Γεννήτορες

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Υπενθυμίζεται ότι, μία πεπερασμένη διαμέριση $\xi \subset \mathscr{A}$ του X καλείται γεννήτορας του συστήματος αν για κάθε $A \in \mathscr{A}$ υπάρχει $B \in \sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\big)$, τέτοιο ώστε $\mu(A \vartriangle B) = 0$. Για μία διαμέριση $\xi \subset \mathscr{A}$ του X θα γράφουμε $\xi_n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$, $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για μία διαμέριση $\zeta \subset \mathscr{A}$ και ένα $x \in X$, θα γράφουμε $\zeta(x)$ για το μοναδικό στοιχείο της ζ που περιέχει το x.

Έχει κανείς το επόμενο.

Πρόταση. *Έστω $(X, \mathscr{B}(X), \mu, T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο, με τον X να είναι ένας πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\mathscr{B}(X)$ να είναι η Borel σ-άλγεβρα του X. Έστω και $\xi \subset \mathscr{B}(X)$ μια πεπερασμένη διαμέριση του X. Αν για μ-σχεδόν κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$, τότε η ξ είναι γεννήτορας του συστήματος.*

Παρατήρηση. Ισχύει και τα αντίστροφο.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $X' \in \mathscr{B}(X)$ τέτοιο ώστε $\mu(X') = 1 = \mu(X)$ και για κάθε δύο $x, y \in X'$ με $x \neq y$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$. Παρατηρείστε ότι τότε το $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(x) \cap X'$ είναι μονοσύνολο, για κάθε $x \in X'$, γιατί προφανώς $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(x) \cap X'$, και αν $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(x) \cap X'$, τότε δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$.

Έστω ότι $\xi = \{B_1, \dots, B_m\}$, και έστω $\phi\colon X \to \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}_0}$ η απεικόνιση

$$\phi(x) = (x_0, x_1, \dots),$$

όπου $x_j = i$ αν $x \in T^{-j}(B_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Αν $x, y \in X'$ με $x \neq y$, τότε $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αν $\phi(x) = (x_0, x_1, \dots)$ και $\phi(y) = (y_0, y_1, \dots)$, τότε

$$\xi_n(x) = B_{x_0} \cap T^{-1}(B_{x_1}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(B_{x_{n-1}})$$

και

$$\xi_n(y) = B_{y_0} \cap T^{-1}(B_{y_1}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(B_{y_{n-1}})$$

και για να έχει κανείς την ανισότητα $\xi_n(x) \neq \xi_n(y)$ πρέπει $x_j \neq y_j$ για κάποιο $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Αυτό δείχνει ότι η ϕ είναι αμφιμονοσήμαντη (ένα-προς-ένα) όταν περιοριστεί στο X'.

Ο χώρος $\{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}_0}$ με την μετρική

$$d((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) = 2^{-n((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots))},$$

όπου

$$n((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \colon x_n \neq y_n\}$$

και με $\inf \varnothing = +\infty$, είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Για $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, m\}$, $n \in \mathbb{N}$, έστω $[i_0, i_1, \dots, i_{n-1}]$ ο κύλινδρος

$$[i_0, i_1, \dots, i_{n-1}] := \big\{(x_0, x_1, \dots) \in \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}_0} \colon x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_{n-1} = i_{n-1}\big\}.$$

Τότε

$$\phi^{-1}([i_0, i_1, \dots, i_{n-1}]) = B_{i_0} \cap T^{-1}(B_{i_1}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(B_{i_{n-1}}).$$

Αφού οι κύλινδροι είναι ένα π-σύστημα που παράγει την Borel σ-άλγεβρα του $\{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}$, έπεται ότι η ϕ είναι μετρήσιμη ως προς την Borel σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(X)$ του X και την Borel σ-άλγεβρα $\mathscr{B}\big(\{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}\big)$ του $\{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}$.

Έστω τώρα

$$\mathscr{C} = \left\{ C \subseteq \{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0} \colon \phi^{-1}(C) \in \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n\right) \right\}.$$

Η $\mathscr{C}$ είναι σ-άλγεβρα, επειδή η $\sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n\big)$ είναι, και περιέχει τους κυλίνδρους $[i_0, i_1, \dots, i_{n-1}]$, $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1,\dots,m\}$, άρα περιέχει και την μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τους κυλίνδρους, δηλαδή την Borel σ-άλγεβρα $\mathscr{B}\big(\{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}\big)$ του $\{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}$. Δηλαδή, $\phi^{-1}(C) \in \sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n\big)$ για κάθε Borel υποσύνολο $C \subseteq \{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}$.

Έστω τώρα $B \in \mathscr{B}(X)$. Τότε $B \cap X' \in \mathscr{B}(X)$ και επειδή ϕ είναι Borel μετρήσιμη και η $\phi|_{X'}$ αμφιμονοσήμαντη έπεται[1] ότι $\phi(B \cap X')$ είναι Borel υποσύνολο του $\{1,\dots,m\}^{\mathbb{N}_0}$, και επομένως $B \cap X' = \phi^{-1}(\phi(B\cap X')) \in \sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n\big)$. Επομένως δείξαμε ότι για κάθε $B \in \mathscr{B}(X)$ υπάρχει $A \in \sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n\big)$, και συγκεκριμένα το $A = B \cap X'$, τέτοιο ώστε $\mu(A \triangle B) = 0$. Δηλαδή δείξαμε ότι η ξ είναι γεννήτορας του συστήματος $(X, \mathscr{B}(X), \mu, T)$. $\square$

Το Θεώρημα για πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους που χρησιμοποιήθηκε είναι το εξής.

Θεώρημα. *Έστω X και Y πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι και $f\colon X \to Y$ Borel απεικόνιση. Αν $A \subseteq X$ είναι Borel υποσύνολο του X και η $f|_A$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε το $f(A)$ είναι Borel υποσύνολο του Y.*

Για την απόδειξη βλ. Α. Κεχρής, Descriptive Set Theory, Πόρισμα 15.2, ή D. Cohn, Measure Theory, Θεώρημα 8.3.7.

[1] Βλ. Α. Κεχρής, Descriptive Set Theory, Πόρισμα 15.2, ή D. Cohn, Measure Theory, Θεώρημα 8.3.7.