Άσκηση 5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_x + u_t = x, & x > 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, & x > 0, \\ u(0,t) = t, & t > 0, \end{cases}$$

Λύση. Οι χαρακτηριστικές ευθείες είναι οι ευθείες $x = t + c$.

Το απλούστερο πρόβλημα

$$\begin{cases} u_x + u_t = x, & x > 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, & x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

λύνεται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών και βρίσκουμε τη λύση

$$u_1(x,t) = \sin(x-t) + xt - \frac{t^2}{2}$$

Ανάλογα, για το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_x + u_t = x, & x > 0, \ t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = t, & t > 0, \end{cases}$$

βρίσκουμε τη λύση

$$u_2(x,t) = \frac{x^2}{2} + t - x$$

Σημείωση. Η λύση $u(x,t)$ του (1) θα πρέπει να ισούται με την $u_1(x,t)$ κοντά σε κάποιο σημείο $(x_0,0)$ και θα πρέπει να ισούται με $u_2(x,t)$ κοντά σε κάποιο σημείο $(0,t_0)$. Θα πρέπει κάπως να 'κολλήσουν' οι δύο αυτές λύσεις.

Για το αρχικό πρόβλημα (1), το τεταρτημόριο $\{(x,t) : x > 0, \ t > 0\}$ χωρίζεται σε δύο μέρη από την χαρακτηριστική ευθεία $x = t$. Η συνάρτηση

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) = \sin(x-t) + xt - \frac{t^2}{2}, & x > t, \\ u_2(x,t) = \frac{x^2}{2} + t - x, & x < t \end{cases}$$

είναι C^1 λύση της ΜΔΕ σε κάθε ένα από τα σύνολα $\{x > t > 0\}$ και $\{0 < x < t\}$ και ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες. Λόγω του ότι $u_1(x,x) = u_2(x,x)$, η $u(x,t)$ είναι συνεχής γενικευμένη λύση του προβλήματος (1).

Άσκηση 8. Να βρεθεί λύση εντροπίας του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Η τελική λύση που είναι γραμμένη στις Σημειώσεις Παραδόσεων στην η-Τάξη είναι λάθος.

Λύση. Αν είχαμε το απλούστερο πρόβλημα όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

τότε η λύση εντροπίας θα ήταν (βλ. πρόβλημα Riemann) η

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t, \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

Επίσης, αν είχαμε το απλούστερο πρόβλημα όπου

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

τότε η λύση θα ήταν το κρουστικό κύμα

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{t}{2} + 1, \\ 0, & x > \frac{t}{2} + 1. \end{cases}$$

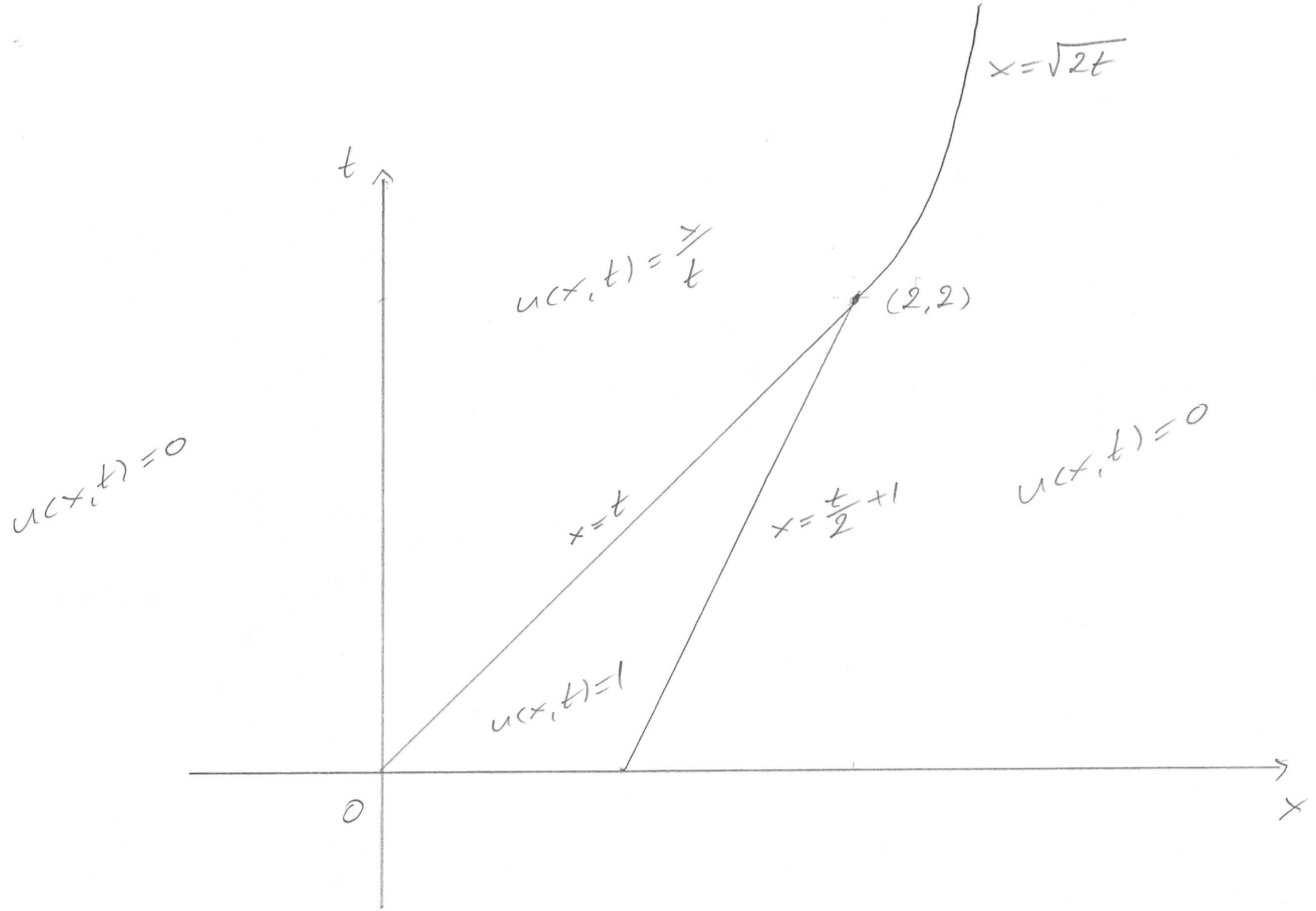
'Κολλώντας' τις $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$ προκύπτει μία συνάρτηση $u(x,t)$ η οποία είναι γενικευμένη λύση του προβλήματος. Όμως οι ευθείες $x = t$ και $x = \frac{t}{2} + 1$ τέμνονται στο σημείο $(2,2)$ άρα η λύση αυτή ορίζεται μόνο για $t < 2$. Για $t > 2$ πρέπει να ενώσουμε τις λύσεις $u_1(x,t) = x/t$ και $u_2(x,t) = 0$. Η ένωση θα γίνει κατά μήκος κατάλληλης καμπύλης $x = x(t)$ η οποία προκύπτει από τη συνθήκη Rankine-Hugoniot:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_A + u_\Delta}{2} = \frac{\frac{x}{t} + 0}{2} = \frac{x}{2t}.$$

Έχουμε και ότι $x(2) = 2$, οπότε βρίσκουμε $x = \sqrt{2t}$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει η γενικευμένη λύση (βλ. διάγραμμα στην επόμενη σελίδα)

$$u(x,t) = \begin{cases} \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t, \\ 1, & t < x < \frac{t}{2} + 1, \\ 0, & x > \frac{t}{2} + 1, \end{cases} & t < 2, \\[2em] \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < \sqrt{2t}, \\ 0, & x > \sqrt{2t}, \end{cases} & t > 2. \end{cases}$$



$x=\sqrt{2t}$
t
$u(x,t)=\frac{x}{t}$
$(2,2)$
$u(x,t)=0$
$x=t$
$x=\frac{t}{2}+1$
$u(x,t)=0$
$u(x,t)=1$
0
x