

Εργοδική Θεωρία (2018–2019) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

1. Έστω $X = [0, 1]$ και $T: X \rightarrow X$ ο μετασχηματισμός

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in (0, 1] \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $M_T(X) = \emptyset$, όπου $M_T(X)$ το σύνολο των T -αναλλοίωτων Borel μέτρων πιθανότητας στον X .

2. Έστω α άρρητος, $m, n \in \mathbb{Z}$ και $T: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ο μετασχηματισμός $T(x, y) = (x + n\alpha, y + m\alpha) \pmod{1}$. Δείξτε ότι το μέτρο Lebesgue δεν είναι εργοδικό για τον T . Βρείτε δύο εργοδικά αναλλοίωτα μέτρα για τον T και επιβεβαιώστε ότι αυτά είναι ιδιάζοντα το ένα ως προς το άλλο.

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα Krylov–Bogolyubov για «μαντέψετε» αναλλοίωτα μέτρα. Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $m = n = 1$.]

3. Παρατηρήστε ότι

$$2^n \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384\}$$

για $n \in \{0, 1, \dots, 14\}$. Δείξτε ότι, παρόλα αυτά, το ψηφίο 7 εμφανίζεται στο δεκαδικό ανάπτυγμα του 2^n για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. (Το ψηφίο 7 εμφανίζεται δε στην πρώτη θέση από αριστερά στον αριθμό 2^n , για $n = 46$ για πρώτη φορά.)

[Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\log 2$ είναι άρρητος (γιατί;), όπου \log σημαίνει λογάριθμος με βάση το 10. Θεώρημα ισοκατανομής του Weyl ή ελαχιστικότητα.]

4. Έστω (X, T) ισομετρικό τοπολογικό δυναμικό σύστημα, δηλαδή X συμπαγής μετρικός χώρος και $T: X \rightarrow X$ συνεχής, στο οποίο ο $T: X \rightarrow X$ είναι ισομετρία: $\rho(T(x), T(y)) = \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X$, όπου ρ η μετρική στον X . Δείξτε ότι το σύστημα (X, T) είναι ελαχιστικό (minimal) ανν είναι μονόπλευρα τοπολογικά μεταβατικό (one-sided topologically transitive).

5. Έστω (X, T) ένα μονοσήμαντα εργοδικό τοπολογικό δυναμικό σύστημα. Έστω ότι το μοναδικό T -αναλλοίωτο μέτρο μ ικανοποιεί $\mu(U) > 0$ για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό και μη κενό. Δείξτε ότι το σύστημα είναι τότε ελαχιστικό.

6. (α) Δείξτε ότι η ακολουθία $\left((n\sqrt{2}, n^2\sqrt{3}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0, 1)^2 \pmod{1}$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν άπειρες τριάδες $k, m, n \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε

$$\left| \sqrt{2} - \frac{k}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{και} \quad \left| \sqrt{3} - \frac{m}{n^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

7. (Θεώρημα επαναφοράς Birkhoff) Δείξτε ότι κάθε τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, T) έχει ένα επανερχόμενο σημείο, δηλαδή ένα σημείο x για το οποίο υπάρχει ακολουθία φυσικών $n_1 < n_2 < \dots$ τέτοια ώστε $T^{n_k}(x) \rightarrow x$ καθώς $k \rightarrow \infty$.

8. Έστω (X, T) ισομετρικό τοπολογικό δυναμικό σύστημα (βλ. Άσκηση 4). Δείξτε ότι αν το σύστημα είναι ελαχιστικό τότε είναι και μονοσήμαντα εργοδικό. (Αυτό δεν ισχύει για μη ισομετρικά συστήματα εν γένει.)

[Υπόδειξη: Ξεκινήστε με ένα generic σημείο για ένα τυχόν εργοδικό T -αναλλοίωτο μέτρο.]