ΕΚΠΑ - Τμήμα Μαθηματικών
411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Ακαδ. έτος 2023-24

Ασκήσεις.

1. Να βρεθεί λύση της ΜΔΕ $u_x + u_y + 2u = 0$ για την οποία ισχύει $u(x, y) = x + 1$ επί της ευθείας $2x + y + 1 = 0$.

2. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} u_x + x^2 u_y = 4u, & x > 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = \sin y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Να δειχθεί ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} xu_x - yu_y = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
δεν έχει λύσεις παρά μόνο αν η g είναι σταθερή. Να δειχθεί επίσης ότι αν η g είναι σταθερή τότε το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

4. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} (y + u)u_x + yu_y = x - y, & x \in \mathbb{R},\ \ y > 1 \\ u(x, 1) = 1 + x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών
$$\begin{cases} u_x + u_t = x, & x > 0,\ \ t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & x > 0, \\ u(0, t) = t, & t > 0, \end{cases}$$

6. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$\begin{cases} u_t + xu_x = u^2, & x \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. Να βρεθεί γενικευμένη λύση του προβλήματος
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
όπου
$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ 2 - x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

8. Να βρεθεί λύση εντροπίας του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

9. Έστω f τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο $[0, l]$. Δείξτε με δύο τρόπους ότι η f γράφεται ως

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} , \qquad \text{όπου} \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\big(\frac{n\pi x}{l}\big) dx$$

και η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του εσωτερικού γινομένου. [α′ τρόπος: με χρήση του φασματικού θεωρήματος για κατάλληλο τελεστή Sturm-Liouville. β′ τρόπος: με κατάλληλη χρήση σειρών Fourier]

10. Να βρεθεί η γενική λύση της ΜΔΕ

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} , \qquad xy \neq 0$$

Υπόδειξη. Κάνετε την αλλαγή μεταβλητών $\xi = y/x$, $\eta = y$.

11. (i) Να βρεθεί σε μορφή απειροσειράς η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, & 0 < x < \pi\ ,\ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(ii) Να δειχθεί ότι

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \frac{\pi}{2} , \quad \text{ομοιόμορφα ως προς } x \in [0, \pi]$$

12. Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα για την μη ομογενή εξίσωση θερμότητας

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin x \cos x, & 0 < x < \pi\ ,\ \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

13. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + bu = u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου g συνεχής και φραγμένη συνάρτηση και $b \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Να θέσετε $u(x,t) = e^{-bt} v(x,t)$.]

14. Έστω $u(x,t)$ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι αν $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = a_\pm$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{a_+ + a_-}{2}.$$

[Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $\int_{-\infty}^{x} p(x-y,t)dy = \int_{x}^{+\infty} p(x-y,t)dy = 1/2$.]

15. Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } U, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{στο } \partial U, \end{cases}$$

όπου $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο με ομαλό σύνορο και $f \in C(U)$, $g \in C(\partial U)$. (i) Βρείτε μία ολοκληρωτική συνθήκη που σχετίζει τις f, g η οποία είναι αναγκαία για την ύπαρξη λύσης και συμπεράνετε ότι το πρόβλημα δεν έχει εν γένει λύση. (ii) Χρησιμοποιώντας μεθόδους ενέργειας αποδείξτε ότι δύο οποιεσδήποτε λύσεις του παραπάνω προβλήματος διαφέρουν κατά μία σταθερά.

16. Έστω $\rho_2 > \rho_1 > 0$ και $\Delta(\rho_1,\rho_2) = \{(x,y) : \rho_1^2 < x^2 + y^2 < \rho_2^2\}$. Δεδομένων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στον δακτύλιο } \Delta(\rho_1,\rho_2), \\ u = \alpha, & \text{στον κύκλο } \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho_1^2\}, \\ u = \beta, & \text{στον κύκλο } \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho_2^2\}. \end{cases}$$

17. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,0) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2x, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) = \sin 3x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Δείξτε πώς η ίδια λύση μπορεί επίσης να βρεθεί με χρήση του τύπου του D' Alambert.

18. Να βρεθεί συνάρτηση $u(x,t)$ για την οποία ισχύουν

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}\ , \ t > 0, \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x} u(x,x) = 1, & \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{u(x,-x)}{x^3} = 1. & \end{cases}$$

Είναι η συνάρτηση που βρήκατε μοναδική;

19. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x > 0, \\ u_t(x,0) = x^2, & x > 0. \end{cases}$$

20. Έστω $\Delta_{x,t}$ το χαρακτηριστικό τρίγωνο του σημείου (x,t), το τρίγωνο δηλαδή που ορίζεται από τις χαρακτηριστικές ευθείες που διέρχονται από το (x,t) και τον οριζόντιο άξονα. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \iint_{\Delta_{x,t}} f$$

είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}\ ,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$