = -y \qquad \text{για κάθε } y \in J$$

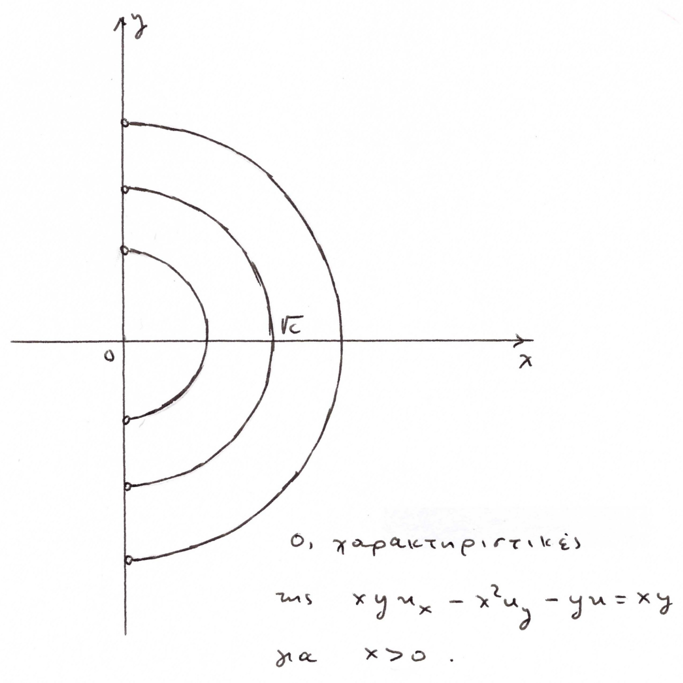
ή, ισοδύναμα,

$$x(y)^2 = -y^2 + c \qquad \text{για κάθε } y \in J$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.
Η περίπτωση $c \leq 0$ αποκλείεται διότι συνεπάγεται $x(y)^2 \leq 0$ ενώ πρέπει να είναι $x(y)^2 > 0$.
Για $c > 0$ παίρνουμε

$$x(y) = \sqrt{c - y^2} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}).$$

(Δεν επιλέγουμε την $x(y) = -\sqrt{c - y^2}$ διότι πρέπει να είναι $x(y) > 0$.)
Άρα η αντίστοιχη χαρακτηριστική καμπύλη είναι το ημικύκλιο στο δεξιό xy-ημιεπίπεδο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{c} > 0$. Από τις τιμές $c > 0$ προκύπτουν όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες οι οποίες καλύπτουν ολόκληρο το δεξιό xy-ημιεπίπεδο.



Τώρα θεωρούμε τη λύση u της μ.δ.ε. στα σημεία της χαρακτηριστικής καμπύλης $(x(y), y)$ που προσδιορίσαμε και έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}u(x(y),y) &= x'(y)u_x(x(y),y) + u_y(x(y),y) = -\frac{y}{x(y)}u_x(x(y),y) + u_y(x(y),y)\\ &= -\frac{1}{x(y)^2}\Big(x(y)yu_x(x(y),y) - x(y)^2u_y(x(y),y)\Big)\\ &= -\frac{y}{x(y)^2}u(x(y),y) - \frac{y}{x(y)}\\ &= -\frac{y}{c-y^2}u(x(y),y) - \frac{y}{\sqrt{c-y^2}} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}).\end{aligned}$$

Δηλαδή η συνάρτηση $h(y) = u(x(y), y)$ ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$h'(y) + \frac{y}{c-y^2}h(y) = -\frac{y}{\sqrt{c-y^2}} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}). \tag{2.26}$$

Λύνουμε αυτήν την εξίσωση με τον γνωστό τρόπο. Βρίσκουμε το

$$\int \frac{y}{c-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\log(c-y^2) + c$$

και, επιλέγοντας $c = 0$, θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$P(x) = e^{-\frac{1}{2}\log(c-y^2)} = \frac{1}{\sqrt{c-y^2}}.$$

Πολαπλασιάζουμε την (2.26) με την $P(x)$ και έχουμε την ισοδύναμη εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{c-y^2}}h'(y) + \frac{y}{(c-y^2)\sqrt{c-y^2}}h(y) = -\frac{y}{c-y^2} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}).$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dy}\frac{h(y)}{\sqrt{c-y^2}} = -\frac{y}{c-y^2} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c})$$

από την οποία βρίσκουμε

$$h(y) = \sqrt{c-y^2}\log\sqrt{c-y^2} + k\sqrt{c-y^2} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}),$$

όπου k είναι αυθαίρετη σταθερά.
Η σταθερά k εξαρτάται από τη σταθερά $c > 0$, οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned}u(\sqrt{c-y^2}, y) &= u(x(y),y) = h(y)\\ &= \sqrt{c-y^2}\log\sqrt{c-y^2} + f(c)\sqrt{c-y^2} \qquad \text{για κάθε } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}),\end{aligned}$$

όπου $f(c)$ είναι συνάρτηση της c στο $(0, +\infty)$.
Επομένως,

$$u(x,y) = \sqrt{c-y^2}\log\sqrt{c-y^2} + f(c)\sqrt{c-y^2} \qquad \text{για } y \in (-\sqrt{c},\ \sqrt{c}) \text{ και } x = \sqrt{c-y^2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x,y) = x\log x + xf(x^2+y^2) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \text{ με } x > 0. \tag{2.27}$$

Άρα η λύση $u(x,y)$ της μ.δ.ε. έχει τύπο (2.27), όπου f είναι συνάρτηση ορισμένη στο $(0,+\infty)$. Αντιστρόφως, εύκολα βλέπουμε ότι, για κάθε f ορισμένη στο $(0,+\infty)$, η $u(x,y)$ που δίνεται με τον τύπο (2.27) είναι λύση της μ.δ.ε. Άρα ο τύπος (2.27) περιγράφει πλήρως όλες τις λύσεις της μ.δ.ε. Ο μόνος περιορισμός για την f είναι ότι πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ επειδή $u_x(x,y) = \log x + 1 + f(x^2+y^2) + 2x^2 f'(x^2+y^2)$ και $u_y(x,y) = 2xyf'(x^2+y^2)$. Τέλος, η αρχική συνθήκη γράφεται

$$g(x) = u(x,0) = x\log x + xf(x^2) \qquad \text{για κάθε } x > 0$$

η οποία ισοδυναμεί με

$$f(t) = \frac{g(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} - \log\sqrt{t} \qquad \text{για κάθε } t > 0.$$

Άρα ο τύπος της u είναι

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x\log x + x\Big(\frac{g(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} - \log\sqrt{x^2+y^2}\Big) \\ &= x\log\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}g(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \text{για κάθε } (x,y) \text{ με } x > 0. \end{aligned}$$

Ασκήσεις.

2.1.1. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$:

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = \sin x \end{cases}$$

2.1.2. Λύστε την $(1+x^2)u_x + u_y = 0$ με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$.

2.1.3. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}u_x + u_y = 0 \\ u(0,y) = y \end{cases}$$

2.1.4. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$:

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0 \\ u(0,y) = e^{-y^2} \end{cases}$$

Σε ποιό υποσύνολο του xy-επιπέδου είναι η λύση μονοσήμαντα ορισμένη;

2.1.5. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$:

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y} \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

2.1.6. Λύστε την $au_x + bu_y = f(x,y)$ με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$. Οι a, b είναι σταθερές και η $f(x,y)$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το xy-επίπεδο.

2.1.7. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης με άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

2.1.8. Λύστε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών το πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{cases} yu_x + u_y - u = e^y \\ u(x,0) = \phi(x), \qquad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ποιές είναι οι ελάχιστες υποθέσεις για την ϕ στο διάστημα $(0,1)$; Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές. Σε ποιο χωρίο Ω του xy-επιπέδου είναι η λύση $u = u(x,y)$ μονοσήμαντα ορισμένη;

2.1.9. Λύστε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών το πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{cases} u_x + xu_y + u = e^{-x} \\ u(0,y) = \phi(y), \qquad -1 < y < 1 \end{cases}$$

Ποιές είναι οι ελάχιστες υποθέσεις για την ϕ στο διάστημα $(-1,1)$; Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές. Σε ποιο χωρίο Ω του xy-επιπέδου είναι η λύση $u = u(x,y)$ μονοσήμαντα ορισμένη;

2.2 Μη-γραμμικές μ.δ.ε. πρώτης τάξης.

Θα περιοριστούμε σε ένα μόνο παράδειγμα επίλυσης μη-γραμμικής μ.δ.ε. πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 2.2.1. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.28}$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι η $u(x,t)$.
Η εξίσωση $u_t + uu_x = 0$ ονομάζεται **εξίσωση Hopf** ή **εξίσωση Burgers χωρίς ιξώδες**.
Στο παράδειγμα 1.2.2 είδαμε πώς αποδεικνύεται ότι ο τελεστής $\mathcal{L}(u) = u_t + uu_x$ δεν είναι γραμμικός.
Κατ' αρχάς θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του u_t είναι $\neq 0$, οπότε θεωρούμε την παραμετρική εξίσωση κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης στη μορφή $(x(t),t)$, όπου το t διατρέχει κάποιο διάστημα I. Τότε έχουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$x'(t) = u(x(t),t) \qquad \text{για κάθε } t \in I, \tag{2.29}$$

η οποία, όμως, δεν μπορεί να λυθεί διότι δεν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $u(x,t)$.
Παρά το εμπόδιο που προέκυψε, ας προσπαθήσουμε να πάρουμε όσες πληροφορίες μπορούμε για τις χαρακτηριστικές καμπύλες και για τη συμπεριφορά της λύσης της μ.δ.ε. πάνω σ' αυτές.
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η $u(x,t)$ είναι λύση της $u_t + uu_x = 0$ και τότε πάνω στην χαρακτηριστική καμπύλη $(x(t),t)$ ισχύει (λόγω της (2.29))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t),t) &= x'(t)u_x(x(t),t) + u_t(x(t),t) = u(x(t),t)u_x(x(t),t) + u_t(x(t),t) \\ &= 0 \qquad \text{για κάθε } t \in I. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$u(x(t),t) = c \qquad \text{για κάθε } t \in I,$$

όπου c είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τη χαρακτηριστική καμπύλη.
Συνδυάζοντας με την (2.29) έχουμε ότι ισχύει

$$x'(t) = c \qquad \text{για κάθε } t \in I$$

και άρα

$$x(t) = ct + k \qquad \text{για κάθε } t \in I,$$

όπου k είναι μία ακόμη σταθερά.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες. Οι ευθείες αυτές δεν είναι παράλληλες στον x-άξονα: αν $c = 0$, τότε η ευθεία είναι κάθετη στον x-άξονα στο σημείο $(k, 0)$ ενώ, αν $c \neq 0$, τότε η ευθεία έχει κλίση $\frac{1}{c}$ και τέμνει τον x-άξονα στο σημείο $(k, 0)$.
Τώρα, αν θεωρήσουμε τυχόν σημείο $(x_0, 0)$ στον x-άξονα και σκεφτούμε ότι η χαρακτηριστική ευθεία η οποία διέρχεται από αυτό το σημείο έχει εξίσωση $x(t) = ct + x_0$ και ότι η σταθερά c ισούται με την σταθερή τιμή της λύσης u πάνω στην χαρακτηριστική ευθεία καθώς και ότι αυτή η σταθερή τιμή πρέπει να ισούται με την τιμή $u(x_0, 0) = \phi(x_0)$ επειδή το $(x_0, 0)$ είναι σημείο της χαρακτηριστικής ευθείας, καταλήγουμε στο ότι $c = \phi(x_0)$. Άρα η εξίσωση της χαρακτηριστικής ευθείας η οποία διέρχεται από το $(x_0, 0)$ είναι

$$x(t) = \phi(x_0)t + x_0 \qquad \text{για κάθε } t \in I.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα δεύτερο σημείο $(x_1, 0)$ με $x_1 > x_0$. Τότε έχουμε τις δύο χαρακτηριστικές ευθείες με καρτεσιανές εξισώσεις

$$x = \phi(x_0)t + x_0, \qquad x = \phi(x_1)t + x_1.$$

Η πρώτη διέρχεται από το $(x_0, 0)$ και η δεύτερη από το $(x_1, 0)$. Αν $\phi(x_0) = \phi(x_1)$, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και δεν τέμνονται. Αν, όμως, $\phi(x_0) \neq \phi(x_1)$, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο

$$(x, t) = \Big(\frac{x_0\phi(x_1) - x_1\phi(x_0)}{\phi(x_1) - \phi(x_0)}, -\frac{x_1 - x_0}{\phi(x_1) - \phi(x_0)}\Big).$$

Αν $\phi(x_1) < \phi(x_0)$, τότε το σημείο τομής έχει χρονική συντεταγμένη $t = -\frac{x_1 - x_0}{\phi(x_1)-\phi(x_0)} > 0$. Αν αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να μελετήσουμε τη λύση $u(x, t)$ για θετικούς χρόνους, όπως συνήθως γίνεται με τα φυσικά φαινόμενα, τότε σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε πρόβλημα. Διότι η λύση u έχει σταθερή τιμή $\phi(x_0)$ στη μία χαρακτηριστική ευθεία και σταθερή τιμή $\phi(x_1)$ στην άλλη χαρακτηριστική ευθεία και άρα στο σημείο τομής των δύο χαρακτηριστικών ευθειών (δηλαδή σε θετική χρονική στιγμή) η u θα έχει διπλή τιμή οπότε δεν θα είναι συνάρτηση. Πρέπει, επομένως, κάπως να περιορίσουμε τις χαρακτηριστικές ευθείες ώστε αυτές να μην τέμνονται.
Από το σημείο αυτό και πέρα θα θεωρήσουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση $\phi(x)$ η οποία έχει την "κακή" ιδιότητα $\phi(x_1) < \phi(x_0)$ για $x_1 > x_0$. Θα θεωρήσουμε την $\phi(x) = e^{-x}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
Έχουμε, λοιπόν, το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικής συνθήκης

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.30}$$

Βάσει όσων είπαμε για τη γενικότερη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι η χαρακτηριστική ευθεία l_0 η οποία διέρχεται από το τυχόν σημείο $(x_0, 0)$ του x-άξονα έχει καρτεσιανή εξίσωση

$$x = e^{-x_0}t + x_0$$

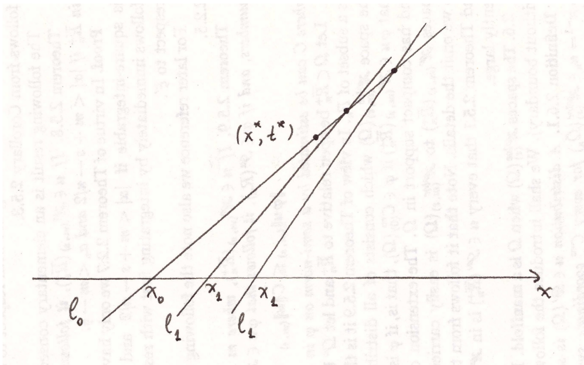
και ότι η λύση $u(x, t)$ έχει σταθερή τιμή e^{-x_0} στα σημεία αυτής της χαρακτηριστικής ευθείας.
Παρατηρήσαμε ότι η χαρακτηριστική ευθεία l_0 τέμνει κάθε αντίστοιχη χαρακτηριστική ευθεία l_1 η οποία διέρχεται από σημείο $(x_1, 0)$ με $x_1 > x_0$ και, για να μην υπάρχει πρόβλημα στον ορισμό της λύσης $u(x, t)$, θα περιορίσουμε την l_0 ώστε να μην τέμνει τις ευθείες l_1.
Όπως είδαμε πιο πριν, η l_1 τέμνει την l_0 στο σημείο

$$(x, t) = \Big(\frac{x_0e^{-x_1} - x_1e^{-x_0}}{e^{-x_1} - e^{-x_0}}, -\frac{x_1 - x_0}{e^{-x_1} - e^{-x_0}}\Big)$$

και παίρνοντας όριο καθώς $x_1 \to x_0+$, βρίσκουμε εύκολα το “οριακό σημείο”

$$(x^*, t^*) = (x_0 + 1, e^{x_0})$$

της ευθείας l_0.



Παρατηρούμε, επίσης, εύκολα ότι για κάθε $x_1 > x_0$ ισχύει

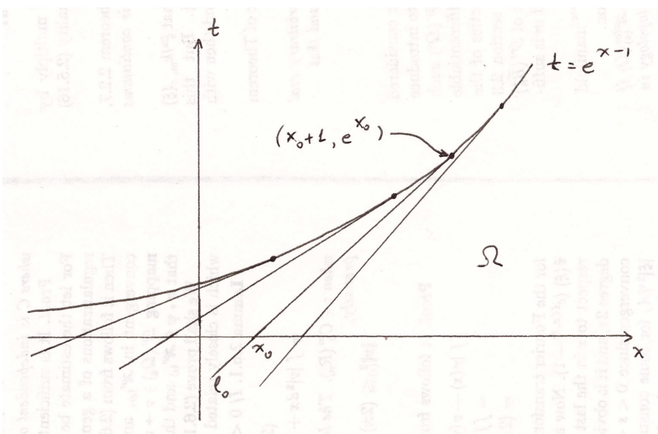
$$\frac{x_0 e^{-x_1} - x_1 e^{-x_0}}{e^{-x_1} - e^{-x_0}} > x_0 + 1, \qquad -\frac{x_1 - x_0}{e^{-x_1} - e^{-x_0}} > e^{x_0}.$$

Δηλαδή τα σημεία στα οποία όλες οι χαρακτηριστικές ευθείες l_1 (με $x_1 > x_0$) τέμνουν τη χαρακτηριστική ευθεία l_0 βρίσκονται όλα δεξιά και πάνω από το σημείο (x^*, t^*) της l_0. Θα περιορίσουμε, λοιπόν, τη χαρακτηριστική ευθεία l_0 στην ημιευθεία της η οποία βρίσκεται αριστερά και κάτω από το σημείο της (x^*, t^*). Αυτό θα το κάνουμε για κάθε χαρακτηριστική ευθεία η οποία διέρχεται από το τυχόν $(x_0, 0)$. Δηλαδή, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη χαρακτηριστική *ημιευθεία* l_0 με καρτεσιανή εξίσωση

$$x = e^{-x_0} t + x_0 \qquad \text{με } x < x_0 + 1 \text{ και } t < e^{x_0}.$$

Είναι φανερό ότι αυτές οι χαρακτηριστικές ημιευθείες δεν τέμνονται: για κάθε x_0, x_1 με $x_0 < x_1$ η χαρακτηριστική ημιευθεία l_0 που διέρχεται από το $(x_0, 0)$ δεν τέμνει τη χαρακτηριστική ημιευθεία l_1 που διέρχεται από το $(x_1, 0)$.
Μπορούμε τώρα να δούμε ότι οι κορυφές των χαρακτηριστικών ημιευθειών, δηλαδή τα σημεία $(x_0 + 1, e^{x_0})$ για $x_0 \in \mathbb{R}$, βρίσκονται όλα πάνω στην καμπύλη με καρτεσιανή εξίσωση

$$t = e^{x-1}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.31}$$



Παρατηρούμε, επίσης, ότι η χαρακτηριστική ημιευθεία l_0, η οποία έχει καρτεσιανή εξίσωση $x = e^{-x_0} t + x_0$, είναι εφαπτόμενη της καμπύλης με καρτεσιανή εξίσωση (2.31) στο σημείο $(x_0 + 1, e^{x_0})$.

Έτσι έχουμε έναν δεύτερο τρόπο να κατανοήσουμε τις χαρακτηριστικές ημιευθείες. Από κάθε σημείο (x_0+1, e^{x_0}) της καμπύλης με καρτεσιανή εξίσωση (2.31) θεωρούμε την εφαπτόμενη στην καμπύλη ημιευθεία l_0 η οποία εκτείνεται προς τα αριστερά και κάτω του σημείου επαφής. Η ημιευθεία αυτή τέμνει τον x-άξονα στο σημείο $(x_0, 0)$. Η λύση $u(x,t)$ του (2.30) έχει πάνω στην ημιευθεία l_0 σταθερή τιμή e^{-x_0}.

Είναι γεωμετρικά φανερό ότι οι ημιευθείες l_0 για τις διάφορες τιμές του $x_0 \in \mathbb{R}$ καλύπτουν ολόκληρο το μέρος του xy-επιπέδου το οποίο βρίσκεται κάτω από την καμπύλη με καρτεσιανή εξίσωση (2.31), δηλαδή το

$$\Omega = \{(x,t) \,|\, t < e^{x-1}\}.$$

Ας το δούμε αναλυτικά. Έστω τυχόν σημείο (x,t) με $t < e^{x-1}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 ώστε το (x,t) να περιέχεται στην αντίστοιχη ημιευθεία l_0. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι $x = e^{-x_0}t + x_0$ και $x < x_0 + 1$ και, επομένως, πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε (x,t) με $t < e^{x-1}$ υπάρχει μοναδικό $x_0 > x-1$ ώστε $x = e^{-x_0}t + x_0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(s) = e^{-s}t + s - x$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα $x_0 > x-1$. Αν $t = 0$, η συνάρτηση γράφεται $f(s) = s - x$ και έχει πράγματι μοναδική ρίζα $x_0 = x > x-1$. Αν $t < 0$, τότε έχουμε $f'(s) = -e^{-s}t + 1 > 0$ για κάθε s, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και, επειδή $f(x-1) = e^{-x+1}t - 1 < -1$ και $\lim_{s\to+\infty} f(s) = +\infty$, συνεπάγεται ότι η f έχει μοναδική ρίζα $x_0 > x-1$. Αν $t > 0$, τότε είναι $f'(s) < 0$ για $s < \log t$ και $f'(s) > 0$ για $s > \log t$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\log t, +\infty)$ και, επειδή $\log t < x-1$ και $f(x-1) = e^{-x+1}t - 1 < 0$ και $\lim_{s\to+\infty} f(s) = +\infty$, συνεπάγεται ότι η f έχει μοναδική ρίζα $x_0 > x-1$. Άρα σε κάθε περίπτωση η f έχει μοναδική ρίζα $x_0 > x-1$.

Τώρα, η λύση $u(x,t)$ ορίζεται στο Ω ως εξής. Για κάθε $(x,t) \in \Omega$, δηλαδή με $t < e^{x-1}$, βρίσκουμε το μοναδικό x_0 ώστε το (x,t) να περιέχεται στην αντίστοιχη χαρακτηριστική ημιευθεία l_0 και τότε είναι $u(x,t) = e^{-x_0}$. Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει η $u(x,t)$, δηλαδή ότι έχει συνεχείς u_x, u_t και ότι ικανοποιεί το (2.30), πρέπει να δούμε πιο αναλυτικά την εξάρτηση της ρίζας $x_0 > x-1$ της $f(s) = e^{-s}t + s - x$ από τις μεταβλητές x, t. Γι αυτό γράφουμε την f ως συνάρτηση τριών μεταβλητών:

$$f(x,t,s) = e^{-s}t + s - x \qquad \text{για κάθε } (x,t,s) \in U,$$

όπου

$$U = \{(x,t,s) \,|\, t < e^{x-1}, s > x-1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών. Η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f_x, f_t, f_s στο σύνολο U και ισχύει

$$f_s(x,t,s) = -e^{-s}t + 1 = e^{-s}(e^s - t) > e^{-s}(e^{x-1} - t) > 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t,s) \in U.$$

Θεωρούμε τυχόν $(\overline{x}, \overline{t}) \in \Omega$ και το αντίστοιχο $\overline{x_0} > \overline{x} - 1$ το οποίο είναι ρίζα της $e^{-s}\overline{t} + s - \overline{x}$. Τότε

$$(\overline{x}, \overline{t}, \overline{x_0}) \in U \qquad \text{και} \qquad f(\overline{x}, \overline{t}, \overline{x_0}) = 0.$$

Από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης συνεπάγεται ότι υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I, J έτσι ώστε $\overline{x} \in I$ και $\overline{t} \in J$ και $I \times J \subseteq U$ και συνάρτηση

$$h : I \times J \to \mathbb{R}$$

έτσι ώστε να ισχύει

$$\begin{cases} h(\overline{x}, \overline{t}) = \overline{x_0} \\ (x,t,h(x,t)) \in U \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in I \times J \\ f(x,t,h(x,t)) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in I \times J \end{cases}$$

Επίσης, η h είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους h_x, h_t στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$.

Η ισότητα $f(x,t,h(x,t)) = 0$ σημαίνει ότι για κάθε $(x,t) \in I \times J$ ο αριθμός $h(x,t)$ είναι η μοναδική λύση $> x-1$ της $e^{-s}t + s - x = 0$ και, επομένως, ισούται με την τιμή του x_0 που αντιστοιχεί στο ζεύγος $(x,t) \in I \times J$. Επομένως, η

$$u(x,t) = e^{-x_0} = e^{-h(x,t)}$$

είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους u_x, u_t στο ανοικτό ορθογώνιο $I \times J$, δηλαδή σε μια ανοικτή περιοχή του $(\overline{x}, \overline{t})$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η u είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάθε σημείο $(\overline{x}, \overline{t})$ του Ω.
Παραγωγίζοντας την ισότητα $f(x,t,h(x,t)) = 0$, δηλαδή την

$$e^{-h(x,t)}t + h(x,t) - x = 0$$

ως προς x, t βρίσκουμε τους τύπους των h_x, h_t. Πράγματι:

$$-h_x(x,t)e^{-h(x,t)}t + h_x(x,t) - 1 = 0, \qquad -h_t(x,t)e^{-h(x,t)}t + e^{-h(x,t)} + h_t(x,t) = 0,$$

οπότε

$$h_x(x,t) = \frac{1}{1 - e^{-h(x,t)}t}, \qquad h_t(x,t) = -\frac{e^{-h(x,t)}}{1 - e^{-h(x,t)}t}.$$

(Ο παρονομαστής είναι ίσος με $1 - x + h(x,t) > 0$.)
Άρα

$$u_x(x,t) = -h_x(x,t)e^{-h(x,t)} = \frac{-e^{-h(x,t)}}{1 - e^{-h(x,t)}t} = \frac{-u(x,t)}{1 - tu(x,t)},$$

$$u_t(x,t) = -h_t(x,t)e^{-h(x,t)} = \frac{e^{-2h(x,t)}}{1 - e^{-h(x,t)}t} = \frac{u^2(x,t)}{1 - tu(x,t)}.$$

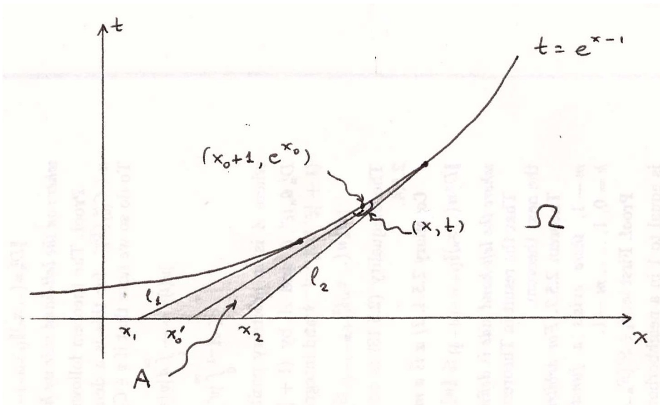
Επομένως, ισχύει

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,t) \in \Omega$$

και

$$u(x,0) = e^{-h(x,0)} = e^{-x} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

αφού με $t = 0$ η εξίσωση $f(x,0,s) = 0$, δηλαδή η $s - x = 0$ έχει λύση $h(x,0) = s = x$.
Άρα η $u(x,t)$ είναι λύση του (2.30).
Θα δούμε τώρα πώς συμπεριφέρονται η $u(x,t)$ καθώς και οι μερικές παράγωγοί της όταν το σημείο (x,t) πλησιάζει το σύνορο του Ω, δηλαδή την καμπύλη με καρτεσιανή εξίσωση $t = e^{x-1}$.



Έστω ότι $(x,t) \in \Omega$ και $(x,t) \to (x_0 + 1, e^{x_0})$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και τότε υπάρχουν x_1, x_2 ώστε να είναι

$$x_1 < x_0 < x_2 \qquad \text{και} \qquad e^{-x_0} - \epsilon < e^{-x_2} < e^{-x_0} < e^{-x_1} < e^{-x_0} + \epsilon.$$

Θεωρούμε και τις χαρακτηριστικές ημιευθείες l_1 και l_2, οι οποίες διέρχονται από τα $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$, καθώς και το ανοικτό υποσύνολο A του Ω το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις l_1, l_2. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε όταν το $(x,t) \in \Omega$ βρίσκεται σε απόσταση $< \delta$ από το $(x_0 + 1, e^{x_0})$ να περιέχεται στο σύνολο A. Τότε, όμως, η αντίστοιχη χαρακτηριστική ημιευθεία στην οποία ανήκει το (x,t) βρίσκεται ανάμεσα στις l_1, l_2 και άρα διέρχεται από κάποιο σημείο $(x_0', 0)$ του x-άξονα με $x_1 < x_0' < x_2$. Συνεπάγεται ότι $u(x,t) = e^{-x_0'}$, οπότε

$$e^{-x_0} - \epsilon < e^{-x_2} < u(x,t) < e^{-x_1} < e^{-x_0} + \epsilon$$

και άρα

$$|u(x,t) - e^{-x_0}| < \epsilon.$$

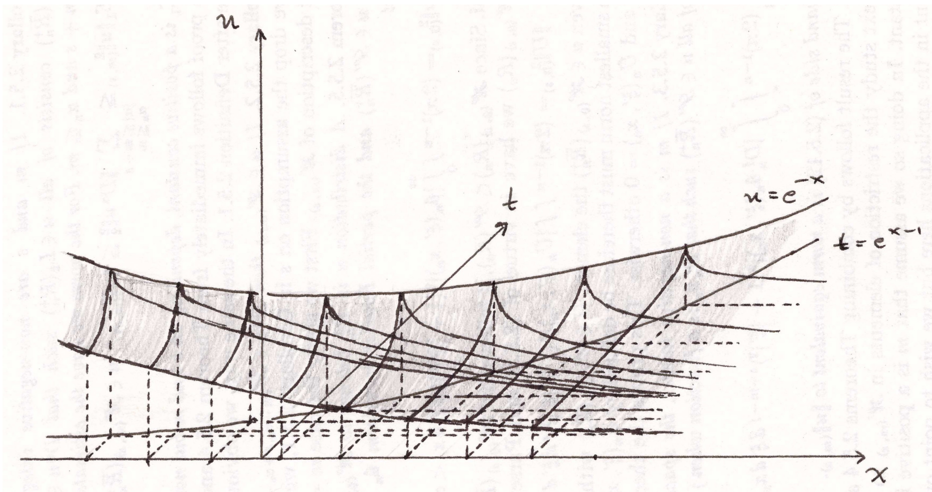
Συμπεραίνουμε ότι

$$u(x,t) \to e^{-x_0} \qquad \text{όταν } (x,t) \in \Omega \text{ και } (x,t) \to (x_0 + 1, e^{x_0}).$$

Τέλος, συνεπάγεται

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{-u(x,t)}{1 - tu(x,t)} \to \frac{-e^{-x_0}}{1 - e^{x_0}e^{-x_0}} = -\infty \\ u_t(x,t) &= \frac{u^2(x,t)}{1 - tu(x,t)} \to \frac{e^{-2x_0}}{1 - e^{x_0}e^{-x_0}} = +\infty \end{aligned}\right. \qquad \text{όταν } (x,t) \in \Omega \text{ και } (x,t) \to (x_0 + 1, e^{x_0}).$$

(Παρατηρήστε ότι $1 - tu(x,t) = 1 - te^{-h(x,t)} = 1 - x + h(x,t) > 0$, όπως είδαμε προηγουμένως.) Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να ορισθεί η λύση $u(x,t)$ και στα συνοριακά σημεία του Ω. Στο σύνορο του Ω "εκρήγνυνται" οι μερικές παράγωγοι της λύσης $u(x,t)$ και λέμε ότι η λύση παρουσιάζει "κρουστικό κύμα" ή ότι "υφίσταται θραύση" στο σύνορο του Ω.



Ασκήσεις.

2.2.1. Λύστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης με άγνωστη συνάρτηση $u(x,y)$:

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

2.2.2. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης για την εξίσωση του Hopf:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = 1 \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Βρείτε το σύνολο Ω στο οποίο ορίζεται η λύση $u(x,t)$ καθώς και τον τύπο της. Υφίσταται φαινόμενο κρουστικού κύματος ή θραύσης σ'αυτό το πρόβλημα; [$\Omega = \mathbb{R}^2$, $u(x,t) = 1$. Όχι.]

2.2.3. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης για την εξίσωση του Hopf:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = -x \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι όλες οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες και διέρχονται από το ίδιο σημείο $(0,1)$. Βρείτε το σύνολο Ω στο οποίο ορίζεται η λύση $u(x,t)$ καθώς και τον τύπο της και αποδείξτε ότι η λύση καθώς και οι μερικές παράγωγοί της εκρήγνυνται στο σύνορο του Ω. [$\Omega = \{(x,t) \,|\, t < 1\}$ και $u(x,t) = \frac{x}{t-1}$.]

2.2.4. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικής συνθήκης για την εξίσωση του Hopf:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{e^x+1} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Βρείτε δύο σύνολα Ω στα οποία ορίζονται αντίστοιχες λύσεις $u(x,t)$ και αποδείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι των λύσεων εκρήγνυνται στα σύνορα των αντίστοιχων Ω.

2.3 Νόμοι διατήρησης.

Θεωρούμε μια "φυσική" ποσότητα M η οποία είναι μονοδιάστατα κατανεμημένη στα σημεία του x-άξονα με γραμμική "πυκνότητα" u η οποία εξαρτάται από τη θέση του σημείου x. Θεωρούμε, επίσης, ότι η πυκνότητα εξαρτάται και από τον χρόνο t.

Αν συμβολίσουμε

$$M[a,b;t]$$

την ποσότητα η οποία περιέχεται ανάμεσα στα σημεία a, b του x-άξονα, με $a < b$, τη χρονική στιγμή t και, αν συμβολίσουμε

$$M(x,t) = M[-\infty, x; t]$$

την ποσότητα η οποία βρίσκεται αριστερά του σημείου x τη χρονική στιγμή t, τότε η πυκνότητα ισούται με

$$u(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{M[x, x+\Delta x; t]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{M(x+\Delta x, t) - M(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial M}{\partial x}(x,t).$$

Επομένως,

$$M[a,b;t] = \int_a^b \frac{\partial M}{\partial x}(x,t)\,dx = \int_a^b u(x,t)\,dx.$$

Θεωρώντας τώρα μια μικρή χρονική μεταβολή από t σε $t + \Delta t$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M[a,b;t+\Delta t] - M[a,b;t] &= \big(M(b,t+\Delta t) - M(a,t+\Delta t)\big) \\ &\quad - \big(M(b,t) - M(a,t)\big) \\ &= \big(M(b,t+\Delta t) - M(b,t)\big) \\ &\quad - \big(M(a,t+\Delta t) - M(a,t)\big). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Δεχόμαστε, τώρα, ότι η ποσότητα M υπακούει στον εξής **νόμο διατήρησης**: *Η ποσότητα η οποία περιέχεται στο τμήμα $[a,b]$ μπορεί να αλλάξει στη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος είτε θετικά και μόνο κατά την ποσότητα η οποία εισέρχεται στο $[a,b]$ από τα άκρα a, b είτε αρνητικά και μόνο κατά την ποσότητα η οποία διαφεύγει από το $[a,b]$ από τα άκρα a, b στην ίδια χρονική διάρκεια.*

Βάσει αυτού του νόμου διατήρησης, έχουμε τότε ότι η διαφορά

$$M(x,t) - M(x,t+\Delta t)$$

ισούται με την ποσότητα η οποία διαφεύγει από το $(-\infty, x]$ προς τα δεξιά του x κατά τη χρονική μεταβολή από t σε $t + \Delta t$. Και τότε την ταχύτητα διαφυγής της ποσότητας από το $(-\infty, x]$ προς τα δεξιά του x, δηλαδή το όριο

$$q(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{M(x,t) - M(x,t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\partial M}{\partial t}(x,t),$$

την ονομάζουμε **ροή** της ποσότητας M προς τα δεξιά του x τη χρονική στιγμή t.

Τώρα διαιρώντας το πρώτο και το τρίτο μέρος της (2.32) με το Δt και παίρνοντας όριο, βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} M[a,b;t] = -q(b,t) + q(a,t)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x,t)\, dx = -q(b,t) + q(a,t).$$

Εναλλάσσουμε παράγωγο και ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση και βρίσκουμε

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx = -q(b,t) + q(a,t).$$

Κατόπιν διαιρούμε με $b - a$ και παίρνουμε όριο καθώς $b \to a+$ και τότε, επειδή η παράγωγος του αόριστου ολοκληρώματος ισούται με την ολοκληρωτέα συνάρτηση, έχουμε

$$-\frac{\partial q}{\partial x}(a,t) = \lim_{b \to a+} \frac{\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx - \int_a^a \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx}{b-a} = \frac{\partial u}{\partial t}(a,t).$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε a, καταλήγουμε στην εξής *μερική διαφορική εξίσωση* ως απόρροια του νόμου διατήρησης της ποσότητας M:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{2.33}$$

Θα δούμε τώρα δύο περιπτώσεις φυσικών ποσοτήτων οι οποίες εντάσσονται σ' αυτό το πλαίσιο.

Παράδειγμα 2.3.1. Θεωρούμε ένα υγρό κατανεμημένο σε μια πολύ λεπτή οριζόντια σωλήνα, τον x-άξονα, το οποίο μετακινείται *χωρίς διάχυση* προς τα δεξιά του x-άξονα με σταθερή ταχύτητα $c > 0$. Θεωρούμε ως ποσότητα M τη *μάζα* m του υγρού, οπότε η αντίστοιχη γραμμική πυκνότητα u συμβολίζεται ρ. Λόγω της *αρχής διατήρησης της μάζας*, καταλήγουμε στην (2.33) με τη μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{2.34}$$

Ας δούμε τώρα ποιά είναι η ροή q της μάζας προς τα δεξιά.
Επειδή η ταχύτητα κάθε σημείου του υγρού είναι σταθερή $c > 0$, η μάζα η οποία διαφεύγει προς τα δεξιά του σημείου x κατά τη χρονική διάρκεια από t σε $t + \Delta t$ ισούται με τη μάζα του τμήματος του υγρού αριστερά του x με μήκος $\Delta x = c\Delta t$, δηλαδή με τη μάζα η οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή t ανάμεσα στα σημεία $x - \Delta x$ και x. Επομένως,

$$\begin{aligned} q(x,t) &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{m(x,t) - m(x - \Delta x, t)}{\Delta t} = c \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{m(x,t) - m(x-\Delta x,t)}{\Delta x} \\ &= c\frac{\partial m}{\partial x}(x,t) = c\rho(x,t). \end{aligned}$$

Άρα η (2.34) γράφεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Αυτή είναι η γνωστή μας *εξίσωση μεταφοράς* και την είδαμε ως ειδική περίπτωση του παραδείγματος 2.1.1 ή του προβλήματος αρχικής συνθήκης (2.10). Η γενική λύση δίνεται με τον τύπο

$$\rho(x,t) = g(x - ct),$$

όπου η συνάρτηση $g(x) = \rho(x,0)$ εκφράζει την πυκνότητα του υγρού τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Παράδειγμα 2.3.2. Θεωρούμε ένα αέριο μέσα σε μια πολύ λεπτή οριζόντια σωλήνα, τον x-άξονα, και πάλι. Δεχόμαστε ότι το αέριο έχει σταθερή, χωρικά και χρονικά, πυκνότητα $\rho = 1$ και θεωρούμε ως ποσότητα M την *ορμή* p του αερίου. Τότε η αντίστοιχη γραμμική πυκνότητα u είναι η ταχύτητα v του αερίου. Πράγματι, το τμήμα του αερίου ανάμεσα στα σημεία x και $x + \Delta x$ έχει μάζα $\rho\Delta x = \Delta x$ και μέση ταχύτητα $\overline{v}(x,t)$, οπότε έχει ορμή

$$\Delta p = \overline{v}(x,t)\Delta x$$

και άρα

$$v(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \overline{v}(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\partial p}{\partial x}(x,t).$$

Έτσι η ορμή του τμήματος του αερίου ανάμεσα στα σημεία a, b με $a < b$ είναι

$$p[a,b;t] = \int_a^b \frac{\partial p}{\partial x}(x,t)\,dx = \int_a^b v(x,t)\,dx.$$

Λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής, έχουμε την εξίσωση (2.33) στη μορφή

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{2.35}$$

Ένα μοντέλο κίνησης του αερίου, προταθέν από τον Burgers, δέχεται ότι η ροή q της ορμής προς τα δεξιά ισούται με

$$q(x,t) = \frac{1}{2}v^2(x,t).$$

Τότε η (2.35) γράφεται

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

και καταλήγουμε στην εξίσωση Hopf.

Κεφάλαιο 3

Μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Μια γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών έχει τη μορφή

$$\mathcal{L}(u) = a_{11}u_{xx} + a_{12}u_{xy} + a_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au = f,$$

όπου οι συναρτήσεις $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_1, a_2, a, f$ είναι συνεχείς σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$.
Λέμε ότι η συνάρτηση u είναι λύση της εξίσωσης αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης στο Ω και αυτές ικανοποιούν την εξίσωση σε κάθε σημείο του Ω.

Επειδή $u_{xy} = u_{yx}$ μπορούμε να γράψουμε

$$a_{12}u_{xy} + a_{21}u_{yx} = (a_{12} + a_{21})u_{xy}$$

και να ορίσουμε νέα συνάρτηση

$$a_{12}^* = \frac{a_{12} + a_{21}}{2},$$

οπότε, αν αλλάξουμε το σύμβολο a_{12}^* σε a_{12}, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L}(u) = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + au = f. \tag{3.1}$$

Αυτή είναι η συνήθης μορφή της διαφορικής εξίσωσης.

Επίσης, για να είναι πραγματικά δεύτερης τάξης η εξίσωση υποθέτουμε ότι σε κάθε σημείο του Ω τουλάχιστον μία από τις συναρτήσεις a_{11}, a_{12}, a_{22} δεν μηδενίζεται.

Υπάρχει η εξής κατηγοριοποίηση των εξισώσεων αυτών:

1. Λέμε ότι η εξίσωση είναι **ελλειπτική** αν $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$.
2. Λέμε ότι η εξίσωση είναι **υπερβολική** αν $a_{11}a_{22} < a_{12}^2$.
3. Λέμε ότι η εξίσωση είναι **παραβολική** αν $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$.

Τρία τυπικά παραδείγματα είναι τα εξής.

Παράδειγμα 3.0.1. Η εξίσωση του Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Αυτή είναι ελλειπτικού τύπου.

Παράδειγμα 3.0.2. Η κυματική εξίσωση

$$u_{yy} - c^2u_{xx} = 0$$

με $c > 0$ είναι υπερβολικού τύπου.

Παράδειγμα 3.0.3. Η εξίσωση της θερμότητας

$$u_y - c^2 u_{xx} = 0$$

με $c > 0$ είναι παραβολικού τύπου.

Αν η διαφορική εξίσωση έχει *σταθερούς* συντελεστές a_{11}, a_{12}, a_{22} τότε μπορεί με κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y να τεθεί σε μία από τις μορφές

$$u_{yy} + u_{xx} + \cdots \qquad u_{yy} - c^2 u_{xx} + \cdots \qquad - c^2 u_{xx} + \cdots$$

ανάλογα με το αν είναι ελλειπτικού ή υπερβολικού ή παραβολικού τύπου, αντιστοίχως. Οι τελείες δηλώνουν όρους με μερικές παραγώγους της u τάξης ≤ 1. Ας δούμε κάπως σύντομα πώς γίνεται αυτό.

Θεωρούμε αριθμούς k, l, m, n, που θα προσδιοριστούν σε λίγο, και τις νέες μεταβλητές

$$\begin{aligned} \xi &= kx + ly \\ \eta &= mx + ny. \end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Για να είναι αντιστρέψιμος ο μετασχηματισμός ώστε να μπορούμε από τις νέες μεταβλητές ξ, η να γυρίσουμε πίσω στις x, y πρέπει να έχουμε

$$kn - lm = \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_* & l_* \\ m_* & n_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

όπου

$$\begin{pmatrix} k_* & l_* \\ m_* & n_* \end{pmatrix} = \frac{1}{kn - lm} \begin{pmatrix} n & -l \\ -m & k \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} x &= k_* \xi + l_* \eta \\ y &= m_* \xi + n_* \eta. \end{aligned}$$

Κατόπιν θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζεται με τον τύπο

$$U(\xi, \eta) = u(k_* \xi + l_* \eta, m_* \xi + n_* \eta) = u(x, y)$$

ή, ισοδύναμα,

$$u(x, y) = U(kx + ly, mx + ny) = U(\xi, \eta)$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= kU_\xi(kx + ly, mx + ny) + mU_\eta(kx + ly, mx + ny) = kU_\xi(\xi, \eta) + mU_\eta(\xi, \eta), \\ u_y(x, y) &= lU_\xi(kx + ly, mx + ny) + nU_\eta(kx + ly, mx + ny) = lU_\xi(\xi, \eta) + nU_\eta(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Συντομογραφούμε:

$$\begin{aligned} u_x &= kU_\xi + mU_\eta \\ u_y &= lU_\xi + nU_\eta. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (kU_\xi + mU_\eta)_x = k(U_\xi)_x + m(U_\eta)_x = k\Big(k(U_\xi)_\xi + m(U_\xi)_\eta\Big) + m\Big(k(U_\eta)_\xi + m(U_\eta)_\eta\Big) \\ &= k^2U_{\xi\xi} + 2kmU_{\xi\eta} + m^2U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} u_{xy} &= klU_{\xi\xi} + (kn+ml)U_{\xi\eta} + mnU_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= l^2U_{\xi\xi} + 2lnU_{\xi\eta} + n^2U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική διαφορική εξίσωση (3.1), βρίσκουμε την ισοδύναμη δ.ε.

$$\begin{aligned} (k^2a_{11} + 2kla_{12} + l^2a_{22})U_{\xi\xi} + 2(kma_{11} + (kn+ml)a_{12} + lna_{22})U_{\xi\eta} \\ + (m^2a_{11} + 2mna_{12} + n^2a_{22})U_{\eta\eta} + \cdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Τώρα η ιδέα είναι η εξής.
Αν $a_{11} \neq 0$, τότε μπορούμε να διαιρέσουμε την αρχική δ.ε. (3.1) με τον αριθμό a_{11}, οπότε θα προκύψει μια ισοδύναμη δ.ε. με $a_{11} = 1$. Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις.
Αν η εξίσωση είναι ελλειπτική, δηλαδή $a_{22} > a_{12}^2$, μπορούμε να βρούμε αριθμούς k, l, m, n με $kn - ml \neq 0$ ώστε να είναι

$$k^2 + 2a_{12}kl + a_{22}l^2 = 1, \; km + a_{12}(kn+ml) + a_{22}ln = 0, \; m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 1,$$

οπότε η διαφορική εξίσωση θα αποκτήσει μορφή

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \cdots$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $k = 1$, $l = 0$, $m = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}-a_{12}^2}}$, $n = \frac{1}{\sqrt{a_{22}-a_{12}^2}}$.
Αν η εξίσωση είναι υπερβολική, δηλαδή $a_{22} < a_{12}^2$, τότε μπορούμε να βρούμε αριθμούς k, l, m, n με $kn - ml \neq 0$ ώστε να είναι

$$k^2 + 2a_{12}kl + a_{22}l^2 = -1, \; km + a_{12}(kn+ml) + a_{22}ln = 0, \; m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 1,$$

οπότε η διαφορική εξίσωση θα αποκτήσει μορφή

$$-U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \cdots$$

Για παράδειγμα, $k = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2-a_{22}}}$, $l = \frac{1}{\sqrt{a_{12}^2-a_{22}}}$, $m = 1$, $n = 0$.
Τέλος, αν η εξίσωση είναι παραβολική, δηλαδή $a_{22} = a_{12}^2$, τότε μπορούμε να βρούμε αριθμούς k, l, m, n με $kn - ml \neq 0$ ώστε να είναι

$$k^2 + 2a_{12}kl + a_{22}l^2 = 1, \; km + a_{12}(kn+ml) + a_{22}ln = 0, \; m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0,$$

οπότε η διαφορική εξίσωση θα αποκτήσει μορφή

$$U_{\xi\xi} + \cdots$$

Για παράδειγμα, $k = 1$, $l = 0$, $m = -a_{12}$, $n = 1$.
Αυτές είναι όλες οι περιπτώσεις όταν $a_{11} \neq 0$. Αν $a_{11} = 0$ και $a_{22} \neq 0$, τότε εργαζόμαστε "συμμετρικά" διαιρώντας την (3.1) με το a_{22} και αναγόμενοι στην περίπτωση $a_{22} = 1$.
Τέλος, αν $a_{11} = a_{22} = 0$, τότε πρέπει να είναι $a_{12} \neq 0$ και η δ.ε. είναι οπωσδήποτε υπερβολική. Τώρα, διαιρώντας με το a_{12}, η (3.2) γράφεται

$$klU_{\xi\xi} + (kn+ml)U_{\xi\eta} + mnU_{\eta\eta} + \cdots$$

και μπορούμε να βρούμε αριθμούς k, l, m, n με $kn - ml \neq 0$ ώστε να είναι

$$kl = -1, \;\; kn + ml = 0, \;\; mn = 1,$$

οπότε η διαφορική εξίσωση θα αποκτήσει μορφή

$$-U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \cdots$$

Για παράδειγμα, $k = 1, l = -1, m = 1, n = 1$.

Δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με αυτό το θέμα. Αυτό που θα μας απασχολήσει στο υπόλοιπο του μαθήματος είναι η μελέτη των τριών τύπων εξισώσεων στη βασική τους μορφή: την εξίσωση του Laplace, την κυματική εξίσωση και την εξίσωση της θερμότητας.

3.1 Η κυματική εξίσωση.

3.1.1 Επίλυση.

Ο τελεστής της κυματικής εξίσωσης είναι ο

$$\mathcal{L}(u) = u_{tt} - c^2 u_{xx}$$

για συναρτήσεις $u(x,t)$ οι οποίες είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Θα δουμε αμέσως ότι ο τελεστής αυτός γράφεται ως "γινόμενο" δύο τελεστών της εξίσωσης μεταφοράς και βάσει αυτού θα λύσουμε την κυματική εξίσωση.

Αν ορίσουμε τους τελεστές της εξίσωσης μεταφοράς

$$\mathcal{L}_1(u) = u_t - cu_x, \qquad \mathcal{L}_2(u) = u_t + cu_x,$$

τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u) &= u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_{tt} - cu_{xt} + cu_{tx} - c^2 u_{xx} \\
&= (u_t - cu_x)_t + c(u_t - cu_x)_x = (\mathcal{L}_1(u))_t + c(\mathcal{L}_1(u))_x \\
&= \mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1(u)).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε το αλγεβρικού τύπου κόλπο της προσθαφαίρεσης, το ίδιο με αυτό που γίνεται στην άλγεβρα:

$$t^2 - c^2x^2 = t^2 - ctx + cxt - c^2x^2 = t(t - cx) + cx(t - cx) = (t + cx)(t - cx).$$

Άρα ο τελεστής $\mathcal{L}$ γράφεται ως σύνθεση των τελεστών $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1.$$

Επομένως η λύση της κυματικής εξίσωσης ισοδυναμεί με τη λύση δύο εξισώσεων μεταφοράς:

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \mathcal{L}_1(u) = v \\ \mathcal{L}_2(v) = 0 \end{Bmatrix}$$

ή, με άλλα λόγια,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_t - cu_x = v \\ v_t + cv_x = 0 \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Λύνουμε την ομογενή εξίσωση $v_t + cv_x = 0$ και βρίσκουμε την $v(x,t)$ και κατόπιν λύνουμε την μη-ομογενή εξίσωση $u_t - cu_x = v$ και βρίσκουμε την $u(x,t)$.

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι η δεύτερη εξίσωση (3.3) έχει γενική λύση

$$v(x,t) = \phi(x-ct) \qquad \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.4}$$

Δεν ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο με τη μη-ομογενή εξίσωση μεταφοράς

$$u_t - cu_x = v$$

αλλά θα το κάνουμε τώρα εφαρμόζοντας τη μέθοδο των χαρακτηριστικών ακριβώς όπως μάθαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεωρούμε τις χαρακτηριστικές ευθείες του τελεστή $u_t - cu_x$, οι οποίες έχουν εξίσωση

$$x = -ct + k,$$

όπου k είναι μια σταθερά η οποία καθορίζει τη χαρακτηριστική ευθεία. Κατόπιν θεωρούμε τις τιμές $u(-ct+k,t)$ της u στα σημεία της χαρακτηριστικής ευθείας και παραγωγίζουμε ως προς t:

$$\frac{d}{dt}u(-ct+k,t) = -cu_x(-ct+k,t) + u_t(-ct+k,t) = v(-ct+k,t).$$

Άρα

$$u(-ct+k,t) = \int_0^t v(-cs+k,s)\,ds + \psi(k).$$

Γράφοντας $x = -ct+k$ και, επομένως, $k = x+ct$, έχουμε

$$u(x,t) = \int_0^t v(x+c(t-s),s)\,ds + \psi(x+ct).$$

Παίρνουμε τώρα την $v(x,t) = \phi(x-ct)$ από την (3.4) και αντικαθιστούμε στην τελευταία ισότητα:

$$u(x,t) = \int_0^t \phi(x+c(t-s)-cs)\,ds + \psi(x+ct) = \int_0^t \phi(x+ct-2cs)\,ds + \psi(x+ct).$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $s' = x+ct-2cs$ και ξανασυμβολίζουμε s το s' στο ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s)\,ds + \psi(x+ct) \\ &= -\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \phi(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \phi(s)\,ds + \psi(x+ct). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$f(y) = -\frac{1}{2c}\int_0^y \phi(s)\,ds, \qquad g(y) = \frac{1}{2c}\int_0^y \phi(s)\,ds + \psi(y)$$

και τότε η (3.5) γράφεται

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.6}$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε λύση της κυματικής εξίσωσης (3.3) έχει τη μορφή (3.6) για κάποιες συναρτήσεις f, g μιας μεταβλητής.

Αντιστρόφως, αν η u έχει τη μορφή (3.6), τότε

$$u_x = f'(x-ct) + g'(x+ct), \qquad u_{xx} = f''(x-ct) + g''(x+ct),$$
$$u_t = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct), \qquad u_{tt} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

και άρα

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης στο $\mathbb{R}^2$ περιγράφονται πλήρως από την (3.6), όπου οι f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις μιας μεταβλητής στο $\mathbb{R}$. Ο μόνος περιορισμός είναι ότι οι f, g πρέπει να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, όπως φάνηκε στους τελευταίους υπολογισμούς των u_{xx} και u_{tt}.

Ας δούμε τώρα πώς λύνεται το *πρόβλημα αρχικών συνθηκών*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.7}$$

όπου ϕ, ψ είναι δοσμένες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τον τύπο (3.6) της λύσης της κυματικής εξίσωσης και θα προσδιορίσουμε τις f, g ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Από την $u(x,0) = \phi(x)$ παίρνουμε

$$f(x) + g(x) = \phi(x)$$

και από την $u_t(x,0) = \psi(x)$ παίρνουμε

$$-cf'(x) + cg'(x) = \psi(x).$$

Από την τελευταία βρίσκουμε

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\, ds + k$$

και, συνδυάζοντας με την $f(x) + g(x) = \phi(x)$,

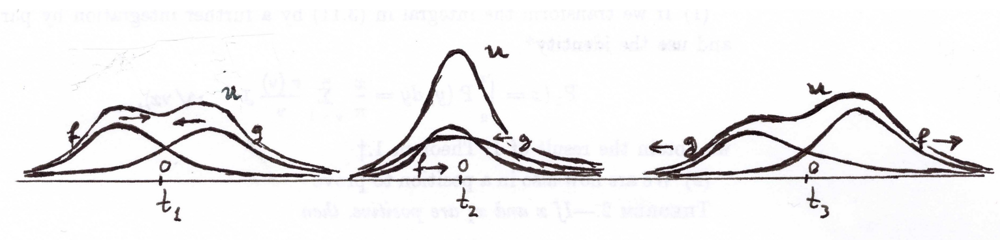
$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\, ds - \frac{k}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\, ds + \frac{k}{2}.$$

Άρα ο τύπος (3.6) γίνεται

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds. \tag{3.8}$$

Αυτός είναι ο **τύπος του d' Alembert**.

Για να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της u πρέπει η ϕ να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η ψ να είναι μία φορά συνεχώς παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$.

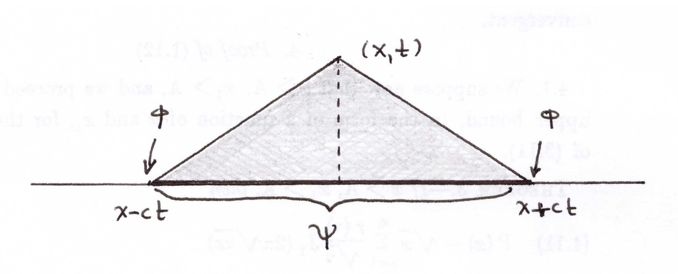


Από τον τύπο (3.6) βλέπουμε ότι η λύση της κυματικής εξίσωσης είναι το άθροισμα δύο "κυμάτων", του $f(x - ct)$ και του $g(x + ct)$, τα οποία ταξιδεύουν με σταθερή ταχύτητα $c > 0$, το ένα προς τα δεξιά του x-άξονα και το άλλο προς τα αριστερά του x-άξονα, αντιστοίχως. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το πρώτο "κύμα" περιγράφεται από την $f(x)$ ενώ τη χρονική στιγμή $t > 0$ το κύμα περιγράφεται από την $f(x - ct)$ και άρα έχει μεταφερθεί προς τα δεξιά σε απόσταση ct. Ομοίως, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το δεύτερο "κύμα" περιγράφεται από την $g(x)$ ενώ τη χρονική στιγμή $t > 0$ το κύμα περιγράφεται από την $g(x + ct)$ και επομένως έχει μεταφερθεί προς τα αριστερά σε απόσταση ct.

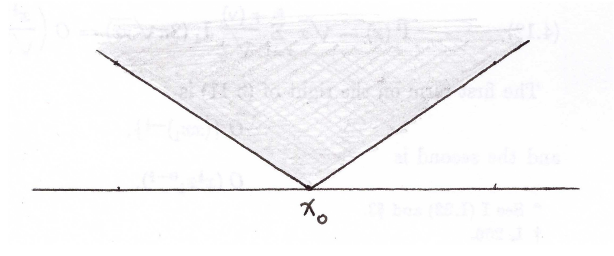
3.1.2 Διαστήματα εξάρτησης και χωρία επιρροής.

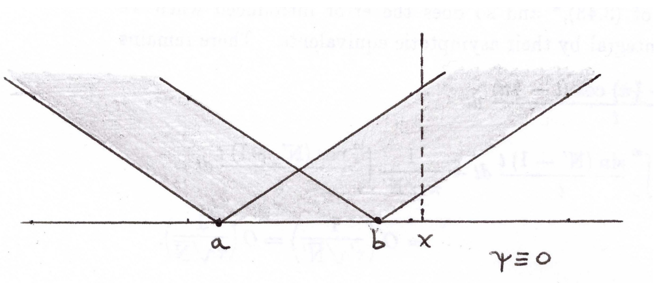
Από τον τύπο (3.8) μπορουμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις σε σχέση με την εξάρτηση της τιμής της λύσης u σε κάποιο σημείο (x,t) με $t>0$ από τις τιμές των αρχικών συνθηκών ϕ και ψ.

Στον υπολογισμό της τιμής $u(x,t)$ η ϕ συμβάλλει μόνο με δύο τιμές της: τις τιμές της στα σημεία $x-ct$ και $x+ct$. Επίσης, στον υπολογισμό της τιμής $u(x,t)$ η ψ συμβάλλει μόνο με τις τιμές της στο διάστημα $[x-ct,x+ct]$ μέσω του υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds$. Άρα, συνολικά, στον υπολογισμό της $u(x,t)$ με $t>0$ οι αρχικές συνθήκες συμβάλλουν μόνο μέσω των τιμών τους στο διάστημα $[x-ct,x+ct]$. Οποιαδήποτε αλλαγή των αρχικών συνθηκών έξω από αυτό το διάστημα δεν επηρεάζει την τιμή στο σημείο (x,t). Έτσι λέμε ότι το $[x-ct,x+ct]$ είναι το **διάστημα εξάρτησης** του σημείου (x,t).

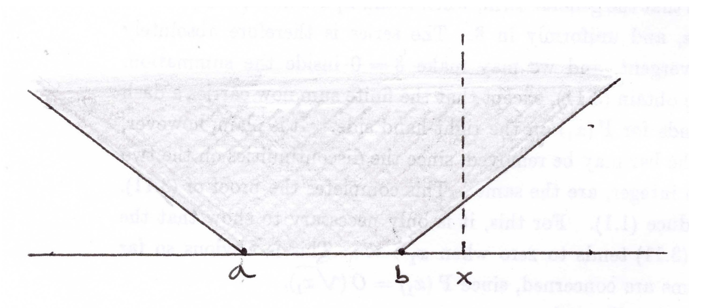


Αυτά μπορούμε να τα δούμε και "ανάποδα". Αν πάρουμε ένα σημείο $(x_0,0)$ του x-άξονα, τότε πάλι από τον τύπο (3.8) βλέπουμε ότι η τιμή $\phi(x_0)$ συμβάλλει στον υπολογισμό του $u(x,t)$ με $t>0$ μόνο αν $x-ct=x_0$ ή $x+ct=x_0$. Δηλαδή η τιμή $\phi(x_0)$ επηρεάζει την τιμή $u(x,t)$ μόνο στα σημεία των δύο χαρακτηριστικών ημιευθειών με κορυφή το $(x_0,0)$ και θετική κατεύθυνση χρόνου. Επίσης, η τιμή $\psi(x_0)$ συμβάλλει στον υπολογισμό του $u(x,t)$ με $t>0$ μόνο αν $x-ct\leq x_0\leq x+ct$. Δηλαδή η τιμή $\psi(x_0)$ επηρεάζει την τιμή $u(x,t)$ μόνο στα σημεία της γωνίας ανάμεσα στις δύο χαρακτηριστικές ημιευθείες με κορυφή το $(x_0,0)$ και θετική κατεύθυνση χρόνου. Έτσι λέμε ότι η γωνία ανάμεσα στις δύο χαρακτηριστικές ημιευθείες με κορυφή το $(x_0,0)$ και θετική κατεύθυνση χρόνου είναι το **χωρίο επιρροής** του x_0.





Αν η συνάρτηση ϕ μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$ και η ψ είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, τότε η λύση $u(x,t)$ με $t>0$ είναι ταυτοτικά ίση με 0 έξω από την ένωση των δύο ζωνών που σχηματίζονται από τις χαρακτηριστικές ημιευθείες με θετική κατεύθυνση χρόνου και με κορυφές στα σημεία $(x,0)$ με $a\leq x\leq b$. Δηλαδή, η ένωση αυτών των δύο ζωνών αποτελεί το χωρίο επιρροής του διαστήματος $[a,b]$. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι για κάθε σταθερό $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές $u(x,t)$ δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες με 0 μόνο για ένα φραγμένο χρονικό διάστημα: το χρονικό διάστημα που καθορίζεται από την τομή της κατακόρυφης ημιευθείας (x,t) με $t > 0$ με το προαναφερθέν χωρίο επιρροής.



Αν οι συναρτήσεις ϕ, ψ μηδενίζονται έξω από κάποιο διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$ (και η ψ δεν είναι κατ' ανάγκη ταυτοτικά ίση με 0 σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$), τότε η λύση $u(x,t)$ με $t > 0$ είναι ταυτοτικά ίση με 0 έξω από το χωρίο που σχηματίζεται στο άνω xt-ημιεπίπεδο και φράσσεται από το διάστημα $[a,b]$, από την χαρακτηριστική ημιευθεία με θετική κατεύθυνση χρόνου, κορυφή στο σημείο $(a,0)$ και κατεύθυνση προς τα αριστερά και από την χαρακτηριστική ημιευθεία με θετική κατεύθυνση χρόνου, κορυφή στο σημείο $(b,0)$ και κατεύθυνση προς τα δεξιά. Το χωρίο αυτό αποτελεί το χωρίο επιρροής του διαστήματος $[a,b]$. Μπορούμε πάλι να πούμε ότι για κάθε σταθερό $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές $u(x,t)$ δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες με 0 για ένα μη-φραγμένο χρονικό διάστημα: το χρονικό διάστημα που καθορίζεται από την τομή της κατακόρυφης ημιευθείας (x,t) με $t > 0$ με το προαναφερθέν χωρίο επιρροής.

Ασκήσεις.

3.1.1. Έστω $u(x,t)$ λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ με $c > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $v(x,t) = u(x-a,t)$ και $w(x,t) = u(bx, bt)$ είναι επίσης λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

3.1.2. Έστω $u(x,t)$ λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ με $c > 0$. Αν η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τρίτης τάξης, αποδείξτε ότι και οι u_x, u_t είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης.

3.1.3. Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες ϕ, ψ είναι άρτιες στο $\mathbb{R}$ ως προς το x_0, δηλαδή ότι ισχύει $\phi(2x_0 - x) = \phi(x)$ και $\psi(2x_0 - x) = \psi(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

είναι άρτια ως προς τον άξονα με εξίσωση $x = x_0$, δηλαδή ότι ισχύει $u(2x_0 - x, t) = u(x,t)$ για κάθε (x,t).

3.1.4. Θεωρούμε τη λύση $u = u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

η οποία δίνεται από τον τύπο d' Alembert. Γνωρίζουμε ότι $\psi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\psi(x_0) > 0$ σε κάποιο σημείο x_0, βρείτε το χωρίο του άνω xt-ημιεπιπέδου στο οποίο ισχύει αναγκαστικά $u(x,t) > 0$.

3.1.5. Θεωρούμε τη λύση $u = u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

η οποία δίνεται από τον τύπο d' Alembert. Γνωρίζουμε ότι $\phi(x), \psi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\phi(x_1), \psi(x_2) > 0$ σε κάποια σημεία x_1, x_2, βρείτε το χωρίο του άνω xt-ημιεπιπέδου στο οποίο ισχύει αναγκαστικά $u(x,t) > 0$.

3.1.6. Έστω ότι κάποια από τις $\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi'$ παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η λύση του προβλήματος 3.1.3 που δίνεται από τον τύπο του d' Alembert ή κάποιες από τις μερικές παραγώγους της μέχρι δεύτερης τάξης παρουσιάζουν ασυνέχεια στα σημεία των χαρακτηριστικών ευθειών με εξισώσεις $x - ct = x_0$ και $x + ct = x_0$. Μελετήστε διεξοδικά το θέμα. Για παράδειγμα, αν η ϕ έχει άλμα p στο x_0, δηλαδή $\lim_{x \to x_0+} \phi(x) - \lim_{x \to x_0-} \phi(x) = p$, πώς θα συμπεριφέρεται η $u(x,t)$ στα σημεία $x_0 - ct$ και $x_0 + ct$;

3.1.7. Λύστε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = x & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = e^x & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.1.8. Έστω λύση $u(x,t)$ του προβλήματος 3.1.3. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του d' Alembert για να αποδείξτε ότι για κάθε $(\bar{x}, \bar{t})$ με $\bar{t} > 0$ ισχύει

$$|u(\bar{x}, \bar{t})| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)| + \bar{t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|.$$

Τώρα έστω λύση $u(x,t)$ του προβλήματος 3.1.3 και λύση $u_0(x,t)$ του προβλήματος 3.1.3 αλλά με αρχικές συνθήκες ϕ_0, ψ_0. Αποδείξτε ότι για κάθε $(\bar{x}, \bar{t})$ με $\bar{t} > 0$ ισχύει

$$|u(\bar{x}, \bar{t}) - u_0(\bar{x}, \bar{t})| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x) - \phi_0(x)| + \bar{t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x) - \psi_0(x)|.$$

3.1.3 Η διατήρηση της ενέργειας.

Οι παραστάσεις

$$KE[x_1, x_2; t] = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_t^2(x,t)\, dx, \qquad PE[x_1, x_2; t] = \frac{c^2}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,t)\, dx$$

ονομάζονται **κινητική ενέργεια** και **δυναμική ενέργεια**, αντιστοίχως, της λύσης $u(x,t)$ της κυματικής εξίσωσης κατά τη χρονική στιγμή t και ανάμεσα στα x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Το γιατί θα το δούμε στην επόμενη υποενότητα όταν θα μιλήσουμε για το φυσικό νόημα της κυματικής εξίσωσης.

Η παράσταση

$$E[x_1, x_2; t] = KE[x_1, x_2; t] + PE[x_1, x_2; t] = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))\, dx$$

ονομάζεται **ενέργεια** της λύσης $u(x,t)$ κατά τη χρονική στιγμή t και ανάμεσα στα x_1, x_2.

Αν μπορούν να οριστούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$KE(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx, \qquad PE(t) = \frac{c^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)\, dx,$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))\,dx,$$

τότε αυτά ονομάζονται **συνολική κινητική ενέργεια, συνολική δυναμική ενέργεια** και **συνολική ενέργεια** της λύσης $u(x,t)$ κατά τη χρονική στιγμή t.

Αν, για παράδειγμα, για κάθε t υπάρχει κάποιο φραγμένο διάστημα $[x_1, x_2]$ έξω από το οποίο οι $u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)$ μηδενίζονται, τότε τα τρία γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται διότι είναι ίσα με τα αντίστοιχα ολοκληρώματα στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, αυτό ισχύει όταν οι αρχικές συνθήκες ϕ, ψ μηδενίζονται έξω από κάποιο διάστημα $[a,b]$. Στους παρακάτω υπολογισμούς θα υποθέσουμε για απλούστευση ότι ισχύει ακριβώς αυτό. Ότι δηλαδή για κάθε t υπάρχει κάποιο φραγμένο διάστημα $[x_1, x_2]$ έξω από το οποίο οι $u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)$ μηδενίζονται:

$$u(x,t) = u_x(x,t) = u_t(x,t) = 0 \quad \text{για } x \le x_1 \text{ και } x_2 \le x.$$

(Φυσικά το διάστημα $[x_1, x_2]$ μπορεί να εξαρτάται από την τιμή του t.)

Τώρα θα εξετάσουμε τον ρυθμό μεταβολής της συνολικής ενέργειας της λύσης:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (2u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + 2c^2 u_x(x,t)u_{xt}(x,t))\,dx \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t(x,t)u_{xx}(x,t) + u_x(x,t)u_{xt}(x,t))\,dx.
\end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ της κυματικής εξίσωσης. Τώρα αντικαθιστούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με το ολοκλήρωμα στο $[x_1, x_2]$ και κάνουμε μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο πρώτο μέρος του μεταφέροντας μια x-παράγωγο από την u_{xx} στην u_t:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= c^2 \int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx + c^2 \int_{x_1}^{x_2} u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx \\
&= c^2\Big(u_t(x_2,t)u_x(x_2,t) - u_t(x_1,t)u_x(x_1,t)\Big) - c^2 \int_{x_1}^{x_2} u_{xt}(x,t)u_x(x,t)\,dx \\
&\quad + c^2 \int_{x_1}^{x_2} u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στη λεγόμενη **Αρχή της Διατήρησης της συνολικής Ενέργειας** της λύσης της κυματικής εξίσωσης: η συνολική ενέργεια $E(t)$ είναι σταθερή ως προς τον χρόνο.

Ειδικώτερα, ισχύει $E(t) = E(0)$ και αυτό γράφεται

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t))\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^2(x) + c^2 (\phi')^2(x))\,dx,$$

όπου $\phi(x) = u(x,0)$ και $\psi(x) = u_t(x,0)$ είναι οι αρχικές συνθήκες.

3.1.4 Το φυσικό περιεχόμενο της κυματικής εξίσωσης.

Θεωρούμε ένα νήμα, π.χ. τη χορδή μιας κιθάρας, αποτελούμενο από μόρια τα οποία, λόγω της ελκτικής τάσης που ασκεί το καθένα προς τα αμέσως γειτονικά του, συγκρατούνται και σχηματίζουν μια συνεκτική καμπύλη. Υποθέτουμε ότι η τάση που ασκεί το κάθε μόριο προς τα γειτονικά του έχει μέτρο ίσο με T. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η απόσταση ανάμεσα σε γειτονικά μόρια είναι απειροελάχιστη ώστε το νήμα να εμφανίζει εικόνα συνεχούς. Το ότι η τάση που ασκείται από ένα μόριο στο γειτονικό του έχει την κατεύθυνση της χορδής που συνδέει τα δύο μόρια συνεπάγεται ότι (επειδή η χορδή έχει απειροελάχιστο μήκος) η κατεύθυνση της τάσης που ασκεί ένα μόριο στα γειτονικά του είναι ίδια με την κατεύθυνση της εφαπτόμενης της καμπύλης του νήματος στο σημείο στο οποίο βρίσκεται αυτό το μόριο.

Υποθέτουμε ότι η καμπύλη του νήματος βρίσκεται σε ένα σταθερό κατακόρυφο xu-επίπεδο και συμβολίζουμε $u(x,t)$ τη συνάρτηση η οποία τη χρονική στιγμή t έχει γράφημα ίδιο με την καμπύλη του νήματος.

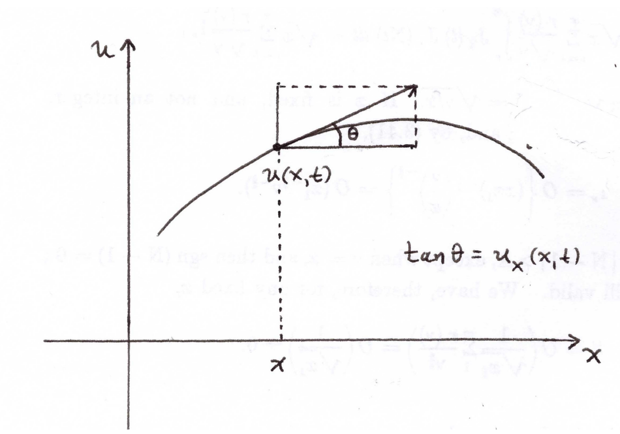
Τότε σε κάθε σημείο $u(x,t)$ του νήματος ασκείται από το γειτονικό του προς τα δεξιά σημείο μια τάση προς τα δεξιά ίση με

$$(T\cos\theta, T\sin\theta)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο σημείο $u(x,t)$ με τον θετικό x-άξονα. Άρα

$$\tan\theta = u_x(x,t)$$

και άρα



$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}, \qquad \sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}$$

και, επομένως, η τάση είναι ίση με

$$\Big(\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}, \frac{T u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\Big).$$

Τώρα θα θυμηθούμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ με κέντρο $y=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}\binom{-1/2}{k}y^k = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \cdots + (-1)^k\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}y^k + \cdots .$$

Αντικαθιστώντας το y με το y^2 έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 - \cdots + (-1)^k\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!}y^{2k} + \cdots .$$

Όταν οι τιμές του y είναι πολύ μικρές (θετικές ή αρνητικές), οι δυνάμεις του y με εκθέτη ≥ 2 θεωρούνται αμεληταίες σε σχέση με τη δύναμη y και μπορούμε να προσεγγίσουμε με ακρίβεια τη συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ με το άθροισμα μόνο του σταθερού όρου και του όρου που περιέχει το y, γράφοντας

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \qquad \text{για μικρό } y.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σειρά Taylor με το y βρίσκουμε την

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{8}y^5 - \cdots + (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} y^{2k+1} + \cdots .$$

Παραλείποντας πάλι τις δυνάμεις με εκθέτη ≥ 2, γράφουμε

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = y \qquad \text{για μικρό } y.$$

Μία παραδοχή που κάνουμε όταν εξετάζουμε το φυσικό φαινόμενο της κίνησης του νήματος είναι ότι η $u_x(x,t)$ έχει πολύ μικρές τιμές σε όλη τη χρονική διάρκεια του φαινομένου. Άρα μπορούμε να γράψουμε με μεγάλη ακρίβεια:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} = 1, \qquad \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} = u_x(x,t).$$

Άρα ο τύπος της τάσης η οποία ασκείται στο σημείο $u(x,t)$ από το γειτονικό του προς τα δεξιά σημείο είναι με μεγάλη ακρίβεια ο

$$(T, Tu_x(x,t)).$$

Ας πάρουμε τώρα ένα οποιοδήποτε τμήμα του νήματος, π.χ. αυτό που βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$ με $x_1 < x_2$. Στο τμήμα αυτό ασκούνται δύο εξωτερικές δυνάμεις: η

$$(T, Tu_x(x_2,t))$$

από το δεξιό γειτονικό σημείο του άκρου $u(x_2,t)$ και η

$$(-T, -Tu_x(x_1,t))$$

από το αριστερό γειτονικό σημείο του άκρου $u(x_1,t)$. Όλες οι άλλες δυνάμεις ανάμεσα σε γειτονικά σημεία μέσα στο ίδιο το τμήμα αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα η συνολική δύναμη που ασκείται στο τμήμα του νήματος είναι ίση με

$$(T, Tu_x(x_2,t)) - (T, Tu_x(x_1,t)) = (0, Tu_x(x_2,t) - Tu_x(x_1,t)). \tag{3.9}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η δύναμη έχει (με μεγάλη ακρίβεια) μηδενική οριζόντια συνιστώσα και άρα έχει κατακόρυφη κατεύθυνση.

Θα υπολογίσουμε τώρα την ίδια δύναμη με έναν διαφορετικό τρόπο.

Το ότι έχουμε κάνει την παραδοχή ότι οι τιμές $u_x(x,t)$ είναι αμελητέες σημαίνει ότι η κίνηση του σημείου $u(x,t)$ στην οριζόντια κατεύθυνση είναι αμελητέα και, επομένως, ότι το σημείο αυτό κινείται ουσιαστικά μόνο στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Ας πάρουμε ένα πολύ μικρό τμήμα του νήματος ανάμεσα σε δυο πολύ κοντινά σημεία του και έστω Δs το μήκος του. Θεωρούμε ότι η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι σταθερή και ίση με ρ, οπότε η μάζα του μικρού τμήματος είναι ίση με

$$\rho\Delta s = \rho\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} = \rho\sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x,$$

όπου Δx είναι ο οριζόντια προβολή του τμήματος και Δu η κατακόρυφη προβολή του.
Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι ισχύει

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x(x,t)$$

για κάποιο σημείο $u(x,t)$ του τμήματος, οπότε η μάζα του είναι ίση με

$$\rho\sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,\Delta x.$$

Το σημείο $u(x,t)$ του τμήματος έχει επιτάχυνση ίση με

$$u_{tt}(x,t)$$

και αυτή είναι με μεγάλη ακρίβεια σταθερή σε όλα τα σημεία του τμήματος, διότι το τμήμα είναι πολύ μικρό και η συνάρτηση u_{tt} είναι συνεχής.
Άρα η δύναμη που ασκείται επί του τμήματος αυτού είναι, βάσει του Νόμου του Newton, ίση με

$$\rho\sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,\Delta x\,u_{tt}(x,t).$$

Γράφοντας τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\sqrt{1+y^2}$, όπως κάναμε προηγουμένως, και παραλείποντας δυνάμεις του y με εκθέτη ≥ 2, βλέπουμε ότι

$$\sqrt{1+y^2}=1 \qquad \text{για μικρό } y.$$

Άρα με μεγάλη ακρίβεια έχουμε ότι το μέτρο της δύναμης που ασκείται επί του μικρού τμήματος είναι ίσο με

$$\rho\Delta x\,u_{tt}(x,t).$$

Διαμερίζοντας το τμήμα του νήματος ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$ σε πολύ μικρά τμήματα όπως το παραπάνω και θεωρώντας και τα ενδιάμεσα σημεία $u(x,t)$ έχουμε το μέτρο της συνολικής δύναμης που ασκείται σ' αυτό το τμήμα:

$$\sum\rho\Delta x\,u_{tt}(x,t)=\rho\sum u_{tt}(x,t)\Delta x.$$

Θεωρώντας όλο και πιο λεπτές διαμερίσεις σε περισσότερα και μικρότερα τμήματα και παίρνοντας όριο, βρίσκουμε τον τύπο

$$\rho\int_{x_1}^{x_2}u_{tt}(x,t)\,dx \tag{3.10}$$

για το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο τμήμα του νήματος ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$.
Έχουμε ήδη πει ότι κάθε σημείο του τμήματος κινείται με μεγάλη ακρίβεια στην κατακόρυφη κατεύθυνση, οπότε όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα διάφορα σημεία είναι κατακόρυφες και άρα και η συνολική δύναμη (3.10) έχει κατακόρυφη κατεύθυνση. Εξισώνοντας τους τύπους (3.9) και (3.10) που βρήκαμε για την ίδια δύναμη έχουμε ότι

$$Tu_x(x_2,t)-Tu_x(x_1,t)=\rho\int_{x_1}^{x_2}u_{tt}(x,t)\,dx.$$

Επειδή τα x_1,x_2 είναι τυχαία, παραγωγίζουμε ως προς x στο σημείο x_2 και βρίσκουμε

$$Tu_{xx}(x_2,t)=\rho u_{tt}(x_2,t).$$

Πάλι, επειδή το x_2 είναι τυχαίο, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$Tu_{xx}=\rho u_{tt}.$$

Ορίζουμε

$$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

και συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $u(x,t)$ η οποία περιγράφει τη θέση των διαφόρων σημείων του νήματος σε σχέση με τον χρόνο ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0.$$

Ένα ακόμη σημείο το οποίο πρέπει να θίξουμε είναι η ενέργεια του νήματος.

Όπως πριν, θεωρούμε το τμήμα του νήματος ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$ και το διαμερίζουμε σε πολύ μικρά τμήματα μήκους Δs. Όπως είδαμε, η μάζα αυτού του μικρού τμήματος είναι ίση με

$$\rho\Delta s = \rho\Delta x$$

(μετά από την προσέγγιση του Δs με το Δx) και άρα η κινητική του ενέργεια είναι ίση με

$$\frac{1}{2}\rho\Delta x\, u_t^2(x,t),$$

όπου $u(x,t)$ είναι κάποιο ενδιάμεσο σημείο αυτού του μικρού τμήματος. (Το τμήμα είναι πολύ μικρό και η συνάρτηση u_t είναι συνεχής, οπότε μπορεί με μεγάλη ακρίβεια να θεωρηθεί σταθερή στο τμήμα αυτό.)

Άρα η κινητική ενέργεια του τμήματος ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$ είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μικρών τμημάτων:

$$\sum \frac{1}{2}\rho\Delta x\, u_t^2(x,t) = \frac{\rho}{2}\sum u_t^2(x,t)\,\Delta x.$$

Θεωρώντας όλο και πιο λεπτές διαμερίσεις σε περισσότερα και μικρότερα τμήματα και παίρνοντας όριο, βρίσκουμε τον τύπο

$$KE[x_1,x_2;t] = \frac{\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2} u_t^2(x,t)\,dx \tag{3.11}$$

για την κινητική ενέργεια του τμήματος ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$.

Για να αναπτυχθούν δύο γειτονικά σημεία του νήματος από μια θέση στην οποία ταυτίζονται σε μια θέση στην οποία απέχουν απόσταση ίση με Δs χρειάζεται να υπερνικηθεί η σταθερή τάση μέτρου T με την οποία έλκονται. Το έργο που παράγεται κατά τη διάρκεια αυτής της μετακίνησης είναι ίσο με

$$T\Delta s.$$

Άρα το έργο που παράγεται για να αναπτυχθεί ένα τμήμα του νήματος από τη θέση στην οποία βρίσκεται συγκεντρωμένο ολόκληρο σε ένα σημείο, π.χ. στο σημείο $u(x_1,t)$, στη θέση που έχει ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$ είναι ίσο με το άθροισμα

$$\sum T\Delta s = T\sum \Delta s = TL,$$

όπου L είναι το μήκος της καμπύλης $u(x,t)$ ανάμεσα στα σημεία $u(x_1,t)$ και $u(x_2,t)$. Για να βρούμε αυτό το μήκος σκεφτόμαστε ως εξής. Όπως είχαμε δει προηγουμένως, είναι

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x = \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,\Delta x,$$

οπότε

$$L = \sum \Delta s = \sum \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,\Delta x.$$

Θεωρώντας όλο και πιο λεπτές διαμερίσεις σε περισσότερα και μικρότερα τμήματα και παίρνοντας όριο, βρίσκουμε τον τύπο

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,dx.$$

Βάσει του κατάλληλου αναπτύγματος Taylor γράφουμε με μεγάλη ακρίβεια την ισότητα

$$\sqrt{1+u_x^2(x,t)} = 1 + \frac{1}{2}u_x^2(x,t),$$

οπότε το μήκος είναι ίσο με

$$L = (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,t)\,dx.$$

Δηλαδή το έργο το οποίο έχει παραχθεί για να πάρει το τμήμα αυτό το συγκεκριμένο σχήμα του από τη θέση στην οποία είναι συρρικνωμένο σε ένα σημείο είναι ίσο με

$$T(x_2 - x_1) + \frac{T}{2}\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,t)\,dx.$$

Ειδικώτερα, το έργο που απαιτείται για να πάρει ένα τμήμα του νήματος ευθύγραμμο σχήμα από το σημείο $(x_1, 0)$ στο σημείο $(x_2, 0)$ του x-άξονα ξεκινώντας από τη θέση στην οποία είναι συρρικνωμένο σε ένα σημείο είναι ίσο με $T(x_2 - x_1)$. Αφαιρώντας, βρίσκουμε ότι το έργο που απαιτείται για να πάρει το τμήμα αυτό το συγκεκριμένο σχήμα του ξεκινώντας από μια οριζόντια ευθύγραμμη θέση είναι ίσο με

$$PE[x_1, x_2; t] = \frac{T}{2}\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,t)\,dx = \frac{\rho c^2}{2}\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x,t)\,dx. \tag{3.12}$$

Αυτή είναι η δυναμική ενέργεια του τμήματος της καμπύλης ανάμεσα στα σημεία $u(x_1, t)$ και $u(x_2, t)$.

Η ενέργεια του τμήματος είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας (3.11) και της δυναμικής ενέργειας (3.12), δηλαδή

$$E[x_1, x_2; t] = \rho\,\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right) dx.$$

Εκτός από τον σταθερό παράγοντα ρ, αυτός είναι ο τύπος της ενέργειας που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη υποενότητα για να αποδείξουμε ότι η ενέργεια παραμένει σταθερή και αυτός θα είναι ο τύπος (πλην του ρ) που θα χρησιμοποιούμε για την ενέργεια οποιουδήποτε "συστήματος" υπακούει στην κυματική εξίσωση.

3.1.5 Ένα σταθερό σημείο. Συμμετρία.

Θα υποθέσουμε ότι η λύση της κυματικής εξίσωσης ικανοποιεί τη συνθήκη $u(x_0, t) = 0$ για κάθε t. Δηλαδή έχουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x_0, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.13}$$

Με τους όρους της προηγούμενης υποενότητας μπορούμε να πούμε ότι μελετάμε την κατακόρυφη κίνηση ενός νήματος του οποίου ένα σημείο είναι σταθεροποιημένο στον x-άξονα.

Εφαρμόζουμε στον γνωστό τύπο της γενικής λύσης της κυματικής εξίσωσης

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

την επιπλέον συνθήκη και έχουμε ότι

$$f(x_0 - ct) + g(x_0 + ct) = 0 \qquad \text{για κάθε } t$$

η, ισοδύναμα,

$$g(x_0 + ct) = -f(x_0 - ct) \qquad \text{για κάθε } t.$$

Αλλάζουμε μεταβλητή μέσω του $x = x_0 + ct$ και βρίσκουμε το ισοδύναμο

$$g(x) = -f(2x_0 - x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Επομένως, η επιπλέον συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι η μία από τις δύο αυθαίρετες συναρτήσεις f, g σχετίζεται με την άλλη μέσω του τελευταίου τύπου.

Τότε έχουμε

$$g(x+ct) = -f(2x_0 - (x+ct)) = -f(2x_0 - x - ct).$$

'Ετσι ο τύπος της λύσης γράφεται

$$u(x,t) = f(x-ct) - f(2x_0 - x - ct) \qquad \text{για κάθε } x \text{ και } t.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$u(2x_0 - x, t) = f((2x_0 - x) - ct, t) - f(2x_0 - (2x_0 - x) - ct) = f(2x_0 - x - ct) - f(x - ct).$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει

$$u(2x_0 - x, t) = -u(x,t) \qquad \text{για κάθε } x \text{ και } t. \tag{3.14}$$

Επειδή τα σημεία $(2x_0 - x, t)$ και (x,t) είναι συμμετρικά ως προς τον κατακόρυφο άξονα με εξίσωση $x = x_0$, η τελευταία ισότητα λέει ότι η u είναι *περιττή* ως προς αυτόν τον άξονα.

Αντιστρόφως, αν η λύση u της κυματικής εξίσωσης είναι περιττή ως προς τον άξονα με εξίσωση $x = x_0$, δηλαδή ισχύει η $u(2x_0 - x, t) = -u(x,t)$ για κάθε x, t, τότε με $x = x_0$ έχουμε ότι ισχύει $u(x_0, t) = 0$ για κάθε t.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι μια λύση της κυματικής εξίσωσης είναι σταθερή 0 στον άξονα με εξίσωση $x = x_0$ αν και μόνο αν είναι περιττή ως προς τον ίδιο άξονα.

Ας δούμε τώρα τί σημαίνει αυτό σε σχέση με δοσμένες αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u(x_0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.15}$$

Από την (3.14) με $t = 0$ παίρνουμε

$$\phi(2x_0 - x) = -\phi(x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Επομένως, η ϕ είναι περιττή ως προς το x_0.
Επίσης, παραγωγίζοντας την (3.14) ως προς t, βρίσκουμε

$$u_t(2x_0 - x, t) = -u_t(x,t) \qquad \text{για κάθε } x \text{ και } t$$

και με $t = 0$ παίρνουμε

$$\psi(2x_0 - x) = -\psi(x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Επομένως, και η ψ είναι περιττή ως προς το x_0.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_0. Από τον τύπο του d' Alembert έχουμε

$$u(x_0,t) = \frac{\phi(x_0 - ct) + \phi(x_0 + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0 - ct}^{x_0 + ct} \psi(s)\, ds.$$

Τα σημεία $x_0 - ct$ και $x_0 + ct$ είναι συμμετρικά ως προς το x_0, οπότε και οι δύο όροι του τελευταίου αθροίσματος είναι ίσοι με 0. Άρα

$$u(x_0,t) = 0 \qquad \text{για κάθε } t.$$

Αποδείξαμε ότι μια λύση της κυματικής εξίσωσης είναι σταθερή 0 στον άξονα με εξίσωση $x = x_0$ αν και μόνο αν και οι δύο αρχικές συνθήκες ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_0.

Αυτό το εκμεταλλευόμαστε με τον εξής τρόπο. Έστω ότι έχουμε να λύσουμε την κυματική εξίσωση στο ημιεπίπεδο που βρίσκεται δεξιά του κατακόρυφου άξονα με εξίσωση $x = x_0$ έτσι ώστε η λύση να είναι σταθερή 0 στον συνοριακό άξονα και με αρχικές συνθήκες ϕ, ψ στην ημιευθεία του x-άξονα δεξιά από το x_0, δηλαδή το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } x_0 < x \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x_0 \le x \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x_0 \le x \\ u(x_0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.16}$$

Τότε επεκτείνουμε τις συναρτήσεις ϕ, ψ από την ημιευθεία $[x_0, +\infty)$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ορίζοντας

$$\phi(x) = -\phi(2x_0 - x), \quad \psi(x) = -\psi(2x_0 - x) \qquad \text{για } x \le x_0.$$

(Αν $x \le x_0$, τότε $2x_0 - x \ge x_0$, οπότε οι ϕ, ψ είναι ήδη ορισμένες στο $2x_0 - x$.)
Μια μικρή παρατήρηση. Στο σημείο x_0 κινδυνεύουμε να έχουμε δύο τιμές: την "παλιά" $\phi(x_0)$ και την "καινούργια" $-\phi(2x_0 - x_0) = -\phi(x_0)$. Για να μην υπάρχει πρόβλημα πρέπει να είναι $\phi(x_0) = 0$. Όμως, αυτό ισχύει λόγω της δεύτερης ισότητας (3.16) για $x = x_0$ και της τέταρτης ισότητας (3.16) για $t = 0$. Ομοίως, πρέπει να ισχύει $\psi(x_0)$. Πράγματι, παραγωγίζοντας την τέταρτη ισότητα ως προς t, βρίσκουμε $u_t(x_0, t) = 0$ για κάθε t. Από αυτό με $t = 0$ και από την τρίτη ισότητα (3.16) για $x = x_0$ έχουμε ότι $\psi(x_0) = 0$.
Μετά από αυτήν την επέκταση οι ϕ, ψ είναι, προφανώς, περιττές στο $\mathbb{R}$ ως προς το x_0.
Τώρα λύνουμε την κυματική εξίσωση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$ με τις συνοριακές συνθήκες ϕ, ψ ορισμένες στο $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.17}$$

Επειδή οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_0 συνεπάγεται ότι η λύση u που θα βρούμε (με τον τύπο του d' Alembert) είναι σταθερή 0 στον άξονα με εξίσωση $x = x_0$. Άρα η u είναι λύση του προβλήματος (3.16).

Υπάρχει ένα λεπτό σημείο στα προηγούμενα που πρέπει να ξεκαθαριστεί. Η αρχική συνθήκη ϕ του προβλήματος (3.16) υποτίθεται ότι είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_0, +\infty)$ και η ψ είναι μία φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_0, +\infty)$. Για να λυθεί το "βοηθητικό" πρόβλημα (3.17) πρέπει οι επεκτεταμένες ϕ, ψ να έχουν τις ίδιες ιδιότητες στο $\mathbb{R}$. Από τον τρόπο ορισμού τους έχουν αυτομάτως αυτές τις ιδιότητες στο $(-\infty, x_0]$. Επειδή οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_0 και έχουν τιμή ίση με 0 στο x_0, συνεπάγεται ότι είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δει κανείς (άσκηση!) ότι (ακριβώς επειδή είναι περιττές ως προς το x_0) οι ϕ', ψ' είναι κι αυτές συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και άρτιες ως προς το x_0. Για να είναι η ϕ'' συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεχής στο x_0. Πάλι είναι εύκολο να δει κανείς (άσκηση!) ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\phi''(x_0) = 0$. Αυτό δεν προκύπτει από τις ισότητες (3.16), οπότε πρέπει να τεθεί ως επιπλέον περιορισμός για την ϕ.

Παράδειγμα 3.1.1. Λύνουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } 0 \le x \\ u_t(x,0) = x^2 & \text{για } 0 \le x \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Έχουμε την κυματική εξίσωση στο δεξιό xt-ημιεπίπεδο με αρχικές συνθήκες στον μη-αρνητικό x-ημιάξονα και συνοριακή συνθήκη στο t-άξονα.
Οι αρχικές συνθήκες είναι ορισμένες στο $[0, +\infty)$ και θα τις επεκτείνουμε στο $(-\infty, 0]$ ώστε να

είναι περιττές στο $(-\infty, +\infty)$ ως προς το 0.
Η συνάρτηση $\sin x$ είναι ούτως ή άλλως ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και ως τέτοια είναι περιττή ως προς το 0. Άρα απλώς θεωρούμε την $\sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$.
Δεν μπορούμε, όμως, να πούμε το ίδιο και για την x^2, η οποία, αν θεωρηθεί ως συνάρτηση στο $(-\infty, +\infty)$, δεν είναι περιττή ως προς το 0. Ορίζουμε, λοιπόν,

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{για } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{για } x \leq 0 \end{cases}$$

Η $\psi(x)$ είναι περιττή στο $(-\infty, +\infty)$ ως προς το 0 και είναι επέκταση της x^2 από το $[0, +\infty)$ στο $(-\infty, +\infty)$.
Τώρα λύνουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Η λύση δίνεται από τον τύπο του d' Alembert:

$$u(x,t) = \frac{\sin(x-ct) + \sin(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds = \sin x \cos ct + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds.$$

Η $u(x,t)$ που βρήκαμε ικανοποιεί την κυματική εξίσωση στο xt-επίπεδο, οπότε την ικανοποιεί και στο δεξιό xt-ημιεπίπεδο. Επίσης, ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες στον x-άξονα, οπότε τις ικανοποιεί και στον μη-αρνητικό x-ημιάξονα. Τέλος, αυτομάτως ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη στον t-άξονα, όπως εγγυάται η θεωρία μας. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε:

$$u(0,t) = \sin 0 \cos ct + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \psi(s)\,ds = 0$$

διότι η ψ είναι περιττή ως προς το 0.
Άρα η $u(x,t)$ που βρήκαμε είναι λύση του αρχικού προβλήματος στο δεξιό xt-ημιεπίπεδο.
Υπάρχει ένα τελευταίο σημείο που πρέπει να προσέξουμε. Στο δεύτερο πρόβλημα πρέπει οι αρχικές συνθήκες να είναι συνεχώς παραγωγίσιμες μέχρι κάποια τάξη. Ειδικώτερα, πρέπει η $\sin x$ να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και, πράγματι, είναι. Επίσης, πρέπει η $\psi(x)$ να είναι (μία φορά) συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$. Εδώ το πιθανό πρόβλημα βρίσκεται στο σημείο 0. Ελέγξτε ότι, πράγματι, η συνάρτηση έχει παράγωγο συνεχή και στο 0.

Ασκήσεις.

3.1.9. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } x > 0 \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x \geq 0 \\ u_t(x,0) = \sin 2x & \text{για } x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.1.6 Δύο σταθερά σημεία. Συμμετρία και περιοδικότητα.

Τώρα θα υποθέσουμε ότι η λύση της κυματικής εξίσωσης ικανοποιεί δύο συνθήκες: $u(x_0,t) = u(x_1,t) = 0$ για κάθε t με $x_0 < x_1$. Δηλαδή έχουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x_0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(x_1,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.18}$$

Με φυσικούς όρους, έχουμε ένα νήμα με δύο σημεία του ακίνητα στον x-άξονα. Όπως π.χ. η χορδή μιας κιθάρας.

Τώρα θα συνδυάσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας. Το ότι η λύση της κυματικής ικανοποιεί τη δεύτερη ισότητα (3.18) ισοδυναμεί με το ότι είναι περιττή ως προς τον άξονα με εξίσωση $x = x_0$. Και το ότι ικανοποιεί την τρίτη ισότητα (3.18) ισοδυναμεί με το ότι είναι περιττή ως προς τον άξονα με εξίσωση $x = x_1$. Τώρα θα δούμε ότι το να είναι περιττή ως προς τους δύο άξονες ισοδυναμεί με το να είναι περιττή ως προς τον ένα άξονα από τους δύο και L-περιοδική, όπου $L = 2(x_1 - x_0)$, ως προς τη μεταβλητή x.

Πράγματι, το ότι η u είναι περιττή ως προς τους άξονες με εξισώσεις $x = x_0$ και $x = x_1$ σημαίνει ότι

$$u(2x_0 - x, t) = -u(x, t), \quad u(2x_1 - x, t) = -u(x, t) \qquad \text{για κάθε } x, t.$$

Συνεπάγεται

$$u(L + x, t) = u(2x_1 - (2x_0 - x), t) = -u(2x_0 - x, t) = u(x, t) \qquad \text{για κάθε } x, t.$$

Άρα ισχύει

$$u(2x_0 - x, t) = -u(x, t), \quad u(L + x, t) = u(x, t) \qquad \text{για κάθε } x, t \tag{3.19}$$

οπότε η u είναι περιττή ως προς τον άξονα με εξίσωση $x = x_0$ και L-περιοδική ως προς τη μεταβλητή x.

Αντιστρόφως, αν ισχύει η (3.19), τότε

$$u(2x_1 - x, t) = u(L + 2x_0 - x, t) = u(2x_0 - x, t) = -u(x, t) \qquad \text{για κάθε } x, t$$

οπότε η u είναι περιττή ως προς τους άξονες με εξισώσεις $x = x_0$ και $x = x_1$.

Ας δούμε τί σημαίνουν τα προηγούμενα για ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών συνδυασμένο με δύο σταθερά σημεία:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u(x_0, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(x_1, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.20}$$

Πάλι από τα σχετικά αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας έχουμε ότι για να έχει λύση αυτό το πρόβλημα η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι ότι οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_0 και ως προς το x_1. Τώρα, ακριβώς όπως παραπάνω (το t δεν έπαιξε κανένα ρόλο) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_0 και L-περιοδικές, όπου $L = 2(x_1 - x_0)$.

Τέλος, έστω ότι έχουμε να λύσουμε την κυματική εξίσωση στην κατακόρυφη ζώνη που βρίσκεται ανάμεσα στους άξονες με εξισώσεις $x = x_0$ και $x = x_1$ έτσι ώστε η λύση να είναι σταθερή 0 στους δύο συνοριακούς άξονες και με αρχικές συνθήκες ϕ, ψ στο διάστημα του x-άξονα ανάμεσα στα x_0 και x_1, δηλαδή το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } x_0 < x < x_1 \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{για } x_0 \le x \le x_1 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{για } x_0 \le x \le x_1 \\ u(x_0, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(x_1, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.21}$$

Τότε επεκτείνουμε τις συναρτήσεις ϕ, ψ από το διάστημα $[x_0, x_1]$ στο γειτονικό διάστημα $[x_1, 2x_1 - x_0]$, το οποίο έχει το ίδιο μήκος με το $[x_0, x_1]$, ορίζοντας

$$\phi(x) = -\phi(2x_1 - x), \quad \psi(x) = -\psi(2x_1 - x) \qquad \text{για } x_1 \le x \le 2x_1 - x_0.$$

(Αν $x_1 \le x \le 2x_1 - x_0$, τότε $x_0 \le 2x_1 - x \le x_1$, οπότε οι ϕ, ψ είναι ήδη ορισμένες στο $2x_1 - x$.)
Δεν υπάρχει πρόβλημα ορισμού στο κοινό σημείο x_1 των δύο διαστημάτων, διότι είναι $\phi(x_1) = \psi(x_1) = 0$.
Μετά από αυτήν την επέκταση οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς το x_1 στο διάστημα $[x_0, 2x_1 - x_0]$.
Παρατηρούμε ότι το διάστημα $[x_0, 2x_1 - x_0]$ έχει μήκος $2(x_1 - x_0) = L$ και άρα γράφεται $[x_0, x_0 + L]$.
Το σημείο x_1 είναι το μέσο του $[x_0, x_0 + L]$.
Κατόπιν, επεκτείνουμε τις ϕ, ψ από το διάστημα $[x_0, x_0 + L]$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ έτσι ώστε να είναι L-περιοδικές. Αυτό γίνεται ως εξής. Παίρνουμε τυχαίο x και υπολογίζουμε τον ακέραιο n για τον οποίο ισχύει $x_0 + nL \le x < x_0 + (n+1)L$. Αυτό ισοδυναμεί με $n \le \frac{x - x_0}{L} < n + 1$, οπότε ο n είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{x - x_0}{L}$. Τώρα, αν $n = 0$, τότε $x_0 \le x < x_0 + L$, οπότε οι τιμές $\phi(x), \psi(x)$ είναι ήδη ορισμένες. Αν $n \ne 0$, τότε έχουμε $x_0 \le x - nL < x_0 + L$ και ορίζουμε $\phi(x) = \phi(x - nL)$ και $\psi(x) = \psi(x - nL)$. Συνοπτικά:

$$\phi(x) = \phi(x - nL), \quad \psi(x) = \psi(x - nL) \qquad \text{με } n = \left[\frac{x - x_0}{L}\right].$$

Είναι προφανές ότι οι ϕ, ψ, όπως τις έχουμε επεκτείνει σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, είναι L-περιοδικές.
Και, τέλος, είναι εύκολο να δούμε (άσκηση!) ότι από το ότι οι ϕ, ψ είναι L-περιοδικές στο $\mathbb{R}$ και περιττές στο $[x_0, x_0 + L]$ ως προς το μέσο του x_1 συνεπάγεται ότι είναι περιττές στο $\mathbb{R}$ ως προς τα x_0 και x_1.
Τώρα λύνουμε την κυματική εξίσωση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$ με τις συνοριακές συνθήκες ϕ, ψ ορισμένες στο $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.22}$$

Επειδή οι ϕ, ψ είναι περιττές ως προς τα x_0, x_1 συνεπάγεται ότι η λύση u που θα βρούμε (με τον τύπο του d' Alembert) είναι σταθερή 0 στους άξονες με εξισώσεις $x = x_0$ και $x = x_1$. Άρα η u είναι λύση του προβλήματος (3.21).

Βάσει όσων είπαμε στην προηγούμενη ενότητα, επειδή οι επεκτεταμένες ϕ, ψ είναι περιττές στο $\mathbb{R}$ ως προς τα x_0, x_1, πρέπει για τις αρχικές ϕ, ψ στο $[x_0, x_1]$ να ισχύει

$$\phi(x_0) = \psi(x_0) = \phi(x_1) = \psi(x_1) = 0 \qquad \text{και} \qquad \phi''(x_0) = \phi''(x_1) = 0.$$

Αυτές οι αναγκαίες προϋποθέσεις εξασφαλίζουν ότι η επεκτεταμένη ϕ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι η επεκτεταμένη ψ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1.2. Θα λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \sin 2x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Έχουμε την κυματική εξίσωση στην κατακόρυφη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi$ με αρχικές συνθήκες στο διάστημα $[0, \pi]$ του x-άξονα και συνοριακή συνθήκη στις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi$.
Οι αρχικές συνθήκες είναι ορισμένες στο $[0, \pi]$ και θα τις επεκτείνουμε στο γειτονικό διάστημα $[\pi, 2\pi]$ (ίδιου μήκους με το $[0, \pi]$) ώστε να είναι περιττές στο $[0, 2\pi]$ ως προς το π.
Και οι δύο συναρτήσεις, η $\sin x$ και η $\sin 2x$, είναι ούτως ή άλλως ορισμένες στο $[0, 2\pi]$ και ως τέτοιες είναι περιττές ως προς το π. Άρα απλώς θεωρούμε τις $\sin x$ και $\sin 2x$ στο $[0, 2\pi]$.
Τώρα επεκτείνουμε τις $\sin x$ και $\sin 2x$ από το $[0, 2\pi]$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να είναι 2π-περιοδικές.

Όμως, ούτως ή άλλως, και οι δύο συναρτήσεις είναι ορισμένες στο $(-\infty, +\infty)$ και ως τέτοιες είναι 2π-περιοδικές. Άρα απλώς θεωρούμε τις $\sin x$ και $\sin 2x$ στο $(-\infty, +\infty)$.
Τώρα λύνουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \sin 2x & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Η λύση δίνεται από τον τύπο του d' Alembert:

$$u(x,t) = \frac{\sin(x-ct) + \sin(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin 2s\, ds = \sin x \cos ct + \frac{1}{2c}\sin 2x \sin 2ct.$$

Η $u(x,t)$ που βρήκαμε ικανοποιεί την κυματική εξίσωση στο xt-επίπεδο, οπότε την ικανοποιεί και στην κατακόρυφη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi$. Επίσης, ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες στον x-άξονα, οπότε τις ικανοποιεί και στο διάστημα $[0, \pi]$. Τέλος, αυτομάτως ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη στις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi$, όπως εγγυάται η θεωρία μας. Αν θέλουμε ελέγχουμε:

$$u(0,t) = \sin 0 \cos ct + \frac{1}{2c}\sin 0 \sin 2ct = 0, \quad u(\pi,t) = \sin \pi \cos ct + \frac{1}{2c}\sin 2\pi \sin 2ct = 0.$$

Άρα η $u(x,t)$ που βρήκαμε είναι λύση του αρχικού προβλήματος στην κατακόρυφη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \pi$.
(Επίσης, είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\sin 2x$, οι αρχικές συνθήκες του δεύτερου προβλήματος, είναι όσες φορές απαιτείται συνεχώς παραγωγίσιμες στο $(-\infty, +\infty)$.)

Ασκήσεις.

3.1.10. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x + 3\sin 5x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.1.7 Η μη-ομογενής κυματική εξίσωση.

Τώρα μελετήσουμε το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.23}$$

Αυτό το χωρίζουμε σε δύο προβλήματα:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.24}$$

και

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.25}$$

Αν $u_1(x,t)$ είναι λύση του πρώτου προβλήματος και $u_2(x,t)$ είναι λύση του δεύτερου προβλήματος, τότε η

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

είναι λύση του αρχικού προβλήματος (3.23). Πράγματι, επειδή ο τελεστής $\mathcal{L}(u) = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ είναι γραμμικός, έχουμε

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u_1) + \mathcal{L}(u_2) = 0 + f(x,t) = f(x,t).$$

Επίσης,

$$u(x,0) = u_1(x,0) + u_2(x,0) = \phi(x) + 0 = \phi(x),$$

$$u_t(x,0) = (u_1)_t(x,0) + (u_2)_t(x,0) = \psi(x) + 0 = \psi(x).$$

Η λύση του προβλήματος (3.24) είναι γνωστή και δίνεται από τον τύπο του d' Alembert. Οπότε θα επικεντρωθούμε στη λύση του προβλήματος (3.25).

Θεωρούμε σημείο $(\bar{x},\bar{t})$ και το τρίγωνο $\Delta(\bar{x},\bar{t})$ το οποίο φράσσεται από τις δύο χαρακτηριστικές ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(\bar{x},\bar{t})$ και από τον x-άξονα. Οι κορυφές του τριγώνου είναι το σημείο $(\bar{x},\bar{t})$ και τα σημεία $(\bar{x}-c\bar{t},0)$ και $(\bar{x}+c\bar{t},0)$ του x-άξονα.

Θα αποδείξουμε ότι η λύση u δίνεται από τον τύπο

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{2c}\iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})} f(x,t)\,dxdt \tag{3.26}$$

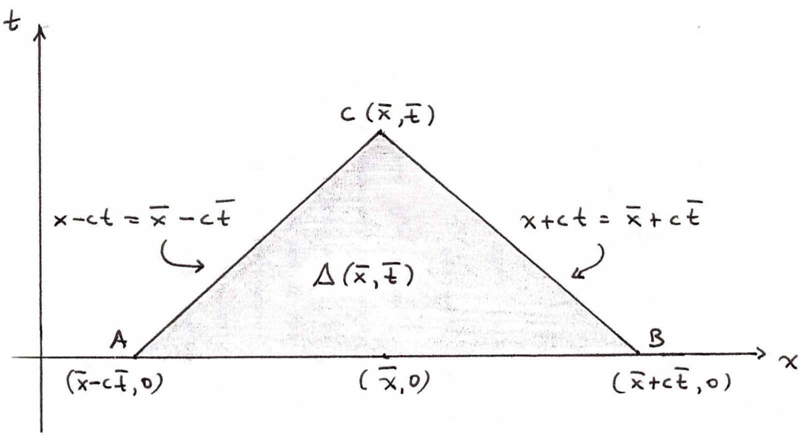
και θα χρησιμοποιήσουμε τον **τύπο του Green**:

$$\iint_{\Omega}(-P_t + Q_x)\,dxdt = \oint_{\partial\Omega}(P\,dx + Q\,dt),$$

όπου Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του xt-επιπέδου με τμηματικά ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ το οποίο θεωρείται με τη θετική φορά διαγραφής του στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})} f(x,t)\,dxdt &= \iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})}(u_{tt} - c^2u_{xx})\,dxdt\\ &= \iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})}((u_t)_t - (c^2u_x)_x)\,dxdt\\ &= -\oint_{\partial\Delta(\bar{x},\bar{t})}(u_t\,dx + c^2u_x\,dt).\end{aligned} \tag{3.27}$$



Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αποτελείται από τρία μέρη: το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $A = (\bar{x}-c\bar{t},0)$ στο σημείο $B = (\bar{x}+c\bar{t},0)$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από το σημείο $B = (\overline{x} + c\overline{t}, 0)$ στο σημείο $C = (\overline{x}, \overline{t})$ και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από το σημείο $C = (\overline{x}, \overline{t})$ στο σημείο $A = (\overline{x} - c\overline{t}, 0)$. Δηλαδή,

$$\oint_{\partial\Delta(\overline{x},\overline{t})} = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^A . \tag{3.28}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_A^B$ έχουμε την παραμετρικοποίηση

$$x = x, \quad t = 0 \qquad \overline{x} - c\overline{t} \le x \le \overline{x} + c\overline{t},$$

οπότε

$$\int_A^B (u_t\, dx + c^2 u_x\, dt) = \int_{\overline{x}-c\overline{t}}^{\overline{x}+c\overline{t}} \Big(u_t(x,0)\frac{dx}{dx}\, dx + c^2 u_x(x,0)\frac{dt}{dx}\, dx \Big) = 0 \tag{3.29}$$

διότι $u_x(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$.
Για το ολοκλήρωμα $\int_C^B$ έχουμε την παραμετρικοποίηση

$$x = x, \quad t = -\frac{x}{c} + \frac{\overline{x} + c\overline{t}}{c} \qquad \overline{x} \le x \le \overline{x} + c\overline{t},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\int_C^B (u_t\, dx + c^2 u_x\, dt) &= \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+c\overline{t}} \Big(u_t\Big(x, -\frac{x}{c} + \frac{\overline{x}+c\overline{t}}{c}\Big)\frac{dx}{dx}\, dx \\
&\quad + c^2 u_x\Big(x, -\frac{x}{c} + \frac{\overline{x}+c\overline{t}}{c}\Big)\frac{dt}{dx}\, dx \Big) \\
&= \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+c\overline{t}} \Big(u_t\Big(x, -\frac{x}{c} + \frac{\overline{x}+c\overline{t}}{c}\Big) - c u_x\Big(x, -\frac{x}{c} + \frac{\overline{x}+c\overline{t}}{c}\Big)\Big) dx \\
&= -c \int_{\overline{x}}^{\overline{x}+c\overline{t}} \frac{d}{dx} u\Big(x, -\frac{x}{c} + \frac{\overline{x}+c\overline{t}}{c}\Big) dx \\
&= -c\Big(u(\overline{x}+c\overline{t}, 0) - u(\overline{x}, \overline{t})\Big) \\
&= cu(\overline{x}, \overline{t}).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_A^C$ έχουμε την παραμετρικοποίηση

$$x = x, \quad t = \frac{x}{c} - \frac{\overline{x} - c\overline{t}}{c} \qquad \overline{x} - c\overline{t} \le x \le \overline{x},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\int_A^C (u_t\, dx + c^2 u_x\, dt) &= \int_{\overline{x}-c\overline{t}}^{\overline{x}} \Big(u_t\Big(x, \frac{x}{c} - \frac{\overline{x}-c\overline{t}}{c}\Big)\frac{dx}{dx}\, dx \\
&\quad + c^2 u_x\Big(x, \frac{x}{c} - \frac{\overline{x}-c\overline{t}}{c}\Big)\frac{dt}{dx}\, dx \Big) \\
&= \int_{\overline{x}-c\overline{t}}^{\overline{x}} \Big(u_t\Big(x, \frac{x}{c} - \frac{\overline{x}-c\overline{t}}{c}\Big) + c u_x\Big(x, \frac{x}{c} - \frac{\overline{x}-c\overline{t}}{c}\Big)\Big) dx \\
&= c \int_{\overline{x}-c\overline{t}}^{\overline{x}} \frac{d}{dx} u\Big(x, \frac{x}{c} - \frac{\overline{x}-c\overline{t}}{c}\Big) dx \\
&= c\Big(u(\overline{x}, \overline{t}) - u(\overline{x}-c\overline{t}, 0)\Big) \\
&= cu(\overline{x}, \overline{t}).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Από τις (3.28)–(3.31) συνεπάγεται

$$\oint_{\partial\Delta(\overline{x},\overline{t})} (u_t\, dx + c^2 u_x\, dt) = -2cu(\overline{x}, \overline{t})$$

και από την (3.27) έχουμε

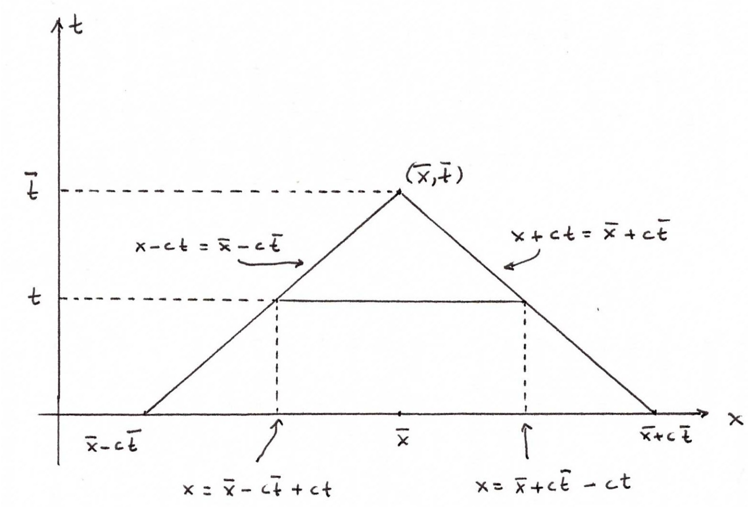
$$\iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})} f(x,t)\,dxdt = 2cu(\bar{x},\bar{t})$$

το οποίο μας δίνει τον τύπο (3.26) για τη λύση του προβλήματος (3.25). Συνδυάζοντας με τον τύπο του d' Alembert για τη λύση του προβλήματος (3.24), έχουμε τον εξής τύπο για τη λύση του αρχικού προβλήματος (3.23):

$$u(\bar{x},\bar{t}) = \frac{\phi(\bar{x}-c\bar{t})+\phi(\bar{x}+c\bar{t})}{2} + \frac{1}{2c}\int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} \psi(s)\,ds + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})} f(x,t)\,dxdt. \tag{3.32}$$

Παράδειγμα 3.1.3. Θα λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = xt & \text{για } (x,t)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 & \text{για } x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } x\in\mathbb{R} \end{cases}$$



Θα εφαρμόσουμε τον τύπο (3.26).

$$\begin{aligned} u(\bar{x},\bar{t}) &= \frac{1}{2c}\iint_{\Delta(\bar{x},\bar{t})} xt\,dxdt = \frac{1}{2c}\int_0^{\bar{t}} t\Big(\int_{\bar{x}-c\bar{t}+ct}^{\bar{x}+c\bar{t}-ct} x\,dx\Big)dt \\ &= \frac{1}{4c}\int_0^{\bar{t}} t\Big((\bar{x}+c\bar{t}-ct)^2 - (\bar{x}-c\bar{t}+ct)^2\Big)dt \\ &= \int_0^{\bar{t}} t\bar{x}(\bar{t}-t)\,dt = \frac{1}{6}\bar{x}\bar{t}^3. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $u(x,t) = \frac{1}{6}xt^3$.

Παράδειγμα 3.1.4. Θα λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \cos x & \text{για } (x,t)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) = x+1 & \text{για } x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο (3.32).

Υπολογίζουμε πρώτα το διπλό ολοκλήρωμα.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}\iint_{\Delta(\overline{x},\overline{t})}\cos x\,dxdt &= \frac{1}{2c}\int_0^{\overline{t}}\Big(\int_{\overline{x}-c\overline{t}+ct}^{\overline{x}+c\overline{t}-ct}\cos x\,dx\Big)dt\\ &= \frac{1}{2c}\int_0^{\overline{t}}\Big(\sin(\overline{x}+c\overline{t}-ct)-\sin(\overline{x}-c\overline{t}+ct)\Big)dt\\ &= \frac{1}{c}\int_0^{\overline{t}}\cos\overline{x}\sin c(\overline{t}-t)\,dt = \frac{1}{c^2}\cos\overline{x}(1-\cos c\overline{t}).\end{aligned}$$

Επομένως, από τον τύπο (3.32) έχουμε

$$\begin{aligned}u(\overline{x},\overline{t}) &= \frac{\sin(\overline{x}-c\overline{t})+\sin(\overline{x}+c\overline{t})}{2}+\frac{1}{2c}\int_{\overline{x}-c\overline{t}}^{\overline{x}+c\overline{t}}(s+1)\,ds+\frac{1}{2c}\iint_{\Delta(\overline{x},\overline{t})}\cos x\,dxdt\\ &= \sin\overline{x}\cos c\overline{t}+(\overline{x}+1)\overline{t}+\frac{1}{c^2}\cos\overline{x}(1-\cos c\overline{t}).\end{aligned}$$

Δηλαδή, $u(x,t)=\sin x\cos ct+(x+1)t+\frac{1}{c^2}\cos x(1-\cos ct)$.

Ασκήσεις.

3.1.11. Λύστε το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=e^{ax} & \text{για } (x,t)\in\mathbb{R}^2\\ u(x,0)=0 & \text{για } x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=0 & \text{για } x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

3.1.12. Λύστε το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=x+2t & \text{για } (x,t)\in\mathbb{R}^2\\ u(x,0)=\sin x & \text{για } x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=\cos 2x & \text{για } x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

3.1.13. Θεωρούμε τη λύση $u=u(x,t)$ του μη-ομογενούς προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}, t>0\\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

η οποία δίνεται από τον τύπο d' Alembert. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής για $x\in\mathbb{R}, t>0$ και ότι $f(x,t)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, t>0$. Αν $f(x_0,t_0)>0$ σε κάποιο σημείο (x_0,t_0) με $t_0>0$, βρείτε το χωρίο του άνω xt-ημιεπιπέδου στο οποίο ισχύει αναγκαστικά $u(x,t)>0$.

3.2 Σειρές Fourier.

3.2.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο.

Στα παρακάτω το σύμβολο H θα δηλώνει έναν γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{R}$. Με o θα συμβολίζουμε το μηδενικό στοιχείο του H και θα το ξεχωρίζουμε από τον αριθμό 0 στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός. *Λέμε ότι η συνάρτηση*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\,:\,H\times H\to\mathbb{R}$$

είναι ένα ***εσωτερικό γινόμενο*** *στο H αν έχει τις ιδιότητες* *i.* $\langle x, x\rangle \geq 0$ *για κάθε* $x \in H$.

ii. $\langle x, x\rangle = 0$ *αν και μόνο αν* $x = o$.

iii. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *για κάθε* $x, y \in H$.

iv. $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle$ *για κάθε* $x_1, x_2, y \in H$ *και* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Η ιδιότητα (iii) εκφράζει τη *συμμετρία* του εσωτερικού γινομένου και η ιδιότητα (iv) την *γραμμικότητά* του ως προς την πρώτη μεταβλητή. Χρησιμοποιώντας τις (iii), (iv) μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τη γραμμικότητα και ως προς τη δεύτερη μεταβλητή:

iv'. $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1\langle x, y_1\rangle + \lambda_2\langle x, y_2\rangle$ για κάθε $x, y_1, y_2 \in H$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Φυσικά, οι (iv), (iv') επεκτείνονται επαγωγικά και για αθροίσματα με n όρους.

Υπάρχει μία ακόμη απλή ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:

$\langle o, y\rangle = \langle x, o\rangle = 0$ για κάθε $x, y \in H$.

Πράγματι, έχουμε $\langle o, y\rangle = \langle o - o, y\rangle = \langle o, y\rangle - \langle o, y\rangle = 0$.

Ορισμός. *Η συνάρτηση*

$$\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \text{για } x \in H$$

ονομάζεται **νόρμα** *στο H και λέμε ότι είναι η νόρμα η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο του H.*

Παράδειγμα 3.2.1. Το πιο απλό και χειροπιαστό παράδειγμα γραμμικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ με το γνωστό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο με τύπο

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \qquad \text{για } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Η νόρμα που επάγεται έχει τον γνωστό τύπο

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \text{για } x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Είναι πολύ εύκολο να αποδειχτούν οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (άσκηση).

Πρόταση 3.1. *Η νόρμα έχει τις εξής ιδιότητες:*

i. $\|x\| \geq 0$ *για κάθε* $x \in H$.

ii. $\|x\| = 0$ *αν και μόνο αν* $x = o$.

iii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *για κάθε* $x \in H$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Οι (i), (ii) είναι προφανείς. Όσο για την (iii), έχουμε

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle = \lambda^2\|x\|^2.$$

□

Υπάρχει και η εξής πολύ χρήσιμη ταυτότητα:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

Η απόδειξη γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz. *Ισχύει*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y|| \qquad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

Απόδειξη. Αν $x = o$, τότε $||x|| = \langle x, y\rangle = 0$ και η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.
Έστω $x \neq o$, οπότε $||x|| > 0$.
Θεωρούμε την παράσταση

$$||tx + y||^2 = ||tx||^2 + 2\langle tx, y\rangle + ||y||^2 = t^2||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + ||y||^2.$$

Επειδή $||tx + y||^2 \geq 0$, συνεπάγεται

$$t^2||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + ||y||^2 \geq 0 \qquad \text{για κάθε } t.$$

Αν ορίσουμε για απλούστευση

$$a = ||x||^2, b = \langle x, y\rangle, c = ||y||^2,$$

τότε είναι $a > 0$ και

$$t^2||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + ||y||^2 = at^2 + 2bt + c = a\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}.$$

Αφού η τελευταία παράσταση είναι ≥ 0 για κάθε t, με $t = -\frac{b}{a}$ συνεπάγεται

$$ac - b^2 \geq 0$$

και έχουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Πρόταση 3.2. *Η νόρμα έχει την επιπλέον ιδιότητα:*

iv. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *για κάθε* $x, y \in H$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

□

Ορισμός. *Λέμε ότι τα* $x, y \in H$ *είναι* **ορθογώνια** *ή* **κάθετα** *και συμβολίζουμε*

$$x \perp y$$

αν $\langle x, y\rangle = 0$.
Επίσης, λέμε ότι το $x \in H$ *είναι* **ορθογώνιο** *ή* **κάθετο** *στο* $A \subseteq H$ *και συμβολίζουμε*

$$x \perp A$$

αν $x \perp a$ *για κάθε* $a \in A$.

Πυθαγόρειο Θεώρημα. *Αν* $x \perp y$, *τότε*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

□

Πρόταση 3.3. *[α] $o \perp H$.*
[β] Αν $x \perp y_1, \dots, x \perp y_n$, τότε $x \perp \mathrm{Span}\{y_1, \dots, y_n\}$.

Απόδειξη. [α] Ισχύει $\langle o, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in H$.
[β] Αν $x \perp y_1, \dots, x \perp y_n$, τότε για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n\rangle = \lambda_1\langle x, y_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x, y_n\rangle = \lambda_1 0 + \cdots + \lambda_n 0 = 0.$$

Άρα το x είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο $\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$ του χώρου $\mathrm{Span}\{y_1, \dots, y_n\}$ ο οποίος παράγεται από τα $y_1, \dots, y_n$. □

Ορισμός. *Έστω $x \in H$ και γραμμικός υπόχωρος $\tilde{H}$ του H. Αν υπάρχει $y \in \tilde{H}$ ώστε*

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| \qquad \text{για κάθε } z \in \tilde{H}$$

τότε λέμε ότι το y είναι **βέλτιστη προσέγγιση** *του x από τον $\tilde{H}$.*

Αν το y είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$, τότε προφανώς

$$\|x - y\| = \min\{\|x - z\| \,|\, z \in \tilde{H}\}.$$

Πρόταση 3.4. *Το y είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$ αν και μόνο αν $y \in \tilde{H}$ και $x - y \perp \tilde{H}$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς έστω $y \in \tilde{H}$ και $x - y \perp \tilde{H}$. Παίρνουμε τυχόν $z \in \tilde{H}$ και τότε, επειδή $y \in \tilde{H}$ και ο $\tilde{H}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του H, συνεπάγεται $y - z \in \tilde{H}$ και άρα $x - y \perp y - z$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνεπάγεται

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

Άρα ισχύει $\|x - z\| \geq \|x - y\|$ για κάθε $z \in \tilde{H}$ και άρα το y είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το y είναι βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$. Παίρνουμε τυχόν $z \in \tilde{H}$ και τυχόν $t \in \mathbb{R}$ και, επειδή $y \in \tilde{H}$ και ο $\tilde{H}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του H, συνεπάγεται $y + tz \in \tilde{H}$. Άρα

$$\|x - y\| \leq \|x - (y + tz)\|$$

οπότε

$$\|x - y\|^2 \leq \|(x - y) - tz\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t\langle x - y, z\rangle + t^2\|z\|^2.$$

Αν δούμε την παράσταση στη δεξιά μεριά της τελευταίας ανισότητας ως συνάρτηση του $t \in \mathbb{R}$, τότε η ανισότητα μας λέει ότι η συνάρτηση αυτή έχει ελάχιστο στο $t = 0$ και άρα η παράγωγός της στο $t = 0$ μηδενίζεται. Αυτό συνεπάγεται

$$\langle x - y, z\rangle = 0$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $z \in \tilde{H}$, συμπεραίνουμε ότι $x - y \perp \tilde{H}$. □

Πρόταση 3.5. *Αν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$, τότε αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Έστω y', y'' δύο προσεγγίσεις του x από τον $\tilde{H}$.
Ο $\tilde{H}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του H και, επειδή $y', y'' \in \tilde{H}$, έχουμε ότι $y' - y'' \in \tilde{H}$, οπότε από την προηγούμενη πρόταση συνεπάγεται

$$x - y' \perp y' - y'' \qquad \text{και} \qquad x - y'' \perp y' - y''.$$

Άρα

$$y' - y'' \perp (x - y'') - (x - y') = y' - y''$$

και συμπεραίνουμε ότι $y' - y'' = o$. □

Άρα μπορούμε να μιλάμε για *την* βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$.

Πρόταση 3.6. *Αν ο $\tilde{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε για κάθε x υπάρχει η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$.*

Απόδειξη. Επειδή ο $\tilde{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, υπάρχει βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$ του $\tilde{H}$.
Θεωρούμε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \langle x_1, x_1\rangle\lambda_1 + \cdots + \langle x_1, x_n\rangle\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle\lambda_1 + \cdots + \langle x_n, x_n\rangle\lambda_n = 0 \end{cases}$$

με αγνώστους $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Η k-οστή εξίσωση γράφεται $\langle x_k, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\rangle = 0$ ή, ισοδύναμα, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \perp x_k$.
Αν αυτό ισχύει για κάθε $k = 1, \dots, n$, συνεπάγεται

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \perp \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

και άρα

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = o.$$

Επειδή τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπάγεται

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Άρα το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση $(0, \dots, 0)$.
Τώρα παίρνουμε τυχόν $x \in H$ και θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \langle x_1, x_1\rangle\lambda_1 + \cdots + \langle x_1, x_n\rangle\lambda_n = \langle x_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle\lambda_1 + \cdots + \langle x_n, x_n\rangle\lambda_n = \langle x_n, x\rangle \end{cases}$$

με αγνώστους $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Επειδή το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, το νέο σύστημα *έχει* λύση, έστω $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Ορίζουμε

$$y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \tilde{H}$$

και τότε η k-οστή εξίσωση γράφεται $\langle x_k, y\rangle = \langle x_k, x\rangle$ ή, ισοδύναμα, $\langle x_k, x - y\rangle = 0$ ή, ισοδύναμα, $x - y \perp x_k$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k = 1, \dots, n$, συνεπάγεται $x - y \perp \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\} = \tilde{H}$ και συμπεραίνουμε ότι το y είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$. □

Ορισμός. *Ένα σύνολο $A \subseteq H$ ονομάζεται* **ορθοκανονικό** *αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ 0, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

Πρόταση 3.7. *Αν το A είναι ορθοκανονικό, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A είναι ορθοκανονικό και έστω $x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = o.$$

Τότε για κάθε $k = 1, \dots, n$ έχουμε

$$0 = \langle x_k, o\rangle = \langle x_k, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\rangle = \lambda_1\langle x_k, x_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x_k, x_n\rangle = \lambda_k.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι όλα τα $\langle x_k, x_j\rangle$ είναι ίσα με 0 εκτός του $\langle x_k, x_k\rangle$ που είναι ίσο με 1.
Άρα $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ και τα $x_1, \dots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επειδή τα $x_1, \dots, x_n$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του A, το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Ορισμός. *Έστω ότι το σύνολο A είναι ορθοκανονικό. Τότε για κάθε $x \in H$ οι αριθμοί*

$$\langle x, a \rangle, \qquad a \in A,$$

ονομάζονται **συντελεστές Fourier** *του x ως προς τα στοιχεία του A.*

Πρόταση 3.8. *Έστω γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης $\tilde{H}$ του H και έστω ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\tilde{H}$.*
[α] Για κάθε $x \in \tilde{H}$ ισχύει

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \qquad \text{και} \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

[β] Για κάθε $x \in H$ ισχύει

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

και η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$ είναι το

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Απόδειξη. [α] Έστω $x \in \tilde{H}$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_j$$

διότι όλα τα $\langle e_k, e_j \rangle$ είναι ίσα με 0 εκτός του $\langle e_j, e_j \rangle$ που είναι ίσο με 1.
Άρα

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Τώρα

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

[β] Έστω

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \tilde{H}$$

η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\tilde{H}$.
Από το [α] συνεπάγεται ότι $\lambda_k = \langle y, e_k \rangle$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επίσης, ισχύει $x - y \perp \tilde{H}$ και άρα $x - y \perp e_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Άρα

$$\lambda_k = \langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle + \langle y - x, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$, οπότε

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Τέλος, επειδή $x - y \perp \tilde{H}$ και $y \in \tilde{H}$ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και από το [α] συνεπάγεται

$$\|x\|^2 = \|(x - y) + y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

□

Από την Πρόταση 3.8 βλέπουμε ότι είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ενός γραμμικού υπόχωρου $\tilde{H}$ του H, διότι αυτό μας επιτρέπει να βρίσκουμε εύκολα τους συντελεστές μιας γραμμικής αναπαράστασης ενός στοιχείου του $\tilde{H}$ ως προς τα στοιχεία της βάσης καθώς και να βρίσκουμε εύκολα τη νόρμα ενός στοιχείου του $\tilde{H}$. Οι συντελεστές είναι ακριβώς οι συντελεστές Fourier του x ως προς τα στοιχεία της ορθοκανονικής βάσης. Επίσης, μπορούμε να βρίσκουμε εύκολα την βέλτιστη προσέγγιση ενός στοιχείου του H από τον $\tilde{H}$.

Στο επόμενο θα δούμε ότι κάθε γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης $\tilde{H}$ έχει ορθοκανονική βάση καθώς και μια επαγωγική κατασκευή μιας τέτοιας ορθοκανονικής βάσης με αφετηρία μια οποιαδήποτε βάση του $\tilde{H}$.

Θεώρημα Gramm-Schmidt. *Κάθε γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης $\tilde{H}$ του H έχει ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_1, \ldots, a_n\}$ μια οποιαδήποτε βάση του $\tilde{H}$.
Εφαρμόζουμε την λεγόμενη **διαδικασία Gramm-Schmidt** η οποία συνίσταται στη διαδοχική δημιουργία των στοιχείων $f_1, e_1, \ldots, f_n, e_n$ με τους τύπους:

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_1 & e_1 &= \frac{1}{\|f_1\|} f_1 \\
f_2 &= a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1 & e_2 &= \frac{1}{\|f_2\|} f_2 \\
f_3 &= a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2 & e_3 &= \frac{1}{\|f_3\|} f_3 \\
&\vdots & &\vdots \\
f_n &= a_n - \langle a_n, e_1\rangle e_1 - \cdots\cdots\cdots - \langle a_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1} & e_n &= \frac{1}{\|f_n\|} f_n
\end{aligned}$$

Τώρα, μπορεί να δει κανείς πολύ εύκολα ότι το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι ορθοκανονικό, παρατηρώντας ότι, προφανώς, $\|e_k\| = 1$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και μετά, επαγωγικά, ότι το e_2 είναι ορθογώνιο με το e_1, το e_3 είναι ορθογώνιο με τα e_1, e_2 και ούτω καθεξής.
Τέλος, ο γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι ο ίδιος με τον γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από το $\{a_1, \ldots, a_n\}$, δηλαδή είναι ο $\tilde{H}$. Πράγματι, παρατηρούμε επαγωγικά ότι για κάθε $k = 1, \ldots, n$ κάθε γραμμικός συνδυασμός των $a_1, \ldots, a_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $e_1, \ldots, e_k$ και αντιστρόφως. □

Ανισότητα Bessel. *Αν το $\{e_1, e_2, \ldots\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο ορθοκανονικό υποσύνολο του H, τότε για κάθε $x \in H$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.8[β] στο $x \in H$ και στον γραμμικό υπόχωρο $\tilde{H} = \mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ ο οποίος παράγεται από τα n πρώτα στοιχεία της βάσης:

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Άρα τα μερικά αθροίσματα της σειράς μη-αρνητικών όρων $\sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle^2$ είναι φραγμένα από τον αριθμό $\|x\|^2$ και, επομένως, η σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι φραγμένο από τον ίδιο αριθμό $\|x\|^2$. □

Λήμμα Riemann-Lebesgue. *Αν το $\{e_1, e_2, \ldots\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο ορθοκανονικό υποσύνολο του H, τότε για κάθε $x \in H$ ισχύει*

$$\langle x, e_n\rangle \to 0 \qquad \textit{όταν } n \to +\infty.$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της σύγκλισης της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle^2$. $\square$

Ορισμός. *Το άπειρο αριθμήσιμο ορθοκανονικό υποσύνολο* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *του* H *ονομάζεται* **ορθοκανονική βάση** *του* H *αν για κάθε* $x \in H$ *ισχύει*

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\| \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Γράφοντας

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k,$$

το $s_n \in H$ μπορεί να θεωρηθεί ως το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

Τότε το όριο στον ορισμό της ορθοκανονικής βάσης γράφεται

$$\|x - s_n\| \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty$$

και μας λέει ότι η ακολουθία (s_n) στοιχείων του H συγκλίνει στο στοιχείο x του H ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$: δηλαδή η απόσταση $\|x - s_n\|$ του s_n από το x τείνει στο 0. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ των στοιχείων $\langle x, e_k\rangle e_k$ του H συγκλίνει στο στοιχείο x του H και να γράψουμε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

Ορισμός. *Αν το άπειρο αριθμήσιμο ορθοκανονικό υποσύνολο* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *του* H *είναι ορθοκανονική βάση του* H, *τότε για κάθε* $x \in H$ *η σειρά*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$$

ονομάζεται **σειρά Fourier** *του* x *ως προς την ορθοκανονική βάση* $\{e_1, e_2, \ldots\}$.

Ταυτότητα Parseval. *Έστω ότι το άπειρο ορθοκανονικό υποσύνολο* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H. *Τότε για κάθε* $x \in H$ *ισχύει*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle^2.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε όπως πιο πριν:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

Τότε είναι $\|x - s_n\| \to 0$ και άρα

$$|\langle x, x\rangle - \langle x, s_n\rangle| = |\langle x, x - s_n\rangle| \le \|x\|\|x - s_n\| \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Όμως,

$$\langle x, s_n\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle x, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2.$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle^2 = \langle x, s_n\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

$\square$

3.2.2 Το τριγωνομετρικό σύστημα.

Στο εξής θα μελετήσουμε και θα χρησιμοποιήσουμε τον γραμμικό χώρο

$$H = \{f \,|\, \text{η } f \text{ είναι πραγματική } 2\pi\text{-περιοδική και τμηματικά συνεχής στο } \mathbb{R}\}.$$

Τα στοιχεία του H είναι όλες οι πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι 2π-περιοδικές και τμηματικά συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση f είναι τμηματικά συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν σε κάθε φραγμένο διάστημα έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας και αν σε κάθε σημείο ασυνέχειας υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x-) = \lim_{x' \to x-} f(x'), \qquad f(x+) = \lim_{x' \to x+} f(x')$$

και είναι αριθμοί. Φυσικά, σε κάθε σημείο συνέχειας x τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα με την τιμή $f(x)$. Τα σημεία ασυνέχειας μιας τμηματικά συνεχούς f είναι μεμονωμένα.
Το άθροισμα δύο συναρτήσεων/στοιχείων του H και το γινόμενο μιας συνάρτησης/στοιχείου του H με αριθμό είναι συναρτήσεις/στοιχεία του H. Επομένως, το σύνολο H είναι γραμμικός χώρος και ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον H με τον τύπο

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

Φυσικά, πρέπει να αποδείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε έχει τις τέσσερις ιδιότητες που πρέπει να έχει. Όλες οι ιδιότητες ανάγονται σε απλές ιδιότητες ολοκληρωμάτων:

$$\langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx \geq 0,$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)\, dx = \langle g, f\rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))g(x)\, dx \\ &= \lambda_1 \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)g(x)\, dx + \lambda_2 \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)g(x)\, dx = \lambda_1\langle f_1, g\rangle + \lambda_2\langle f_2, g\rangle.\end{aligned}$$

Η δεύτερη ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου θέλει παραπάνω σχολιασμό. Κατ’ αρχάς

$$\langle o, o\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} o(x)^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0\, dx = 0.$$

Το αντίστροφο είναι σωστό αν πρώτα κάνουμε κάποια “διόρθωση” ως προς τη φύση των συναρτήσεων που εξετάζουμε. Αν

$$\langle f, f\rangle = 0$$

τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = 0$$

και άρα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. Στα σημεία ασυνέχειας x της f μπορεί να μην ισχύει $f(x) = 0$. Επειδή ένα σημείο ασυνέχειας είναι μεμονωμένο, κάθε κοντινό σημείο είναι σημείο συνέχειας και άρα

$$f(x-) = \lim_{x' \to x-} f(x') = \lim_{x' \to x-} 0 = 0, \qquad f(x+) = \lim_{x' \to x+} f(x') = \lim_{x' \to x+} 0 = 0.$$

Άρα, αν $\langle f, f\rangle = 0$, τότε η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της και, επίσης, μηδενίζονται τα πλευρικά της όρια σε κάθε σημείο ασυνέχειάς της. *Στο εξής θεωρούμε ότι μια συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες “ταυτίζεται” με την μηδενική συνάρτηση.* Επεκτείνουμε, μάλιστα, αυτήν την “υπόθεση” και λέμε ότι *δύο συναρτήσεις* f, g *στοιχεία του* H *“ταυτίζονται” όταν έχουν τις ίδιες τιμές στα κοινά σημεία συνέχειάς τους*. Δηλαδή:

$$f = g \qquad \text{αν} \qquad f(x) = g(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ σημείο συνέχειας της } f \text{ και της } g.$$

Όπως πριν, βλέπουμε εύκολα ότι, αν οι f, g έχουν ίδιες τιμές στα σημεία συνέχειάς τους, τότε έχουν και ίδια πλευρικά όρια στα σημεία ασυνέχειάς τους.

Έχοντας, λοιπόν, διαμορφώσει με αυτόν τον τρόπο την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων/στοιχείων του χώρου H, βλέπουμε ότι από την $\langle f, f\rangle = 0$ συνεπάγεται ότι η f είναι ίση με την μηδενική συνάρτηση o.

Άρα ισχύουν και οι τέσσερις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Η νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο H έχει τύπο

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz παίρνει τη μορφή

$$\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx\Big| \leq \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx\Big)^{1/2}$$

και η τριγωνική ανισότητα της νόρμας γράφεται

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\,dx\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Τώρα θεωρούμε το λεγόμενο **τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων**:

$$\{c_k \,|\, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\} \cup \{s_k \,|\, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1\},$$

όπου

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{και} \quad c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx \quad s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \quad \text{για } k \geq 1.$$

Όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές και άρα είναι στοιχεία του χώρου H. Είναι εύκολο να δούμε ότι το τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων είναι ορθοκανονικό σύνολο στον H. Δηλαδή,

$$\langle c_k, c_l\rangle = \langle s_k, s_l\rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = l \\ 0, & \text{αν } k \neq l \end{cases}$$
$$\langle c_k, s_l\rangle = 0.$$

Όλα αυτά προκύπτουν από τους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\,dx$$

με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών τύπων

$$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b), \qquad 2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

Οι συντελεστές Fourier μιας $f \in H$ δίνονται από τους τύπους

$$\langle f, c_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\langle f, c_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad \langle f, s_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad \text{για } k \geq 1.$$

Η ανισότητα Bessel γράφεται

$$\langle f, c_0\rangle^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\langle f, c_k\rangle^2 + \langle f, s_k\rangle^2\Big) \leq \|f\|^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\Big)^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\bigg(\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\Big)^2 + \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\Big)^2\bigg)\\ \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx.\end{aligned}$$

Επίσης, το Λήμμα Riemann-Lebesgue λέει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \to 0, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Παραδοσιακά έχει επικρατήσει ένας λίγο διαφορετικός συμβολισμός:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad \text{για } k \geq 0,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad \text{για } k \geq 1.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Με αυτά τα σύμβολα η ανισότητα Bessel γράφεται

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$$

και το Λήμμα Riemann-Lebesgue λέει ότι

$$a_n \to 0, \quad b_n \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

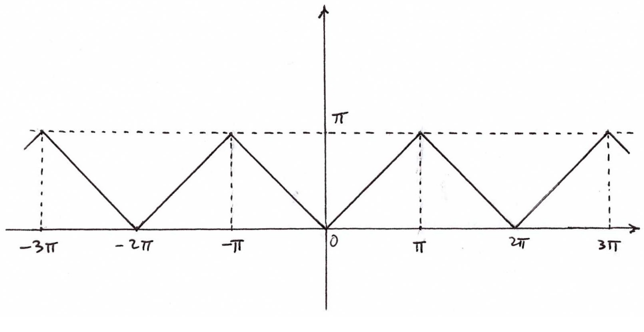
Επειδή οι συναρτήσεις $\cos kx$ είναι άρτιες και οι $\sin kx$ είναι περιττές, εύκολα βλέπουμε ότι, αν η f είναι άρτια, τότε

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad \text{για } k \geq 0 \qquad \text{και} \qquad b_k = 0 \quad \text{για } k \geq 1$$

ενώ, αν η f είναι περιττή, τότε

$$a_k = 0 \quad \text{για } k \geq 0 \qquad \text{και} \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad \text{για } k \geq 1.$$

Παράδειγμα 3.2.2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ για $x \in [-\pi, \pi]$ επεκτεταμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π-περιοδική. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.



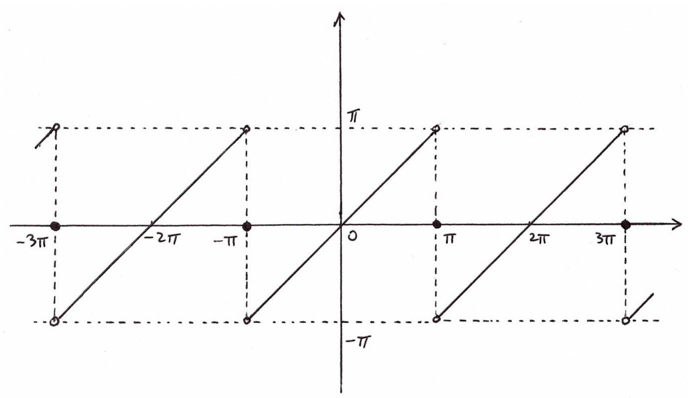
Επειδή η f είναι άρτια, έχουμε $b_k = 0$ για $k \geq 1$ και $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx$ για $k \geq 0$. Υπολογίζουμε τα a_k ως εξής:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

και για $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi x(\sin kx)'\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{k^2\pi}\int_0^\pi (\cos kx)'\,dx = \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi}. \end{aligned}$$

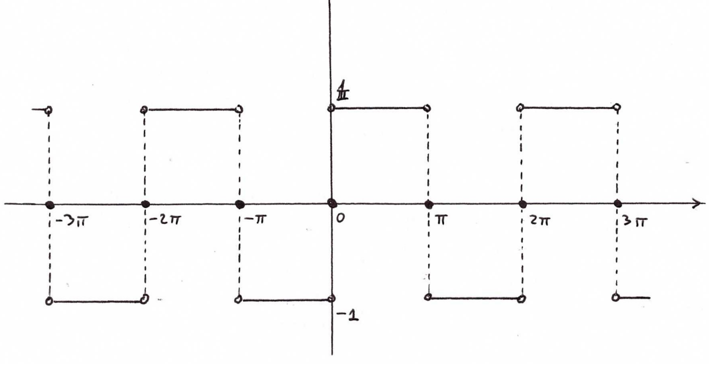
Παράδειγμα 3.2.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ για $x \in (-\pi, \pi)$ και $f(\pm\pi) = 0$ επεκτεταμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π-περιοδική. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ εκτός στα σημεία $(2k+1)\pi$ στα οποία έχει τιμή $f((2k+1)\pi) = 0$, αριστερά πλευρικά όρια ίσα με π και δεξιά πλευρικά όρια ίσα με $-\pi$.



Η f είναι περιττή, οπότε έχουμε $a_k = 0$ για $k \geq 0$ και $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx$ για $k \geq 1$. Υπολογίζουμε τα b_k ως εξής:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi x(\cos kx)'\,dx = -\frac{2}{k\pi}\pi\cos k\pi + \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos kx\,dx \\ &= -\frac{2(-1)^k}{k} + \frac{2}{k^2\pi}\int_0^\pi (\sin kx)'\,dx = -\frac{2(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -1$ για $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = 1$ για $x \in (0, \pi)$ και $f(0) = f(\pm\pi) = 0$ επεκτεταμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π-περιοδική. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ εκτός στα σημεία $k\pi$ στα οποία έχει τιμή $f(k\pi) = 0$. Στα σημεία $2k\pi$ έχει αριστερά πλευρικά όρια ίσα με -1 και δεξιά πλευρικά όρια ίσα με 1 ενώ στα σημεία $(2k+1)\pi$ έχει αριστερά πλευρικά όρια ίσα με 1 και δεξιά πλευρικά όρια ίσα με -1.



Η f είναι περιττή, οπότε έχουμε $a_k = 0$ για $k \geq 0$ και $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx$ για $k \geq 1$. Υπολογίζουμε τα b_k ως εξής:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi (\cos kx)'\,dx = -\frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - 1) = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}.$$

Τώρα θα δούμε ένα από τα βασικά αποτελέσματα των σειρών Fourier.

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι $f \in H$, δηλαδή ότι η f είναι 2π-περιοδική και τμηματικά συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν σε κάποιο x υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x) = \lim_{t\to 0-}\frac{f(x+t)-f(x-)}{t} \qquad f'_+(x) = \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$$

και είναι αριθμοί, τότε

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$s_n(x) \to \frac{f(x-)+f(x+)}{2} \qquad \text{όταν } n \to +\infty. \tag{3.34}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$ και $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos k(t-x)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\Big)dt \qquad (3.35)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)dt.
\end{aligned}$$

Κατόπιν θα βρούμε έναν "κλειστό τύπο" για την παράσταση

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt$$

της παρένθεσης μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα. Πολλαπλασιάζουμε την παράσταση με το $2\sin\frac{t}{2}$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{t}{2}\,D_n(t) &= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt \\
&= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)t + \sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)t\Big) \\
&= \sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t.
\end{aligned}$$

Αν $t = m2\pi$ με $m \in \mathbb{Z}$, τότε προφανώς $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = n + \frac{1}{2}$ και άρα

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, & \text{αν } t \neq m2\pi \text{ για κάθε } m \in \mathbb{Z} \\ n + \frac{1}{2}, & \text{αν } t = m2\pi \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{3.36}$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\,dt = \pi$$

και, επειδή η συνάρτηση D_n είναι άρτια,

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}. \tag{3.37}$$

Από την (3.35) και τις (3.37) παίρνουμε

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x+t) - f(x-))D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t) - f(x+))D_n(t)\,dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x+t) - f(x-))D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t) - f(x+))D_n(t)\,dt \\ &\quad + \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \end{aligned}$$

Άρα για να αποδείξουμε την (3.34) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x+t) - f(x-))D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t) - f(x+))D_n(t)\,dt \to 0 \tag{3.38}$$

όταν $n \to +\infty$. Αγνοώντας την τιμή της $D_n(t)$ στο μεμονωμένο σημείο $t = 0$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.36), έχουμε ότι η παράσταση στην αριστερή μεριά του ορίου (3.38) είναι ίση με

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x+t) - f(x-))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t) - f(x+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{3.39}$$

Τώρα ορίζουμε δύο συναρτήσεις:

$$g(t) = \begin{cases} (f(x+t) - f(x-))\frac{1}{2}, & \text{αν } -\pi + m2\pi \leq t < m2\pi \\ (f(x+t) - f(x+))\frac{1}{2}, & \text{αν } m2\pi < t \leq \pi + m2\pi \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} (f(x+t) - f(x-))\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}, & \text{αν } -\pi + m2\pi \leq t < m2\pi \\ (f(x+t) - f(x+))\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}, & \text{αν } m2\pi < t \leq \pi + m2\pi \end{cases}$$

όπου $m \in \mathbb{Z}$. Αν $t = m2\pi$ με $m \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε μια αυθαίρετη τιμή για τις $g(t), h(t)$. Βλέπουμε εύκολα ότι οι συναρτήσεις g, h είναι 2π-περιοδικές και τμηματικά συνεχείς. Γράφοντας

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\cos nt + \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\sin nt,$$

βλέπουμε ότι η παράσταση (3.39) ισούται με

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin nt\,dt.$$

Άρα για να αποδείξουμε την (3.38) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt \to 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin nt\,dt \to 0$$

όταν $n \to +\infty$. Αυτό, όμως, είναι άμεση εφαρμογή του Λήμματος Riemann-Lebesgue. □

Αν η $f \in H$ είναι συνεχής σε κάποιο x και στο ίδιο x υπάρχουν οι πλευρικές της παράγωγοι και είναι αριθμοί, τότε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1 γράφεται

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x).$$

Παράδειγμα 3.2.5. Για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ για $x \in [-\pi, \pi]$ του παραδείγματος 3.2.2 βρήκαμε ότι

$$b_k = 0 \qquad \text{για } k \geq 1$$

και $a_0 = \pi$ και για $k \geq 1$

$$a_k = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi} = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \text{ είναι άρτιος} \\ -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{αν } k \text{ είναι περιττός} \end{cases}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ όταν επεκταθεί ώστε να είναι 2π-περιοδική, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x = |x| \qquad \text{για κάθε } x \in [-\pi, \pi].$$

Παράδειγμα 3.2.6. Η συνάρτηση του παραδείγματος 3.2.3 έχει τύπο $f(x) = x$ για $x \in (-\pi, \pi)$ και $f(\pm\pi) = 0$ και είναι επεκτεταμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π-περιοδική. Το ημιάθροισμα των πλευρικών ορίων της στα $\pm\pi$ είναι ίσο με 0 και στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ είναι συνεχής.
Έχουμε βρει ότι

$$a_k = 0 \qquad \text{για } k \geq 0$$

και

$$b_k = -\frac{2(-1)^k}{k} \qquad \text{για } k \geq 1.$$

Άρα ισχύει

$$-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx = \begin{cases} x, & \text{αν } -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{αν } x = \pm\pi \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.2.7. Η συνάρτηση του παραδείγματος 3.2.4 έχει τύπο $f(x) = -1$ για $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = 1$ για $x \in (0, \pi)$ και $f(0) = f(\pm\pi) = 0$ και είναι επεκτεταμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π-περιοδική. Η f είναι συνεχής στο $(-\pi, 0)$ και στο $(0, \pi)$ και το ημιάθροισμα των πλευρικών ορίων της στα σημεία $\pm\pi$, 0 είναι ίσο με 0.
Έχουμε ότι

$$a_k = 0 \qquad \text{για } k \geq 0$$

και

$$b_k = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k\pi} = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν } k \text{ είναι περιττός} \end{cases}.$$

Άρα ισχύει

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x = \begin{cases} -1, & \text{αν } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{αν } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{αν } x = \pm\pi \text{ ή } x = 0 \end{cases}$$

Τα Θεωρήματα 3.2 και 3.3 και το Λήμμα 3.1 που ακολουθούν δεν τα αποδείξαμε στην τάξη.

Θεώρημα 3.2. *Έστω ότι η f είναι 2π-περιοδική και συνεχής στο $\mathbb{R}$ (και άρα $f \in H$). Αν η f' υπάρχει στο $\mathbb{R}$ εκτός από κάποια σημεία τα οποία έχουν πεπερασμένο πλήθος σε κάθε φραγμένο διάστημα και αν σε κάθε x υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x) = \lim_{t \to 0-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \qquad f'_+(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

και είναι αριθμοί, τότε ισχύει

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x) \qquad \text{ομοιόμορφα στο } \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Στα πιθανά πεπερασμένου πλήθους σημεία στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f μπορούμε να ορίσουμε αυθαίρετες τιμές για την f'. Αυτό δεν θα προξενήσει κανένα πρόβλημα στις ολοκληρώσεις κατά μέρη που θα κάνουμε παρακάτω.
Από το Θεώρημα 3.1 γνωρίζουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ συγκλίνει στο $f(x)$ για κάθε x. Για να αποδείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Weierstrass.
Έχουμε για $k \neq 0$ ότι

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\sin kx)' \, dx = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx.$$

Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε το ότι $\sin k\pi = \sin(-k\pi) = 0$.
Ομοίως,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx)' \, dx = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx,$$

όπου τώρα χρησιμοποιήσαμε το ότι $\cos k\pi = \cos(-k\pi) = -1$ και $f(-\pi) = f(\pi)$.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι

$$a_k = \frac{1}{k}\, \tilde{b}_k, \qquad b_k = \frac{1}{k}\, \tilde{a}_k \qquad \text{για κάθε } k \geq 1,$$

όπου $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ είναι οι συντελεστές Fourier της f' η οποία ανήκει στον χώρο H. Από την ανισότητα Bessel έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 \, dx < +\infty. \tag{3.40}$$

Τώρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| &\leq |a_k| + |b_k| = k|a_k| \, \frac{1}{k} + k|b_k| \, \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \, k^2 a_k^2 + \frac{1}{2} \, \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \, k^2 b_k^2 + \frac{1}{2} \, \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{2} \, (k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2) + \frac{1}{k^2} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και από την (3.40)

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, η $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. □

Θα συμβολίσουμε E το υποσύνολο του H το οποίο αποτελείται από τις συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.

Λήμμα 3.1. *Έστω $f \in H$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $g \in E$ έτσι ώστε*

$$\|g - f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - f(x))^2 \, dx < \epsilon^2.$$

Απόδειξη. Έστω $x_1, \dots, x_n$ τα διαδοχικά σημεία του $[-\pi, \pi]$ στα οποία η f είναι ασυνεχής. Επειδή η f είναι 2π-περιοδική, είτε $x_1 = -\pi$ και $x_n = \pi$ είτε $-\pi < x_1$ και $x_n < \pi$. Στην πρώτη περίπτωση ορίζουμε $m = n$ και συμβολίζουμε $t_1, \dots, t_m$ τα διαδοχικά σημεία $x_1, \dots, x_n$. Στη δεύτερη περίπτωση ορίζουμε $m = n + 2$ και συμβολίζουμε $t_1, \dots, t_m$ τα διαδοχικά σημεία $-\pi, x_1, \dots, x_n, \pi$. Έτσι το $[-\pi, \pi]$ χωρίζεται στα διαδοχικά διαστήματα $[t_1, t_2], \dots, [t_{m-1}, t_m]$.
Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{για κάθε } x. \tag{3.41}$$

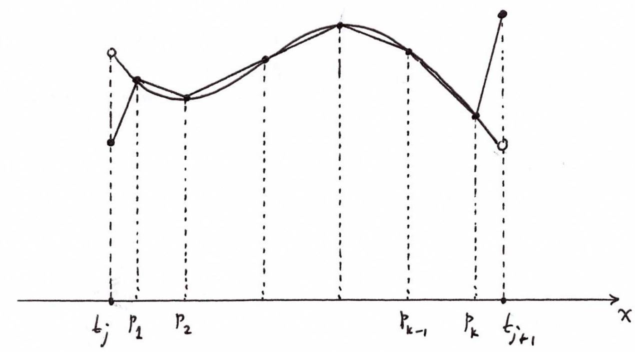
Σταθεροποιούμε τυχόν $j = 1, \dots, m - 1$.
Στο διάστημα $[t_j, t_{j+1}]$ επιλέγουμε σημεία a, b έτσι ώστε

$$t_j < a < b < t_{j+1} \qquad \text{και} \qquad a - t_j < \frac{\epsilon^2}{16mM^2}, \quad t_{j+1} - b < \frac{\epsilon^2}{16mM^2}. \tag{3.42}$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$, οπότε υπάρχουν διαδοχικά $a = p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k = b$ έτσι ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi}} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \text{ σε κάθε } [p_i, p_{i+1}]. \tag{3.43}$$

Ορίζουμε την g στο διάστημα $[t_j, t_{j+1}]$ έτσι ώστε οι τιμές της στα διαδοχικά $t_j, p_1, \dots, p_k, t_{j+1}$ να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές της f στα ίδια σημεία και έτσι ώστε να είναι αφφινική στα διαδοχικά υποδιαστήματα που ορίζονται από αυτά τα σημεία.



Από την (3.41) συνεπάγεται ότι ισχύει $|g(x) - f(x)| \leq 2M$ για κάθε x στα $[t_j, a], [b, t_{j+1}]$, οπότε από τις (3.42) έχουμε

$$\int_{t_j}^{a} (g(x) - f(x))^2 \, dx + \int_{b}^{t_{j+1}} (g(x) - f(x))^2 \, dx < \frac{\epsilon^2}{4m} + \frac{\epsilon^2}{4m} = \frac{\epsilon^2}{2m}. \tag{3.44}$$

Επίσης, από τις (3.43) συνεπάγεται ότι ισχύει $|g(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi}}$ για κάθε $x \in [a, b]$ και άρα

$$\int_{a}^{b} (g(x) - f(x))^2 \, dx \leq (b - a) \, \frac{\epsilon^2}{4\pi} < (t_{j+1} - t_j) \, \frac{\epsilon^2}{4\pi}. \tag{3.45}$$

Από τις (3.44), (3.45) έχουμε ότι

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (g(x) - f(x))^2 \, dx < \frac{\epsilon^2}{2m} + (t_{j+1} - t_j) \, \frac{\epsilon^2}{4\pi}. \tag{3.46}$$

Έτσι σε κάθε διάστημα $[t_j, t_{j+1}]$ έχουμε ορίσει συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής και τμηματικά αφφινική στο διάστημα αυτό και οι τιμές της στα άκρα t_j, t_{j+1} ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές της f στα ίδια σημεία. Επομένως, έχουμε ορίσει συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής και τμηματικά αφφινική σε ολόκληρο το διάστημα $[-\pi, \pi]$. Προσθέτουμε τις ανισότητες (3.46) για κάθε $j = 1, \ldots, m-1$ και βρίσκουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - f(x))^2 \, dx < (m-1)\, \frac{\epsilon^2}{2m} + 2\pi\, \frac{\epsilon^2}{4\pi} < \epsilon^2.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι, επειδή η g είναι συνεχής και τμηματικά αφφινική στο $[-\pi, \pi]$, η g είναι στοιχείο του E. □

Θεώρημα 3.3. *Το τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων αποτελεί ορθοκανονική βάση του H.*

Απόδειξη. Έστω τυχούσα $f \in H$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και από το Λήμμα 3.1 έχουμε ότι υπάρχει $g \in E$ ώστε

$$\|g - f\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.47}$$

Από το Θεώρημα 3.2 συνεπάγεται ότι η σειρά

$$\langle g, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\langle g, c_k \rangle c_k + \langle g, s_k \rangle s_k)$$

συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\left| g(x) - \left(\langle g, c_0 \rangle c_0(x) + \sum_{k=1}^{n} (\langle g, c_k \rangle c_k(x) + \langle g, s_k \rangle s_k(x)) \right) \right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{8\pi}} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν την σχέση στο $[-\pi, \pi]$ βρίσκουμε

$$\left\| g - \left(\langle g, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle g, c_k \rangle c_k + \langle g, s_k \rangle s_k) \right) \right\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.48}$$

Από τις (3.47), (3.48) και από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\left\| f - \left(\langle g, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle g, c_k \rangle c_k + \langle g, s_k \rangle s_k) \right) \right\| < \epsilon. \tag{3.49}$$

Η Πρόταση 3.8 λέει ότι από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς $\tilde{a}_0 c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\tilde{a}_k c_k + \tilde{b}_k s_k)$ ο γραμμικός συνδυασμός $\langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k)$ αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση στην f. Επομένως, από την (3.49) συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left\| f - \left(\langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k) \right) \right\| < \epsilon$$

και άρα $\left\| f - \left(\langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k) \right) \right\| \to 0$ όταν $n \to +\infty$. □

Επειδή το τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων αποτελεί ορθοκανονική βάση του H μπορούμε να λέμε ότι η σειρά $\langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k)$ ή, ισοδύναμα, η

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

είναι η **σειρά Fourier** της $f \in H$, όπου οι a_k, b_k δίνονται από τους τύπους (3.33).

Επίσης, ισχύει η ταυτότητα Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

3.3 Η κυματική εξίσωση (συνέχεια).

3.3.1 Φραγμένο χωρικό διάστημα και αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Εδώ θα ξαναδούμε το περιεχόμενο της υποενότητας 3.1.6 με το επιπλέον ισχυρότατο εργαλείο των σειρών Fourier. Για απλούστευση θα διατυπώσουμε όλα τα παρακάτω στην ειδική περίπτωση $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$. Τότε το πρόβλημα (3.21) γράφεται

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.50}$$

Αρχικά θα ακολουθήσουμε μια μεθοδολογία επίλυσης η οποία δεν έχει καμμία σχέση με τη μέθοδο επίλυσης στην υποενότητα 3.1.6 αλλά κατόπιν θα δούμε ότι υπάρχει ταύτιση.

Πρώτα λύνουμε το πρόβλημα με τις συνοριακές μόνο συνθήκες:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.51}$$

Αφού το λύσουμε θα δούμε ποιές από τις λύσεις ικανοποιούν και τις αρχικές συνθήκες.

Η μέθοδος, η οποία ονομάζεται **μέθοδος χωρισμού μεταβλητών**, συνίσταται στο να ψάξουμε να βρούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

όπου η X είναι συνάρτηση στο $[0,\pi]$ και η T είναι συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Τότε το (3.51) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ X(0)T(t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ X(\pi)T(t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.52}$$

Η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, δηλαδή $u(x,t) = 0$ για κάθε (x,t), είναι προφανώς λύση του (3.51), οπότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η λύση που ψάχνουμε δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο (x_0,t_0) ώστε $u(x_0,t_0) \neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$X(x_0) \neq 0 \qquad \text{και} \qquad T(t_0) \neq 0.$$

Το x_0 ανήκει στο κλειστό διάστημα $[0,\pi]$, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκει στο ανοικτό $(0,\pi)$. Πράγματι, αν ισχύει $X(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$, τότε, λόγω συνέχειας, θα ισχύει και $X(0) = X(\pi) = 0$.

Από τις δύο συνοριακές συνθήκες με $t = t_0$ προκύπτει ότι $X(0) = X(\pi) = 0$. Επομένως, το (3.52) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.53}$$

Η διαφορική εξίσωση με $t = t_0$ και με $x = x_0$ δίνει, αντιστοίχως,

$$X''(x) = \frac{T''(t_0)}{c^2 T(t_0)} X(x) \qquad \text{για } 0 < x < \pi,$$

$$T''(t) = \frac{c^2 X''(x_0)}{X(x_0)} T(t) \qquad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\lambda = -\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = -\frac{T''(t_0)}{c^2 T(t_0)},$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της διαφορικής εξίσωσης για $x = x_0, t = t_0$.

Έτσι βλέπουμε ότι το (3.53) χωρίζεται σε δύο παράλληλα προβλήματα επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0 \qquad \text{για } t \in \mathbb{R} \tag{3.55}$$

Το λ που εμφανίζεται στα δύο προβλήματα είναι κοινό.

Αντιστρόφως, οι λύσεις των (3.54), (3.55) (με το ίδιο λ) δίνουν λύση του (3.53), αφού

$$X(x)T''(t) = -c^2 \lambda X(x)T(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Αν $\lambda < 0$, η γενική λύση της δ.ε. $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}.$$

Με τις συνθήκες $X(0) = X(\pi) = 0$ βρίσκουμε εύκολα ότι $c_1 = c_2 = 0$ και άρα ισχύει $X(x) = 0$ για κάθε x, το οποίο είναι άτοπο.

Αν $\lambda = 0$, η γενική λύση της $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

και, πάλι, οι συνθήκες $X(0) = X(\pi) = 0$ δίνουν ότι $c_1 = c_2 = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lambda > 0$, η γενική λύση της δ.ε. $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Από την $X(0) = 0$ βρίσκουμε $c_1 = 0$ και, κατόπιν, από την $X(\pi) = 0$ βρίσκουμε ότι

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Πρέπει να είναι $c_2 \neq 0$ και άρα

$$\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Συνεπάγεται ότι

$$\sqrt{\lambda} = k \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}$$

ή, ισοδύναμα (αφού $\lambda > 0$),

$$\lambda = k^2 \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το πρόβλημα (3.54) έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν $\lambda = k^2$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, η γενική λύση του προβλήματος είναι

$$X(x) = a \sin kx.$$

Τώρα, με το ίδιο $\lambda = k^2$ η δ.ε. (3.55) γράφεται $T'' + c^2 k^2 T = 0$ και έχει γενική λύση

$$T(t) = c_1 \cos ckt + c_2 \sin ckt.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις του προβλήματος (3.51) της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$ είναι οι

$$u(x,t) = (c_1 \cos ckt + c_2 \sin ckt) a \sin kx = \Big(b \cos ckt + \frac{\tilde{b}}{ck} \sin ckt\Big) \sin kx \qquad \text{με } k \in \mathbb{N}.$$

Η "περίεργη" μορφή της σταθεράς μπροστά από το $\sin ckt$ θα δικαιολογηθεί λίγο πιο μετά όταν θεωρήσουμε και τις αρχικές συνθήκες.

Είναι σαφές, λόγω της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή $\mathcal{L}(u) = u_{tt} - c^2 u_{xx}$, ότι αν έχουμε λύσεις του προβλήματος (3.51), τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση. Άρα μπορούμε να φτιάξουμε γενικότερες λύσεις του (3.51) παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \Big(b_k \cos ckt + \frac{\tilde{b}_k}{ck} \sin ckt\Big) \sin kx. \tag{3.56}$$

Βέβαια, αυτές οι λύσεις δεν είναι της μορφής $X(x)T(t)$ αλλά είναι γραμμικοί συνδυασμοί τέτοιων λύσεων.

Τώρα μένει να δούμε αν υπάρχει λύση της μορφής (3.56) η οποία να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Για $t = 0$ πρέπει να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx = \phi(x) \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi. \tag{3.57}$$

Υπολογίζουμε

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{n} (-ckb_k \sin ckt + \tilde{b}_k \cos ckt) \sin kx,$$

οπότε για $t = 0$ πρέπει να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k \sin kx = \psi(x) \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi. \tag{3.58}$$

Άρα, αν οι αρχικές συνθήκες ϕ, ψ έχουν τη μορφή (3.57) και (3.58) αντιστοίχως, τότε έχουμε λύση $u(x,t)$ της μορφής (3.56).

Παράδειγμα 3.3.1. Θα δούμε με την καινούργια μέθοδο πώς λύνονται προβλήματα όπως του παραδείγματος 3.1.2.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = -2\sin x + 5 \sin 7x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 3 \sin 2x - 2 \sin 7x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι της μορφής (3.57) με $b_1 = -2, b_7 = 5$ και $b_k = 0$ για κάθε άλλο k. Επίσης, η ψ είναι της μορφής (3.58) με $\tilde{b}_2 = 3, \tilde{b}_7 = -2$ και $\tilde{b}_k = 0$ για κάθε άλλο k. Άρα η

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \Big(-2\cos ct + \frac{0}{c} \sin ct\Big) \sin x + \Big(0 \cos c2t + \frac{3}{c2} \sin c2t\Big) \sin 2x \\ &\quad + \Big(5 \cos c7t + \frac{-2}{c7} \sin c7t\Big) \sin 7x \\ &= -2\cos ct \sin x + \frac{3}{2c} \sin 2ct \sin 2x + \Big(5 \cos 7ct - \frac{2}{7c} \sin 7ct\Big) \sin 7x \end{aligned}$$

είναι λύση του προβλήματος.

Αν οι δοσμένες αρχικές συνθήκες ϕ, ψ δεν έχουν τη μορφή (3.57) και (3.58), τότε, όπως είδαμε, η λύση $u(x,t)$, αν υπάρχει, δεν μπορεί να έχει τη μορφή (3.56). Για να δούμε αν υπάρχει λύση καταφεύγουμε ουσιαστικά στη μέθοδο της υποενότητας 3.1.6. Επεκτείνουμε τις ϕ, ψ από το διάστημα $[0,\pi]$ στο $[-\pi,0]$ ώστε να είναι, ως συναρτήσεις στο $[-\pi,\pi]$ περιττές και κατόπιν τις επεκτείνουμε από το $[-\pi,\pi]$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ώστε, ως συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, να είναι 2π-περιοδικές. Η συνάρτηση ϕ είναι εξ' αρχής δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$. Για να είναι η επεκτεταμένη ϕ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει εξ' αρχής ότι $\phi(0) = \phi(\pi) = \phi''(0) = \phi''(\pi) = 0$. Ομοίως, η συνάρτηση ψ είναι εξ' αρχής συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$. Για να είναι η επεκτεταμένη ψ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει εξ' αρχής ότι $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$.

Αφού κάνουμε τις διαδοχικές επεκτάσεις και εξασφαλίσουμε ότι οι ϕ, ψ είναι περιττές και 2π-περιοδικές στο $\mathbb{R}$, λύνουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } x \in \mathbb{R} \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.59}$$

με τον τύπο του d' Alembert

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds. \tag{3.60}$$

Τότε, όπως είδαμε στην υποενότητα 3.1.6, η $u(x,t)$ ικανοποιεί αυτομάτως και τις συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ για κάθε t και άρα είναι λύση του προβλήματος 3.50.

Οι σειρές Fourier θα χρησιμοποιηθούν ακριβώς σ' αυτό το στάδιο ώστε να πάρουμε μια άλλη μορφή της λύσης $u(x,t)$ παρόμοια με την (3.56).

Επειδή η ϕ συνεχής και 2π-περιοδική, μπορούμε να ορίσουμε τους συντελεστές Fourier της a_k, b_k ως προς το τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων. Επειδή είναι και περιττή, ισχύει $a_k = 0$ για κάθε $k \geq 0$ και

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi(x)\sin kx\, dx \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Επειδή η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα 3.1 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\phi(x) = \sum_{k=1} b_k \sin kx \qquad \text{για κάθε } x.$$

Άρα

$$\frac{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{\sin k(x-ct) + \sin k(x+ct)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cos ckt \sin kx. \tag{3.61}$$

Ομοίως, η ψ συνεχής, περιττή και 2π-περιοδική, οπότε για τους συντελεστές Fourier της $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ ως προς το τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων ισχύει $\tilde{a}_k = 0$ για κάθε $k \geq 0$ και

$$\tilde{b}_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\sin kx\, dx \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Επειδή η ψ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα 3.1 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\psi(x) = \sum_{k=1} \tilde{b}_k \sin kx \qquad \text{ομοιόμορφα στο } \mathbb{R}.$$

Επομένως, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την ψ σε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα και να εναλλάξουμε ολοκλήρωση και άπειρο άθροισμα, παίρνοντας

$$\begin{aligned}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds &= \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{b}_k \int_{x-ct}^{x+ct} \sin ks\,ds = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tilde{b}_k}{k}(\cos k(x+ct) - \cos k(x-ct)) \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tilde{b}_k}{k} \sin ckt \sin kx.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Από τις (3.60, (3.61), (3.62) συνεπάγεται ότι η λύση γράφεται

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(b_k \cos ckt + \frac{\tilde{b}_k}{ck} \sin ckt\Big) \sin kx. \tag{3.63}$$

Δηλαδή η λύση έχει ακριβώς τη μορφή του αθροίσματος (3.56) αλλά, στη γενική περίπτωση, με άπειρους όρους.

Παράδειγμα 3.3.2. Θα λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = x^3(\pi - x)^3 & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = x(\pi - x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Οι $\phi(x) = x^3(\pi - x)^3$ και $\psi(x) = x(\pi - x)$ ικανοποιούν όλες τις απαραίτητες προϋποθέσεις και ειδικώτερα τις $\phi(0) = \psi(0) = \phi(\pi) = \psi(\pi) = \phi''(0) = \phi''(\pi) = 0$, οπότε υπολογίζουμε:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3(\pi - x)^3 \phi(x)\,dx = \frac{144(10-\pi^2)(1-(-1)^k)}{\pi k^7}, \qquad \tilde{b}_k = \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^3}$$

μετά από πολλές πράξεις και ολοκληρώσεις κατά μέρη.
Έτσι έχουμε

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{144(10-\pi^2)(1-(-1)^k)}{\pi k^7} \sin kx, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^3} \sin kx.$$

Άρα έχουμε τη λύση

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{144(10-\pi^2)(1-(-1)^k)}{\pi k^7} \cos ckt + \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi c k^4} \sin ckt\Big) \sin kx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^4}\Big(\frac{36(10-\pi^2)}{k^3} \cos ckt + \frac{1}{c} \sin ckt\Big) \sin kx. \end{aligned}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η μορφή (3.63) της λύσης είναι προτιμώτερη από τη μορφή (3.60) που δίνει ο τύπος του d' Alembert, διότι ο τύπος (3.60) χρησιμοποιεί τις επεκτάσεις των ϕ, ψ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και οι τύποι αυτών των επεκτάσεων δεν είναι εύκολο να γραφτούν σε κλειστή μορφή. Ακόμη πιο δύσκολο είναι να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$ σε κλειστή μορφή.

3.3.2 Μοναδικότητα λύσης και ενεργειακή μέθοδος.

Θα δούμε ότι η λύση του προβλήματος (3.50) είναι μοναδική και άρα δίνεται από τον τύπο (3.60) ή, ισοδύναμα, από τον (3.63).

Θεωρούμε την ενέργεια του συστήματος στο διάστημα $[0,\pi]$ η οποία δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = \int_0^\pi u_t(x,t)^2\,dx + c^2\int_0^\pi u_x(x,t)^2\,dx.$$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^\pi u_t(x,t)^2\,dx + c^2\frac{d}{dt}\int_0^\pi u_x(x,t)^2\,dx\\
&= 2\int_0^\pi u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx + 2c^2\int_0^\pi u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx\\
&= 2\int_0^\pi u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx + 2c^2\big(u_x(\pi,t)u_t(\pi,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)\big)\\
&\quad - 2c^2\int_0^\pi u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,dx.
\end{aligned}$$

Επειδή ισχύει $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ για κάθε t, παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε ότι ισχύει $u_t(0,t) = u_t(\pi,t) = 0$ για κάθε t. Άρα

$$\begin{aligned}
E'(t) &= 2\int_0^\pi u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx - 2c^2\int_0^\pi u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,dx\\
&= 2c^2\int_0^\pi u_t(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx - 2c^2\int_0^\pi u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Άρα η ενέργεια είναι χρονικά σταθερή. Ειδικώτερα, ισχύει

$$\begin{aligned}
E(t) = E(0) &= \int_0^\pi u_t(x,0)^2\,dx + c^2\int_0^\pi u_x(x,0)^2\,dx\\
&= \int_0^\pi \psi(x)^2\,dx + c^2\int_0^\pi \phi'(x)^2\,dx \qquad \text{για κάθε } t.
\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το πρόβλημα (3.50) έχει δύο λύσεις $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$. Τότε η

$$u(x,t) = u_1(x,t) = u_2(x,t)$$

είναι λύση του ίδιου προβλήματος αλλά με αρχικές συνθήκες

$$\phi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0 \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi.$$

Άρα η ενέργεια της $u(x,t)$ είναι

$$E(t) = \int_0^\pi \psi(x)^2\,dx + c^2\int_0^\pi \phi'(x)^2\,dx = 0 \qquad \text{για κάθε } t.$$

Ισοδύναμα,

$$\int_0^\pi u_t(x,t)^2\,dx + c^2\int_0^\pi u_x(x,t)^2\,dx = 0 \qquad \text{για κάθε } t.$$

Επειδή τα δύο ολοκληρώματα είναι μη-αρνητικά, συνεπάγεται ότι και τα δύο είναι ίσα με 0 και από το δεύτερο συνεπάγεται ότι ισχύει $u_x(x,t) = 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ και κάθε t. Επειδή $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $u(x,t) = 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$ και κάθε t.

Άρα έχουμε τη μοναδικότητα

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \qquad \text{για κάθε } x \in [0,\pi] \text{ και κάθε } t.$$

3.3.3 Χρονική περιοδικότητα της λύσης.

Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα (3.50) και τη λύση του στη μορφή (3.63):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(b_k \cos ckt + \frac{\tilde{b}_k}{ck}\sin ckt\Big)\sin kx.$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$u\Big(x, t + m\frac{2\pi}{c}\Big) = u(x,t) \qquad \text{για κάθε } x \in [0,\pi] \text{ κάθε } t \text{ και κάθε } m \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή η λύση εμφανίζει μια χρονική $\frac{2\pi}{c}$-περιοδικότητα.

Ειδικώτερα, με $t = 0$,

$$u\Big(x, m\frac{2\pi}{c}\Big) = \phi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [0,\pi] \text{ και κάθε } m \in \mathbb{Z}.$$

Η αρχική συνάρτηση $\phi(x)$ επαναλαμβάνεται αενάως κάθε χρονική στιγμή $t = m\frac{2\pi}{c}$ με $m \in \mathbb{Z}$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η λύση δεν υφίσταται *απόσβεση* όταν $t \to +\infty$, δηλαδή δεν ισχύει $u(x,t) \to 0$ όταν $t \to +\infty$, σε αντίθεση με τη λύση της εξίσωσης της διάχυσης που θα μελετήσουμε λίγο αργότερα.

3.3.4 Χρονική διάδοση ιδιομορφιών.

Για την επίλυση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

έχουμε υποθέσει ότι η ϕ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι η ψ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Ας δούμε τί γίνεται όταν τουλάχιστον μία από τις $\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi'$ δεν είναι συνεχής σε κάποιο x_0, δηλαδή όταν το x_0 είναι **ιδιομορφία** των αρχικών συνθηκών.

Αν η ϕ δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$$

δεν είναι συνεχής στα σημεία (x,t) για τα οποία ισχύει

$$x - ct = x_0 \qquad \text{ή} \qquad x + ct = x_0. \tag{3.64}$$

Αν τουλάχιστον μία από τις ϕ', ψ δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε οι

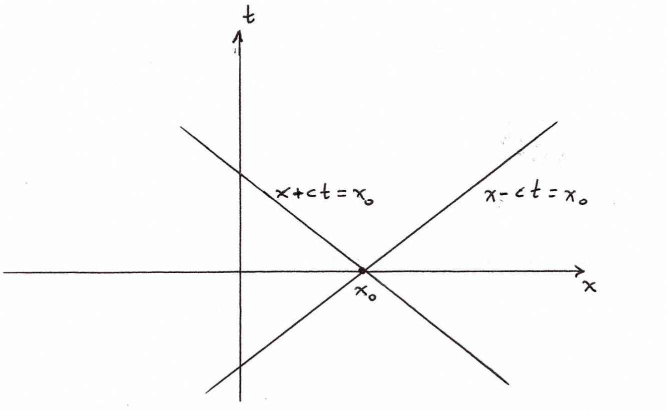
$$u_x(x,t) = \frac{\phi'(x-ct) + \phi'(x+ct)}{2} - \frac{\psi(x-ct) - \psi(x+ct)}{2c},$$
$$u_t(x,t) = -c\,\frac{\phi'(x-ct) - \phi'(x+ct)}{2} + \frac{\psi(x-ct) + \psi(x+ct)}{2}$$

δεν είναι συνεχείς στα ίδια σημεία (3.64).

Τέλος, αν τουλάχιστον μία από τις ϕ'', ψ' δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε οι

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\phi''(x-ct) + \phi''(x+ct)}{2} - \frac{\psi'(x-ct) - \psi'(x+ct)}{2c},$$
$$u_{tt}(x,t) = c^2\,\frac{\phi''(x-ct) + \phi''(x+ct)}{2} - c\,\frac{\psi'(x-ct) - \psi'(x+ct)}{2}$$

δεν είναι συνεχείς στα σημεία (3.64).



Τα σημεία (3.64) είναι τα σημεία των χαρακτηριστικών ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(x_0, 0)$ του x-άξονα. Δηλαδή, τα σημεία της ένωσης των δύο χαρακτηριστικών ευθειών αποτελούν ιδιομορφίες της λύσης $u(x, t)$.

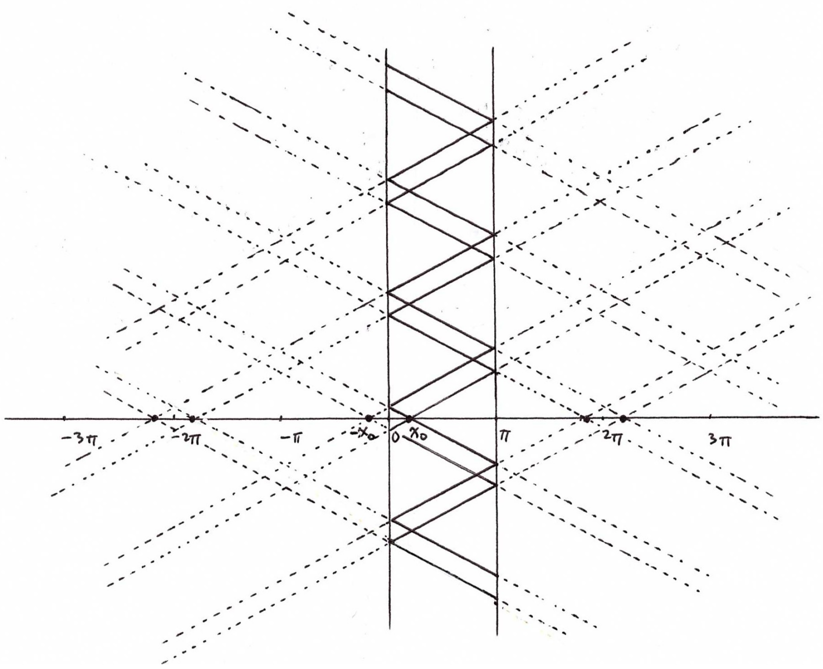
Αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως εξής. Αν, σε κάθε χρονική στιγμή t, δούμε τη λύση $u(x, t)$ ως συνάρτηση του x, τότε τη χρονική στιγμή t η ιδιομορφία στο $x_0 \in \mathbb{R}$ έχει μεταφερθεί στα $x_0 - ct, x_0 + ct \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η αρχική ιδιομορφία διαδίδεται αριστερά και δεξιά του x_0 με σταθερή ταχύτητα c.

Φυσικά, αν οι αρχικές συνθήκες παρουσιάζουν ιδιομορφίες σε περισσότερα από ένα σημεία του x-άξονα, τότε η λύση παρουσιάζει ιδιομορφία στην ένωση όλων των χαρακτηριστικών ευθειών οι οποίες διέρχονται από αυτά τα σημεία.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε πώς διαδίδονται οι τυχόν ιδιομορφίες των αρχικών συνθηκών του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Έστω ότι το $x_0 \in [0, \pi]$ αποτελεί ιδιομορφία των ϕ, ψ. Όταν επεκτείνουμε τις ϕ, ψ από το



$[0,\pi]$ στο $[-\pi,0]$ ώστε να είναι περιττές στο $[-\pi,\pi]$, τότε δημιουργείται μία νέα ιδιομορφία των ϕ,ψ στο $-x_0$. Τέλος, όταν επεκτείνουμε τις ϕ,ψ από το $[-\pi,\pi]$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π-περιοδικές στο $\mathbb{R}$, τότε δημιουργούνται νέες ιδιομορφίες των ϕ,ψ στα $\pm x_0 + m2\pi$ με $m \in \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει ότι η λύση $u(x,t)$ παρουσιάζει ιδιομορφίες στην ένωση όλων των χαρακτηριστικών ευθειών οι οποίες διέρχονται από όλα αυτά τα σημεία του x-άξονα. Επειδή μας ενδιαφέρει η λύση στην κατακόρυφη ζώνη $\{(x,t)\,|\,0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}\}$, πρέπει να εντοπίσουμε τα σημεία της ζώνης τα οποία ανήκουν σ' αυτές τις χαρακτηριστικές ευθείες. Τα σημεία αυτά φαίνονται στο σχήμα και αποτελούν την ένωση ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία συναντιούνται στις κατακόρυφες συνοριακές ευθείες. Έτσι οι ιδιομορφίες (x,t) διαδίδονται προς τα πάνω και προς τα κάτω υφιστάμενες διαδοχικές ανακλάσεις στις συνοριακές ευθείες. Αν, σε κάθε χρονική στιγμή t, δούμε τη λύση $u(x,t)$ ως συνάρτηση του x, τότε βλέπουμε ότι η αρχική ιδιομορφία στο x_0 διαδίδεται αριστερά και δεξιά του x_0 με σταθερή ταχύτητα c παραμένοντας μέσα στο διάστημα $[0,\pi]$ και υφιστάμενη διαδοχικές ανακλάσεις στα άκρα του διαστήματος.

Ασκήσεις.

3.3.1. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} & \\ u_t(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Σε ποιά σημεία της ζώνης $\{(x,t)\,|\,0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}\}$ παρουσιάζει πρόβλημα η λύση;

3.3.2. Αποδείξτε με την ενεργειακή μέθοδο τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = f(t) & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = g(t) & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.4 Η εξίσωση της διάχυσης.

3.4.1 Φραγμένο χωρικό διάστημα και αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Η εξίσωση

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0$$

με $c > 0$ ονομάζεται **εξίσωση της διάχυσης**.

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.65}$$

Θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, την οποία είδαμε στην υποενότητα 3.3.1, για να λύσουμε το πρόβλημα με τις συνοριακές μόνο συνθήκες:

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.66}$$

Αφού το λύσουμε θα δούμε ποιές από τις λύσεις ικανοποιούν και την αρχική συνθήκη.

Θα ψάξουμε να βρούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

όπου η X είναι συνάρτηση στο $[0,\pi]$ και η T είναι συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Το (3.66) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t) & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ X(0)T(t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ X(\pi)T(t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.67}$$

Η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση είναι λύση του (3.66), οπότε υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο (x_0,t_0) ώστε $u(x_0,t_0) \neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$X(x_0) \neq 0 \qquad \text{και} \qquad T(t_0) \neq 0.$$

Το x_0 ανήκει στο κλειστό διάστημα $[0,\pi]$, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκει στο ανοικτό $(0,\pi)$. Διότι, αν ισχύει $X(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$, τότε, λόγω συνέχειας, θα ισχύει και $X(0) = X(\pi) = 0$.

Από τις δύο συνοριακές συνθήκες με $t = t_0$ προκύπτει ότι $X(0) = X(\pi) = 0$. Επομένως, το (3.67) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t) & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

Η διαφορική εξίσωση με $t = t_0$ και με $x = x_0$ δίνει, αντιστοίχως,

$$X''(x) = \frac{T'(t_0)}{c^2 T(t_0)} X(x) \qquad \text{για } 0 < x < \pi,$$

$$T'(t) = \frac{c^2 X''(x_0)}{X(x_0)} T(t) \qquad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε

$$\lambda = -\frac{X'(x_0)}{X(x_0)} = -\frac{T'(t_0)}{c^2 T(t_0)},$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της διαφορικής εξίσωσης για $x = x_0, t = t_0$.

Επομένως το (3.68) χωρίζεται σε δύο παράλληλα προβλήματα επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.69}$$

$$T'(t) + c^2 \lambda T(t) = 0 \qquad \text{για } t \in \mathbb{R} \tag{3.70}$$

Το λ που εμφανίζεται στα δύο προβλήματα είναι κοινό.

Αντιστρόφως, οι λύσεις των (3.69), (3.70) (με το ίδιο λ) δίνουν λύση του (3.68), αφού

$$X(x)T'(t) = -c^2 \lambda X(x)T(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Όπως στην υποενότητα 3.3.1 μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (3.69) έχει (μη-μηδενική) λύση μόνο αν $\lambda > 0$. Ας το δούμε πάλι αλλά τώρα με μία διαφορετική μέθοδο. Από την $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, πολλαπλασιάζοντας με $X(x)$, βρίσκουμε τις διαδοχικές ισότητες

$$X(x)X''(x) = -\lambda X(x)^2$$

$$\int_0^\pi X(x)X''(x)\,dx = -\lambda \int_0^\pi X(x)^2\,dx$$
$$\int_0^\pi X'(x)^2\,dx = \lambda \int_0^\pi X(x)^2\,dx$$
όπου εφαρμόσαμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες μαζί με την $X(0) = X(\pi) = 0$. Αν είναι $\lambda \leq 0$, τότε από την τελευταία ισότητα συνεπάγεται $\int_0^\pi X'(x)^2\,dx = 0$ και άρα ισχύει $X'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Άρα η $X(x)$ είναι σταθερή στο $[0, \pi]$ και, επειδή $X(0) = X(\pi) = 0$, έχουμε ότι είναι $X(x) = 0$ για $x \in [0, \pi]$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή $\lambda > 0$, η γενική λύση της $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Από την $X(0) = 0$ βρίσκουμε $c_1 = 0$ και, κατόπιν, από την $X(\pi) = 0$ βρίσκουμε ότι

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Πρέπει να είναι $c_2 \neq 0$ και άρα

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Συνεπάγεται ότι

$$\sqrt{\lambda} = k \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}$$

ή, ισοδύναμα (αφού $\lambda > 0$),

$$\lambda = k^2 \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}.$$

Άρα το πρόβλημα (3.69) έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν $\lambda = k^2$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, η γενική λύση του προβλήματος είναι

$$X(x) = a \sin kx.$$

Με το ίδιο $\lambda = k^2$ η δ.ε. (3.70) γράφεται $T' + c^2k^2T = 0$ και έχει γενική λύση

$$T(t) = de^{-c^2k^2t}.$$

Επομένως οι λύσεις του προβλήματος (3.66) της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$ είναι οι

$$u(x,t) = be^{-c^2k^2t} \sin kx \qquad \text{με } k \in \mathbb{N}.$$

Είναι σαφές, λόγω της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή $\mathcal{L}(u) = u_t - c^2u_{xx}$, ότι αν έχουμε λύσεις του προβλήματος (3.66), τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση. Άρα μπορούμε να φτιάξουμε γενικότερες λύσεις του (3.66) παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^n b_k e^{-c^2k^2t} \sin kx. \tag{3.71}$$

Τώρα μένει να δούμε αν υπάρχει λύση της μορφής (3.71) η οποία να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Για $t = 0$ πρέπει να ισχύει

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kx = \phi(x) \qquad \text{για } 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.72}$$

Άρα, αν η ϕ έχει τη μορφή (3.72), τότε έχουμε λύση $u(x,t)$ της μορφής (3.71).

Παράδειγμα 3.4.1. Έστω το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = -2\sin x + 7\sin 2x + 3\sin 4x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι της μορφής (3.72) με $b_1 = -2, b_2 = 7, b_4 = 3$ και $b_k = 0$ για κάθε άλλο k. Άρα η

$$-2e^{-c^2 t}\sin x + 7e^{-4c^2 t}\sin 2x + 3e^{-16c^2 t}\sin 4x$$

είναι λύση του προβλήματος.

Αν η δοσμένη αρχική συνθήκη ϕ δεν έχει τη μορφή (3.72), τότε, όπως είδαμε, η λύση $u(x,t)$, αν υπάρχει, δεν μπορεί να έχει τη μορφή (3.71). Σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τις σειρές Fourier ώστε να βρούμε λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (3.65).

Αν η ϕ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ με $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ και αν σε κάθε $x \in (0,\pi)$ υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της ϕ (και είναι αριθμοί), γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi,$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi(x)\sin kx\, dx \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση που ορίζεται με τον τύπο

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-c^2 k^2 t}\sin kx \tag{3.73}$$

και θα αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει (ώστε να είναι καλά ορισμένη η $u(x,t)$) και ότι η $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος (3.65).

Από το Λήμμα Riemann-Lebesgue ξέρουμε ότι $b_k \to 0$ όταν $k \to +\infty$, οπότε η ακολουθία (b_k) είναι φραγμένη. Δηλαδή ισχύει $|b_k| \le M$ για κάθε k και για κάποιο $M \ge 0$. Άρα για $t > 0$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k e^{-c^2 k^2 t}\sin kx| \le M\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-c^2 k^2 t} < +\infty,$$

αφού από το κριτήριο ρίζας βλέπουμε εύκολα ότι η τελευταία σειρά συγκλίνει:

$$\sqrt[k]{e^{-c^2 k^2 t}} = e^{-c^2 k t} \to 0 \qquad \text{όταν } k \to +\infty.$$

Επομένως η σειρά (3.73) συγκλίνει απολύτως.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι, αν $t < 0$, τότε $e^{-c^2 k^2 t} \to +\infty$ όταν $k \to +\infty$, οπότε εν γένει δεν συγκλίνει η σειρά (3.73). Γι αυτό, αν η αρχική συνθήκη ϕ δεν έχει τη μορφή πεπερασμένου αθροίσματος ημιτόνων (3.72), περιοριζόμαστε σε χρόνο $t > 0$. Δηλαδή θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases} \tag{3.74}$$

Είναι προφανές ότι η $u(x,t)$ του (3.73) ικανοποιεί την αρχική συνθήκη και τις συνοριακές συνθήκες του (3.74), οπότε απομένει να αποδειχτεί ότι ικανοποιεί και την $u_t - c^2u_{xx} = 0$ για $0 < x < \pi$, $t > 0$.

Σταθεροποιούμε $t > 0$ και μελετάμε τη σειρά (3.73) ως σειρά συναρτήσεων του $x \in (0,\pi)$. Παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς x κάθε όρο της σειράς και βρίσκουμε τις σειρές των πρώτων και των δεύτερων παραγώγων

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kb_k e^{-c^2k^2t}\cos kx, \qquad -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2b_k e^{-c^2k^2t}\sin kx.$$

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση στη δεύτερη σειρά, αφού δούμε ότι ισχύει $|k^2b_ke^{-c^2k^2t}\sin kx| \leq Mk^2e^{-c^2k^2t}$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ και ότι

$$M\sum_{k=1}^{+\infty} k^2e^{-c^2k^2t} < +\infty$$

βάσει του κριτηρίου ρίζας.
Άρα η δεύτερη σειρά (των δεύτερων παραγώγων) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,\pi)$. Συνεπάγεται ότι η πρώτη σειρά (των πρώτων παραγώγων) συγκλίνει κι αυτή ομοιόμορφα στο $(0,\pi)$ και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη σειρά είναι η παράγωγος της συνάρτησης που ορίζεται από την πρώτη σειρά και, τέλος, η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη σειρά είναι η παράγωγος της $u(x,t)$. Δηλαδή:

$$u_x(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_ke^{-c^2k^2t}\cos kx, \quad u_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2b_ke^{-c^2k^2t}\sin kx \tag{3.75}$$

για $0 < x < \pi, t > 0$.

Η παραγώγιση της $u(x,t)$ ως προς t είναι πιο “λεπτή”. Θεωρούμε τυχόν $a > 0$ και μελετάμε τη σειρά (3.73) ως σειρά συναρτήσεων του $t \in (a,+\infty)$ σταθεροποιώντας τυχόν $x \in (0,\pi)$. Παραγωγίζουμε ως προς t κάθε όρο της σειράς και βρίσκουμε τη σειρά των παραγώγων

$$-c^2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2b_ke^{-c^2k^2t}\sin kx.$$

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση στο $(a,+\infty)$, αφού δούμε ότι ισχύει $|k^2b_ke^{-c^2k^2t}\sin kx| \leq Mk^2e^{-c^2k^2a}$ για κάθε $t \in (a,+\infty)$ και ότι

$$M\sum_{k=1}^{+\infty} k^2e^{-c^2k^2a} < +\infty$$

βάσει του κριτηρίου ρίζας.
Άρα η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(a,+\infty)$. Συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σειρά των παραγώγων είναι η παράγωγος της $u(x,t)$ για $t \in (a,+\infty)$. Δηλαδή:

$$u_t(x,t) = -c^2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2b_ke^{-c^2k^2t}\sin kx \tag{3.76}$$

για $0 < x < \pi, t > a$. Για να αποδείξουμε ότι η τελευταία ισότητα ισχύει για $t > 0$ σκεφτόμαστε ως εξής. Παίρνουμε τυχόν $t_0 > 0$ και, κατόπιν, οποιοδήποτε a_0 ώστε να είναι $0 < a_0 < t_0$. Με το συγκεκριμένο $a = a_0 > 0$ έχουμε ισχύει η (3.76) για κάθε $t > a_0$ και άρα και για το t_0. Άρα η (3.76) ισχύει για κάθε $t > 0$.

Τώρα από τις (3.75), (3.76) έχουμε ότι η u ικανοποιεί την εξίσωση $u_t - c^2u_{xx} = 0$ για $0 < x < \pi, t > 0$.

Παράδειγμα 3.4.2. Θα λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases}$$

Έχουμε ήδη βρει σε προηγούμενα παραδείγματα τους συντελεστές $b_k = \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^3}$ για την $\phi(x) = x(\pi - x)$. Έτσι έχουμε

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^3} \sin kx$$

και η λύση είναι η

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^3} e^{-c^2 k^2 t} \sin kx.$$

3.4.2 Χρονική διάδοση ιδιομορφιών και συμπεριφορά σε άπειρο χρόνο.

Στην απόδειξη του ότι η $u(x,t)$ που ορίζεται από τη σειρά (3.73) ικανοποιεί την εξίσωση της διάχυσης για $t > 0$ χρησιμοποιήσαμε μόνο το ότι η ακολουθία (b_k) είναι φραγμένη. Αυτό προκύπτει από το ότι η αρχική συνθήκη ϕ είναι απλώς τμηματικά συνεχής στο $[0,\pi]$ και δεν χρειάζεται η οποιαδήποτε παραγωγισιμότητα της ϕ σε κανένα σημείο. Με άλλα λόγια, ακόμη κι αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η αρχική συνθήκη ϕ παρουσιάζει ιδιομορφίες, η συνάρτηση $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση της διάχυσης "ακαριαία" σε χρόνο $t > 0$ και για κάθε $t > 0$. Μάλιστα, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί (ακριβώς όπως κάναμε για τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης τάξης ως προς $t > 0$) ότι η $u(x,t)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη ως προς x και ως προς $t > 0$.

Τέλος, από την (3.73) και την $|b_k| \le M$ έχουμε για $t \ge 1$ ότι

$$|u(x,t)| \le M \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-c^2 k^2 (t-1)} e^{-c^2 k^2} \le M e^{-c^2 (t-1)} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-c^2 k^2}.$$

Ορίζουμε $K = M e^{c^2} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-c^2 k^2} < +\infty$ και τότε έχουμε

$$|u(x,t)| \le K e^{-c^2 t} \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 1.$$

Δηλαδή

$$\max_{0 \le x \le \pi} |u(x,t)| \le K e^{-c^2 t} \qquad \text{για } t \ge 1$$

και επομένως $u(x,t) \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$ όταν $t \to +\infty$.

Με άλλα λόγια, η λύση u συγκλίνει στο 0 (ομοιόμορφα ως προς x) σε άπειρο χρόνο. Υπενθυμίζω το σχόλιο στο τέλος της υποενότητας 3.3.3 για τη διαφορά ανάμεσα στην εξίσωση της διάχυσης και την κυματική εξίσωση.

Ασκήσεις.

3.4.1. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin x - \sin 2x + 8 \sin 5x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η λύση τείνει στο 0 όταν $t \to +\infty$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$, δηλαδή ότι

$$\max_{0 \le x \le \pi} |u(x,t)| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to +\infty.$$

3.4.2. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases}$$

Σε ποιά σημεία της ζώνης $\{(x,t)\,|\,0 < x < \pi, t > 0\}$ παρουσιάζει πρόβλημα η λύση;
Αποδείξτε ότι η λύση τείνει στο 0 όταν $t \to +\infty$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$, δηλαδή ότι

$$\max_{0\le x\le\pi} |u(x,t)| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to +\infty.$$

3.4.3. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} -1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

Σε ποιά σημεία της ζώνης $\{(x,t)\,|\,0 < x < \pi, t > 0\}$ παρουσιάζει πρόβλημα η λύση;
Αποδείξτε ότι η λύση τείνει στο 0 όταν $t \to +\infty$ ομοιόμορφα στο $[0,\pi]$, δηλαδή ότι

$$\max_{0\le x\le\pi} |u(x,t)| \to 0 \qquad \text{όταν } t \to +\infty.$$

3.4.3 Η αρχή μεγίστου-ελαχίστου.

Θεωρούμε το λίγο γενικότερο από το (3.74) πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = f(t) & \text{για } t \ge 0 \\ u(\pi,t) = g(t) & \text{για } t \ge 0 \end{cases} \tag{3.77}$$

και θα αποδείξουμε την **Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου** για τις λύσεις του.

Θεώρημα 3.4. *Έστω $u(x,t)$ λύση του (3.74) και έστω $T > 0$. Τότε η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $u(x,t)$ στο ορθογώνιο $R = \{(x,t)\,|\,0 \le x \le \pi, 0 \le t \le T\}$ πιάνονται στο λεγόμενο παραβολικό σύνορο του R, δηλαδή στην ένωση των δύο κατακόρυφων πλευρών και της κάτω πλευράς του R.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν το A είναι ένα κλειστό (δηλαδή περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία) και φραγμένο σύνολο τότε κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση στο A πιάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A. Άρα η $u(x,t)$ πιάνει μέγιστη και ελάχιστη στο κλειστό ορθογώνιο R και πρέπει να δείξουμε ότι αυτές πιάνονται σε σημεία του παραβολικού συνόρου του R.
Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$w(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2 \qquad \text{για } (x,t) \in R.$$

Η $w(x,t)$ είναι συνεχής στο R οπότε κι αυτή πιάνει μέγιστη και ελάχιστη στο κλειστό ορθογώνιο R και θα δείξουμε ότι αυτές πιάνονται *μόνο* σε σημεία του παραβολικού συνόρου του R.
Έστω $(x_\epsilon, t_\epsilon) \in R$ σημείο μεγίστου για την $w(x,t)$.
Υποθέτουμε ότι το (x_ϵ, t_ϵ) βρίσκεται στο εσωτερικό του R, δηλαδή $0 < x_\epsilon < \pi, 0 < t_\epsilon < T$. Τότε η $w(x, t_\epsilon)$ ως συνάρτηση του x στο διάστημα $[0,\pi]$ έχει ολικό μέγιστο στο $x = x_\epsilon$, οπότε

$$w_x(x_\epsilon, t_\epsilon) = 0, \quad w_{xx}(x_\epsilon, t_\epsilon) \le 0.$$

Επίσης, η $w(x_\epsilon, t)$ ως συνάρτηση του t στο διάστημα $[0, T]$ έχει ολικό μέγιστο στο $t = t_\epsilon$, οπότε

$$w_t(x_\epsilon, t_\epsilon) = 0.$$

Άρα

$$w_t(x_\epsilon, t_\epsilon) - c^2 w_{xx}(x_\epsilon, t_\epsilon) \geq 0.$$

Όμως

$$E = \frac{1}{2} \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\, dA = \frac{1}{2} \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dA$$

$$w_t(x_\epsilon, t_\epsilon) - c^2 w_{xx}(x_\epsilon, t_\epsilon) = u_t(x_\epsilon, t_\epsilon) - c^2 u_{xx}(x_\epsilon, t_\epsilon) - 2\epsilon = -2\epsilon < 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Τώρα υποθέτουμε ότι το (x_ϵ, t_ϵ) βρίσκεται στην άνω πλευρά του R, δηλαδή $0 < x_\epsilon < \pi, t_\epsilon = T$.
Τότε η $w(x, T)$ ως συνάρτηση του x στο διάστημα $[0, \pi]$ έχει ολικό μέγιστο στο $x = x_\epsilon$, οπότε

$$w_x(x_\epsilon, T) = 0, \quad w_{xx}(x_\epsilon, T) \leq 0.$$

Επίσης, η $w(x_\epsilon, t)$ ως συνάρτηση του t στο διάστημα $[0, T]$ έχει ολικό μέγιστο στο $t = T$, οπότε

$$w_t(x_\epsilon, T) \geq 0.$$

Άρα

$$w_t(x_\epsilon, T) - c^2 w_{xx}(x_\epsilon, T) \geq 0.$$

Όμως και πάλι

$$w_t(x_\epsilon, T) - c^2 w_{xx}(x_\epsilon, T) = u_t(x_\epsilon, T) - c^2 u_{xx}(x_\epsilon, T) - 2\epsilon = -2\epsilon < 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα το σημείο (x_ϵ, t_ϵ) βρίσκεται αναγκαστικά στο παραβολικό σύνορο του R.
Αποδείξαμε ότι

$$w(x, t) \leq w(x_\epsilon, t_\epsilon) \qquad \text{για κάθε } (x, t) \in R$$

οπότε

$$u(x, t) + \epsilon x^2 \leq u(x_\epsilon, t_\epsilon) + \epsilon x_\epsilon^2 \qquad \text{για κάθε } (x, t) \in R.$$

Αν συμβολίσουμε $P(R)$ το παραβολικό σύνορο του R, τότε επειδή $(x_\epsilon, t_\epsilon) \in P(R)$ έχουμε ότι

$$u(x_\epsilon, t_\epsilon) \leq \max_{P(R)} u$$

και μαζί με την $x_\epsilon \leq \pi$ συμπεραίνουμε ότι

$$u(x, t) \leq \max_{P(R)} u + \epsilon \pi^2 \qquad \text{για κάθε } (x, t) \in R.$$

Επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, συνεπάγεται

$$u(x, t) \leq \max_{P(R)} u \qquad \text{για κάθε } (x, t) \in R.$$

Άρα

$$\max_R u \leq \max_{P(R)} u$$

και, επειδή η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής αφού $P(R) \subseteq R$, έχουμε ότι

$$\max_R u = \max_{P(R)} u.$$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή της $u(x,t)$ στο R ταυτίζεται με τη μέγιστη τιμή της στο $P(R)$, οπότε η $u(x,t)$ πιάνει τη μέγιστη τιμή της στο $P(R)$.
Σχετικά με την ελάχιστη τιμή της $u(x,t)$ θεωρούμε την αντίθετη συνάρτηση $-u(x,t)$. Αυτή είναι λύση του προβλήματος (3.77) αλλά με τις αντίθετες συναρτήσεις $-\phi, -f, -g$. Οι συνοριακές συνθήκες και η αρχική συνθήκη δεν έπαιξαν ιδιαίτερο ρόλο στα προηγούμενα, οπότε το προηγούμενο συμπέρασμα για τη μέγιστη τιμή ισχύει και για την $-u(x,t)$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\max_R(-u) = \max_{P(R)}(-u)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\min_R u = \min_{P(R)} u.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της $u(x,t)$ στο R ταυτίζεται με τη ελάχιστη τιμή της στο $P(R)$, οπότε η $u(x,t)$ πιάνει την ελάχιστη τιμή της στο $P(R)$. □

Ασκήσεις.

3.4.4. Έστω $u(x,t)$ λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - c^2u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

Ορίζουμε

$$m(t) = \min_{0\leq x\leq\pi} u(x,t), \quad M(t) = \max_{0\leq x\leq\pi} u(x,t) \qquad \text{για } t \geq 0.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $m(t)$ είναι αύξουσα και ότι η συνάρτηση $M(t)$ είναι φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή μεγίστου-ελαχίστου στη συνάρτηση $v(x,t) = u(x,t+t_1)$ για να αποδείξετε ότι $m(t_1) \leq m(t_2)$ και $M(t_1) \geq M(t_2)$ όταν $0 \leq t_1 < t_2$. Πρέπει να δείτε ποιού προβλήματος είναι λύση η $v(x,t)$ στη ζώνη $\{(x,t)\,|\,0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}$.

3.4.4 Η ενεργειακή μέθοδος.

Θεωρούμε πάλι μια λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (3.74)

$$\begin{cases} u_t - c^2u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \geq 0 \end{cases}$$

Από την δ.ε. συνεπάγεται

$$u(x,t)u_t(x,t) = c^2u(x,t)u_{xx}(x,t) \qquad \text{για } 0 < x < \pi, t > 0$$

οπότε

$$\int_0^\pi u(x,t)u_t(x,t)\,dx = c^2\int_0^\pi u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx \qquad \text{για } t > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $uu_t = (\frac{1}{2}u^2)_t$ και κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο δεύτερο ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^\pi u(x,t)^2\,dx = -c^2\int_0^\pi u_x(x,t)^2\,dx \leq 0 \qquad \text{για } t > 0.$$

Συμβολίζουμε

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u(x,t)^2\,dx$$

την **ενέργεια** της $u(x,t)$ τη χρονική στιγμή t και έχουμε ότι η ενέργεια είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Ειδικώτερα:

$$0 \le E(t) \le E(0) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \phi(x)^2\,dx.$$

Ασκήσεις.

3.4.5. Η ενέργεια της λύσης $u = u(x,t)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u(x,t)^2\,dx.$$

Αποδείξτε ότι $E(t) \to 0$ όταν $t \to +\infty$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη γνωστή αναπαράσταση της λύσης $u(x,t)$ ως σειρά ημιτόνων και την ταυτότητα Parseval:

$$\int_0^\pi f(x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \qquad \text{όταν} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx,\ \ 0 \le x \le \pi.$$

3.4.5 Μοναδικότητα λύσης.

Θεωρούμε το πολύ γενικότερο από το (3.74) πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = h & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = f(t) & \text{για } t \ge 0 \\ u(\pi,t) = g(t) & \text{για } t \ge 0 \end{cases} \tag{3.78}$$

με τη μη-ομογενή εξίσωση διάχυσης και θα αποδείξουμε ότι η λύση του, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Έστω, λοιπόν, δύο λύσεις $u_1(x,t), u_2(x,t)$ του (3.78) και ορίζουμε την

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Τότε η $u(x,t)$ είναι λύση του

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \\ u(\pi,t) = 0 & \text{για } t \ge 0 \end{cases} \tag{3.79}$$

και θα αποδείξουμε ότι η $u(x,t)$ είναι η μηδενική συνάρτηση. Αυτό θα το κάνουμε με δύο τρόπους. Πρώτα με την αρχή μεγίστου-ελαχίστου και κατόπιν με την ενεργειακή μέθοδο.

Παίρνουμε τυχόν (x,t) με $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$ και θεωρούμε οποιοδήποτε $T \ge t$. Τότε το σημείο (x,t) ανήκει στο ορθογώνιο $R = \{(x,t) \,|\, 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le T\}$.
Από το Θεώρημα 3.4 έχουμε ότι η τιμή $u(x,t)$ είναι ανάμεσα στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή της u στο παραβολικό σύνορο $P(R)$ του ορθογωνίου R. Αλλά από τις αρχικές και συνοριακές

συνθήκες του (3.79) έχουμε ότι η u είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο $P(R)$ και άρα ισχύει $0 \le u(x,t) \le 0$. Δηλαδή

$$u(x,t) = 0.$$

Τέλος, θεωρούμε την ενέργεια

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u(x,t)^2\,dx$$

της $u(x,t)$. Στην προηγούμενη υποενότητα αποδείξαμε ότι

$$0 \le E(t) \le E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \phi(x)^2\,dx$$

για κάθε $t \ge 0$. Επειδή στο (3.79) έχουμε $\phi(x) = 0$ για $0 \le x \le \pi$, προφανώς συνεπάγεται

$$E(t) = 0 \qquad \text{για } t \ge 0$$

και άρα

$$u(x,t) = 0 \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi, t \ge 0.$$

3.5 Η εξίσωση του Laplace.

3.5.1 Αρμονικές συναρτήσεις.

Ο **τελεστής του Laplace** είναι ο

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \qquad \text{ή} \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

για συναρτήσεις $u(x,y)$ στον $\mathbb{R}^2$ ή $u(x,y,z)$ στον $\mathbb{R}^3$.

Μια συνάρτηση u λέμε ότι είναι **αρμονική** στο ανοικτό σύνολο Ω αν ικανοποιεί την **εξίσωση του Laplace**

$$\Delta u = 0 \qquad \text{στο } \Omega.$$

Η μη-ομογενής εξίσωση

$$\Delta u = h \qquad \text{στο } \Omega$$

ονομάζεται **εξίσωση του Poisson**.

Παράδειγμα 3.5.1. Η συνάρτηση $u(x,y) = ax + by + c$ είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^2$ και η $u(x,y,z) = ax + by + cz + d$ είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^3$. Η απόδειξη είναι τετριμμένη.

Παράδειγμα 3.5.2. Η συνάρτηση $u(x,y) = ax^2 + by^2$ είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν $a + b = 0$. Επίσης, η συνάρτηση $u(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν $a + b + c = 0$.

Παράδειγμα 3.5.3. Η συνάρτηση

$$u(x,y) = \log\frac{1}{r} = \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Υπολογίζουμε

$$u_x = -x(x^2+y^2)^{-1}$$

$$u_{xx} = -(x^2+y^2)^{-1} + 2x^2(x^2+y^2)^{-2} = -r^{-2} + 2x^2r^{-4}$$

και ομοίως

$$u_{yy} = -r^{-2} + 2y^2r^{-4}.$$

Άρα

$$u_{xx} + u_{yy} = -2r^{-2} + 2(x^2+y^2)r^{-4} = -2r^{-2} + 2r^2r^{-4} = 0.$$

Παράδειγμα 3.5.4. Η συνάρτηση

$$u(x,y,z)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα

$$u_x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$u_{xx}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}=-r^{-3}+3x^2r^{-5}$$

και ομοίως

$$u_{yy}=-r^{-3}+3y^2r^{-5},\qquad u_{zz}=-r^{-3}+3z^2r^{-5}.$$

Άρα

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=-3r^{-3}+3(x^2+y^2+z^2)r^{-5}=-3r^{-3}+3r^2r^{-5}=0.$$

Ασκήσεις.

3.5.1. Στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε τους τύπους που συνδέουν καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες:

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta.$$

Για μια συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^2$ αποδείξτε ότι

$$u_x^2+u_y^2=u_r^2+\frac{1}{r^2}\,u_\theta^2,\qquad u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r}\,u_r+\frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta}.$$

Ποιές είναι οι αρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή r;

3.5.2. Στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε τους τύπους που συνδέουν καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad z=z.$$

Για μια συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^3$ αποδείξτε ότι

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=u_r^2+\frac{1}{r^2}\,u_\theta^2+u_z^2,\qquad u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{rr}+\frac{1}{r}\,u_r+\frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta}+u_{zz}.$$

3.5.3. Στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε τους τύπους που συνδέουν καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x=r\cos\theta\sin\phi,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\phi.$$

Για μια συνάρτηση u στον $\mathbb{R}^3$ αποδείξτε ότι

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=u_r^2+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,u_\theta^2+\frac{1}{r^2}\,u_\phi^2,$$

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{rr}+\frac{2}{r}\,u_r+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\,u_{\theta\theta}+\frac{1}{r^2}\,u_{\phi\phi}+\frac{\cot\phi}{r^2}\,u_\phi.$$

Ποιές είναι οι αρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0,0)\}$ οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή r;

3.5.2 Οι ταυτότητες του Green.

Ο γνωστός τύπος του Green στον $\mathbb{R}^2$ είναι ο

$$\iint_\Omega (P_x - Q_y)\,dxdy = \oint_{\partial\Omega} (Q\,dx + P\,dy)$$

όπου Ω είναι ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και οι πραγματικές συναρτήσεις P, Q είναι συνεχείς στο $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Το $\partial\Omega$ αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους κλειστές ομαλές καμπύλες. Όταν λέμε ότι το Ω είναι συνεκτικό εννοούμε ότι κάθε δύο σημεία του Ω ενώνονται με κάποια καμπύλη η οποία περιέχεται ολόκληρη στο Ω. Επίσης η φορά διαγραφής του $\partial\Omega$ στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial\Omega}(P\,dy + Q\,dx)$ είναι η *θετική*, δηλαδή εκείνη η οποία αφήνει το Ω στα αριστερά της.

Αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (P, -Q)$$

τότε

$$P_x - Q_y = \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}$$

και

$$Q\,dx + P\,dy = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στα σημεία του $\partial\Omega$ το οποίο είναι κάθετο στο $\partial\Omega$ και με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω και ds είναι το στοιχειώδες μήκος στο $\partial\Omega$.

Άρα, αν με dA συμβολίσουμε το στοιχειώδες εμβαδό $dxdy$, τότε μια δεύτερη γραφή του τύπου του Green είναι η

$$\iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds. \tag{3.80}$$

Ο γνωστός τύπος του Gauss στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA \tag{3.81}$$

όπου Ω είναι ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συνεχές στο $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Το $\partial\Omega$ αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους κλειστές ομαλές επιφάνειες. Το $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στα σημεία του $\partial\Omega$ το οποίο είναι κάθετο στο $\partial\Omega$ και με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω. Το dA είναι το στοιχειώδες εμβαδό στο $\partial\Omega$ και το dV είναι ο στοιχειώδης όγκος $dxdydz$.

Είναι φανερή η ομοιότητα ανάμεσα στους τύπους (3.80), (3.81).

Τώρα θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Green στον $\mathbb{R}^2$ στο διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = v\nabla u = (vu_x, vu_y)$$

όπου η $v(x,y)$ είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο Ω και η $u(x,y)$ έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$ και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω. Έχουμε

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = (vu_x)_x + (vu_y)_y = v_xu_x + vu_{xx} + v_yu_y + vu_{yy} = \nabla v\cdot\nabla u + v\Delta u$$

και ο τύπος του Green δίνει

$$\iint_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dA + \iint_\Omega v\Delta u\,dA = \oint_{\partial\Omega} v\nabla u\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

Επειδή το $\nabla u\cdot\mathbf{n}$ είναι η παράγωγος της u στην κατεύθυνση του $\mathbf{n}$ και αυτή συμβολίζεται και με $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$, η τελευταία ισότητα γράφεται και

$$\iint_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dA + \iint_\Omega v\Delta u\,dA = \oint_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,ds$$

και ονομάζεται **πρώτη ταυτότητα του Green** στον $\mathbb{R}^2$.

Αν εναλλάξουμε τους ρόλους των u, v (με τις απαραίτητες συνθήκες ως προς τη συνέχεια των παραγώγων τους), γράψουμε την αντίστοιχη πρώτη ταυτότητα του Green και αφαιρέσουμε τις δύο ταυτότητες, βρίσκουμε τη **δεύτερη ταυτότητα του Green** στον $\mathbb{R}^2$

$$\iint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dA = \oint_{\partial\Omega} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds.$$

Για να ισχύει η ταυτότητα αυτή πρέπει οι u, v να έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$ και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω.

Οι αντίστοιχες δύο ταυτότητες του Green στον $\mathbb{R}^3$ με συναρτήσεις $v(x, y, z), u(x, y, z)$ είναι οι

$$\iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dV + \iiint_{\Omega} v\Delta u \, dV = \oiint_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dA$$

και

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \oiint_{\partial\Omega} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dA$$

και αποδεικνύονται εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss στο διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = v\nabla u = (vu_x, vu_y, vu_z)$$

όπως κάναμε πριν στον $\mathbb{R}^2$.

Ασκήσεις.

3.5.4. Έστω Ω ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Έστω, επίσης, μια αρμονική συνάρτηση u στο Ω με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds = 0 \quad \text{ή} \quad \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dA = 0.$$

3.5.3 Η αρχή μεγίστου-ελαχίστου και μοναδικότητα λύσης.

Το θεώρημα που θα αποδείξουμε τώρα εκφράζει την **αρχή μεγίστου-ελαχίστου** για τις λύσεις της εξίσωσης Laplace.

Θεώρημα 3.5. *Έστω ότι η u είναι αρμονική στο ανοικτό και φραγμένο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Τότε η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της u στο $\overline{\Omega}$ πιάνονται στο $\partial\Omega$.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Η περίπτωση του $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι παρόμοια.

Η u πιάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\overline{\Omega}$ διότι είναι συνεχής και το $\overline{\Omega}$ είναι κλειστό και φραγμένο.

Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$w(x, y) = u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2) \qquad \text{για } (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Η w είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ οπότε κι αυτή πιάνει μέγιστη και ελάχιστη στο κλειστό και φραγμένο $\overline{\Omega}$ και θα δείξουμε ότι αυτές πιάνονται *μόνο* σε σημεία του $\partial\Omega$.

Έστω $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \overline{\Omega}$ σημείο μεγίστου για την w.

Υποθέτουμε ότι το (x_ϵ, y_ϵ) βρίσκεται στο Ω. Τότε η $w(x, y_\epsilon)$ ως συνάρτηση του x σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_ϵ έχει ολικό μέγιστο στο $x = x_\epsilon$, οπότε

$$w_x(x_\epsilon, y_\epsilon) = 0, \quad w_{xx}(x_\epsilon, y_\epsilon) \le 0.$$

Επίσης, η $w(x_\epsilon, y)$ ως συνάρτηση του y σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το y_ϵ έχει ολικό μέγιστο στο $y = y_\epsilon$, οπότε
$$w_y(x_\epsilon, y_\epsilon) = 0, \quad w_{yy}(x_\epsilon, y_\epsilon) \le 0.$$
Άρα
$$w_{xx}(x_\epsilon, y_\epsilon) + w_{yy}(x_\epsilon, y_\epsilon) \le 0.$$
Όμως
$$w_{xx}(x_\epsilon, y_\epsilon) + w_{yy}(x_\epsilon, y_\epsilon) = u_{xx}(x_\epsilon, y_\epsilon) + u_{yy}(x_\epsilon, y_\epsilon) + 4\epsilon = 4\epsilon > 0$$
και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα το σημείο (x_ϵ, y_ϵ) βρίσκεται αναγκαστικά στο $\partial\Omega$.
Έχουμε ότι
$$w(x, y) \le w(x_\epsilon, y_\epsilon) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \overline{\Omega}$$
οπότε
$$u(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2) \le u(x_\epsilon, y_\epsilon) + \epsilon(x_\epsilon^2 + y_\epsilon^2) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \overline{\Omega}.$$
Επειδή $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \partial\Omega$ έχουμε ότι
$$u(x_\epsilon, y_\epsilon) \le \max_{\partial\Omega} u.$$
Επίσης, επειδή το $\overline{\Omega}$ είναι φραγμένο, υπάρχει $R \ge 0$ ώστε να ισχύει $x^2+y^2 \le R^2$ για κάθε $(x, y) \in \overline{\Omega}$ και συμπεραίνουμε ότι
$$u(x, y) \le \max_{\partial\Omega} u + \epsilon R^2 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \overline{\Omega}.$$
Επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, συνεπάγεται
$$u(x, y) \le \max_{\partial\Omega} u \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \overline{\Omega}.$$
Άρα
$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max_{\partial\Omega} u$$
και, επειδή η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής αφού $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega}$, έχουμε ότι
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$
Άρα η μέγιστη τιμή της u στο $\overline{\Omega}$ ταυτίζεται με τη μέγιστη τιμή της στο $\partial\Omega$, οπότε η u πιάνει τη μέγιστη τιμή της στο $\partial\Omega$.
Σχετικά με την ελάχιστη τιμή της u θεωρούμε την αντίθετη συνάρτηση $-u$. Αυτή είναι επίσης συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και αρμονική στο Ω, οπότε το προηγούμενο συμπέρασμα για τη μέγιστη τιμή ισχύει και για την $-u$. Δηλαδή έχουμε ότι
$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) = \max_{\partial\Omega}(-u)$$
ή, ισοδύναμα,
$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$
Άρα η ελάχιστη τιμή της u στο $\overline{\Omega}$ ταυτίζεται με τη ελάχιστη τιμή της στο $\partial\Omega$, οπότε η u πιάνει την ελάχιστη τιμή της στο $\partial\Omega$. □

Τώρα θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακής συνθήκης

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.82}$$

όπου το Ω είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$, η f είναι συνεχής στο Ω και η g συνεχής στο $\partial\Omega$. Η λύση u πρέπει να είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και να έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω.

Θα δούμε ότι το πρόβλημα (3.82), αν έχει λύση, τότε αυτή η λύση είναι μοναδική.

Έστω, λοιπόν, δύο λύσεις u_1, u_2 του προβλήματος. Θεωρούμε την

$$u = u_1 - u_2$$

η οποία είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω και αποτελεί λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Από την αρχή μεγίστου-ελαχίστου συνεπάγεται ότι η u στο $\overline{\Omega}$ πιάνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο $\partial\Omega$. Επειδή $u = 0$ στο $\partial\Omega$ συνεπάγεται ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της u στο $\partial\Omega$ και άρα και στο $\overline{\Omega}$ είναι ίσες με 0. Άρα $u = 0$ στο $\overline{\Omega}$.
Άρα $u_1 = u_2$ στο $\overline{\Omega}$ και αποδείχθηκε η μοναδικότητα της λύσης του (3.82).

3.5.4 Η ενεργειακή μέθοδος και μοναδικότητα λύσης.

Τώρα θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακής συνθήκης

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{για } x \in \Omega \\ u = g & \text{για } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.83}$$

όπου το Ω είναι ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$, η f είναι συνεχής στο Ω και η g συνεχής στο $\partial\Omega$. Η λύση u πρέπει να έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$ και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω.

Θα δούμε ότι το πρόβλημα (3.83), αν έχει λύση, τότε αυτή είναι μοναδική.

Παρατηρήστε ότι έχουμε ακριβώς το ίδιο πρόβλημα με το (3.82), μόνο που τώρα έχουμε την επιπλέον υπόθεση ότι το Ω είναι συνεκτικό (αυτός δεν είναι σημαντικός περιορισμός) καθώς και ισχυρότερες υποθέσεις για την συνέχεια των μερικών παραγώγων της u.

Έστω, λοιπόν, δύο λύσεις u_1, u_2 του προβλήματος. Θεωρούμε την

$$u = u_1 - u_2$$

η οποία έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$ και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω και αποτελεί λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{για } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{για } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.84}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την πρώτη ταυτότητα του Green με τις συναρτήσεις u και $v = u$ και έχουμε

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dA + \iint_{\Omega} u \Delta u \, dA = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds.$$

Αυτή είναι η ταυτότητα στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$. Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$ κάνουμε ακριβώς τα ίδια. Από τα δεδομένα του (3.84) τα δύο τελευταία ολοκληρώματα μηδενίζονται, οπότε

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \, dA = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dA = 0.$$

Επειδή οι u_x, u_y είναι συνεχείς στο Ω και $u_x^2 + u_y^2 \geq 0$, συνεπάγεται ότι

$$u_x = u_y = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \nabla u = (u_x, u_y) = (0,0) = \mathbf{0} \qquad \text{στο } \Omega.$$

Από αυτό θα προκύψει ότι η u είναι σταθερή στο Ω. Παίρνουμε τυχαία $P, Q \in \Omega$ και, επειδή το Ω είναι συνεκτικό, υπάρχει καμπύλη C η οποία συνδέει το P με το Q και βρίσκεται ολόκληρη στο Ω. Αν $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $t \in [a, b]$ είναι μια παραμετρικοποίηση της C έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \nabla u \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla u(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b \Big(u_x(x(t), y(t))x'(t) + u_y(x(t), y(t))y'(t)\Big)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} u(x(t), y(t))\, dt = u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) = u(Q) - u(P). \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $u(Q) = u(P)$ για κάθε $P, Q \in \Omega$, οπότε η u είναι σταθερή στο Ω. Τώρα, η u είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και επομένως είναι σταθερή στο $\overline{\Omega}$. Επειδή $u = 0$ στο $\partial\Omega$, συνεπάγεται ότι $u = 0$ στο $\overline{\Omega}$.
Άρα $u_1 = u_2$ στο $\overline{\Omega}$ και αποδείχθηκε η μοναδικότητα της λύσης του (3.83).

Αυτή η μέθοδος απόδειξης της μοναδικότητας λύσης του (3.83) ονομάζεται *ενεργειακή* διότι χρησιμοποιήσαμε την παράσταση

$$E(u) = \frac{1}{2} \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\, dA = \frac{1}{2} \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dA$$

η οποία ονομάζεται **ενέργεια** της u. Στον $\mathbb{R}^3$ ο τύπος της ενέργειας είναι

$$E(u) = \frac{1}{2} \iiint_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dV = \frac{1}{2} \iiint_\Omega |\nabla u|^2\, dV.$$

Ασκήσεις.

3.5.5. Έστω Ω ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε οποιαδήποτε λύση του προβλήματος συνοριακής συνθήκης

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } \Omega \\ u = f & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Η u υποτίθεται ότι έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο $\overline{\Omega}$ και συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο Ω.
Αν v είναι οποιαδήποτε συνάρτηση συνεχής στο $\overline{\Omega}$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης στο Ω η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$v = f \quad \text{στο } \partial\Omega$$

αποδείξτε ότι

$$E(u) \leq E(v).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $w = v - u$ και αποδείξτε ότι $E(v) = E(u) + E(w)$.

3.5.6. Έστω Ω ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Αποδείξτε με την ενεργειακή μέθοδο τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u - ku = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου k είναι μη-αρνητική συνάρτηση συνεχής στο Ω.

3.5.5 Η ιδιότητα μέσης τιμής.

Έστω ότι η u είναι αρμονική στο ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$. Για απλούστευση των πράξεων θα θεωρήσουμε την περίπτωση του $\mathbb{R}^2$.

Έστω οποιοδήποτε σημείο $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ και οποιαδήποτε ακτίνα r_0 ώστε ο κλειστός δίσκος $\overline{D}(P_0, r_0)$ να περιέχεται στο Ω. Εφαρμόζουμε την πρώτη ταυτότητα του Green παίρνοντας ως Ω έναν δίσκο $D(P_0, r)$ με σύνορο τον κύκλο $C(P_0, r)$, όπου

$$0 < r \leq r_0$$

και ως v τη σταθερή συνάρτηση 1 και έχουμε:

$$\iint_{D(P_0,r)} \nabla 1 \cdot \nabla u \, dA + \iint_{D(P_0,r)} \Delta u \, dA = \oint_{C(P_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds.$$

Επειδή $\nabla 1 = (1_x, 1_y) = (0,0) = \mathbf{0}$, το πρώτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, οπότε

$$\iint_{D(P_0,r)} \Delta u \, dA = \oint_{C(P_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, ds. \tag{3.85}$$

Θα μελετήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Η παραμετρική αναπαράσταση του κύκλου $C(P_0, r)$ είναι

$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$$

οπότε

$$ds = |\mathbf{r}'(\theta)| \, d\theta = r \, d\theta.$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ στο σημείο $(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ του κύκλου το οποίο είναι κάθετο στον κύκλο και έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύκλου είναι το $(\cos\theta, \sin\theta)$ και άρα

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \nabla u \cdot \mathbf{n} = u_x(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\cos\theta + u_y(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\sin\theta \\
&= \frac{d}{dr} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta).
\end{aligned}$$

Μετά από αυτά η (3.85) γράφεται

$$\begin{aligned}
\iint_{D(P_0,r)} \Delta u \, dA &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) r \, d\theta \\
&= r \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, d\theta \\
&= r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, d\theta.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Επειδή η u είναι αρμονική στο Ω και επομένως και στον δίσκο $D(P_0, r)$, είναι $\Delta u = 0$ οπότε

$$\iint_{D(P_0,r)} \Delta u \, dA = 0.$$

Άρα από την (3.86) έχουμε

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, d\theta = 0 \qquad \text{για } 0 < r \leq r_0 \tag{3.87}$$

και επομένως το

$$\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \, d\theta$$

είναι σταθερό ως συνάρτηση του r στο διάστημα $(0, r_0]$.
Θα δούμε τώρα ότι

$$\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,d\theta \to 2\pi u(x_0, y_0) = 2\pi u(P_0) \qquad \text{όταν } r \to 0+. \tag{3.88}$$

Πράγματι, επειδή η u είναι συνεχής στο $P_0 = (x_0, y_0)$, για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|u(P) - u(P_0)| < \frac{\epsilon}{2\pi}$ όταν $|P - P_0| < \delta$. Άρα, αν $r < \delta$, τότε

$$|(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - (x_0, y_0)| = r < \delta$$

και άρα

$$|u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - u(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,d\theta - 2\pi u(x_0, y_0)\Big| \\
&\qquad = \Big|\int_0^{2\pi} \Big(u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - u(x_0, y_0)\Big)\,d\theta\Big| \\
&\qquad \le \int_0^{2\pi} \Big|u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - u(x_0, y_0)\Big|\,d\theta \\
&\qquad \le 2\pi\,\frac{\epsilon}{2\pi} = \epsilon
\end{aligned}$$

και έτσι αποδείχθηκε το όριο (3.88).
Άρα η σταθερή τιμή του $\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,d\theta$ στο διάστημα $(0, r_0]$ είναι η τιμή $u(x_0, y_0)$. Δηλαδή

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,d\theta \qquad \text{για } 0 < r \le r_0. \tag{3.89}$$

Θέτοντας $r = r_0$, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το ολοκλήρωμα με r_0 και γράφοντας $r_0\,d\theta = ds$ όπως πριν, έχουμε την ταυτότητα

$$u(P_0) = \frac{1}{|C(P_0, r_0)|}\oint_{C(P_0, r_0)} u\,ds \tag{3.90}$$

όπου $|C(P_0, r_0)|$ είναι το μήκος $2\pi r_0$ του κύκλου $C(P_0, r_0)$.

Η σχέση (3.90) εκφράζει την **ιδιότητα μέσης τιμής** της αρμονικής συνάρτησης u στο Ω.
Αν η u είναι αρμονική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε για κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω η μέση τιμή της u στην περιφέρεια του δίσκου ισούται με την τιμή της u στο κέντρο του δίσκου.

Στον $\mathbb{R}^3$ η σχέση (3.90) παίρνει τη μορφή

$$u(P_0) = \frac{1}{|S(P_0, r_0)|}\oiint_{S(P_0, r_0)} u\,dA,$$

όπου $|S(P_0, r_0)|$ είναι το εμβαδό $4\pi r_0^2$ της σφαίρας $S(P_0, r_0)$, και έχουμε την εξής διατύπωση της ιδιότητας μέσης τιμής:
Αν η u είναι αρμονική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, τότε για κάθε κλειστή μπάλα η οποία περιέχεται στο Ω η μέση τιμή της u στην επιφάνεια της μπάλας ισούται με την τιμή της u στο κέντρο της μπάλας.

Έχει πολύ ενδιαφέρον το ότι η ιδιότητα μέσης τιμής *χαρακτηρίζει* τις αρμονικές συναρτήσεις. Πράγματι ισχύει το εξής *αντίστροφο*:
Αν η u έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ και για κάθε κλειστό

δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω η μέση τιμή της u στην περιφέρεια του δίσκου ισούται με την τιμή της u στο κέντρο του δίσκου, τότε η u είναι αρμονική στο Ω.

Για να αποδείξουμε αυτό το αντίστροφο ξεκινάμε από την (3.90) για κάθε r με $0 < r \le r_0$. Αυτή είναι ίδια με την (3.89) και αυτή μας λέει ότι η $\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\,d\theta$ είναι σταθερή συνάρτηση του r στο διάστημα $(0, r_0]$. Άρα ισχύει η (3.87), οπότε από την (3.86) με $r = r_0$ έχουμε ότι ισχύει

$$\iint_{D(P_0,r_0)} \Delta u\, dA$$

για κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D}(P_0, r_0)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω.
Από αυτό θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\Delta u = 0 \qquad \text{στο } \Omega$$

δηλαδή ότι η u είναι αρμονική στο Ω.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιο σημείο $P_0 \in \Omega$ ώστε να είναι

$$\Delta u(P_0) \neq 0.$$

Λόγω συνέχειας των παραγώγων δεύτερης τάξης της u, υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|\Delta u(P) - \Delta u(P_0)| < \frac{1}{2}\,|\Delta u(P_0)| \qquad \text{όταν } |P - P_0| < r_0.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\Big|\iint_{D(P_0,r_0)} \Delta u\, dA - |D(P_0,r_0)|\Delta u(P_0)\Big| &= \Big|\iint_{D(P_0,r_0)} (\Delta u(P) - \Delta u(P_0))\, dA\Big| \\
&\le \iint_{D(P_0,r_0)} |\Delta u(P) - \Delta u(P_0)|\, dA \\
&\le \frac{1}{2}\,|\Delta u(P_0)|\,|D(P_0,r_0)|.
\end{aligned}$$

Από αυτό με απλή τριγωνική ανισότητα συνεπάγεται

$$\Big|\iint_{D(P_0,r_0)} \Delta u\, dA\Big| \ge \frac{1}{2}\,|\Delta u(P_0)|\,|D(P_0,r_0)| > 0$$

και φτάνουμε σε άτοπο.

Ισχύει το ίδιο και στον $\mathbb{R}^3$:
Αν η u έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ και για κάθε κλειστή μπάλα η οποία περιέχεται στο Ω η μέση τιμή της u στην επιφάνεια της μπάλας ισούται με την τιμή της u στο κέντρο της μπάλας, τότε η u είναι αρμονική στο Ω.

Ασκήσεις.

3.5.7. Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ και έστω αρμονική συνάρτηση u στο Ω. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μέσης τιμής της u αποδείξτε ότι η u δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο Ω.
Υπόδειξη: Αν η u έχει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $P \in \Omega$, αποδείξτε ότι η u είναι σταθερή στον μέγιστο δίσκο ή στη μέγιστη μπάλα κέντρου P που περιέχεται στο Ω.

3.5.6 Ορθογώνιο και συνοριακές συνθήκες.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < b \\
u(0,y) = u(a,y) = 0 & \text{για } 0 \le y \le b \\
u(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le a \\
u(x,b) = f(x) & \text{για } 0 \le x \le a
\end{cases} \tag{3.91}$$

Πρώτα λύνουμε το πρόβλημα χωρίς την τελευταία συνοριακή συνθήκη:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < b \\ u(0,y) = u(a,y) = 0 & \text{για } 0 \le y \le b \\ u(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le a \end{cases} \tag{3.92}$$

Αφού το λύσουμε θα δούμε ποιές από τις λύσεις ικανοποιούν και την τελευταία συνοριακή συνθήκη.

Θα εφαρμόσουμε πάλι τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών. Ψάχνουμε να βρούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

όπου η X είναι συνάρτηση στο $[0,a]$ και η Y είναι συνάρτηση στο $[0,b]$.

Τότε το (3.92) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < b \\ X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0 & \text{για } 0 \le y \le b \\ X(x)Y(0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le a \end{cases} \tag{3.93}$$

Η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, δηλαδή $u(x,y) = 0$ για κάθε (x,y), είναι λύση του (3.92), οπότε υποθέτουμε ότι η λύση που ψάχνουμε δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο (x_0, y_0) ώστε $u(x_0, y_0) \neq 0$ ή, ισοδύναμα,

$$X(x_0) \neq 0 \qquad \text{και} \qquad Y(y_0) \neq 0.$$

Το x_0 ανήκει στο κλειστό διάστημα $[0,a]$, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκει στο ανοικτό $(0,a)$, διότι, αν ισχύει $X(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,a)$, τότε, λόγω συνέχειας, θα ισχύει και $X(0) = X(a) = 0$. Ομοίως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το y_0 ανήκει στο $(0,b)$.

Από τις δύο συνοριακές συνθήκες $X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0$ με $y = y_0$ προκύπτει ότι $X(0) = X(a) = 0$. Και από την $X(x)Y(0) = 0$ με $x = x_0$ προκύπτει ότι $Y(0) = 0$. Επομένως, το (3.93) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < b \\ X(0) = X(a) = 0, Y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.94}$$

Η διαφορική εξίσωση με $y = y_0$ και με $x = x_0$ δίνει, αντιστοίχως,

$$X''(x) = -\frac{Y''(y_0)}{Y(y_0)} X(x) \qquad \text{για } 0 < x < a,$$

$$Y''(y) = -\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} Y(y) \qquad \text{για } 0 < y < b.$$

Θέτουμε

$$\lambda = -\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \frac{Y''(y_0)}{Y(y_0)},$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της διαφορικής εξίσωσης για $x = x_0, y = y_0$.

Έτσι βλέπουμε ότι το (3.94) χωρίζεται σε δύο παράλληλα προβλήματα επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & \text{για } 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \tag{3.95}$$

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 & \text{για } 0 < y < b \\ Y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.96}$$

Το λ που εμφανίζεται στα δύο προβλήματα είναι κοινό.

Αντιστρόφως, οι λύσεις των (3.95), (3.96) (με το ίδιο λ) δίνουν λύση του (3.94), αφού

$$X''(x)Y(y) = -\lambda X(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Αν $\lambda < 0$, η γενική λύση της δ.ε. $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}.$$

Με τις συνθήκες $X(0) = X(a) = 0$ βρίσκουμε εύκολα ότι $c_1 = c_2 = 0$ και άρα ισχύει $X(x) = 0$ για κάθε x, το οποίο είναι άτοπο.

Αν $\lambda = 0$, η γενική λύση της $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

και, πάλι, οι συνθήκες $X(0) = X(a) = 0$ δίνουν ότι $c_1 = c_2 = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lambda > 0$, η γενική λύση της δ.ε. $X'' + \lambda X = 0$ είναι

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Από την $X(0) = 0$ βρίσκουμε $c_1 = 0$ και, κατόπιν, από την $X(a) = 0$ βρίσκουμε ότι

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda}a = 0.$$

Πρέπει να είναι $c_2 \neq 0$ και άρα

$$\sin \sqrt{\lambda}a = 0.$$

Συνεπάγεται ότι

$$\sqrt{\lambda} = k\frac{\pi}{a} \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}$$

ή, ισοδύναμα (αφού $\lambda > 0$),

$$\lambda = k^2\frac{\pi^2}{a^2} \qquad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το πρόβλημα (3.95) έχει μη-μηδενική λύση αν και μόνο αν $\lambda = k^2\frac{\pi^2}{a^2}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, η γενική λύση του προβλήματος είναι

$$X(x) = c \sin k\frac{\pi}{a}x.$$

Τώρα, με το ίδιο $\lambda = k^2\frac{\pi^2}{a^2}$ η δ.ε. (3.96) γράφεται $Y'' - k^2\frac{\pi^2}{a^2}\,Y = 0$ και έχει γενική λύση

$$Y(y) = c_1 e^{k\frac{\pi}{a}y} + c_2 e^{-k\frac{\pi}{a}y}.$$

Λόγω της $Y(0) = 0$ παίρνουμε $c_2 = -c_1$, οπότε η γενική λύση του προβλήματος (3.96) είναι

$$Y(y) = c_1\Big(e^{k\frac{\pi}{a}y} - e^{-k\frac{\pi}{a}y}\Big) = 2c_1 \sinh k\frac{\pi}{a}y.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις του προβλήματος (3.92) της μορφής $u(x,y) = X(x)Y(y)$ είναι οι

$$u(x,y) = c \sin k\frac{\pi}{a}x \,\sinh k\frac{\pi}{a}y \qquad \text{με } k \in \mathbb{N}.$$

Λόγω της γραμμικότητας του διαφορικού τελεστή $\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy}$, ότι αν έχουμε λύσεις του προβλήματος (3.92), τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους είναι επίσης λύση. Άρα μπορούμε να φτιάξουμε γενικότερες λύσεις του (3.92) παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin k\frac{\pi}{a}x \,\sinh k\frac{\pi}{a}y. \tag{3.97}$$

Βέβαια, αυτές οι λύσεις δεν είναι της μορφής $X(x)Y(y)$ αλλά είναι γραμμικοί συνδυασμοί τέτοιων λύσεων.

Τώρα μένει να δούμε αν υπάρχει λύση της μορφής (3.97) η οποία να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $u(x,b) = f(x)$ για $0 \le x \le a$.

Για $y = b$ πρέπει να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sin k\frac{\pi}{a}x \, \sinh k\frac{\pi}{a}b = f(x) \qquad \text{για } 0 \le x \le a. \tag{3.98}$$

Άρα, αν η f έχει τη μορφή (3.98), τότε έχουμε λύση $u(x,y)$ της μορφής (3.97).

Παράδειγμα 3.5.5. Λύνουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < \pi \text{ και } 0 < y < 2\pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & \text{για } 0 \le y \le 2\pi \\ u(x,0) = 0 & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ u(x,2\pi) = 3\sin x - 5\sin 2x + 7\sin 7x & \text{για } 0 \le x \le \pi \end{cases} \tag{3.99}$$

Έχουμε $a = \pi$ και $b = 2\pi$, οπότε ψάχνουμε λύση της μορφής $u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx \, \sinh ky$ με $u(x,2\pi) = 3\sin x - 5\sin 2x + 7\sin 7x$.
Με $y = b = 2\pi$ πρέπει να είναι

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx \, \sinh 2k\pi = 3\sin x - 5\sin 2x + 7\sin 7x \qquad \text{για } 0 \le x \le \pi,$$

οπότε εξισώνοντας συντελεστές βρίσκουμε

$$c_1 = \frac{3}{\sinh 2\pi}, \quad c_2 = -\frac{5}{\sinh 4\pi}, \quad c_7 = \frac{7}{\sinh 14\pi}$$

και $c_k = 0$ για κάθε άλλο k.
Άρα έχουμε τη λύση

$$u(x,t) = \frac{3}{\sinh 2\pi} \sin x - \frac{5}{\sinh 4\pi} \sin 2x + \frac{7}{\sinh 14\pi} \sin 7x.$$

Αν οι δοσμένη f δεν έχει τη μορφή (3.98), τότε, όπως είδαμε, η λύση $u(x,y)$, αν υπάρχει, δεν μπορεί να έχει τη μορφή (3.97). Στην περίπτωση αυτή γράφουμε την f στη μορφή

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\frac{\pi}{a}x \qquad \text{για } 0 \le x \le a \tag{3.100}$$

με τη μέθοδο των σειρών Fourier. Για να το κάνουμε αυτό μετατρέπουμε με μια απλή αλλαγή μεταβλητής το διάστημα $[0,a]$ στο διάστημα $[0,\pi]$: ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(t) = f\Big(\frac{a}{\pi}t\Big) \qquad \text{για } 0 \le t \le \pi.$$

Τότε έχουμε

$$g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kt \qquad \text{για } 0 \le t \le \pi$$

με

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t) \sin kt \, dt.$$

Επομένως έχουμε την (3.100) με

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin k\frac{\pi}{a}x\,dx.$$

Τώρα θεωρούμε ότι η λύση θα έχει τη μορφή άπειρου αθροίσματος

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin k\frac{\pi}{a}x\,\sinh k\frac{\pi}{a}y$$

και η συνθήκη $u(x,b) = f(x)$ γράφεται

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin k\frac{\pi}{a}x\,\sinh k\frac{\pi}{a}b = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\frac{\pi}{a}x \qquad \text{για } 0 \le x \le a.$$

Εξισώνοντας συντελεστές βρίσκουμε

$$c_k = \frac{b_k}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}$$

οπότε η λύση είναι η

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\,\sin k\frac{\pi}{a}x. \tag{3.101}$$

Το μόνο που μένει είναι να αποδείξουμε ότι η $u(x,y)$ που βρήκαμε με τον τύπο (3.101) ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace στο ορθογώνιο $\{(x,y)\,|\,0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$.

Για να παραγωγίσουμε δύο φορές τη σειρά (3.101) ως προς x θεωρούμε τη σειρά των δεύτερων παραγώγων ως προς x και αποδεικνύουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,a)$ για κάθε (σταθερό) $y \in (0,b)$. Η σειρά των δεύτερων παραγώγων είναι η

$$-\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\,\sin k\frac{\pi}{a}x.$$

Έχουμε την απλή ανισότητα

$$\frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b} \le e^{-k\frac{\pi}{a}(b-y)}$$

οπότε

$$\left|k^2 b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\,\sin k\frac{\pi}{a}x\right| \le k^2|b_k|e^{-k\frac{\pi}{a}(b-y)} \le Mk^2 e^{-k\frac{\pi}{a}(b-y)},$$

όπου M είναι άνω φράγμα της ακολουθίας $(|b_k|)$. Η ακολουθία αυτή τείνει στο 0 λόγω του Λήμματος Riemann-Lebesgue και άρα είναι φραγμένη. Τώρα, επειδή $b - y > 0$, βλέπουμε με το κριτήριο λόγου ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-k\frac{\pi}{a}(b-y)}$$

συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά των δεύτερων παραγώγων ως προς x συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,a)$. Άρα ισχύει

$$u_{xx}(x,y) = -\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\,\sin k\frac{\pi}{a}x \tag{3.102}$$

για $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Τώρα θεωρούμε τη σειρά των δεύτερων παραγώγων της (3.101) ως προς y:

$$\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\, \sin k\frac{\pi}{a}x.$$

Θεωρούμε τυχόν b' με $0 < b' < b$ και θα αποδείξουμε ότι η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $(0, b')$ για κάθε (σταθερό) $x \in (0, a)$.
Ισχύει

$$\left|k^2 b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\, \sin k\frac{\pi}{a}x\right| \leq Mk^2 e^{-k\frac{\pi}{a}(b-y)} \leq Mk^2 e^{-k\frac{\pi}{a}(b-b')}.$$

Επειδή $b - b' > 0$, βλέπουμε πάλι από το κριτήριο λόγου ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-k\frac{\pi}{a}(b-b')}$$

συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά των δεύτερων παραγώγων ως προς y συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, b')$. Άρα ισχύει

$$u_{yy}(x, y) = \frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}y}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\, \sin k\frac{\pi}{a}x \tag{3.103}$$

για $0 < x < a$, $0 < y < b'$. Επειδή, όμως, το b' είναι τυχόν σημείο του $(0, b)$, συνεπάγεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει για $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Από τις (3.102), (3.103) συνεπάγεται ότι

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

στο ορθογώνιο $\{(x, y)\,|\,0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

Στο αρχικό πρόβλημα (3.91) το μη-ομογενές μέρος των συνοριακών συνθηκών υφίσταται στην άνω πλευρά του ορθογωνίου. Έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς αντιμετωπίζεται η κατάσταση όταν το μη-ομογενές μέρος των συνοριακών συνθηκών υφίσταται σε κάποια άλλη πλευρά του ορθογωνίου.

Στο πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < a \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 & \text{για } 0 \leq y \leq b \\ u(x, b) = 0 & \text{για } 0 \leq x \leq a \\ u(x, 0) = f(x) & \text{για } 0 \leq x \leq a \end{cases} \tag{3.104}$$

η μη-ομογενής συνοριακή συνθήκη υφίσταται στην κάτω πλευρά του ορθογωνίου. Τώρα, είτε επαναλαμβάνουμε ολόκληρη τη διαδικασία από την αρχή είτε ανάγουμε το πρόβλημα αυτό στο προηγούμενο πρόβλημα ως εξής. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(x, y) = u(x, b{-}y) \qquad \text{για } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $u(x, y)$ ικανοποιεί το (3.104) αν και μόνο αν η $v(x, y)$ ικανοποιεί το (3.91). Η λύση $v(x, y)$ του (3.91) δίνεται από τον τύπο (3.101) με $v(x, y)$ αντί $u(x, y)$, οπότε η λύση $u(x, y)$ του (3.104) είναι η

$$u(x, y) = v(x, b - y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{a}(b - y)}{\sinh k\frac{\pi}{a}b}\, \sin k\frac{\pi}{a}x, \tag{3.105}$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin kx \, dx.$$

Αν η μη-ομογενής συνοριακή συνθήκη υφίσταται στην δεξιά μεριά του ορθογωνίου, τότε έχουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < a \\ u(x,0) = u(x,b) = 0 & \text{για } 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0 & \text{για } 0 \le y \le b \\ u(a,y) = f(y) & \text{για } 0 \le y \le b \end{cases} \tag{3.106}$$

Τώρα ορίζουμε την

$$v(x,y) = u(y,x) \qquad \text{για } 0 \le x \le b, 0 \le y \le a$$

και βλέπουμε εύκολα ότι η $u(x,y)$ είναι λύση του (3.106) αν και μόνο αν η $v(x,y)$ είναι λύση του (3.91) αλλά με μετάθεση των a,b. Άρα η λύση $u(x,y)$ του (3.106) είναι η

$$u(x,y) = v(y,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{b}x}{\sinh k\frac{\pi}{b}a} \sin k\frac{\pi}{b}y, \tag{3.107}$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin ky\, dy.$$

Τέλος, στο πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < a \\ u(x,0) = u(x,b) = 0 & \text{για } 0 \le x \le a \\ u(a,y) = 0 & \text{για } 0 \le y \le b \\ u(0,y) = f(y) & \text{για } 0 \le y \le b \end{cases} \tag{3.108}$$

η μη-ομογενής συνοριακή συνθήκη υφίσταται στην αριστερή πλευρά του ορθογωνίου και η λύση είναι η

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{\sinh k\frac{\pi}{b}(a-x)}{\sinh k\frac{\pi}{b}a} \sin k\frac{\pi}{b}y, \tag{3.109}$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin ky\, dy.$$

Το πιο γενικό πρόβλημα είναι, φυσικά, το

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{για } 0 < x < a \text{ και } 0 < y < a \\ u(x,0) = f_1(x) & \text{για } 0 \le x \le a \\ u(x,b) = f_2(x) & \text{για } 0 \le x \le a \\ u(0,y) = f_3(y) & \text{για } 0 \le y \le b \\ u(a,y) = f_4(y) & \text{για } 0 \le y \le b \end{cases} \tag{3.110}$$

Τώρα θεωρούμε τη λύση $u_1(x,y)$ του προβλήματος με μη-ομογενή συνοριακή συνθήκη μόνο στην κάτω πλευρά, δηλαδή $u_1(x,0) = f_1(x)$ για $0 \le x \le a$, τη λύση $u_2(x,y)$ του προβλήματος με μη-ομογενή συνοριακή συνθήκη μόνο στην άνω πλευρά, δηλαδή $u_2(x,b) = f_2(x)$ για $0 \le x \le a$, τη λύση $u_3(x,y)$ του προβλήματος με μη-ομογενή συνοριακή συνθήκη μόνο στην αριστερή πλευρά, δηλαδή $u_3(0,y) = f_3(y)$ για $0 \le y \le b$, και τη λύση $u_4(x,y)$ του προβλήματος με μη-ομογενή συνοριακή συνθήκη μόνο στη δεξιά πλευρά, δηλαδή $u_4(a,y) = f_4(y)$ για $0 \le y \le b$. Οι λύσεις αυτές έχουν δοθεί προηγουμένως. Τότε η

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

είναι η λύση του (3.110).

3.5.7 Δίσκος και συνοριακές συνθήκες.

Όταν έχουμε να λύσουμε την εξίσωση του Laplace σε δίσκο στο xy-επίπεδο προτιμάμε να εργαστούμε με πολικές συντεταγμένες. Μετατρέπουμε την

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

σε εξίσωση με μεταβλητές r,θ μέσω των τύπων

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(r,\theta)=u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

και υπολογίζουμε

$$v_r=u_x\frac{\partial x}{\partial r}+u_y\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\,u_x+\sin\theta\,u_y$$

και

$$\begin{aligned}v_{rr}&=\cos\theta\Big(u_{xx}\frac{\partial x}{\partial r}+u_{yx}\frac{\partial y}{\partial r}\Big)+\sin\theta\Big(u_{yx}\frac{\partial x}{\partial r}+u_{yy}\frac{\partial y}{\partial r}\Big)\\&=\cos\theta\,(\cos\theta\,u_{xx}+\sin\theta\,u_{yx})+\sin\theta\,(\cos\theta\,u_{yx}+\sin\theta\,u_{yy})\\&=\cos^2\theta\,u_{xx}+2\sin\theta\cos\theta\,u_{xy}+\sin^2\theta\,u_{yy}.\end{aligned}$$

Επίσης

$$v_\theta=u_x\frac{\partial x}{\partial\theta}+u_y\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\,u_x+r\cos\theta\,u_y$$

και

$$\begin{aligned}v_{\theta\theta}&=-r\cos\theta\,u_x-r\sin\theta\Big(u_{xx}\frac{\partial x}{\partial\theta}+u_{yx}\frac{\partial y}{\partial\theta}\Big)-r\sin\theta\,u_y+r\cos\theta\Big(u_{yx}\frac{\partial x}{\partial\theta}+u_{yy}\frac{\partial y}{\partial\theta}\Big)\\&=-r\cos\theta\,u_x-r\sin\theta\,(-r\sin\theta\,u_{xx}+r\cos\theta\,u_{yx})\\&\quad-r\sin\theta\,u_y+r\cos\theta\,(-r\sin\theta\,u_{yx}+r\cos\theta\,u_{yy})\\&=r^2\sin^2\theta\,u_{xx}-2r^2\sin\theta\cos\theta\,u_{xy}+r^2\cos^2\theta\,u_{yy}-r\cos\theta\,u_x-r\sin\theta\,u_y.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$r^2v_{rr}+rv_r+v_{\theta\theta}=r^2(u_{xx}+u_{yy})$$

ή, ισοδύναμα, ότι ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$\Delta u=v_{rr}+\frac{1}{r}\,v_r+\frac{1}{r^2}\,v_{\theta\theta}.$$

Φυσικά πρέπει να είναι $r\neq 0$, οπότε πρέπει να αποκλείσουμε το σημείο $(0,0)$ από τον $\mathbb{R}^2$.

Παραδοσιακά, η συνάρτηση $v(r,\theta)$ συμβολίζεται $u(r,\theta)$. Χρησιμοποιούμε, δηλαδή, το ίδιο σύμβολο για τη συνάρτηση σε καρτεσιανές συντεταγμένες και για τη συνάρτηση σε πολικές συντεταγμένες. Επομένως, η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$ το οποίο δεν περιέχει το $(0,0)$ αν και μόνο αν ισχύει

$$r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0 \qquad \text{στο } \Omega.$$

Τώρα θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0 & \text{για } x^2+y^2<a^2\\ u(x,y)=f(x,y) & \text{για } x^2+y^2=a^2\end{cases} \tag{3.111}$$

Δηλαδή, έχουμε να βρούμε τις αρμονικές συναρτήσεις στον δίσκο $D((0,0),a)$ με συνοριακή συνθήκη $u = f$ στον κύκλο $C((0,0),a)$.

Γράφουμε τη συνάρτηση $f(x,y) = f(a\cos\theta, a\sin\theta)$ ως συνάρτηση $f(\theta)$ της πολικής συντεταγμένης θ και το πρόβλημα επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{cases} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0 & \text{για } 0 < r < a, \theta \in \mathbb{R} \\ u(a,\theta) = f(\theta) & \text{για } \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.112}$$

Πρέπει να λάβουμε υπ' όψη δύο πράγματα. Το πρώτο είναι ότι η συνάρτηση $u(r,\theta)$ πρέπει να είναι 2π-περιοδική ως συνάρτηση του θ. Το ίδιο ισχύει και για την $f(\theta)$. Το δεύτερο είναι μια διαφορά ανάμεσα στα προβλήματα (3.111) και (3.112). Στο πρώτο ο δίσκος $D((0,0),a)$ περιέχει το κέντρο $(0,0)$ ενώ στο δεύτερο πρόβλημα έχουμε αφαιρέσει το $(0,0)$ από τον δίσκο. Αυτό σημαίνει ότι ψάχνουμε λύσεις του προβλήματος (3.112) οι οποίες πρέπει να ορίζονται και στο σημείο $(0,0)$ έτσι ώστε να είναι συνεχείς στο $(0,0)$ αλλά και να έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης και να ικανοποιούν την εξίσωση Laplace και στο σημείο αυτό.

Τώρα, θα λύσουμε πρώτα την εξίσωση

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0 \qquad \text{για } 0 < r < a, \theta \in \mathbb{R} \tag{3.113}$$

και κατόπιν θα δούμε ποιά λύση ικανοποιεί και τη συνοριακή συνθήκη $u(a,\theta) = f(\theta)$ για $\theta \in \mathbb{R}$.

Θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία εύρεσης λύσεων της μορφής

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

όπου η συνάρτηση $R(r)$ ορίζεται στο διάστημα $(0,a]$ και η συνάρτηση $\Theta(\theta)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι 2π-περιοδική.

Υποθέτουμε ότι η $u(r,\theta)$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0, δηλαδή ότι υπάρχουν $r_0 \in (0,a)$ και θ_0 ώστε

$$R(r_0) \neq 0, \qquad \Theta(\theta_0) \neq 0.$$

Η εξίσωση του Laplace γράφεται

$$r^2R''(r)\Theta(\theta) + rR'(r)\Theta(\theta) = -R(r)\Theta''(\theta) \qquad \text{για } 0 < r < a,\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{3.114}$$

Με $r = r_0$ παίρνουμε

$$\Theta''(\theta) = -\left(r_0^2\,\frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + r_0\,\frac{R'(r_0)}{R(r_0)}\right)\Theta(\theta) \qquad \text{για } \theta \in \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε

$$\lambda = r_0^2\,\frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + r_0\,\frac{R'(r_0)}{R(r_0)},$$

οπότε έχουμε ότι

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \qquad \text{για } \theta \in \mathbb{R}.$$

Αν $\lambda < 0$ η γενική λύση της τελευταίας σ.δ.ε. είναι η

$$\Theta(\theta) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,\theta} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα (πώς;) ότι για να είναι περιοδική η λύση αυτή πρέπει να είναι $c_1 = c_2 = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο (επειδή η $\Theta(\theta)$ πρέπει να μην είναι ταυτοτικά ίση με 0). Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση της τελευταίας σ.δ.ε. είναι η

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta.$$

Πάλι αποδεικνύεται εύκολα (πώς;) ότι για να είναι περιοδική η λύση αυτή πρέπει να είναι $c_2 = 0$ και καταλήγουμε σε σταθερή λύση

$$\Theta(\theta) = c_1.$$

Απομένει η περίπτωση $\lambda > 0$ οπότε η γενική λύση της τελευταίας σ.δ.ε. είναι η

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\theta + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\theta.$$

Αποδεικνύεται εύκολα (πώς;) ότι για να είναι 2π-περιοδική η λύση αυτή (με c_1, c_2 όχι και τα δύο ίσα με 0) πρέπει να είναι

$$\sqrt{\lambda} = k \qquad \text{με } k \in \mathbb{N}.$$

Ενοποιώντας τις λύσεις αυτές μαζί με την λύση στην περίπτωση $\lambda = 0$, καταλήγουμε στις λύσεις

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta \qquad \text{με } k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Τώρα από την (3.114) με $\theta = \theta_0$ έχουμε ότι

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \frac{\Theta''(\theta_0)}{\Theta(\theta_0)} R(r) = 0 \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Πάλι από την (3.114) με $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ βλέπουμε ότι

$$\lambda = r_0^2 \frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + r_0 \frac{R'(r_0)}{R(r_0)} = -\frac{\Theta''(\theta_0)}{\Theta(\theta_0)},$$

οπότε η τελευταία σ.δ.ε. γράφεται

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Επειδή $\lambda = k^2$ με $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, έχουμε

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0 \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Αυτή είναι εξίσωση Euler και την λύνουμε βρίσκοντας λύσεις της μορφής

$$R(r) = r^{\alpha}.$$

Προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha = \pm k.$$

Αν $k = 1, 2, 3, \ldots$, έχουμε τη γενική λύση

$$R(r) = c_1 r^k + c_2 r^{-k} \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Επειδή ψάχνουμε λύσεις $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ οι οποίες είναι συνεχείς και στο σημείο $(0, 0)$, η $R(r)$ πρέπει να είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, a)$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $c_2 = 0$ και καταλήγουμε στη γενική λύση

$$R(r) = cr^k \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Αν $k = 0$ η εξίσωση Euler γράφεται

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0 \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Η γενική λύση της τελευταίας είναι

$$R(r) = c_1 \log r + c_2 \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Πάλι, επειδή η $R(r)$ πρέπει να είναι φραγμένη στο $(0, a)$ έχουμε ότι $c_1 = 0$, οπότε έχουμε τη γενική λύση

$$R(r) = c \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Ενοποιώντας τις περιπτώσεις $k = 1, 2, 3, \ldots$ και $k = 0$ έχουμε τις λύσεις

$$R(r) = cr^k \qquad \text{για } 0 < r < a.$$

Συνδυάζοντας με τις λύσεις $\Theta(\theta)$ που βρήκαμε προηγουμένως, έχουμε τις φραγμένες λύσεις

$$u(r, \theta) = r^k(\widetilde{a} \cos k\theta + \widetilde{b} \sin k\theta) \quad \text{για } 0 < r < a, \theta \in \mathbb{R} \qquad \text{με } k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Συνδυάζουμε αυτές τις λύσεις γράφοντας τη σειρά

$$u(r, \theta) = \widetilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k(\widetilde{a}_k \cos k\theta + \widetilde{b}_k \sin k\theta) \quad \text{για } 0 < r < a, \theta \in \mathbb{R}.$$

Πρέπει, βέβαια, να αποδείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει και ότι η συνάρτηση u που ορίζεται από αυτήν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, αλλά αυτό θα το κάνουμε σε λίγο.

Η αρχική συνθήκη $u(a, \theta) = f(\theta)$ γράφεται

$$f(\theta) = \widetilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a^k(\widetilde{a}_k \cos k\theta + \widetilde{b}_k \sin k\theta) \quad \text{για } \theta \in \mathbb{R}. \tag{3.115}$$

Για να βρούμε τους συντελεστές $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$ γράφουμε την $f(\theta)$ ως σειρά Fourier:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{3.116}$$

όπου οι συντελεστές a_k, b_k υπολογίζονται ως ολοκληρώματα:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta \, d\theta.$$

Εξισώνοντας συντελεστές των (3.115), (3.116) βρίσκουμε

$$\widetilde{a}_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad \widetilde{a}_k = a^{-k} a_k \quad \widetilde{b}_k = a^{-k} b_k \quad \text{για } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Άρα

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad \text{για } 0 < r < a, \theta \in \mathbb{R}.$$

Αν ορίσουμε την τιμή της u στο σημείο $(0, 0)$ να είναι ίση με $\frac{a_0}{2}$ τότε ο τελευταίος τύπος ισχύει και για $r = 0$, οπότε έχουμε τη συνάρτηση

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad \text{για } 0 \le r < a, \theta \in \mathbb{R} \tag{3.117}$$

ορισμένη στον δίσκο $D((0, 0), a)$ μαζί με το κέντρο του.

Απομένει να αποδείξουμε ότι αυτή η $u(r, \theta)$ ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace στο δίσκο $D((0, 0), a)$. Αυτό θα γίνει αφού βρούμε έναν άλλο τύπο, εκτός του (3.117), για τη λύση $u(r, \theta) = u(x, y)$.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους για τα a_k, b_k, βρίσκουμε

$$a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)(\cos k\phi\,\cos k\theta + \sin k\phi\,\sin k\theta)\,d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos k(\theta-\phi)\,d\phi.$$

Άρα ο τύπος (3.117) γράφεται

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos k(\theta-\phi)\,d\phi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^k \cos k(\theta-\phi)\Big)d\phi. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Η εναλλαγή σειράς και ολοκλήρωσης επιτρέπεται διότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{r}{a})^k \cos k(\theta-\phi)$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς ϕ στο διάστημα $[0,2\pi]$. Πράγματι, έχουμε $|(\frac{r}{a})^k \cos k(\theta-\phi)| \le (\frac{r}{a})^k$ για κάθε $\phi \in [0,2\pi]$ και

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{r}{a}\Big)^k < +\infty$$

διότι $0 < r < a$.

Τώρα, χρησιμοποιώντας (μιγαδικές) γεωμετρικές σειρές έχουμε έναν απλό γενικό τύπο για $0 \le t < 1$, $\psi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \cos k\psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} t^k e^{ik\psi} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} t^k e^{-ik\psi} \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{te^{i\psi}}{1-te^{i\psi}} + \frac{te^{-i\psi}}{1-te^{-i\psi}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1-t^2}{|1-te^{i\psi}|^2}. \end{aligned}$$

Άρα ο (3.118) γράφεται

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,\frac{a^2-r^2}{|ae^{i\phi}-re^{i\theta}|^2}. \tag{3.119}$$

Με βάση τον τελευταίο τύπο θα επιστρέψουμε στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Γράφουμε

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = re^{i\theta}, \qquad (\xi,\eta) = (a\cos\phi, a\sin\phi) = ae^{i\phi}.$$

Επίσης, είχαμε από την αρχή συμφωνήσει ότι το $f(\phi)$ είναι απλούστευση του

$$f(a\cos\phi, a\sin\phi) = f(\xi,\eta).$$

Τέλος, στον κύκλο $C((0,0),a)$ το στοιχειώδες μήκος είναι

$$ds = a\,d\phi.$$

Μετά από αυτά ο (3.119) γράφεται

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2\pi a}\oint_{C((0,0),a)} f(\xi,\eta)\,\frac{(\xi^2+\eta^2)-(x^2+y^2)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,ds \\ &= \frac{1}{|C((0,0),a)|}\oint_{C((0,0),a)} f(\xi,\eta)\,P(x,y;\xi,\eta)\,ds, \end{aligned} \tag{3.120}$$

όπου η συνάρτηση

$$P(x,y;\xi,\eta) = \frac{(\xi^2+\eta^2)-(x^2+y^2)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Poisson**.

Είναι πολύ εύκολο να αποδείξει κάποιος με πράξεις ότι για σταθερό (ξ, η) με $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ η συνάρτηση $P(x, y; \xi, \eta)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\Delta P(x, y; \xi, \eta) = P_{xx}(x, y; \xi, \eta) + P_{yy}(x, y; \xi, \eta) = 0 \qquad \text{για } x^2 + y^2 < a^2.$$

Επομένως, από την (3.120) έχουμε

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{C((0,0),a)} f(\xi, \eta)\, \Delta P(x, y; \xi, \eta)\, ds = 0 \qquad \text{για } x^2 + y^2 < a^2.$$

και άρα η $u(x, y)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον δίσκο $D((0, 0), a)$.

Έχουμε, λοιπόν, τέσσερις τύπους για τη λύση του προβλήματος (3.111) ή (3.112): τους (3.117), (3.118), (3.119) με πολικές συντεταγμένες και (3.120) με καρτεσιανές συντεταγμένες.

Ένας τελευταίος τύπος έχει να κάνει με τον μιγαδικό συμβολισμό

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta, \qquad \overline{z} = x - iy = r\cos\theta - ir\sin\theta.$$

Από τον τύπο του De Moivre παίρνουμε

$$z^k = r^k \cos k\theta + ir^k \sin k\theta, \qquad \overline{z}^k = r^k \cos k\theta - ir^k \sin k\theta.$$

Επομένως,

$$r^k \cos k\theta = \frac{1}{2}(z^k + \overline{z}^k), \qquad r^k \sin k\theta = \frac{1}{2i}(z^k - \overline{z}^k).$$

Βάσει αυτών των ισοτήτων ο τύπος (3.117) γράφεται

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k}\, \mathrm{Re}\Big((a_k - ib_k) z^k\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k}\, (a_k - ib_k) z^k\Big). \tag{3.121}$$

Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(z) = h(x + iy) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k}\, (a_k - ib_k) z^k \qquad \text{για } |z| < a$$

οπότε ισχύει

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, h(z) \qquad \text{για } |z| < a.$$

Η συνάρτηση h που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι ολόμορφη στον δίσκο $D((0, 0), a)$ αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει στον δίσκο αυτόν. Πράγματι, επειδή, σύμφωνα με το Λήμμα Riemann-Lebesgue, οι ακολουθίες $(a_k), (b_k)$ τείνουν στο 0, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|a_k| \le M$ και $|b_k| \le M$ για κάθε k και άρα η εν λόγω δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Big|\frac{1}{a^k}\, (a_k - ib_k) z^k\Big| \le 2M \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{|z|}{a}\Big)^k < +\infty$$

αφού $|z| < a$.

Αποδείξαμε μέσω του τύπου (3.121) ότι κάθε αρμονική συνάρτηση στον δίσκο $D((0, 0), a)$ είναι το πραγματικό μέρος μιας συνάρτησης ολόμορφης στον ίδιο δίσκο. Αυτή η παρατήρηση δείχνει μια σύνδεση ανάμεσα στη θεωρία των αρμονικών συναρτήσεων και στη μιγαδική ανάλυση, δηλαδή στη θεωρία των ολόμορφων συναρτήσεων.