**Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών**
**Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι - εξέταση 3ης Απριλίου 2024**
**Υποδείξεις για τις λυσεις**

**1.** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t - u_x = u^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Λύση.* Αυτό είναι ένα τυπικό πρόβλημα και λύνεται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών (ή και με αλλαγή μεταβλητών). Η λύση είναι

$$u(x,t) = \frac{\cos(x+t)}{1 - t\cos(x+t)}$$

και ορίζεται για $t < 1$.

**2.** Να βρεθεί γενικευμένη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $f(x) = 2 + x$ για $x < 0$ και $f(x) = 0$ για $x > 0$.

*Λύση.* Η λύση θα είναι δίκλαδη. Αν η αρχική συνθήκη ήταν η $f(x) = 2 + x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, θα προέκυπτε η λύση $u(x,t) = \frac{2+x}{1+t}$. Αν η αρχική συνθήκη ήταν η $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, τότε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών (ή με απλή παρατήρηση) θα προέκυπτε η λύση $u(x,t) = 0$. Οι δύο αυτές λύσεις θα πρέπει να 'ενωθούν' κατά μήκος μίας καμπύλης $x = x(t)$ ώστε να προκύψει η ζητούμενη γενικευμένη λύση. Η καμπύλη αυτή θα βρεθεί με χρήση της συνθήκης Rankine-Hugoniot. Έχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[[F(u)]]}{[[u]]} = \frac{\frac{2+x}{1+t} + 0}{2} = \frac{2+x}{2(1+t)}$$

και επίσης $x(0) = 0$. Λύνοντας το πρόβλημα αρχικών τιμών βρίσκουμε

$$x(t) = 2(\sqrt{1+t} - 1).$$

Τελικά λοιπόν η γενικευμένη λύση είναι η

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{2+x}{1+t}, & x < 2(\sqrt{1+t} - 1), \\ 0, & x > 2(\sqrt{1+t} - 1). \end{cases}$$

**3.** Έστω το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (-1,1),\ t > 0, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases}$$

όπου $\phi$ συνάρτηση τέτοια ώστε $\phi(-1) = \phi(1) = 0$. Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση $\phi$ είναι άρτια και $u(x,t)$ είναι λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε $u(x,t) = u(-x,t)$ για κάθε $t > 0$ και $x \in (-1,1)$.

*Λύση.* Θέτουμε $v(x,t) = u(-x,t)$. Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι η $v(x,t)$ είναι επίσης λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (για την αρχική συνθήκη έχει σημασία ότι η $\phi$ είναι άρτια: $v(x,0) = u(-x,0) = \phi(-x) = \phi(x)$). Από το γεγονός ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση συμπεραίνουμε ότι $u(x,t) = v(x,t)$.

**4.** Έστω ο δακτύλιος $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in \Delta \\ u(x,y) = 0, & r = 1, \\ u(x,y) = \cos(2\theta), & r = 3, \end{cases}$$

όπου $(r,\theta)$ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x,y)$.

*Λύση.* Με χρήση της θεωρίας (είτε το θυμόμαστε είτε το κάνουμε από την αρχή) αναζητούμε λύση που σε πολικές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$u(r,\theta) = A + B\log r + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \big(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\big) r^n + \big(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)\big) r^{-n} \Big).$$

(Οι λύσεις $\log r$ και $r^{-n}$ των ΣΔΕ δεν απορρίπτονται αφού η αρχή των αξόνων δεν περιέχεται στον δακτύλιο.)

Οι διάφοροι συντελεστές προσδιορίζονται θέτοντας $r = 1$ και $r = 3$. Προκύπτει ότι όλοι μηδενίζονται εκτός από τα $A_2$, $C_2$ και ότι η ζητούμενη λύση είναι η

$$u(r,\theta) = \frac{9}{80}(r^2 - r^{-2})\cos(2\theta).$$

**5.** Έστω ότι η $C^2$ συνάρτηση $u(x,t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} - u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Έστω ακόμη ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι $\lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_t(x,t) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t) u_t(x,t) dx$$

είναι σταθερή.

*Λύση.* Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xt}u_t + u_x u_{tt}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xt}u_t + u_x u_{xx}) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Big( (u_t^2)_x + (u_x^2)_x \Big) dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[ u_t^2 + u_x^2 \Big]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα η $A(t)$ είναι σταθερή. (Αντί για $\int_{-\infty}^{\infty}$ μπορούμε να γράψουμε $\int_{-M}^{M}$ και να πάρουμε το όριο $M \to +\infty$.)