Εργοδική Θεωρία (2018–2019) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

1. Έστω $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\mu)$ ο χώρος πιθανότητας με μέτρο $\mathrm{d}\mu(x) := \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}\mathrm{d}x$, και $T\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ο μετασχηματισμός $T(x) := \frac{1}{2}(x-x^{-1})$ για $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $T(0) := 0$. Δείξτε ότι το σύστημα $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\mu,T)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο.

2. Έστω $T\colon [0,1]^2\to[0,1]^2$ ($[0,1]^2 := [0,1]\times[0,1]$) ο μετασχηματισμός

$$T(x,y) := \begin{cases} \left(2x,\dfrac{y}{2}\right) & \text{για } 0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ \left(2x-1,\dfrac{y+1}{2}\right) & \text{για } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ο T διατηρεί το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]^2$.
[Ο μετασχηματισμός αυτός αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως fat baker's transformation.]

3. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και έστω $B\in\mathscr{B}$, με $\mu(B)>0$ και τέτοιο ώστε $T^{-1}(B)=B$. Ορίζουμε $\mathscr{B}_B := \{A\cap B\colon A\in\mathscr{B}\}$, $T_B := T|_B\colon B\to B$ ο περιορισμός του T στο B, και μ_B το μέτρο που δίνεται από την $\mu_B(A) := \mu(A)/\mu(B)$ για $A\in\mathscr{B}_B$.
(α) Δείξτε ότι η τετράδα $(B,\mathscr{B}_B,\mu_B,T_B)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο.
(β) Επαναλάβατε αν αντί για την υπόθεση $T^{-1}(B)=B$ υποθέσουμε μόνο ότι $T(B)\subseteq B$.

4. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο, $(Y,\mathscr{A},\nu)$ ένας χώρος πιθανότητας και $S\colon X\times Y\to Y$ μία $\mathscr{B}\otimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}$-μετρήσιμη απεικόνιση, τέτοια ώστε $(S_x)_*\nu=\nu$ για κάθε $x\in X$, όπου $S_x\colon Y\to Y$ ο μετασχηματισμός $S_x(y) := S(x,y)$, για κάθε σταθερό $x\in X$. Έστω $\tau\colon X\times Y\to X\times Y$ ο μετασχηματισμός $\tau(x,y) := (T(x),S(x,y))$, $(x,y)\in X\times Y$. Δείξτε ότι το $(X\times Y,\mathscr{B}\otimes\mathscr{A},\mu\times\nu,\tau)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο. ($\mathscr{B}\otimes\mathscr{A}$ είναι η σ-άλγεβρα γινόμενο και $\mu\times\nu$ το μέτρο γινόμενο. Υπενθυμίζεται επίσης ότι $(S_x)_*\nu$ είναι το μέτρο $(S_x)_*\nu(A)=\nu(S_x^{-1}(A))$, $A\in\mathscr{A}$, στον μετρήσιμο χώρο $(Y,\mathscr{A})$· η συνθήκη δηλαδή $(S_x)_*\nu=\nu$ λέει ότι το ν είναι S_x-αναλλοίωτο, για κάθε $x\in X$).

5. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την $f\leqslant f\circ T$ μ-σχεδόν παντού. Δείξτε ότι η f είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτη, δηλαδή ότι $f=f\circ T$ μ-σχεδόν παντού.

6. Έστω μ ένα συνεχές μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{T},\mathscr{B}(\mathbb{T}))$, που είναι αναλλοίωτο κάτω από κάθε μετασχηματισμό $T_k\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $T_k(x) := kx \pmod 1$, $x\in\mathbb{T}$, $k\in\mathbb{N}$ με $k>1$ (δηλαδή, $(T_k)_*\mu=\mu$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ με $k>1$). Δείξτε ότι τότε το μ είναι αναγκαστικά το μέτρο Lebesgue.
[*Υπόδειξη*: Δύο μέτρα πιθανότητας μ και ν στον τόρο $\mathbb{T}$ είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier: $\widehat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}\nu(t) =: \widehat{\nu}(n)$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.]

7. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $f\colon X\to\mathbb{N}$ μία συνάρτηση στον $L^1(X,\mathscr{B},\mu)$. Ορίζουμε ένα σύστημα $(X_f,\mathscr{B}_f,\mu_f,T_f)$ ως εξής.

$$X_f := \{(x,n)\in X\times\mathbb{N}_0\colon 0\leqslant n<f(x)\}\cdot$$

$\mathscr{B}_f := \left\{A\cap X_f\colon A\in\mathscr{B}\otimes\mathscr{P}(\mathbb{N}_0)\right\}$, όπου $\mathscr{B}\otimes\mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ είναι η σ-άλγεβρα γινόμενο και $\mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}_0$· μ_f είναι το μέτρο

$$\mu_f(A) := \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\mu\big(\{x\in X\colon (x,n)\in A\}\big)}{\int_X f\,\mathrm{d}\mu}$$

για $A \in \mathscr{B}_f$· και $T_f \colon X_f \to X_f$ ο μετασχηματισμός

$$T_f(x,n) := \begin{cases} (x,n+1) & \text{αν } n+1 < f(x) \\ (T(x),0) & \text{αν } n+1 = f(x), \end{cases}$$

για $(x,n) \in X_f$. Δείξτε ότι το σύστημα $(X_f, \mathscr{B}_f, \mu_f, T_f)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο· καλείται το suspension που ορίζει η συνάρτηση f.
[*Υπενθύμιση*: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.]

8. Έστω $f \colon \mathbb{T} \to (0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\alpha \in [0,1)$. Έστω και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{T}$, υπάρχουν άπειροι το πλήθος φυσικοί $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\|n\alpha\| + \|f(x) + f(x+\alpha) + \cdots + f(x+(n-1)\alpha)\| < \varepsilon,$$

όπου για $t \in \mathbb{R}$, $\|t\| := \min_{m \in \mathbb{Z}} |t+m|$ η απόσταση από τον πλησιέστερο ακέραιο.
[*Υπόδειξη*: Θεωρείστε σύστημα της μορφής που περιγράφεται στην Άσκηση 4, με $X = Y = \mathbb{T}$ και κατάλληλες T και S.]