ΠΡΑΚΤΙΚΑ
6ου ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ
4,5,6
2015

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ
ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Επιμέλεια
Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη

ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

6ΟΥ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΕ ΔΙΕΘΝΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ της ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ της ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις

Επιμέλεια: Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

4-6 Δεκεμβρίου 2015

Αναφορά ως

Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επιμ.). *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ: Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις.* Θεσσαλονίκη: ΕΝΕΔΙΜ

Ιστοσελίδα: http://enedim6.web.auth.gr/

ISBN: 978-618-82277-0-5

Οργάνωση ύλης: Ερατώ Γαζάνη

Τεχνική Επιμέλεια: Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη

Γραφιστική Επιμέλεια (Εξωφύλλου – εντύπου): Κωσταντίνος Μιαούλης

Τεχνική Επιμέλεια Ιστοσελίδας: Κωσταντίνος Μιαούλης

Λογότυπο συνεδρίου: Άννα Παπαδοπούλου

ΧΟΡΗΓΟΙ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ

ΕΛΚΕ ΑΠΘ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΥΓΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ GUTENBERG

ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ AEGEAN

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΥΡΙΑΚΙΔΗ

UNIVERSITY STUDIO PRESS

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΔΙΑΠΛΟΥΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΟΠΟΣ

ΜΟΝΤΕΣΟΡΙΑΝΗ ΣΧΟΛΗ ΖΑΦΡΑΝΑ

ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΑΝΑΨΥΚΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΧΥΜΩΝ ΕΨΑ

TV100

FM100

SKYWALKER

Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις

Η Ένωση Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών σε συνεργασία με το Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης και το Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης διοργανώνει το 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή με θέμα: ***Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις***

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα υψηλό ανθρώπινο δημιούργημα με ευρύτατες εφαρμογές σε όλες τις διαστάσεις της προσωπικής, επαγγελματικής και κοινωνικής ζωής των ανθρώπων. Το ζητούμενο από την διδασκαλία τους στην εκπαίδευση είναι η προσέγγισή τους από όλα τα νέα παιδιά. Ζητήματα που συνδέονται με πολιτικές και εκπαιδευτικές επιλογές έχουν εμποδίσει την ολοκληρωμένη αυτή προσέγγιση και έχουν στερήσει την πρόσβαση πολλών παιδιών στη μαθηματική γνώση. Παράλληλα όμως έχουν υποβιβάσει και τις ευκαιρίες που δίνονται στα παιδιά εκείνα που διακρίνονται στα Μαθηματικά.

Σκοπό του Συνεδρίου αποτελεί η ανάπτυξη επιστημολογικών, κοινωνικο- πολιτισμικών, ψυχολογικών, διδακτικών και παιδαγωγικών προσεγγίσεων στην μελέτη του συνεχούς ανάμεσα στα χαρισματικά παιδιά και τα παιδιά που έχουν δυσκολίες με τα Μαθηματικά και προτάσεων που επιτρέπουν τη ολοκληρωμένη πρόσβαση στη μαθηματική γνώση.

Το Συνέδριο πραγματοποιείται στη Θεσσαλονίκη, την Παρασκευή 4/12/2015, το Σάββατο 5/12/2012, και την Κυριακή 6/12/2015 στον Πύργο της Παιδαγωγικής του Α.Π.Θ. και οι επίσημες **γλώσσες** του είναι η ελληνική και η αγγλική.

Το Προεδρείο

Δέσποινα Δεσλή
Ιωάννης Παπαδόπουλος
Μαριάννα Τζεκάκη.

Θεματικοί άξονες του συνεδρίου

1. Δημιουργικότητα στη Μαθηματική Εκπαίδευση
2. Ίσες ευκαιρίες στη Μαθηματική Εκπαίδευση
3. Επαγγελματική ανάπτυξη 'δημιουργικών' εκπαιδευτικών
4. Πολυμορφία στη μαθηματική εκπαίδευση: κοινωνικές και πολιτισμικές προκλήσεις
5. Ερευνητικές ή θεωρητικές εργασίες στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών που δεν εντάσσονται στους παραπάνω άξονες

Επιτροπές του συνεδρίου

Οργάνωση
Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και της Εκπαίδευσης
Παιδαγωγική Σχολή του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Προεδρείο
Τζεκάκη Μαριάννα, Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής και της Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
Δεσλή Δέσποινα, Επίκουρη Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Επιστημονική Επιτροπή
Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.
Νικολαντωνάκης Κων/νος, Επίκουρος Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.
Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
Καφούση Σόνια, Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
Μαμωνά-Downs Ιωάννα, Καθηγήτρια, Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών
Σκουμπουρδή Χρυσάνθη, Αν. Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Αν. Καθηγήτρια, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.
Ψυχάρης Γεώργιος, Λέκτορας, Μαθηματικό Τμήμα, Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Οργανωτική Επιτροπή
Καλμπουρτζής Γιώργος
Κασσώτη Όλγα
Κλιάπης Πέτρος
Κουιμτζή Ελένη
Μπουγατσέλη Ευαγγελία
Παπαδοπούλου Ευαγγελία
Παπανδρέου Μαρία

Γραμματεία Συνεδρίου

Ερατώ Γαζάνη, τηλ. 2130991294

Ηλεκτρονική Επικοινωνία: enedim6@eled.auth.gr

Ιστοσελίδα: http://enedim6.web.auth.gr/

Κριτές των εργασιών

Αναστασιάδου Σοφία, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Βαμβακούση Ξένια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Γαβρίλης Κώστας, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Γαγάτσης Αθανάσιος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Δαγδιλέλης Βασίλειος, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

Δεσλή Δέσποινα, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ζάντζος Ιωάννης, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ζαχαριάδης Θεοδόσης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ζαχάρος Κώστας, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ηλία Ιλιάδα, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Θωμά Αθηνά, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Θωμαΐδης Γιάννης, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ιωάννου Σκεύη, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Καλαβάσης Φραγκίσκος, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Καλδρυμίδου Μαρία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Καλμπουρτζης Γιώργος, Υπ. Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Καλογερία Ελισσάβετ, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κασιμάτη Κατερίνα, ΑΣΠΑΙΤΕ

Κασσώτη Όλγα, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Κάττου Μαρία, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Καφούση Σόνια, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Κεϊσογλου Στέφανος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κλιάπης Πέτρος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κλώθου Αννα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κολέζα Ευγενία, Πανεπιστήμιο Πατρών

Κολοβού Αγγελική, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Κοντογιάννη Κατερίνα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κόσυβας Πέτρος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κοταρίνου Παναγιώτα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κούρκουλος Μιχάλης, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κυνηγός Χρόνης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Λάτση Μαρία, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Λεμονίδης Μπάμπης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Μαρκόπουλος Χρήστος, Southern Cross University , Australia

Μουσουλίδης Νικόλας, Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

Μούτσιος Ρέντζος Ανδρέας, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Μπαραλής Γιώργος, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μπιζά Ειρήνη, University of East Anglia

Ναρδή Έλενα, University of East Anglia

Νικολαντωνάκης Κώστας, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Παναούρα Αρετή, Frederic University of Cyprus

Παπαδημήτρη Χρυστάλλα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Παπανδρέου Μαρία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πιττάλης Μάριος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Πόταρη Δέσποινα, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σακονίδης Μπάμπης, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σπύρου Παναγιώτης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σταθοπούλου Χαρά, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τάτσης Κώστας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τζανάκης Κώστας, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τζεκάκη Μαριάννα, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τσακιρίδου Ελένη, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Φιλίππου Γιώργος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Χαβιάρης Πέτρος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Χατζηκυριάκος Κων/νος, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Χιονίδου Μαρία, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χρήστου Κων/νος, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Χρίστου Κων/νος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Χρονάκη Αννα, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Χρυσοστόμου Μαριλένα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ψυχάρης Γιώργος, Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-2: ΙΣΕΣ ΕΥΚΑΙΡΙΕΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-3: ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ 'ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΩΝ' ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-4: ΠΟΛΥΜΟΡΦΙΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-5: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΝΤΑΣΣΟΝΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΞΟΝΕΣ

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (POSTERS)

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ

CHALLENGING MATHEMATICS FOR ALL AND CHOICE-BASED PEDAGOGIES

Boris Koichu

Technion – Israel Institute of Technology
bkoichu@technion.ac.il

The main argument of this plenary address is that "challenging mathematics for all" can be more than just a nice slogan, on condition that choice-based pedagogies are in use. These pedagogies empower all students to make informed choices of: a task to be solved, a way of dealing with the task, a mode of interaction, an extent of collaboration, and an agent to learn from. The article begins from a theoretical discussion of the relationships between the notions 'mathematics with distinction', 'giftedness,' 'challenge' and 'choice'. As a result, the notion 'challenging mathematics for all' is re-conceptualized. Then two examples of choice-based pedagogies enabling students with different background and abilities to be engaged in 'mathematics with distinction' are presented. Implications are drawn.

INTRODUCTION

Our reasoning is stipulated by words, and sometimes a new word or collocation becomes an impetus for a new line of reasoning. This is what happened to me when trying to understand the meaning of collocation *mathematics with distinction* that appears in the topic of GARME-6. Ioannis Papadopoulos (personal communication, May 21 2014) explained me that the word *distinction* in Greek has a positively-colored aspect and a negatively-colored aspect. The positive aspect is related to achievements that deserve recognition and acknowledgment (as in *getting a top result in a mathematics Olympiad is a distinction*), and a negative aspect is related to the lack of equity (as in *being gifted is a distinction as many think that only the gifted can get top scores in mathematics*).

Equipped by this explanation and, inevitably, by my beliefs and personal history in mathematics education research and practice, I inquired whether there is room for another collocation, *mathematics with distinction for all*. I inquired whether *mathematics with distinction for all* is an oxymoron or a notion that can characterize some emerging mathematics education practices. This article stems from this inquiry. It presents theoretical argument and examples from research I am involved in. The (hoped for) contribution of this article is in introducing a reconceptualization of *mathematics with distinction* and *challenge* notions, and in presenting a particular family of pedagogies, *choice-based pedagogies*, as a tool for progressing towards a situation in which *mathematics with distinction for all* would neither be an oxymoron nor just a nice slogan.

THREE RECONCEPTUALIZATIONS

Reconceptualization of *mathematics with distinction*

A positive aspect of *mathematics with distinction* notion alludes to recognizable achievements in studying or doing mathematics. Clearly, each achievement has the achiever, and recognition must be attributed to him or her by somebody, for instance, a board of authorities or people of importance to the achiever. Consequently, *mathematics with distinction* can be regarded as a *labeling phenomenon*: it is what people recognize and label as such. In addition, *mathematics with distinction* is what Sternberg and Zhang (1995) would name an *implicit theory*: a non-formal intellectual construction that comprises people's intuitions about a phenomenon of importance. Sternberg and Zhang (1995) argue that "implicit, not explicit theories have the most influence on actual life and practices." (p. 89).

Since each mathematical achievement has the achiever, *mathematics with distinction* notion can be considered in relation to *mathematical giftedness* notion. Sternberg and Zhang (1995) argue that *giftedness* is a labeling phenomenon and offer the *implicit theory of giftedness*. This theory substantiates the following statement. People tend to label a person *gifted* if and only if he or she: is excellent at something, possesses a high level of some uncommon trait, is (at least potentially) productive and can demonstrate the trait through superior performance that must be in an area valued by society and within the culture of that society.

The absence of a broadly accepted explicit definition of giftedness (cf. Davis & Rimm, 2004, for a review of definitions of giftedness, and Leikin, Berman & Koichu, 2009, for a collection of approaches to defining mathematical giftedness) provides a fruitful ground for sustaining implicit theories. For example, in a recent review of research on mathematically gifted students, Leder (2012) indicated the overwhelming diversity of explicit definitions of mathematical giftedness and decided upon the following reviewing strategy: "[not to attempt] to provide a unique definition of mathematically gifted students or its pseudonyms, [but to accept] the diversity of definitions used in different publications…at face value" (Leder, 2012, p. 389)" In a response to the Leder review, I observed that it included publications that, generally speaking, were concerned with supporting or characterizing those students who seemed to be insufficiently challenged by regular mathematical curricula in their countries (Koichu, 2012).

I now use this observation in order to re-conceptualize *mathematical giftedness* and *mathematics with distinction* notions as implicit theories.

Mathematical giftedness can be regarded to be a label that people use in order to acknowledge and recognize a person's ability to be productively challenged by more advanced mathematics than it is needed in order to challenge other individuals that belong to the age cohort or community of that person. Accordingly, *mathematics with distinction* can be seen as that "more advanced mathematics." Note that this reconceptualization is compatible with Sternberg and Zhang's (1995) theory. Note also that the reconceptualization is detached from "objectively" measured mathematical achievements and attached to subjective experiences of individuals engaged in studying or doing mathematics. In addition, note that the above reconceptualization includes an assumption that challenging mathematics for some can be unchallenging (e.g., too easy or too difficult) for others.

Next, I transform the above assumption into a question: Is it possible to challenge mathematically gifted students of a particular age cohort by tasks or activities that would also be challenging and feasible for the rest of the students from that cohort? In other words, is it possible to challenge all students by the same mathematical tasks and expect that some students would take them further than others?

For me, a positive answer to the above question would mean that "challenging mathematics for all" notion is neither an oxymoron nor just a slogan. Moreover, the hope that the answer to the above question can be positive is supported by various examples of activities that are known as being potentially challenging for all (e.g., Holton et al., 2009; Leikin, 2014). The word "potentially" is a troublesome, however. In the next section, the discussion of *challenging mathematics for all* is continued in light of recent theorizing on *challenge* and *studenting*.

Reconceptualization of *challenge* and *challenging mathematics for all*

The 16th ICMI Study Volume "Mathematical challenge in and beyond the classroom" offers the following definition:

> For the purpose of the Study, we will regard challenge as a question posed deliberately to entice its recipients to attempt its resolution while at the same time stretching their understanding and knowledge of some topic. Whether the question *is* a challenge depends on the background of the recipient; what may be a genuine puzzle for one person may be a mundane exercise or a matter of recall for another with more experience (Barbeau, 2009, p. 5).

This definition regards mathematical challenge as a question designed by its proposers to *entice* its recipients to act in accordance with the proposers' epistemological expectations, that is, expectations about the recipient solution moves and knowledge-seeking actions. The definition also implies that for any question, the challenge proposers' epistemological expectations can be fulfilled or not depending on the recipient's background. It is, however, silent about the recipient's intentions, and in particular, about his or her intention to accept or not the challenge. It is also silent about a competition aspect of challenge, an aspect that makes challenges potentially praiseworthy but also potentially dangerous for their recipients' self-esteem. This aspect is, however, put forward in a definition provided by the Oxford English dictionary. That definition states: "*Challenge* [is] a call to someone to participate in a competitive situation or fight to decide who is superior in terms of ability or strength."[1]

The above comments set a stage for the following query: Why, and under which circumstances, do individuals accept challenges? A related query in the context of mathematics education is: Why and under which circumstances are our students inclined to accept or not the requests to invest intellectual effort in doing mathematical tasks that we, their teachers, attempt to challenge them by? The professional literature provides us with quite general suggestions regarding this query. For instance, Barbeau (2009) formulates (with the reference to Danesi, 2002) what he calls "optimistic message" (p. 5). Namely, Barbeau suggests that we can expect a latent willingness for people to accept challenges when a suitable stimulus is provided. Further, Harel (2008) postulates (with reference to Aristotle), that all humans "possess the capacity to develop a desire to be puzzled and to learn to carry out mental acts to solve the puzzles they create" (p. 894).

A salient feature of these views is that they emphasize human wishes and desires. This emphasis implies that humans, all humans, are in position to choose when and which challenges to accept and when and which – to reject or circumvent. In other words, the individual general inclination to accept challenges does not mean that he or she is ready to accept every challenge offered; on the contrary, Harel (2008) takes a deliberately recipient-centered position when alluding to challenges that people create for themselves. Consequently, students are always in position to choose whether or not to accept what teachers or textbooks mean to be a challenge for them. This is true even when the norm "students must do what they are told" is implanted and the teacher feels "in control." Moreover, this is true for all categories of students. In support of this point, consider results of three empirical studies conducted with mathematically disadvantaged, regular and gifted students.

First example: Koichu and Orey (2010) conducted an inquiry into computation strategies of mathematically disadvantaged high school students. The students were given a test consisting of a series of arithmetic tasks. We expected that the study participants would not remember standard computation procedures and invent their own methods and shortcuts. Most of the students indeed did not remember the standard procedures, but only some of them acted in accordance with our epistemological expectations.

The in-depth interviews following the test revealed that some students chose not to accept the challenge, but circumvent it, for instance, by using a calculator, which was not allowed, or by answering only those questions, which were easy for them. The study resulted in realization that the students were continuously engaged in a multi-step decision-making process driven by a self-imposed question: “Is it praiseworthy to attempt solving the given task?” Only some of the student behaviors corresponded to the expected epistemological behaviors. The other behaviors were indicative of the students’ choices made in accord with what Goldin et al. (2011) called *stay-out-of-trouble* and *pseudo-engagement* affective structures.

Second example: Liljedahl and Allan (2013a, 2013b) explored *studenting behaviors*[2] of normative high school students who were offered different mathematical problems to solve. They found that the majority of the students exhibited behaviors subverting the intentions of the teachers to challenge them and engage in activities aimed at enhancing understanding or problem-solving skills. The identified studenting behaviors included *stalling*, *faking* and *mimicking*; the latter was the most frequently observed behavior. By *mimicking* Liljedahl and Allan meant avoiding problem-solving activity by mechanically following a previously presented solution pattern. According to the students who exhibited mimicking, this was what the teachers wanted them to do. In sum, the teachers in Liljedahl and Allan (2013a, 2013b) studies provided students with various opportunities to be challenged, but the majority of the students chose to reject the challenge.

Third example: Koichu and Berman (2005) documented cases when exceptionally gifted students preferred to circumvent challenges by solving the given geometry problems by brute force of algebra. It was evident that the knowledgeable students were not proud of their actions. This behaviour was explained as an instantiation of an epistemological version of the principle of intellectual parsimony. The principle states:

> When achieving a goal, for instance, when solving a problem, one intends not to make more intellectual effort than the minimum needed. In other words, one makes more effort only when forced to do so by the evidence that the problem cannot be solved with less effort (Koichu, 2008, p. 274).

The above argument and examples are provided in order to substantiate the following point. On one hand, it is reasonable to assume that humans in general and mathematics students in particular have latent willingness to be challenged by intellectual matters. On the other hand, what is regarded as a challenge by its proposer (e.g., a teacher or a textbook) is frequently not regarded as such by its recipients (e.g., students). Consequently, conceptualizations of challenging mathematics solely in terms of epistemological expectations of its proposers for its recipients[3] can be regarded as necessary, but insufficient ones for educational needs. A learner-centered conceptualization of *challenging mathematics* notion is required. A suggestion for such a conceptualization is presented in the next paragraph.

Challenging mathematics for a learner is mathematics that he or she chooses to deal with in a way that requires putting intellectual effort in understanding it and in resolving related questions, for which the solution method cannot be readily recalled or reiterated. Sometimes the learner choice of a mathematical challenge is made under the influence of his or her teachers, and sometimes it is made under other influences, such as the influence of fellow learners, a book or a real-life situation. The learner choice to be challenged or not is stipulated by psychological and social factors, including considerations of profit-investment nature and of intellectual parsimony.

An optimistic message is that challenging mathematics, as re-conceptualized above, *can* exist "for all". However, it may remain latent. One's chances to discover challenging mathematics increase when appropriate pedagogies are used. An important educational mission is to construct such pedagogies. One of them, a *choice-based pedagogy*, is presented in the next section.

Reconceptualization of *choice* and *choice-based pedagogies*

As argued, one's engagement in challenging mathematics is essentially a matter of his or her choice. An immediate corollary of this argument is that pedagogies supporting student engagement in challenging mathematics must include opportunities for each student to choose suitable challenges. The roots of this idea can be traced to seminal work of Dewey (1938/1963), who reasoned that students must be involved in choosing what they learn.

A choice of a challenge is, however, only one type of choices that people make when doing mathematics. Choices of additional types are made when a challenge is pursued. For instance, when a student becomes truly engaged in a challenging for him or her problem, he or she makes choices regarding the solution moves or, more generally speaking, regarding the use of mathematical knowledge and strategies. This type of choices has been in the focus of research on problem solving for several decades (e.g., Mamona-Downs & Downs, 2005; Schoenfeld, 1992). As a result, conditions and teaching practices for facilitating problem solving in a classroom have been identified in various contexts (e.g., Schoenfeld, 1985; Koichu, Berman & Moore, 2007; Leikin, 2014; Liljedahl, in press).

This section is devoted to pedagogies supporting additional types of student choices as well, Choice-Based Pedagogies[4] (hereafter, CBPs). CBPs are flourishing in business schools and art education (e.g., CBAE, 2008, Douglas & Jaquith, 2009), but are not common in mathematics education. A central premise of the proponents of the CBPs in the field of art education is:

"The student is an artist…In an authentic choice-based environment, students have control over subject matter, materials, and approach" (CBAE, 2008, p. 6). A classroom functions as a studio with different activity centers working in parallel, and students make "real choices" about in which activity to take part and how (Douglas & Jaquith, 2009).

A possible transposition of this approach to the context of mathematics education is as follows. The student is a problem-solver, who is involved in choosing a challenge and is in position to choose who, when and how to interact with when pursuing it. Choosing and handling the challenges occurs in a studio-like learning environment, in which different activities and discourses take place, sometimes in parallel. In particular, each student is in position to choose the most appropriate to him or her:

- ✓ extent of collaboration, from being actively involved in exploratory discourse with peers of his or her choice to being an independent solver;
- ✓ mode of interactions, that is, whether to talk, listen or be temporary disengaged from the collective discourse, as well as whether to be a proposer of a problem-solving idea, a responder to the ideas by the others or a silent observer;
- ✓ agent to learn from, that is, the student can decide whose and which ideas are worthwhile his or her attention, if at all.

Examples of learning situations and environments having such characteristics are presented in the next section.

THEORY IN ACTION: TWO EXAMPLES

Example 1: An online discussion forum as a case of CBP[5]

A 10th grade of 17 regular (that is, not identified as gifted) students and their teacher took part in an study, in which Olympiad-style geometry problems were given for solution during 5-7 days each, in an environment combining classroom work and work from home. The work from home was supported by an online discussion forum at Google+. Realization that this learning environment is a CBP came to me during the analysis of the data, which were collected from the following sources: content of the forums, the teacher diary, interviews with selected students, and reflective questionnaires that have been filled in by all the students after working on each problem.

The students indicated in the reflective questionnaire that they had worked collaboratively for about 40% of time that had been devoted to solving each of the given problems. (On average, the students worked on a typical problem of the project for about 3 hours distributed during 1-3 days). As a rule, the students chose to appear at the forum when they were stuck and sought for new ideas or for the feedback on their incomplete ideas. Some students additionally sought for chat with their classmates.

The exposition below focuses on one student, Marsha[6], who solved one of the problems in a particularly original way. It is of note that, according to the teacher, Marsha has neither been an active student in a classroom nor a successful student in terms of mathematics tests. The problem (Sharygin & Gordin, 2001, No. 3463, with the reference to Figure 1a), was as follows:

> Two extrinsic circles are given. From the center of each circle two tangent segments to another circle are constructed. Prove that the obtained chords (GH and EF – see the drawing) are equal.

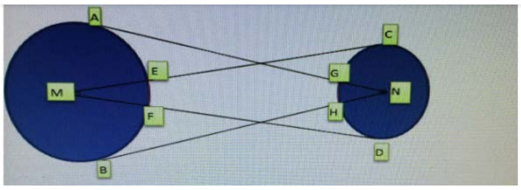


Figure 1a: The given drawing

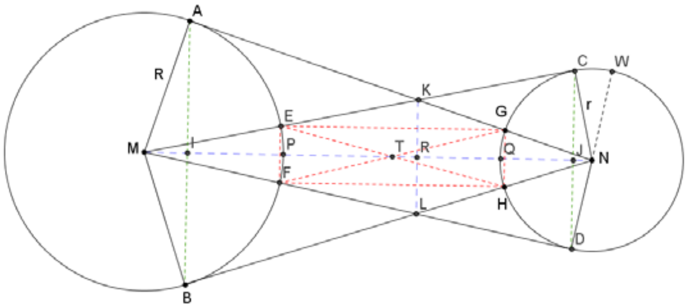


Figure 1b: Summary of auxiliary constructions

Figure 1: Drawings for the two-circle problem

The anticipated challenge was that the problem could hardly be solved by including the chords in some pair of congruent triangles or in a parallelogram. The intended solution was based on consideration of two pairs of similar triangles, $\Delta MEP \sim \Delta MCN$ and $\Delta NCQ \sim \Delta NAM$ (see Figure 1b). $EP = \frac{r \cdot R}{MN}$ from the first similarity, and $GQ = \frac{r \cdot R}{MN}$ from the second similarity, which concludes the proof. Two solutions based on this idea were posted by two students by the end of the forum, two days after Marsha's solution.

The key idea of Marsha's solution was that $KL \parallel EF \parallel GH$. This was particularly difficult for her to prove. Her proof of this fact consisted of 24 "claim - justification" rows. She then used this fact in order to prove similarity of two pairs of triangles, $\Delta KNL \sim \Delta GNH$ and $\Delta MKL \sim \Delta MEF$. She concluded the proof by consideration of proportions stemming from these similarities, in conjunction to a proportion stemming from a "bridging" pair of similar triangles, $\Delta MAK \sim \Delta NCK$.

The actual problem-solving process was not straightforward at all. In brief, at the beginning Marsha focused her attention on how to use MN and the radiuses of the circles. She considered these objects for some time with one of the classmates, Sarah. Then data show when Marsha and Sarah's solution pathways departed and why. Marsha then attempted to prove that $EGHF$ was a rectangle. This attempt was in line with the reasoning of another participant, Mary. After the exchange of ideas and a period of being silent, Marsha announced at the forum that she completely changed the direction and that she was “several moments from the proof”. However, her initial explanation of the proof had a logical flaw. Marsha succeeded to produce a mathematically valid proof after polishing her reasoning in reply to clarification questions by two other participants of the forum.

Marsha was very active at the forum, but indicated in her questionnaire that she worked alone for about three out of five hours that she devoted to solving the problem. It was also observed that Marsha had been highly selective when choosing with whom and how to communicate.

One point of the example is that the described learning environment, in which Marsha accepted the challenge and succeeded, was indeed a choice-based environment for her: she was in position to choose and change when needed an extent of collaboration, a mode of interaction, and an agent to learn from. Another point is that Marsha’s performance in the described situation can be qualified as dealing with mathematics with distinction, in the meaning specified above. To recall, Marsha and her classmates were not gifted students by any “formal” criteria.

Example 2: Student mathematics research projects as a case of CBP[7]

The case of interest occurred in the framework of a research project entitled "Open-ended mathematical problems." The project is conducted in one of the Israeli schools. The goal of the project is to create opportunities for the students to develop algebraic reasoning and exploration skills through long-term solving challenging problems in the context of numerical sequences[8].

At the beginning of a yearly cycle of the project, a 9th grade class is exposed to about 10 challenging problems in an introductory lecture. The students choose a particular problem to pursue and work on it in teams of two or three. The students work on a chosen problem practically daily during the leisure hours at home and during their enrichment classes. Weekly 20-minute meetings of each team with the teacher take place during the enrichment classes. When the initial problem is solved, the students pose and explore related questions. By the end of the project the teams present their research at the workshop at the Technion. One of the project’s problems is presented on Figure 2.

Every straight cut divides pizza into two separate pieces. What is the largest number of pieces that can be obtained by n straight cuts? A. Solve for n = 1, 2, 3, 4, 5, 6. B. Find a recursive formula for the case of n. C. Find an explicit formula. D. Find and investigate other interesting sequences.

Figure 2: Pizza Problem

Five student teams chose the Pizza Problem since 2012. The exposition below focuses on two teams: a team of Ron (briefly, TR) and a team of Eli (briefly, TE). These teams are chosen to be presented here as particularly informative about the differences between the project learning trajectories and outcomes. The beginnings however were similar: both teams approached the Pizza Problem empirically, by drawing tens of circles representing a pizza, cutting them by straight lines and counting the pieces. Then the team trajectories departed.

The TR's progress was associated with gradual developing a set of abstract representations for the problem (from the drawings to number strings, to number-matchings and to two-column tables, see Figure 3), invention of useful notation, and discovery of the patterns in the tables.

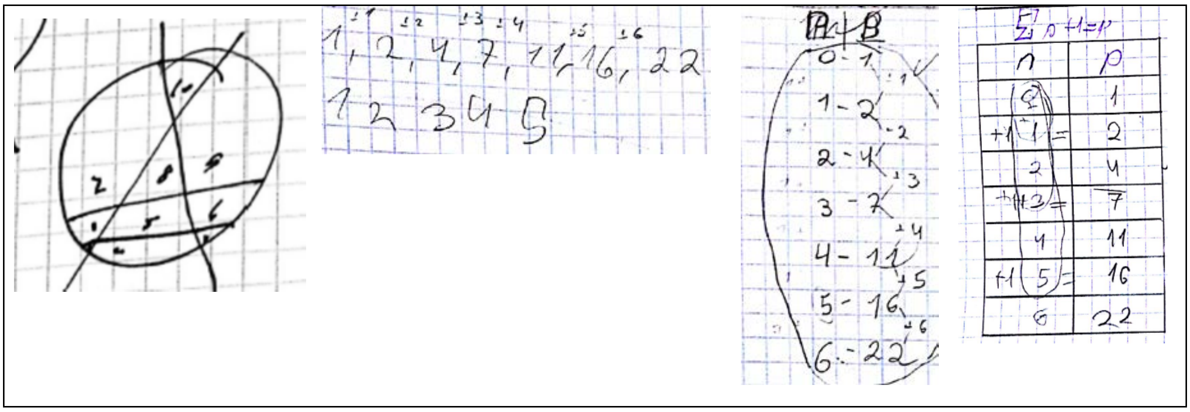


Figure 3: Selected drafts by TR in the order of their appearance

TR succeeded to produce a recursive formula for the sequence ($P_n = P_{n-1} + n$) during the first week, but discovering an explicit formula appeared for them to be a true challenge. After two weeks of unsuccessful attempts, Ron eventually handled the challenge in quite a serendipitous manner. He managed to find a regularity connecting number 5 in the left column of the table with corresponding number 16 in the right column. (The discovered regularity was $(5 \div 2) \times 6 + 1 = 16$, see Palatnik & Koichu, 2015, for details of Ron's discovery). After additional attempts, Ron translated the regularity into an explicit formula ($P_n = \frac{n}{2}(n+1) + 1$), and thus accomplished Item C of the Pizza Problem. TR realized that the formula was found "by chance" and was eager to find a safer way of finding such formulas as well as to learn how such formulas can be proved. These two self-imposed questions became a focus of the second part of the TR project. Eventually, TR produced a "proof" of the explicit formula by algebraically connecting it with two additional formulas that they found for so-called "open" and "closed" pieces of the pizza (e.g., pieces No. 2 and 10 on Figure

3 were considered "open," and pieces No. 5 and 8 – "closed"). This "proof" was the culmination of the project for TR.

In contrast, TE relatively easy (though not quickly), produced both the recursive and explicit formulas for the sequence. Specifically, TE discovered the regularity $P_n = (1 + 2 + \cdots + n) + 1$ (as TR also did) and then used their familiarity with the formula for computing a sum of the first n integers (TR was not familiar with this formula). As a result, obtaining the explicit formula for the sequence ($P_n = \frac{n}{2}(n + 1) + 1$) was not perceived by TE as an achievement to be proud of. TE's main exploration took another direction. It should be noted at this point that two month before the beginning of the project Eli wrote an essay about *triangular numbers*[9]. In the essay, Eli noted that $T_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ and wrote: "A factorial [$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$] is very similar to a triangular number. Only there is multiplication instead of addition." The involvement of the sum $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ in a sequence for the Pizza Problem and in a sequence of triangular numbers caught Eli's attention. As a result, he proudly introduced at the final workshop a new mathematical sign, $n\underset{+}{!}$, which he called "factorial of addition" (note "+" in $n\underset{+}{!}$ vs. "$\cdot$" in $n!$). Justification of the usefulness of this sign for "future calculators" became a culmination of the project for TE.

The first point of the presented example is that the described learning environment appeared to be very rich with the opportunities for the students to choose. The second point is that the presented task became a source of different challenges for the less knowledgeable students (TR) as well as for the more knowledgeable ones (TE).

SUMMARY AND IMPLICATIONS

Theoretical argument presented in the first part of the paper consists of the following steps. (i) Reconceptualization of *mathematical giftedness* as a label that people use in order to acknowledge one's ability to be productively *challenged* by more advanced mathematics than it is needed in order to challenge his or her peers. *Mathematics with distinction* is equated with that "more advanced mathematics." (ii) *Mathematical challenge* is re-conceptualized from a notion emphasizing epistemological expectations of the challenge proposers to a notion that puts forward the student choice to invest intellectual effort in dealing with what he or she sees as a challenge. It is argued that such mathematical challenges can exist *for all*. (iii) The *choice* notion is extended to embrace not only a choice of a challenge, but also additional choices, including a choice of a social mode of dealing with the challenge and of an agent to learn from. Characteristics of *choice-based pedagogies* (pedagogies supporting diverse student choices) are introduced.

The second part of the paper presents two examples of situations, in which middle-school students of different abilities were challenged by the same tasks in different ways. The first example overviews a situation, in which the students have been empowered to choose: (1) to attempt solving the given problem or respond to the solution produced by somebody; (2) to work independently or with the peers; (3) who communicate with and when; (4) which ideas to discuss and which to use. In the second example, the students could choose: (5) a problem to solve; (6) a way of dealing with the problem; (7) a direction for a follow-up exploration; (9) the most important for them and consequently worthwhile sharing results of their research. It is up to the reader to decide whether the student mathematics results in the described situations can qualify as *mathematics with distinction*. In my personal view (and consistently with the presented theoretical argument), all the presented products of student explorations are distinct.

Let me conclude by saying that re-conceptualizations and examples presented in this paper in order to make a point that there is room (and even need) for the *mathematics with distinction for all* notion, may have implications for research and practice. For instance, let us imagine a practicum for pre-service or in-service mathematics teachers, which is entitled exactly as this paper is entitled. The participants of the practicum systematically learn to analyze their teaching in terms of challenges and choices that they provide their students with, and reflect on the student achievements by reasoning to which extent they are *distinct*. The participants also learn to compile their students' individual profiles, in which the cases of experiencing *mathematics with distinction* are valued. The participants fully realize that *mathematics with distinction* for each student is different even when the same tasks are used. Furthermore, the analysis of teaching through the lenses of challenges and choices becomes for the participants a guideline for task design and for adapting appropriate technological means. It may be a bit naïve, but I believe that the participants of such a practicum and their students would jointly learn meaningful mathematics and enjoy it.

NOTES

1. See http://www.oxforddictionaries.com/definition/english/challenge
2. Fenstermacher (cited in Liljedahl & Allan, 2013a) conceptualizes *studenting* as student behaviors in learning situations, including what students do in order to 'psych out' teachers, figure out how to get certain grades, 'beat the system', deal with boredom so that it is not obvious to teachers etc.
3. For instance, Barbeau (2009) characterizes "a good challenge" (p. 5) as a challenge that often involves explanation, multiple approaches, conjecturing, evaluation of solutions for effectiveness and elegance, and construction and evaluation of examples.

4. Note the difference between Choice-Based Pedagogy and Pedagogy of Choice notions. The latter notion is usually used as a name of pedagogies, in which *teachers'* choices are considered (Cummins, 2009).
5. This section consists of a slightly modified section from Koichu (2015).
6. All the student names are pseudonyms.
7. This section focuses on an aspect of an on-going Ph.D. study of Alik Palatnik. The overviewed in the section data are published elsewhere (Palatnik & Koichu, 2015).
8. It is of note that 9th graders in Israel, as a rule, do not possess any systematic knowledge on sequences; this topic is taught in 10th grade.
9. See http://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html

ACKNOWLEDGMENTS

I am grateful to the Program Committee of GARME-6. Their invitation turned for me into an opportunity to rethink some of my past work. The research associated with the presented examples is funded by the Israel Science Foundation (grant 1596/13, PI Koichu).

REFERENCES

Barbeaeu, E. J. (2009). Introduction. In Barbeau, E. J., & Taylor, P. J. (Eds.). (2009), *Challenging mathematics in and beyond the classroom, Study Volume of ICMI Study 16* (pp. 1-9). New York, NY: Springer.

CBAE (Choice-Based Art Education) (2008). Retrieved August 15, 2015, from The Education Alliance at Brown University, The Knowledge Loom Website: http://www.brown.edu/academics/education-alliance/sites/brown.edu.academics.education-alliance/files/uploads/KLOOM_tab_entire.pdf

Cummins, J. (2009). Pedagogies of choice: challenging coercive relations of power in classrooms and communities. International *Journal of Bilingual Education and Bilingualism, 12*(3), 261-271.

Danesi, M. (2002). *The Puzzle instinct: The meaning of puzzles in human life*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Davis, G. A., & Rimm, S. B. (2004). *Education of the gifted and talented* (5th edition). Boston, MA: Pearson Education Press.

Dewey, J. (1938/1963). *Experience and education* (reprint). New York: Collier. (Original work published 1938).

Douglas, K. M., & Jaquith, D. B. (2009). Engaging learners through art making: *Choice-based art education in the classroom*. New York: Teachers College Press.

Goldin, G., Epstein, Y., Schorr, R. & Warner, L. (2011). Beliefs and engagement structures: behind the affective dimension of mathematical learning. *ZDM, 43*, 547-560.

Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM*, *40*, 893-907.

Holton, D., Cheung, K.-C., Kesianye, S., Falk de Losada, M., Leikin, R., Makrides, G., Meissner, H., Sheffield, L., & Year, B.-H. (2009). Teacher development and mathematical challenge. *Challenging mathematics in and beyond the classroom, Study Volume of ICMI Study 16* (pp. 205-242). New York, NY: Springer.

Koichu, B. (2008). On considerations of parsimony in mathematical problem solving. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulova (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 273-280, Morelia, Mexico.

Koichu, B. (2012). Some gold is found - much more is in the mine. A commentary on Gilah Leder's chapter "Looking for gold: Catering for mathematically gifted students within and beyond ZDM". In Forgasz, H. & Rivera, F. (Eds.). *Toward equity: Gender, culture, and diversity* (pp. 407-410). Advances in Mathematics Education series, Part 3. Dordrecht, Netherlands: Springer.

Koichu, B. (2015). Problem solving and choice-based pedagogies. In Singer, F. M., Toader, F., & Voica, C. (Eds.), *Electronic Proceedings of the 9th International Conference Mathematical Creativity and Giftedness*, pp. 68-73. Sinaia, Romania (ISBN: 978-606-727-100-3). Retrieved July 10 2015 from http://mcg-9.net/pdfuri/MCG-9-Conference-proceedings.pdf

Koichu, B., & Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems? *The Journal of Secondary Gifted Education*, *16*(4), 168-179.

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). The effect of promoting heuristic literacy on the mathematic aptitude of middle-school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(1), 1-17.

Koichu, B., & Orey, D. (2010). Creativity or ignorance: Inquiry in calculation strategies of mathematically disadvantaged (immigrant) high school students. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(2), 75-92.

Leder, G. (2012). Looking for gold: Catering for mathematically gifted students within and beyond ZDM. In Forgasz, H. & Rivera, F. (Eds.). *Toward equity: Gender, culture, and diversity* (pp. 389-406). Advances in Mathematics Education series, Part 3. Dordrecht, Netherlands: Springer.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. A. Silver, & S.

Li, (Eds.) *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 48-80). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (Eds.). (2009). *Creativity in mathematics and education of gifted students*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Liljedahl, P. (in press). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. In P. Felmer, J. Kilpatrick, & E. Pekhonen (Eds.) *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. New York, NY: Springer. Retrieved on June 20 2015 from http://www.researchgate.net/profile/Peter_Liljedahl/publication/275953429_Building_Thinking_Classrooms_Conditions_for_Problem_Solving/links/554abf950cf21ed21358fe48.pdf

Liljedahl, P., & Allan, D. (2013a). Studenting: The case of "now you try one". In Lindmeier, A. M., & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 257-264). Kiel, Germany: PME.

Liljedahl, P., & Allan, D. (2013b). Studenting: The case of homework. *Proceedings of the 35th Conference for Psychology of Mathematics Education – North American Chapter*. Chicago, USA. Retrieved on June 16 2015 from http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/PME-NA-2013-Studenting-RR.pdf.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 385-401.

Palatnik, A., & Koichu, B. (2015). Reconstructing and dismantling one insight solution: Focus on shifts of attention. *For the Learning of Mathematics*, *2*, 9-14.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New Your, NY: MacMillan.

Sharygin, I. F., & Gordin, R. K. (2001). *Collection of problem in geometry. 5000 problems with solutions. (Sbornik zadach po geometrii. 5000 zadach s otvetami)*. Moscow: Astrel (in Russian).

Sternberg, R., & Zhang, L.-F. (1995). What do we mean by giftedness? A pentagonal implicit theory. *Gifted Child Quarterly*, *39*, 88-94.

IN(EX)CLUSION IN MATHEMATICS EDUCATION AND THE FABRICATION OF THE MODERN CITIZEN

Paola Valero, Aalborg University
paola@plan.aau.dk

1. INTRODUCTION

Talking about mathematics education in Greece seems to me to be a delicate issue. From the point of view of the non-expert who only met something about ancient Greece in school mathematics textbooks, mathematics comes from Greece: many stories in highlighted squares in textbooks would tell about the guys who, many centuries ago, discovered many of the concepts in elementary mathematics. Pythagoras, Euclid, Zeno were people who children imagine walked around in old cities and discovered the secrets of the universe in numbers. From the point of view of the expert, still the legacy of Greek mathematicians may feed the myth that in Greece people are good at mathematics. Mathematics is part of the heritage, of the genes, of the culture... How could one expect that something different would be the case in this country? A closer look at current reliable sources would though confirm that Greek youth has the same problems with school mathematics than any other population of Europe. PISA results for 2012 show that average results are under the OECD average, and that the share of students performing in mathematics at level 2 or lower is 35,7% (OECD, 2014b, p. 5).

The concerns around mathematics education are similar and also seem to resonate with the international trends in other countries. Increasing the mathematical achievement of Greek youth is important for several reasons. Firstly, in a global, competitive market economy mathematics achievement has become a reliable indicator of economic and social progress. Second, and related to the former, high mathematics achievement increases the chances that many youth would continue with further studies in the fields of science and technology; and these areas are seen as indispensable for the generation of the scientific and technological knowledge that drives successful national economies with competitive power. Third, due to the above, learning mathematics (effectively) has become now an issue of citizenship and democracy because a mathematically capable mass of citizens would have the minimum necessary qualifications to participate actively in the economic as well as political activities of a country. Finally, adequate mathematical achievement at the end results in a matter of social justice and equity since it clearly becomes a qualification that differentiates those who will have access to the desired goods of society and those who will be excluded from enjoying them.

Now, as far as the current economic crisis of Greece is concerned, it could be argued that attending to these arguments, and few others, would be a national priority. Without mentioning that a good mathematical and numeric sense would help people in general and also politicians to have a better sense of finances and, thus, maybe preventing a risk of making undesirable financial decisions; as well as an appropriate rational mathematical thinking would also conduct to more rational behavior and therefore less corruption. All in all, it is absolutely unacceptable that the Greek youth and the general population have problems with mathematics.

Mathematics achievement and with it mathematics education have gained a central role in society nowadays; they have the status of a hero, almost the redeemer that will bring salvation from the chaos of the globalized world. There is just a little difficulty in this type of discourse... Following the paths of this salvation is not easy neither straightforward. No recipe for successes has ever worked. It just takes a quick look at the big initiatives of last century and the many well designed, evidence-based projects of reform initiated in different countries by researchers who “know what works” to stop feeling optimistic. It is precisely at this point that as mathematics education researchers we should put in operation a sharp analytic sense to deal with the riddle of the growing glorification of and desire to attain a higher mathematical achievement, in face of the cruel fact of the persistent difficulties to realize that desire. It is then when there emerges the possibility of questioning the naturalized ways of thinking embedded in the discourses that navigate around mathematics education in society and embodied in the very same repertoire that we, as researchers in this area have.

It is thus my aim to cast a critical light to the ways in which in contemporaneity mathematics education is a participant in the cultural politics of schooling. This means, on the one hand being practices that are thought to empower and make possible a better future, and, at the same time, practices that create classifications and differences between learners which are thought to exclude and marginalize. I will be arguing that such interrogation pushes the limits of mathematics education research to locate its understanding and study in the realm of the cultural and political history of schooling and education. I start the exploration tracing the main traits of my analytical strategy. Then I continue to the denaturalization of the discourses that associate mathematics achievement to the salvation of people and countries. I then turn my gaze to how and why these discourses are in themselves operating simultaneously inclusions and exclusions in society, particularly through the growing association of mathematical achievement and citizenship. I finalize with a reflection about the significance for mathematics education research of critical work that questions some of the naturalized truths of our field.

2. TOOLS TO ANALYZE MATHEMATICS EDUCATION AS POLITICAL

After the "social turn" in mathematics education in the 1990's (S. Lerman, 2006), some people have argued that the interest in socio-political studies has increased and nowadays there seems to be a socio-political turn (Gutierrez, 2013). More than a turn as such, I would argue that mathematics education as a field of study has recognized that the understanding of how mathematics education practices are not just a matter of the transmission of mathematical knowledge to new generations, but also and at the same time a matter of fabricating desired subjectivities. The fabrication of subjectivity as part of the educational process is one of the main political functions of education since people become governable both in the sense of acquiring the tools to be productive members of society, but also because they become subjected to norms and values of that society. As Radford (Radford, 2008) has argued, processes of objectification of knowledge are inseparable from processes of subjectification. Mathematics education is political for its very powerful and effective way of contributing with the formation of the rational, Modern subjects of our time. The growing attention to the effects of mathematics education in peoples' subjectivity is indeed the sign of the opening of a sociopolitical trend in the field of research.

As I have argued elsewhere (Valero, 2013), the sociopolitical trend in research may be growing out of researchers' concerns for how mathematics education is implicated in issues of differentiation, in/exclusion, and thus, the educational processes in mathematics may promote more in/equity. But in the trend there is also a concern for adopting theoretical tools that explicitly allow understanding mathematics education practices as political. In most of the cases, such adoption brings with it a very important displacement in research. It is the shift in attention from mathematics education understood as the study of teaching and learning, with a focus on the interactions among people for the acquisition and transformation of thinking processes of mathematical concepts as they live in educational settings, towards the attention to mathematics education as historical and cultural practices that are part of the field of the cultural politics of schooling. This implies embracing education as a political process where the significance of (school) mathematics is given in terms of its significance for subjectivation within the frames of the symbolic ordering of society in given time/space configurations. In other words, the displacement is yet one “zooming out more of the lense” —to play with Lerman’s (1998) metaphor—, to start understanding mathematics education within the entanglements of how in Modern societies schools and schooling are organized for the purpose of reaching massively the population and securing its becoming citizens and productive work force. This implies that no single practice in any classroom is outside of the social fabric that gives to it part of its meaning and explains part of its effects beyond the cognition of individuals.

On these grounds, the work of Michel Foucault has prolifically nurtured critical studies of schooling and the curriculum. In mathematics education it has been appropriated to think about the constitution of learners and teachers as subjects within the web of power of the institutional discourses of mathematics education practices (e.g., Stintson, 2006; Walkerdine, 1988; Walshaw, 2004). Such studies have provided insightful interpretations of students’ and teachers’ identity formation in terms of their process of subjectivity in the practices of mathematics education. Although important in a quest for understanding the socio-political constitution of mathematics education practices, many of these studies still focus on some of the traditionally defined actors and elements of the classic didactic triad of mathematics education research.

Other types of studies inspired by the work of Foucault deploy analytical strategies to explore the functioning of mathematics education discourses and their effects of truth in generating ways of thinking about mathematics education and its participants. Knijnik and collaborators (Duarte, 2009; Knijnik, 2012; Knijnik & Wanderer, 2010) have problematized statements that navigate as truths and have become the common sense of mathematics education. That “we need to bring reality to the classroom” as a pedagogical strategy, that "we need to use concrete materials for teaching", or that "we have to promote mathematics for all" are not simply the accumulated knowledge that comes from applying research into the improvement of practice. Such statements epitomize culturally and historically inscribed forms of thinking about mathematics education.

The work of Foucault and his strategies to perform a "social epistemology" (Popkewitz, 1991) is a relevant invitation for mathematics education research. It becomes an important move in order to:

> "[…] place the objects constituted by the knowledge of schooling into historically formed patterns and power relations. Epistemology provides a context in which to consider the rules and standards by which knowledge about the world and "self" is formed. Epistemology also provides the means to investigate distinctions and categories that organize perceptions, ways of responding to the world, and the conceptions of "self." Concurrently, social epistemology locates the objects constituted by the knowledge of schooling as historical practices through which power relations can be understood. Statements and words are not signs or signifiers that refer to and fix things, but social practices that generate action and participation." (Popkewitz & Brennan, 1997, p. 293)

In other words, thinking mathematics education with Foucault in terms of making a social epistemology of mathematics education as part of the working of schooling allows us evidencing the way in which mathematics education and mathematics education research practices together and inseparably generate concepts, distinctions and categories that regulate the possibilities of thinking and being in/with mathematics as a privileged area. Through these analytical moves it becomes evident the how mathematics education and power are connected in the formation of the institution of schooling in the Modern era.

3. PROBLEMATIZING MATHEMATICS ACHIEVEMENT AND CITIZENSHIP

In the 1980's there started to appear in mathematics education research clear statements about mathematics being cultural and mathematics education being political. In national policy documents regulating school mathematics the association between mathematics education and democracy became a strong way of justifying good reasons for the expansion of the desire of all having access to learn mathematics (Ole Skovsmose & Valero, 2001). Even it is argued that access to learning mathematics is a "human right in itself" since mathematics is seen as a cultural product of purposeful human activity (Vithal & Volmink, 2005, p. 3). Nowadays such types of statements have become more and more frequent, and the idea that it is desirable to do that all should be offered the opportunity at one point in life to learn mathematics because "studying mathematics will bring associated benefits—personal, social, and political—for all." (Clements, Keitel, Bishop, Kilpatrick, & Leung, 2013, p. 8)

These statements, with the recent addition of the importance of mathematical competence for global economic competitiveness, have become important justifications for mathematics education practices, for reforms, for research, for teachers and even for politicians to increase the number of mathematics lessons in many countries. These statements of course please mathematics educators and are part of the perceived status and relevance of our work. However, a closer, critical examination of their emergence as part of the cultural politics of schooling and the constitution of its social epistemologies invites to their problematization, that is, to de-familiarize them by asking how they became truths that are part of current common sense notions of people participating in education. The question then is not *why* those statements, but rather *how* they emerged and how they became possible, plausible formulations about the role of school mathematics in society.

Answering such question requires a type of genealogical study, a "history of the present" (Foucault, 1991) that traces the lines of how becoming mathematically competent is effected in multiple games and through the workings of technologies that render the subjects governable. Such a study is though a huge enterprise for the scope of this paper. Some papers already published advancing in that direction. Diaz (2014) investigates the way in which the emphasis on the adequate teaching/learning of the equal sign in current reforms in mathematics in the US link with broader meanings in society about equality. Mathematics education reform and research that supports reform build on the assumption that "with knowledge of the equal sign, children will have a better understanding of equality, greater access to "higher" levels of mathematics, more academic opportunities, and an overall increase in economic and social standing" (p. 36). Notwithstanding the apparent goodness of this stated purpose, Diaz shows that in the workings of pedagogy within the logic of school, notions of equality also embed notions of sameness. The latter bring along notions of identity and difference. The pedagogies of mathematics in the curriculum operate then classifications and differentiations of those children who learned the right equality and those who fail to do so. The discourses around the neutrality and goodness of learning “the equal sign” are neither neutral nor natural, but render children objects of the calculations of power.

Kollosche (2014) argues that mathematics is a form of knowledge that has, from its very beginning, served the interest of power. Challenging Skovsmose’s (2005) formulation that mathematics education is critical because it has no essence and therefore can serve the purposes of oppression as well as of empowerment, Kollosche asserts that mathematics as a form of knowledge is imbricated in fine technologies of power. Particularly he examines how logic and calculation, as part of mathematics, emerged in concrete time/space configurations of practice and related to power. Through the incorporation of logics, “mathematics represents a form of thinking and speaking which provides powerful techniques for the government of others.” (p. 1067). Calculation is one of the core skills of a numerate person. But calculation has historically been connected not only with commerce, but also with the formation of bureaucracy. Calculation was central in the creation of an objectivizing epistemology that was central for Modern forms of government. School mathematics has developed side by side the consolidation of burocracy and, thus, Kollosche argues, it “can be considered an institution which (alongside other functions) identifies and trains a calculatory-bureaucratic elite and teaches the rest to subordinate to the calculatory-bureaucratic administration of our society.” (p. 1070).

My intention here is to contend that the idea of people’s mathematical competence being an important constitutive element of Modern citizenship is historically contingent and does not depend on the intrinsic characteristics of mathematics, but on how mathematics and mathematics education operate as effective technologies of governing and effecting Modern subjectivity.

3.1. Current global discourses

Let us start with a very interesting research paper outside of mathematics education. Lynn and Meisenberg (2010) published the following table to provide evidence of their very significant result. This table groups the national IQ of different countries and groups it by “regions”, and shows the consistency between national IQs and measurements of educational attainment in international comparative tests such as PISA and TIMSS.

Table 2
Relationship between IQ and EA in 8 world regions. EA is calculated either by equalizing mean and standard deviation with IQ (EAequ), or as actual performance (EAact). Also shown is the average *absolute* difference between IQ and EAequ for the countries in each region (ΔIQ–EA).

Region	IQ	EAequ	EAact	ΔIQ–EA	*N*
Europe	98.3 ± 2.3	97.6 ± 2.7	98.0 ± 4.0	1.7 ± 1.2	16
English-speaking	97.7 ± 2.9	99.2 ± 1.2	100.3 ± 1.8	2.3 ± 2.7	6
Ex-communist	94.8 ± 3.1	96.1 ± 3.2	95.8 ± 4.7	2.1 ± 1.1	15
Latin America	88.9 ± 4.5	85.0 ± 2.8	79.3 ± 4.1	3.8 ± 2.8	7
Middle East	84.4 ± 3.8	84.8 ± 6.5	78.9 ± 9.7	4.6 ± 4.1	17
Africa	69.9 ± 3.9	71.3 ± 5.4	58.8 ± 8.1	4.7 ± 2.5	12
East Asia	106.2 ± 1.5	104.1 ± 2.3	107.6 ± 3.4	2.1 ± 2.0	6
Rest of Asia	87.1 ± 3.8	86.9 ± 6.5	82.1 ± 9.7	4.8 ± 3.4	7
All countries	89.8 ± 10.7	89.8 ± 10.7	86.4 ± 15.9	3.3 ± 2.9	86

“The high correlation between IQ and EA shows that these two measures are not merely two otherwise unrelated “development indicators.” It rather shows that intelligence tests and scholastic achievement tests measure the same or nearly the same construct. To the extent that educational attainment is important for a country’s economic or cultural destiny, IQ is important as well. We suggest that both can be used interchangeably as measures of “human capital.” (p. 359)

Their argument runs as follows. In previous research, Lynn and collaborators has created a statistically reliable measurement for national IQs and have found out that it is an explanatory factor for several variations among nations. Responding critique to their construct, they chose to take one of the measurements that per excellence relates to intelligence: educational attainment. They took the results of four TIMSS and of three PISA studies to be measurements of attainment. The results of these tests were calibrated statistically. Additional results from international comparative studies such as PIRLS Reading and IAE Reading were used to extrapolate missing data in the main core of TIMSS and PISA data. Then measurements were equalized to the scale of the national IQ, which they had previously have constructed and called “Greenwich-IQ” because the IQ for Britain was “is set at 100 (sd 15), and the IQs of other nations are calculated in relation to this standard” (p. 354). After doing a whole series of tests and corrections in the data to secure its quality, they concluded that national IQ and Educational Attainment (EA) are reliable measurements of the human —and cognitive— capital of nations.

This paper was published in the journal *Intelligence* which, according to the rankings of Web of Science, is a high impact journal of type Q1 in the area of Psychology, and has influence on psychometrics and educational psychology. In a search in Scopus (October 7, 2015) the paper has 63 citations, some of which are by the same author and collaborators team, but also by other papers in psychometrics and intelligence studies, and also educational psychology. Google scholar showed 89 citations. The limited citations may indicate a not very high impact of the paper. However, it is part of an extensive literature that is appealing to many fields related to education.

The point here is not to discuss whether this research is interesting, correct or ethical —indeed I find it very problematic. The point is that it is a clear manifestation of the logic that articulates the significance of school achievement and in it mathematical achievement. Lynn and Meisenberg take the measurements of international comparative studies of school achievement to be equivalent to measurements of intelligence. And intelligence, several studies argue, is a key concept to “to understand and predict national differences in a variety of outcomes: societal development, rate of democratization, population health, productivity, gross domestic product (GDP), and wage inequality” (Rindermann & Ceci, 2009, cited in Lynn and Meisenberg, 2010, p. 354). Furthermore, intelligence has been historically associated with mathematics and indeed, intelligence tests rely on performance in logical and mathematical problems.

The statements in this type of research resonate and can be articulated with the whole range of devices unfolded by the different international comparative assessments in education where performance in mathematics results are important components. Students’ results in mathematics have been part of large scale studies since the 1960’s (Coleman et al., 1966). The relation between mathematical achievement and the wealth of nations is not new, but has been a consistent part of reports by international agencies that produced comparative information on educational achievement and development (e.g., Baker, Goesling, & LeTendre, 2002; Heyneman & Loxley, 1982). In fact, a series of international agencies, among which OECD has been the most influential in the last decade, all point that education and skills currently play a critical role in fostering progress, which is connected to inclusive economic growth, which is also relies on productivity, innovation, investment and trade. Education then has the role of making as many as possible highly skilled workforce (OECD, 2014a, pp. 12-13). At the same time, it is recognized that, together with language (mother tongue and foreign languages) and basic science, numeracy and basic mathematics are “a gateway to employment and social inclusion” (European Commission, 2012, p. 4). There is also the need for highly skilled labor force that can cover the demands of research-intensive sectors in science, technology, engineering and mathematics (STEM). Education and skills, and within it numeracy and basic mathematics, are also connected to growth and progress of nations and of individuals. School achievement in these areas then is a key factor in understanding and predicting individual and national progress and economic growth. As PISA 2014 puts it: “Nurturing excellence in mathematics, reading or science, or in all three domains, is crucial for a country’s development as these students will be in the vanguard of a competitive, knowledge-based global economy.” (OECD, 2014b, p. 9)

Furthermore, to the question of “What is important for citizens to know and be able to do?” (p. 3), the world’s global metric for quality, equity and efficiency in school education, PISA, highlights that:

> “foundation skills in mathematics have a major impact on individuals’ life chances […] poor mathematics skills severely limit people’s access to better-paying and more-rewarding jobs; at the aggregate level, inequality in the distribution of mathematics skills across populations is closely related to how wealth is shared within nations. Beyond that, the survey shows that people with strong skills in mathematics are also more likely to volunteer, see themselves as actors in rather than as objects of political processes, and are even more likely to trust others. Fairness, integrity and inclusiveness in public policy thus also hinge on the skills of citizens.” (p. 6)

Mathematics skills are proven to be fundamental to a person not only as skilled work force, but also as a citizen. This means that mathematics skills, achievement and competence are also considered to be fundamental people’s possibilities to engage in political processes of participation and even in the formation of civic virtues such as fairness, integrity and inclusiveness. After all, “skills provide the vital glue for resilient communities and well-functioning societies, by strengthening inclusiveness, tolerance, trust, ethics, responsibility, environmental awareness, collaboration and effective democratic processes.” (p. 2)

The tremendous efforts that have been made in developing a detailed, international, comparative systems of educational indicators has opened the possibility of monitoring education for policy makers to adjust it to the necessities and demands for achieving economic growth and equality. There has never been so much evidence stored about the processes of learning and how it can be steered to the detail. So does OECD argue for the importance of its series of programs, all of which constitute a comprehensive system of data retrieval, analysis, and recommendation for action, for helping governments “spur economic growth” (OECD, 2014a, p. 13).

In such a well-articulated system, Lynn and Meisenberg’s results converge with PISA’s results. Under a similar logic of human capital management through measurement, cognitive capital, intelligence, school achievement and mathematics competence are being connected as pre-requisites and predictors of social progress, economic growth, citizenship and democracy.

3.2. The appeal to mathematics education

From the point of view of mathematics education the arguments of these systems of reasoning about schooling and socioeconomic development sound very appealing. The constant failure of many to learn and like mathematics in each country and among countries has been a justification for the need of more research, particularly the one that wants to reform and fix “the problems of practice” (Valero & Meaney, 2014). Now the evidence for the need of research “that matters for practice” is not only provided by small projects and results in national testing. It is minutely produced at large scale, so that there could be no doubt that mathematics achievement and competence matter for economy and for democracy. Kanes, Morgan, and Tsatsaroni (2014) argue that the PISA has formed a regime that has been taken uncritically by researchers who justify their activity as offering insights and solutions to the problems evidenced in PISA results. PISA, the OECD machinery, and in general the system of reason that they together constitute have produced indisputable truths that are hard to challenge.

From the analytical point of view that I adopt, asserting that mathematics achievement is at the cornerstone of people’s and nations’ progress and democracy is a historically contingent way of thinking about education, mathematics education and society. This way of thinking is a system of reason about school children, now citizens, and who mathematics education should make them. If this form of thinking is contingent, then it is not necessary and therefore it can be open to interrogation.

First, these systems of reason confront every single person participating in the processes of schooling —children, teachers, parents, school masters, textbook produces, policy makers— with a sense of who they should become and be. It has been discussed how mathematics education research discursively constructs the schizomathematicslearner (Valero, 2004), and Montecino and Valero (2015) have shown how international agencies as well as research on the mathematics teacher construct ideas of the desired teacher. These results are in resonance with previous research that evidences how the technologies of education are not simply neutral tools for the betterment of learning but also and at the same time they are forms of governing that direct the identities and subjectivity of learners and many other of the participants in the broad network of mathematics education practices. Wiliam, Bartholomew, and Reay (2004) showed the impact of assessment in mathematics for children in English schools. Walls (2009) provided evidence in a longitudinal study of 10, New Zealand children from 7 to 18 years, of how they become mathematical subjects in the meeting with different practices —such as teaching and testing— and discourses in schools, families and society. In research in different times and spaces in at least the last 10 years, a common trend is that the notions of being mathematically competent become evident when individuals are confronted and measured against the standards and expectations of proficiency. Such implicitly or explicitly expressed standards amalgamate in a kind of being, who does not exist as such, but that operates as an image of who children and learners should strive to be. Such “entity” is being actualized and materialized in the classifications that it operates on who succeeds in getting as close as possible to such type of being, and who simply cannot or will not ever make it. This is one of the effects of power of the practices of mathematics education: on the one hand making a form of being which is highly valued in society possible and, at the same time, sorting out those who differ from such expectations.

Second, the classifications that mathematics education practices in classrooms, schools and national tests effect are nowadays reinforced by the “objective and solid” large, international comparative data of school achievement. This connection adds a quite particular layer to the desired child. Not only is the desired child rational, logical and capable of quantification. It is also a competitive, effective and self-organizing being who, with mathematics competence, can participate as a citizen in the production of social and economic growth. And this is a well-proven fact supported by the extensive international data. The very concrete connection between mathematics education as forms of fabricating subjectivities and economy have been discussed, but not so extensively. Some research has examined how the governing of mathematics education practices are involved in the creation of neoliberal mentalities. Doğan and Haser (2014) examine textbooks and curricula in Turkey in order to show how mathematics education builds an idea of children as competent consumers and players in the market. This particular effort of making children the right consumers goes hand in hand with the building of a Turkish nationalism that, as a result, establishes classifications to exclude the children whose socio-economic status does not allow them to participate in the market as anticipated and promoted by textbooks, and whose cultural identity is not Turkish. Pais (2013, 2014) connects the issue of students' failure in mathematics with the ideological functioning of capitalist societies and their power mechanisms. Failure in mathematics is the problem that research and practice want to correct. However, failure is produced both by and in practice and research. The production of failure is not the result of the malfunctioning of the system. Using Zizek's ideological critique, Pais argues that given that mathematical achievement and competence are part of the whole credit system of education, failure is rather the condition for granting value to those who succeed. In other words, the value that high mathematics achievement grants to individuals is built on the necessary failure of most learners. Failure in mathematics is thus a key player in the distribution of capital among people.

Going back to the rationality of PISA and EU —and even that of intelligence— the association of high mathematical achievement and competence with economy and citizenship becomes a very clear mechanism of selection of learners. Some are granted a place in the bright future of capitalist market economies and political participation globally and locally, and some others are not.

4. IN/EXCLUSION AND MATHEMATICS EDUCATION

Mathematics achievement and competence have become effective mechanisms to given the conduct of people. Not only because it provides competence, knowledge and skills to act in the world. But also because it is a clear element of global educational policy that has to be steered by governments though the technologies deviced by measurement systems and the scientific knowledge of didactics to make practice more effective in bringing students to produce better results. As I suggested previously, embedded in the governing of mathematics education, mechanisms of differentiation and classification of people are inevitably set in operation. As technologies that embody the norms of reason and reinscribe them in populations and in individuals, mathematics education operates inclusions/exclusions. Popkewitz (2008) argues that any cultural thesis about the subjects of schooling effects abjections. Abjection is the way that exclusion is generated as the effect of defining the norm for inclusion and its hope for those who are not part of that norm. Statement such as “high mathematics achievement gives a prosperous life”, “mathematics competence makes a virtuous citizen”, and “mathematics education should be inclusive and become for all” function as a discursive devices that declare the necessity of making of success in mathematics learning the norm of the desired subjects of society. While the statements apparently sounds as incontestable truths and as the expression of an intention of inclusion, they operate simultaneously the exclusion of those who do not comply with the norm and do not possess the characteristics of the desired learner (Popkewitz, 2004). Mathematics education as a very important technology of Modern government effects in children’s mind, bodies and conduct the compliance with the desired norms and standards, and thus operates inclusions and exclusions. This way of thinking questions the doubleness of the statements that celebrate the centrality of mathematical achievement for social and economic progress, and for inclusion and democracy.

In other words, a naïve adoption of the statements examined above that are so appealing to the mathematics education (research) community brings with it the dangerous risk of factually producing exclusion for many learners —children and adults alike— while kindly advocating for more good mathematics. The current historical configuration of power aligns mathematical achievement with capitalist forms of being that go beyond the good intentions of enlightening and freeing people with the norms of reason incarnated in mathematics.

5. ON THE "USE" OF THIS DISCUSSION

In the current order of discourse research that does not help providing concrete ways of action to fight the calamities of mathematical failure documented by PISA are regarded as useless. Even for teachers, research that does not talk to the realities of their practice is discarded as irrelevant. A first use of such research is to offer a problematization of the voices and statements that have become truths and that, because they sound so reasonable, have become unquestionable. More than that, they have become part of the ways of acting of those who research mathematics education, educate teachers and educate children. Such step of raising a critical question points to the cracks of practices and discourses and, by doing that, open possibilities of freedom that may seem inexistent in front of the strength of the truth and its evidence. Teachers and researchers as intellectuals, not as simple functionaries of the machinery of the state, are compelled to produce serious analysis of the fields in which they work. And thinking critically about how our work is part of the governing of people and the making of history is an ethical commitment with society.

6. References

Baker, D. P., Goesling, B., & LeTendre, G. K. (2002). Socioeconomic Status, School Quality, and National Economic Development: A Cross-National Analysis of the "Heyneman-Loxley Effect" on Mathematics and Science Achievement. *Comparative Education Review*, *46*(3), 291-312.

Clements, M. A., Keitel, C., Bishop, A., Kilpatrick, J., & Leung, F. S. (2013). From the Few to the Many: Historical Perspectives on Who Should Learn Mathematics. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 7-40): Springer New York

Coleman, J. S., Campbell, E. Q., Hobson, C. J., McPartland, F., Mood, A. M., Weinfeld, F. D., & York, R. L. (1966). Equality of educational opportunity. Washington, D.C.: Nationla Center for Educational Statistics – U.S. Department of Health, Education, and Welfare.

Diaz, J. D. (2014). Governing Equality. *European Education*, *45*(3), 35-50. doi: 10.2753/EUE1056-4934450303

Doğan, O., & Haser, Ç. (2014). Neoliberal and nationalist discourses in Turkish elementary mathematics education. *ZDM*, *46*(7), 1-11. doi: 10.1007/s11858-014-0605-z

Duarte, C. (2009). *A "realidade" nas tramas discursivas da educação matemática*. Ph.D. thesis. Universidade do Vale do Rio dos Sinos. São Leopoldo.

European Commission. (2012). Rethinking Education:Investing in skills for better socio-economic outcomes. Strasbourg: European Commission.

Foucault, M. (1991). *Discipline and punish: The birth of the prison*. New York: Penguin Books.

Gutierrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Resarch in Mathematics Education*, *44*(1), 37-68.

Heyneman, S. P., & Loxley, W. A. (1982). Influences on Academic Achievement Across High and Low Income Countries: A Re-Analysis of IEA Data. *Sociology of education*, *55*(1), 13-21.

Kanes, C., Morgan, C., & Tsatsaroni, A. (2014). The PISA mathematics regime: knowledge structures and practices of the self. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(2), 145-165. doi: 10.1007/s10649-014-9542-6

Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: ethnomathematics from a philosophical perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1), 87-100. doi: 10.1007/s10649-012-9396-8

Knijnik, G., & Wanderer, F. (2010). Mathematics education and differential inclusion: A study about two brazilian time–space forms of life. *ZDM*, *42*(3-4), 349-360.

Kollosche, D. (2014). Mathematics and power: an alliance in the foundations of mathematics and its teaching. *ZDM*, *46*(7), 1061-1072. doi: 10.1007/s11858-014-0584-0

Lerman, S. (1998). A moment in the zoom of a lens: Towards discursive psychology of mathematics teaching and learning. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the PME* (Vol. 1, pp. 66-81). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch

Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: the developing 'strong' social turn. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 171-188). Rotterdam: Sense

Lynn, R., & Meisenberg, G. (2010). National IQs calculated and validated for 108 nations. *Intelligence*, *38*(4), 353-360. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.intell.2010.04.007

Montecino, A., & Valero, P. (2015). Product and agent: two faces of the mathematics teacher. In S. Mukhopadhyay & B. Greer (Eds.), *Proceedings of the Eighth International Mathematics Education and Society Conference (MES 8)* (Vol. 3, pp. 794-806). Portland, United States: Ooligan Press, Portland State University

OECD. (2014a). Education at a glance 2014. OECD indicators. Paris: OECD.

OECD. (2014b). PISA 2012 Results in Focus. What 15-year-olds know and what they can do with what they know. Paris: OECD.

Pais, A. (2013). An ideology critique of the use-value of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 15-34. doi: 10.1007/s10649-013-9484-4

Pais, A. (2014). Economy: the absent centre of mathematics education. *ZDM*, *46*(7), 1-9. doi: 10.1007/s11858-014-0625-8

Popkewitz, T. S. (1991). *A political sociology of educational reform : power/knowledge in teaching, teacher education, and research*. New York: Teachers College Press.

Popkewitz, T. S. (2004). The Alchemy of the Mathematics Curriculum: Inscriptions and the Fabrication of the child. *American Educational Research Journal*, *41*(1), 3-34.

Popkewitz, T. S. (2008). *Cosmopolitanism and the age of school reform : science, education, and making society by making the child*. New York: Routledge.

Popkewitz, T. S., & Brennan, M. (1997). Restructuring of social and political theory in education: Foucault and a social epistemology of school practices. *Educational Theory*, *47*(3), 287-313. doi: 10.1111/j.1741-5446.1997.00287.x

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense

Rindermann, H., & Ceci, S. J. (2009). Educational policy and country outcomes in international cognitive competence studies. *Perspectives on Psychological Science*, *4*(6), 551-568. doi: 10.1111/j.1745-6924.2009.01165.x

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education. Uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam: Sense.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2001). Breaking political neutrality: The critical engagement of mathematics education with democracy. In B. Atweh, H. Forgasz & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective.* (pp. 37-55). Mahwah, NJ: Erlbaum

Stintson, D. (2006). African American male adolescents, schooling (and mathematics): Deficiency, rejection, and achievement. *Review of Educational Research*, *76*(4), 477-506.

Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. In M. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich (USA): Information Age

Valero, P. (2013). Political perspectives in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. New York: Springer.

Valero, P., & Meaney, T. (2014). Trends in researching the socioeconomic influences on mathematical achievement. *ZDM*, 1-10. doi: 10.1007/s11858-014-0638-3

Vithal, R., & Volmink, J. (2005). Mathematics curriculum research: roots, reforms, reconciliation and relevance. In R. Vithal, J. Adler & C. Keitel (Eds.), *Researching mathematics education in South Africa : perspectives, practices, and possibilities* (pp. 3-27). Cape Town, South Africa and Chicago, IL: HSRC Press

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London ; New York: Routledge.

Walls, F. (2009). *Mathematical subjects : children talk about their mathematics lives*. Dordrecht ; New York: Springer.

Walshaw, M. (2004). Pre-service Mathematics Teaching in the Context of Schools: An Exploration into the Constitution of Identity. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(1), 63-86. doi: 10.1023/B:JMTE.0000009972.30248.9c

Wiliam, D., Bartholomew, H., & Reay, D. (2004). Assessment, learning and identity. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education : issues of power in theory and methodology* (pp. 43-62). Boston: Kluwer Academic Publishers.

ΜΑΘΗΣΗ ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ: ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΤΗΣ ΜΟΥΣΟΥΛΜΑΝΙΚΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΘΡΑΚΗ

Χ. Σακονίδης
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
xsakonid@eled.duth.gr

Όλο και περισσότερο αναγνωρίζεται σήμερα ότι η πρόσβαση στη μαθηματική γνώση συνιστά μια πολύπλοκη διαδικασία που οριοθετείται από ιστορικούς, κοινωνικούς, πολιτισμικούς και πολιτικούς παράγοντες. Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να διερευνήσει κοινωνικά και πολιτικά ζητήματα που ανακύπτουν στο πλαίσιο της εκπαίδευσης των παιδιών της μειονότητας στη Θράκη, μέσα από την προσωπική νοηματοδότηση του ερευνητή. Η αναστοχαστική προσέγγιση κρίσιμων συμβάντων που υιοθετείται υποδεικνύει ότι για ένα μειονοτικό μαθητή, η επιτυχής συμμετοχή στην πρακτική της μαθηματικής εκπαίδευσης συνιστά μια συνεχή πάλη με εξουσιαστικές δομές που λειτουργούν σε τοπικό αλλά και γενικό επίπεδο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

Η αναγνώριση του ρόλου που διαδραματίζουν οι κοινωνικές συνθήκες στη μάθηση των μαθηματικών τις τελευταίες δυο δεκαετίες έστρεψε το ερευνητικό ενδιαφέρον στην αναζήτηση θεωρητικών και μεθοδολογικών πλαισίων από επιστημονικά πεδία, όπως η κοινωνιολογία, η ανθρωπολογία και η πολιτική επιστήμη. Ο Lerman (2000) αποκαλεί αυτήν την αλλαγή εστίασης στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης ‘κοινωνική στροφή’, ορίζοντάς την ως «την ανάδυση…θεωριών που αντιμετωπίζουν τις έννοιες, τη μαθηματική σκέψη και το συλλογισμό ως προϊόντα κοινωνικής δραστηριότητας» (σελ. 23). Σε μεταγενέστερη εργασία του υποστηρίζει ότι η δεκτικότητα της κοινότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης στις κοινωνικές θεωρίες οφείλεται κατεξοχήν σε πολιτικές ανησυχίες ότι οι κοινωνικές ανισότητες αναπαράγονται μέσω των σχολικών μαθηματικών (Lerman 2006). Η ερμηνεία αυτή αναδεικνύει μια νέα θέαση της μαθηματικής εκπαίδευσης, την ‘κοινωνικο-πολιτική’. Η κοινωνική διάσταση του όρου αφορά τους ανθρώπους, τις αλληλεπιδράσεις και τις δραστηριότητές τους σε συγκεκριμένους κοινωνικούς χώρους και ιστορικούς χρόνους, τις παραδόσεις και τα τελετουργικά πρόσβασης σε αυτούς τους χώρους. Η πολιτική συνιστώσα του όρου αναφέρεται στην επίγνωση της ύπαρξης εξουσίας, όπως αυτή προκύπτει από τοποθετήσεις του τύπου «μαθηματικά για όλους» (Valero 2004).

Σε μια κοινωνικο-πολιτική προοπτική η μαθηματική εκπαίδευση συνιστά πεδίο πρακτικής που περιλαμβάνει τις κοινωνικές πρακτικές διαφόρων κοινωνικών φορέων και θεσμών (actors and institutions) οι οποίοι εντοπίζονται σε διαφορετικές σφαίρες και επίπεδα και διαμορφώνουν τον τρόπο που τα μαθηματικά διδάσκονται και μαθαίνονται στην κοινωνία, τα σχολεία και τις τάξεις (Valero 2008). Αυτό σημαίνει ότι, εκτός από το μαθητή, τον εκπαιδευτικό και το μαθηματικό αντικείμενο, υπάρχει μια σειρά από παράγοντες που συμβάλλουν στη διαμόρφωση των πρακτικών της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίες αναδεικνύονται στη σχέση που αναπτύσσεται κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικού, μαθητών και μαθηματικού περιεχομένου. Αναζητώντας αυτούς τους παράγοντες, θα μπορούσε κανείς να εστιάσει, για παράδειγμα, στο ρόλο των σχολικών εγχειριδίων ή της συνεργασίας ερευνητών και εκπαιδευτικών στις πρακτικές διδασκαλίας στην τάξη των μαθηματικών. Επίσης, στο ρόλο των προσδοκιών και των απαιτήσεων της κοινότητας και της αγοράς εργασίας σχετικά με τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών ως εν δυνάμει μελών του εργασιακού δυναμικού. Εν ολίγοις, η μαθηματική εκπαίδευση ως πρακτική δεν περιορίζεται στη σφαίρα της τάξης αλλά την υπερβαίνει, συμπεριλαμβάνοντας κοινωνικές πρακτικές και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.

Σε συμφωνία με την ανωτέρω προσέγγιση, ο Popkewitz (2002) αντιμετωπίζει τα μαθηματικά ως κοινωνική πρακτική, η οποία, μαζί με άλλα σύνολα πρακτικών, συμβάλλει στη διακυβέρνηση των πολιτών. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εγκαθίδρυσης συστημάτων συλλογισμού, δηλαδή, κοινωνικά δομημένων και αποδεκτών μορφών χαρακτηρισμού και οργάνωσης του κόσμου, που οριοθετούν τι είναι δυνατό, επιθυμητό και κατάλληλο και, ως εκ τούτου, αποτελούν τη βάση της κατάταξης των ατόμων σε μια κοινωνία. Το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών και η διδασκαλία τους δεν αναγνωρίζονται ως φορείς και διαδικασίες επιφορτισμένες με τη μετάδοση μιας γνώσης μεγάλης αξίας αλλά ως κοινωνικές πρακτικές που, μέσω του μετασχηματισμού της γνώσης από πεδίο σε πεδίο πρακτικής, συμβάλλουν στη ρύθμιση της δράσης των μαθητών, των πλαισίων σκέψης τους και των δυνατοτήτων συμμετοχής ή αποκλεισμού τους από το κοινωνικό γίγνεσθαι. Η μαθηματική εκπαίδευση λειτουργεί ως μέρος των ευρύτερων μηχανισμών που καθορίζουν αυτό που έχει αξία, τι είναι σωστό και τι φυσιολογικό στην κοινωνία. Πρόκειται για πρακτικές μέσω των οποίων εγκαθιδρύονται οι κοινωνικές σχέσεις ταξινόμησης και ρύθμισης και μέσω των οποίων συγκεκριμένοι κοινωνικοί φορείς χρησιμοποιούν συγκεκριμένους πόρους σε συγκεκριμένες περιστάσεις για να τοποθετήσουν τον εαυτό τους και άλλους στις κοινωνικά οριοθετημένες κατηγορίες (Valero 2007).

Στην ανωτέρω προσέγγιση η εξουσία δεν αποτελεί εγγενές και μόνιμο χαρακτηριστικό των κοινωνικών φορέων. Είναι σχεσιακή και σε συνεχή μετασχηματισμό, ο οποίος επιτυγχάνεται μέσω της συμμετοχής των φορέων σε κοινωνικές πρακτικές και στην οικοδόμηση λόγων (discourses). Υπ' αυτή την έννοια, η εξουσία δεν ασκείται εμφανώς αλλά με έμμεσους τρόπους και είναι ταυτόχρονα εποικοδομητική και καταστροφική δύναμη. Ο ορισμός αυτός της εξουσίας επιτρέπει τη λεπτομερή ανάλυση του τρόπου που τα μαθηματικά και η μαθηματική εκπαίδευση χρησιμοποιούνται σε συγκεκριμένους λόγους και των επιπτώσεων αυτών των λόγων στις ζωές των ανθρώπων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΕ ΠΟΛΥΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ

Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών αναμένεται σήμερα να εργασθεί με μαθητές που προέρχονται από κοινωνικο-πολιτισμικά διαφορετικές ομάδες από τη δική τους. Πολιτισμικά, γλωσσικά, πολιτικά και κοινωνικά ζητήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης συνιστούν πλέον πραγματικότητα που χρήζει άμεσης διαχείρισης από την εκπαιδευτική και την ερευνητική κοινότητα. Κάτι τέτοιο προϋποθέτει τη διαμόρφωση αναλυτικών εργαλείων και θεωρητικών πλαισίων που επιτρέπουν την αναγνώριση και, συνεπώς, την αποτελεσματική αντιμετώπιση μιας σειράς ζητημάτων και προκλήσεων. Η παρούσα ενότητα επιχειρεί να αποσαφηνίσει κρίσιμες έννοιες για την πολυπολιτισμική πραγματικότητα στις τάξεις των μαθηματικών μέσα από μια πρωτίστως κοινωνικο-πολιτική προοπτική.

Αν δεχτούμε ότι η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεούν περίπλοκες κοινωνικές πρακτικές που συγκροτούνται σε μια πολλαπλότητα από πλαίσια δράσης, είναι εύλογο να εικάσουμε ότι η χαρτογράφηση και κατανόηση αυτών των πρακτικών απαιτεί τη διερεύνηση των σχετικών πλαισίων (Valero 2004). Φυσικά, είναι αδύνατο να ερευνηθούν τα πάντα, αλλά είναι δυνατό να αναγνωρισθούν κάποιες διαστάσεις, με βάση τις οποίες να διερευνηθούν οι συνδέσεις μεταξύ των γεγονότων μέσα στην τάξη και της κοινωνικής ζωής έξω από αυτήν. Η ενότητα επικεντρώνεται σε πέντε έννοιες, της ταυτότητας (identity), των προτύπων (norms), του πολιτισμού (culture), της ετερότητας και της σύγκρουσης (diversity and conflict), του λόγου και της φωνής (discourse and voice), οι οποίες θεωρούνται κομβικές σε ένα κοινωνικο-πολιτικό πλαίσιο και συνδέονται άμεσα με τα πολυπολιτισμικά χαρακτηριστικά υπό εξέταση. Στη συνέχεια, οριοθετούνται αυτές οι έννοιες, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται με τα εν λόγω χαρακτηριστικά του τοπίου μάθησης.

Ταυτότητα: Σε ένα κοινωνικο-πολιτικό πλαίσιο, ταυτότητα είναι αυτό «που κάνει» και όχι αυτό «που είναι» κανείς. Καθώς τα άτομα συμμετέχουν σε ποικίλες κοινότητες και λόγους (discourses), η ταυτότητα έχει εκ των πραγμάτων δυναμικό, πολυφωνικό και περιστασιακά αντιφατικό χαρακτήρα. Ο εαυτός, ως εκ τούτου, είναι μια συλλογή από αλληλοσυνδεόμενες ταυτότητες που συγκροτούνται σε πρακτικές και προσδιορίζουν το άτομο με βάση τη φυλή, τη θρησκεία, τη γλώσσα, την εθνικότητα, την κοινωνική τάξη, το φύλο, τη σεξουαλικότητα, κ.ά. (Gutierrez 2013). Η έννοια της ταυτότητας συνδυάζει τον ατομικό, προσωπικό κόσμο με το συλλογικό χώρο των πολιτισμικών και κοινωνικών σχέσεων και η διαμόρφωσή της συνιστά μια συνεχή διεργασία «γίγνεσθαι» στην πράξη.

Η έννοιας της ταυτότητας έχει συχνά προσεγγισθεί ως ένα "στατικό" ατομικό χαρακτηριστικό που συνδέεται με την ιδιότητα μέλους μιας ομάδας. Οι μελέτες που έχουν υιοθετήσει αυτήν την οπτική, τυπικά συγκρίνουν τις μαθηματικές επιδόσεις μιας συγκεκριμένης ομάδας μαθητών στα σχολικά μαθηματικά με τις αντίστοιχες επιδόσεις άλλων ομάδων. Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει πως αυτές οι μελέτες είναι σημαντικές σε μια δημοκρατική κοινωνία ως εργαλεία δημοσιοποίησης πληροφοριών σχετικών με την πρόσβαση στο πολιτισμικό κεφάλαιό της. Ωστόσο, για την κατανόηση των διεργασιών που προωθούν την επιτυχή συμμετοχή στις σχολικές μαθηματικές πρακτικές, είναι αναγκαία μια διαφορετική εστίαση. Οι σύγχρονες κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρήσεις επιζητούν πιο δυναμικές εννοιολογήσεις των διεργασιών ανάπτυξης ταυτότητας. Εννοιολογήσεις που λαμβάνουν υπόψη τους κάποια συνέχεια με το παρελθόν των πολιτισμικών ομάδων των οποίων είναι μέλη, καθώς και τις ρήξεις και τις ασυνέχειες που βιώνουν τα άτομα και οι ομάδες στο πλαίσιο ιδιαίτερων ιστοριών ζωής (life stories) (Abreu 2005). Μια τέτοια πιο δυναμική προοπτική για την ταυτότητα είναι πολυτιμότερη για τη μελέτη της μάθησης σε πολυπολιτισμικές τάξεις, οι οποίες δυνητικά διαθέτουν πολλούς πόρους ασυνεχειών, τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς.

Στην Ελλάδα, όπως και σε άλλες ευρωπαϊκές χώρες, μετανάστες και μειονοτικοί μαθητές συχνά ζουν ανάμεσα στις μαθηματικές πρακτικές του πολιτισμού του σπιτιού (home culture) και σε εκείνες του πολιτισμού του σχολείου. Οι εκπαιδευτικοί, προετοιμάζονται για να διδάξουν μονο-γλωσσους και μονο-πολιτισμικούς μαθητές της δικής τους κουλτούρας, ενώ στην πραγματικότητα καλούνται να διδάξουν μαθητές που μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικά κοινωνικά περιβάλλοντα, να μιλούν μια διαφορετική γλώσσα και να προέρχονται από πολιτισμούς με τους οποίους δεν είναι εξοικειωμένοι. Αυτή η πολύπλοκη κατάσταση προσφέρει τη δυνατότητα εμβάθυνσης στους τρόπους με τους οποίους συγκροτούνται οι πολιτισμικές ταυτότητες που αναγνωρίζονται ως σημαντικές για τη μάθηση των σχολικών μαθηματικών.

Νόρμες: Η εστίαση στην καθημερινή δραστηριότητα στην πολυπολιτισμική τάξη των μαθηματικών μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην κατανόηση των διαφορετικών ευκαιριών για συμμετοχικές διεργασίες. Οι νόρμες, με δεδομένο ότι ρυθμίζουν τη δράση και την αλληλεπίδραση στην τάξη, βρίσκονται στο επίκεντρο του λόγου (discourse) που αναπτύσσεται σε αυτήν. Η κατανόηση των νορμών ως συστατικών στοιχείων αυτού του λόγου τις καθιστά πολύτιμα οικοδομήματα για την εμπειρική έρευνα που εστιάζει στην ανάλυση των διεργασιών συμμετοχής στην τάξη.

Οι νόρμες της μαθηματικής πρακτικής νομιμοποιούν τη μαθηματική δραστηριότητα μέσα στην τάξη. Συνδέονται με τους κανόνες και τους τρόπους του «πράττειν» στην επιστήμη των μαθηματικών, καθώς και με τους τρόπους που μαθητές και εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν τα σχολικά μαθηματικά. Για να αποφασίσουν οι εκπαιδευτικοί αν ένα περιεχόμενο, μια διαδικασία, ένα έργο ή μια στρατηγική είναι μέρος των σχολικών μαθηματικών, δανείζονται τα νοήματά τους από την κουλτούρα των ομάδων στις οποίες ανήκουν. Όταν ο δάσκαλος επικαλείται έναν κανόνα και οι μαθητές σπεύδουν να καταπιαστούν με αυτόν, όλοι φέρνουν στη διαδικασία τη δική τους ερμηνεία μιας κοινωνικής κατανόησης σχετικά με τη μαθηματική γνώση και την κυριότητά της (ownership), αλλά και μια κοινωνική αποτίμηση της αξίας των μαθηματικών πρακτικών. Ευρύτερες κοινωνικές δομές, όπως το εκπαιδευτικό σύστημα, έχουν επιπτώσεις στις αλληλεπιδράσεις στην τάξη μέσω σιωπηρών μηνυμάτων σχετικά με το ποιες είναι οι νόμιμες νόρμες.

Ο Cobb και οι συνεργάτες του μελέτησαν για πολλά χρόνια τις νόρμες στην τάξη των μαθηματικών (π.χ., Cobb et al 2001). Διέκριναν τρεις πτυχές της τάξης και προτείνουν ως χρήσιμες για τη μελέτη της μικρο-κουλτούρας της: τις κοινωνικές νόρμες (αναφέρονται στη δομή συμμετοχής σε μια οποιαδήποτε τάξη), τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες (αφορούν στα κανονιστικά ζητήματα δράσης και αλληλεπίδρασης που χαρακτηρίζουν ειδικά την τάξη των μαθηματικών) και τις μαθηματικές πρακτικές της τάξης (πρόκειται για τις μαθηματικές πρακτικές που συνδέονται σε συγκεκριμένες μαθηματικές ιδέες). Οι Cobb και Hodge (2002) υποστηρίζουν ότι αυτή η αναλυτική προσέγγιση πριμοδοτεί την κατανόηση των μαθηματικών ως μιας κοινωνικά και πολιτισμικά πλαισιοθετημένης ανθρώπινης δραστηριότητας.

Οι μαθηματικές νόρμες σχετίζονται άμεσα με θέματα εξουσίας. Ένας μαθητής, ο οποίος παραβιάζει τους καθιερωμένους τρόπους συλλογισμού (επίσημη γραφή/ official script) που πραγματοποιούνται με εργαλεία και εγγραφές (inscriptions) που έχουν εδραιωθεί στην κοινότητα της τάξης, τοποθετείται στο λόγο (discourse) της τάξης σε αυτούς που δεν κατανοούν τη μαθηματική ανάγνωση του κόσμου. Ομοίως, ένας μαθητής που παραβιάζει τον κοινά αποδεκτό στόχο για τον οποίο κάνουμε μαθηματικά τοποθετείται σε εκείνους που δεν κάνουν πραγματικά μαθηματικά. Είναι ως οι μαθητές να δρουν και να αλληλεπιδρούν σε ένα κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο ορισμένες συμβολές αναγνωρίζονται ως νόμιμες και άλλες ως παράνομες, παρέχοντας έτσι διαφορετική πρόσβαση όχι μόνο σε συγκεκριμένους μαθηματικούς τρόπους γνώσης αλλά και σε ιδιαίτερες ταυτότητες 'μαθηματικού δρώντα' (Boaler & Greeno 2000). Με άλλα λόγια, όλοι οι μαθητές στην τάξη μαθαίνουν και παράλληλα οικοδομούν ταυτότητες. Ωστόσο, εκείνοι που δεν εργάζονται με αναγνωρισμένους τρόπους αναπτύσσουν ταυτότητες και μορφές τεχνογνωσίας που δεν αποτιμώνται θετικά στο σχολείο και δεν έχουν επιρροή στην ευρύτερη κοινωνία. Είναι δελεαστικό να υποθέσει κανείς ότι η εμπλοκή των μαθητών στους επίσημους ή στους ανεπίσημους 'χώρους' της τάξης αντικατοπτρίζει τις κοινότητες στις οποίες ανήκουν, τις τοπικές, του σπιτιού τους ή ευρύτερες.

Πολιτισμός (culture)**:** Αφορά σε στοιχεία που διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στην οικειοποίηση της γνώσης και στην ανάπτυξη ικανοτήτων από τους μαθητές. Περιλαμβάνει ένα σύνολο από χαρακτηριστικά: σημειωτικά (σύμβολα, εκφράσεις, μορφές επικοινωνίας, καλλιτεχνικές εκφράσεις), κοινωνικο-πολιτικά (οργάνωση της εργασίας, των κοινωνικών σχέσεων και της εξουσίας), ερμηνευτικά (μυθολογία και θρησκεία), γνωστικά (μορφές γνώσης που συνδέονται με το περιβάλλον) και τεχνολογικά (τεχνουργήματα που δημιουργούνται με σκοπό την καθυπόταξη της φύσης ή τη διευκόλυνση της εργασίας). Έτσι, υπάρχουν μακρο-κουλτούρες, όπως αυτές που είναι παρούσες, όταν σε μια τάξη υπάρχουν μαθητές από μια άλλη χώρα, καθώς και μικρο-κουλτούρες, όπως αυτές που συνδέονται τυπικά με μια συγκεκριμένη γειτονιά στην οποία διαμένουν κάποιοι μαθητές.

Ένα άτομο ή μια ομάδα ανθρώπων μπορεί να ανήκουν ταυτόχρονα σε διαφορετικές κουλτούρες σε σχέση με την ατομική ή τη συλλογική δραστηριότητα. Δηλαδή, οι άνθρωποι μπορούν να συμμορφώνονται με τις αξίες, τις παραδόσεις, τις σχέσεις και τις κοσμοθεωρίες που καθορίζονται από το πεδίο πρακτικής εντός του οποίου εντοπίζεται η δραστηριότητα που ασκούν. Αυτό συνεπάγεται ότι τα άτομα και οι ομάδες μπορούν να ταυτίζονται με περισσότερους από έναν πολιτισμό σε μια δεδομένη στιγμή, ότι μπορούν να μοιράζονται έναν ή περισσοτέρους πολιτισμούς, και ότι μια τέτοια ταύτιση με πολιτισμούς αλλάζει όχι μόνο με το χρόνο, αλλά και ανάλογα με τη δραστηριότητα και την περίσταση (Alrø, Skovsmose& Valero 2005).

Η ανωτέρω έννοια του πολιτισμού συνεπάγεται ότι οι περισσότερες περιστάσεις όπου συναντιούνται οι άνθρωποι είναι πολυπολιτισμικές. Μια τάξη των μαθηματικών, για παράδειγμα, είναι ένας χώρος όπου λιγότερο ή περισσότερο σαφώς ορισμένοι πολιτισμοί συν-υπάρχουν. Αυτό σημαίνει ότι οι συμμετέχοντες στις δραστηριότητες της τάξης συγκροτούν διαφορετικές ομάδες και μοιράζονται διαφορετικές κουλτούρες αναφορικά με μια ποικιλία στοιχείων, όπως η καταγωγή, η μητρική γλώσσα, η μαθηματική ικανότητα, το φύλο, η θρησκεία, ο πολιτικός προσανατολισμός, οι μελλοντικές δυνατότητες, κλπ. Αυτοί οι πολιτισμοί ενεργοποιούνται σε διαφορετικούς χρόνους, ανάλογα με τη δραστηριότητα που διεξάγεται στην τάξη. Η διαμόρφωση διαφορετικών πολιτισμικών ομάδων συνδέεται με τη δυναμική της δραστηριότητας στη συγκεκριμένη τάξη, ενώ ο ρόλος που διαδραματίζει κάθε μαθητής/ άτομο σε αυτές τις ομάδες σχετίζεται με την ατομική κατασκευή ταυτότητας μέσω της συμμετοχής στη δράση.

Ετερότητα και σύγκρουση (diversity and conflict)**:** Τα σχολεία αποτελούν θεσμικά πλαίσια ετερότητας, συμπεριλαμβανομένης της πολιτισμικής. Η ετερότητα μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο για τη μάθηση, αν η ομοιογένεια θεωρείται σημαντική για την καλή λειτουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος. Ωστόσο, η ετερότητα μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως πόρος μάθησης, εξαιτίας της παρουσίας πολλαπλών εμπειριών και προοπτικών.

Σε ένα περιβάλλον μάθησης μπορεί εύκολα να προκύψει σύγκρουση στη βάση της ετερότητας: «Η πολιτισμική ετερότητα γίνεται επώδυνη σε καταστάσεις σύγκρουσης….Προβλήματα προκύπτουν όταν μια ομάδα λέει ουσιαστικά στην άλλη [ότι] ‘άνθρωποι σαν κι εμάς δεν το κάνουν με αυτόν τον τρόπο’. Πίσω από αυτό … υπάρχει ένα πιο θεμελιώδες γεγονός: ‘άνθρωποι σαν κι εμάς δεν σκέφτονται με αυτόν τον τρόπο’. Έτσι, το ‘σκέφτομαι για τον εαυτό μου’ διαφέρει από τον ένα πολιτισμό στον άλλο, καθιστώντας τις πολιτισμικές μορφές θεμελιωδώς ηθικές» (Pearce και Littlejohn 1997, σελ. 62).

Η ετερότητα μπορεί να προκαλέσει σύγκρουση (ενδοπροσωπική, διαπροσωπική ή σε άλλο επίπεδο), αλλά μπορεί, επίσης, να οδηγήσει σε διάλογο και, επομένως σε μάθηση. Οι συγκρούσεις μπορεί να αποδειχθούν παραγωγικές ή καταστροφικές, ανάλογα με τον τρόπο που αντιμετωπίζονται. Για παράδειγμα, οι συγκρούσεις σε μια πολυπολιτισμική τάξη δεν επιλύονται απαραίτητα με την εισαγωγή μιας κοινής, ενιαίας γλώσσα ή με την εισαγωγή ενός κοινού τρόπου πλαισιοθέτησης μιας μαθηματικής ιδέας. Οι συγκρούσεις αναφέρονται σε αντιφάσεις, διαφωνίες και προβλήματα που χρήζουν επίλυσης, αλλά περιλαμβάνουν, επιπλέον, τις δυνατότητες για μάθηση και ανάπτυξη.

Οι Cobb και Hodge (2002) προτείνουν την κατανόηση της ετερότητας με όρους συμμετοχής των μαθητών σε πρακτικές τοπικού χαρακτήρα, της κοινότητας, του σπιτιού τους ή ομάδων ή κοινοτήτων που δρουν στην ευρύτερη κοινωνία. Αυτή η οπτική για την ετερότητα προσανατολίζει το ενδιαφέρον στην ενασχόληση με τις ζωές των μαθητών εκτός της τάξης, στην προσπάθεια απόδοσης νοήματος στη δράση και στις εμπειρίες τους στην τάξη. Σε αυτήν την προοπτική, το ζήτημα των ίσων ευκαιριών στην εκπαίδευση συνδέεται με το ρόλο που διαδραματίζουν οι ασυνέχειες και οι συνέχειες μεταξύ των πρακτικών του σχολείου και αυτών εκτός του σχολείου σε ό,τι αφορά την πρόσβαση στη μαθηματική γνώση. Δηλαδή, σε ευκαιρίες ανάπτυξης μορφών μαθηματικού συλλογισμού αιχμής, άμεσα ή στο μέλλον (Bruner 1987).

Με βάση τα παραπάνω, η ετερότητα ανάγεται σε ζήτημα που αναδύεται στις σχέσεις συμμετοχής των μαθητών στις πρακτικές διαφορετικών ομάδων. Υπ' αυτό το πρίσμα, η τάξη των μαθηματικών συνιστά πεδίο ενεργοποίησης της ετερότητας στο μικροεπίπεδο της προσωπικής αλληλεπίδρασης. Το βασικό σημείο είναι ότι αυτή η σχεσιακή προοπτική δεν περιορίζει την ετερότητα στους εκτός του σχολείου τρόπους συλλογισμού και ομιλίας μέσα στους οποίους οι μαθητές 'επιπολιτισμοποιούνται' (Bishop 1988). Αντ' αυτού, η ετερότητα αφορά στις συνέχειες και τις ασυνέχειες μεταξύ αυτών των τρόπων δράσης και των νορμών και πρακτικών που έχουν καθιερωθεί στην τάξη.

Λόγος και φωνή (discourse and voice)**:** Η ανάλυση του λόγου των διαφορετικών φορέων (agents) μιας κοινότητας μάθησης αποκτά βαρύνουσα σημασία για την προώθηση της μάθησης όχι μόνο ως ατομικής αλλά και ως κοινωνικής διεργασίας και τοποθετεί την έμφαση στο ρόλο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων που ακόμη και σήμερα ενθαρρύνεται ελάχιστα στην τάξη (Elbers & de Haan 2004).

Σε μια κοινωνικο-πολιτισμική προοπτική, λόγοι (discourses) και φωνές (voices) θεωρείται ότι συνιστούν κοινωνικές κατασκευές και έχουν διαλεκτικό χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος περιλαμβάνει όχι μόνο γνωστικά στοιχεία (π.χ., ιδέες, αντιλήψεις), αλλά και πεποιθήσεις, συναισθήματα και πολιτισμικές 'έξεις'. Έτσι, ο λόγος διαμορφώνει τις σχέσεις που εγκαθιδρύονται μεταξύ των συμμετεχόντων, αλλά διαμορφώνεται επίσης από αυτές, δηλαδή από τη σχετική εξουσία που γίνεται αντιληπτή αλλά και την ερμηνεία που αποδίδεται στην κατάσταση από καθέναν από αυτούς. Όντας έτσι, οι λόγοι θα πρέπει να θεωρούνται πάντοτε ως πλαισιοθετημένοι (Lave & Wenger 1991). Ωστόσο, όπως κάθε άλλη κοινωνική δομή, ο λόγος δεν είναι απαλλαγμένος από αντιφάσεις ή από συγκρούσεις, οι οποίες χρήζουν επίσης ανάλυσης. Οι συγκρούσεις που μπορεί να προκύψουν ακόμη και από εσωτερικές αντιφάσεις, με δεδομένο ότι είμαστε διαλογικά όντα (Hermans 2001), οφείλονται σε μια πολλαπλότητα ταυτοτήτων, που μπορεί επίσης να είναι αντιφατικές.

> «Οι λόγοι αποτελούν κοινωνικο-ιστορικούς συντονισμούς ανθρώπων, αντικειμένων, … τρόπων ομιλίας, δράσης, αλληλεπίδρασης, σκέψης, αποτίμησης και (μερικές φορές) γραφής και ανάγνωσης που επιτρέπουν την

εμφάνιση και την αναγνώριση κοινωνικά σημαντικών ταυτοτήτων, όπως το να είναι κάποιος συγκεκριμένος τύπος … δικηγόρου, … θεωρητικού φυσικού, …., δασκάλου, μαθητή…. (και) αναρίθμητες άλλες δυνατότητες. Αν καταστρέψετε ένα λόγο (και όντως πεθαίνουν), μπορείτε επίσης να καταστρέψετε πολιτισμικά πρότυπα, πλαισιοθετημένα νοήματα και τις συνακόλουθες ταυτότητες» (Gee 1997, σελ. 255-256)

Μέσα στις τάξεις, οι λόγοι διαμορφώνονται επιπλέον από το διδακτικό συμβόλαιο και από το μετα-διδακτικό συμβόλαιο (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont 1997). Προκειμένου να προωθήσουν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, καθώς και για να διευκολύνουν τόσο την οικειοποίηση της γνώσης όσο και τις μεταβάσεις (Abreu, Bishop & Presmeg 2002), εκπαιδευτικοί και μαθητές χρειάζεται να εγκαθιδρύσουν μια δι-υποκειμενικότητα (Wertsch 1991) που τους επιτρέπει να έχουν πρόσβαση καθένας στο λόγο των άλλων. Αυτό διευκολύνει την παραχώρηση φωνής σε κάθε συμμετέχοντα στην κοινότητα μάθησης, την ενδυνάμωση των μαθητών από πολιτισμικές μειονότητες. Η διερεύνηση και η κατανόηση του αν οι εκπαιδευτικοί είναι ενήμεροι για όλα αυτά τα χαρακτηριστικά στους λόγους τους που αφορούν την ετερότητα συνιστά ένα πρώτο βήμα στην κατεύθυνση της γνώσης του τι μπορεί να γίνει, προκειμένου να καταστεί δυνατή μια πραγματικά διαπολιτισμική εκπαίδευση στα μαθηματικά.

Η ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΤΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΘΡΑΚΗ

Ο μειονοτικός πληθυσμός της Θράκης είναι εθνοτικά και γλωσσικά ετερογενής [τουρκογενείς (τουρκόφωνοι), πομάκοι (σλαβόφωνοι) και τσιγγάνοι (ρωμανίφωνοι)]. Στο βόρειο ορεινό τμήμα των νομών Ξάνθης και Ροδόπης, όπου κατοικεί ο κύριος όγκος του, ο πληθυσμός είναι αμιγώς μειονοτικός, ενώ στα πεδινά και στις πόλεις μικτός. Η σχεδόν παραδοσιακή γεωργία αποτελεί ακόμη και σήμερα τον πρωταρχικό τομέα απασχόλησης ενώ σημαντικό ποσοστό του αστικού πληθυσμού αποτελούν εργάτες και μικρο-επαγγελματίες (Ασκούνη 2006).

Η συγκρότηση ταυτότητας από τα μέλη της μειονότητας υπήρξε και συνεχίζει να αποτελεί προϊόν ποικίλων πολιτικών παρεμβάσεων και αντικείμενο διαμάχης που λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο που διαμορφώνουν δυο επάλληλοι ανταγωνισμοί: ο πλειονοτικο-μειονοτικός πολιτικός και οικονομικός από τη μια και ο ελληνο-τουρκικός εθνικός από την άλλη (Μαυρομμάτης, 2008). Οι ανταγωνισμοί αυτοί ενισχύουν και ενισχύονται από τις δυσχερείς κοινωνικές και οικονομικές συνθήκες αλλά και την πολιτική απομόνωσης της μειονότητας που ακολούθησαν οι ελληνικές κυβερνήσεις και για ευνόητους λόγους υπέθαλψε η τουρκική εθνικιστική πολιτική. Η έμφαση της ελληνικής πολιτείας στην εθνοτική και γλωσσική ανομοιογένεια της μειονότητας, που υποδεικνύει τη μουσουλμανική θρησκεία ως μοναδικό ενοποιητικό της στοιχείο και η πριμοδότηση της ανάπτυξης τουρκικής εθνικής συνείδησης στο μειονοτικό πληθυσμό από την τουρκική πλευρά και την ηγεσία της μειονότητας, που υποστηρίζει τον ενιαίο χαρακτήρα της αποτέλεσαν κεντρικές κατευθύνσεις των ανωτέρω ανταγωνισμών. Αυτές οι κατευθύνσεις οριοθέτησαν και τις σχέσεις που αναπτύχθηκαν μεταξύ της μειονότητας και της πλειονότητας, οι οποίες διαμορφώθηκαν στη βάση μιας αμφίδρομης απειλής της μιας για την άλλη που καλλιέργησε αισθήματα ανασφάλειας, καχυποψίας και ακόμη και φόβου.

Στο παραπάνω σύνθετο και συχνά συγκρουσιακό περιβάλλον, η εκπαίδευση αποτέλεσε και συνεχίζει να αποτελεί το κατεξοχήν πεδίο πολιτικής αντιπαράθεσης των δυο πλευρών για τη διατήρηση και τον περιορισμό της επιρροής στη μειονότητα εκ μέρους τη τουρκικής και ελληνικής πλευράς αντιστοίχως. Όντας στο επίκεντρο αυτής της αντιπαράθεσης, οι βασικές παιδαγωγικές και άλλες συνιστώσες της ούτως ή άλλως ιδιόμορφης μειονοτικής εκπαιδευτικής πολιτικής και πράξης ανέπτυξαν παθογένειες και προσανατολισμούς που οδήγησαν σε ένα εξαιρετικά υποβαθμισμένο μειονοτικό σχολείο που για πολλά χρόνια συμβάλλει καθοριστικά στην κοινωνική περιθωριοποίηση της μειονότητας (Φραγκουδάκη & Δραγώνα 2008).

Η μειονοτική εκπαίδευση διέπεται από ειδικό καθεστώς, παρέχεται σε ξεχωριστά σχολεία και λειτουργεί με δίγλωσσο αναλυτικό πρόγραμμα (μισά από τα μαθήματα διδάσκονται στα ελληνικά και μισά στα τουρκικά, όπως π.χ. τα μαθηματικά). Μετά από εξαετή φοίτηση στο απομονωμένο, μονο-πολιτισμικό, μειονοτικό δημοτικό σχολείο, οι μαθητές συνεχίζουν σε δημόσια κυρίως Γυμνάσια και στη συνέχεια Λύκεια, σε αμιγώς μειονοτικά περιβάλλοντα στα ορεινά και μικτά στις αστικές και ημι-αστικές περιοχές. Η ελλιπής εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για τις συγκεκριμένες συνθήκες μάθησης, τα συχνά ακατάλληλα εκπαιδευτικά υλικά, το ανεπαρκές για σχολική εξέλιξη επίπεδο ελληνομάθειας, το διχοτομημένο αναλυτικό πρόγραμμα, οι περιορισμένης εμβέλειας διδακτικές πρακτικές εξηγούν από παιδαγωγική σκοπιά το χαμηλό επίπεδο εκπαίδευσης που προσφέρει το μειονοτικό σχολείο. Ωστόσο, η βασική αιτία της ανεπαρκούς μειονοτικής εκπαίδευσης που αποτυπώνεται στα υψηλά ποσοστά μαθητικής διαρροής και σχολικής αποτυχίας θα πρέπει κυρίως να αναζητηθεί στην πολιτική αντιμετώπισης της μειονότητας, όπως σκιαγραφήθηκε παραπάνω (Ασκούνη 2006).

Από τις αρχές του 1990 η ελληνική πολιτεία εμφανίζεται να υιοθετεί μια νέα πολιτική σε σχέση με την κοινότητα, η οποία στοχεύει στην άρση των διακρίσεων στο κοινωνικό και οικονομικό γίγνεσθαι της μειονότητας. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται το Πρόγραμμα «Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων» (ΠΕΜ) που υλοποιείται πάνω από μια δεκαπενταετία στη Θράκη (1997 – 2015) και αναπτύχθηκε σε τρεις φάσεις, με μικρά ενδιάμεσα διαλείμματα, με αποδέκτες μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στους τρεις νομούς. Στόχος του ήταν η βελτίωση της ελληνομάθειας, ο περιορισμός της σχολικής αποτυχίας και της συνακόλουθης διαρροής από την υποχρεωτική εκπαίδευση, ενώ βασική του αρχή η αναγνώριση της ταυτότητας και ο σεβασμός των εθνοπολιτισμικών ιδιαιτεροτήτων της μειονότητας. Προς την κατεύθυνση αυτή αναπτύχθηκαν εκπαιδευτικά υλικά και οργανώθηκαν δράσεις επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, αλλά και διδακτικές παρεμβάσεις εντός και εκτός σχολείου, συχνά πλαισιωμένες από ευρύτερες δραστηριότητες εντός της κοινότητας. Τα αποτελέσματα υπήρξαν σημαντικά σε πολλά επίπεδα αλλά κυρίως αυτό της χαρτογράφησης με σαφήνεια των χαρακτηριστικών της μειονοτικής εκπαίδευσης και των δυνατοτήτων μιας εκπαιδευτικής παρέμβασης που λαμβάνει σοβαρά υπόψη της κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές παραμέτρους.

Η παρέμβαση που αφορούσε στα μαθηματικά αναπτύχθηκε στο πλαίσιο που περιγράφηκε παραπάνω και είχε ως στόχο τη διαμόρφωση ενός περιβάλλοντος μάθησης για τους μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, το οποίο ενθαρρύνει την εξωστρέφεια, την αυτονομία, τη συμμετοχική εργασία, την ποικιλότητα πρακτικών αλλά κυρίως την παροχή ευκαιριών σε κάθε μαθητή να κατασκευάσει τα δικά του μαθηματικά νοήματα. Για τους σκοπούς της δράσης συγκροτήθηκε σχετικό εκπαιδευτικό υλικό που προέρχεται από μετάφραση στην ελληνική γλώσσα σχετικού υλικού που αναπτύχθηκε στη Μ. Βρετανία. Τα μαθήματα μαθηματικών απευθύνθηκαν αρχικά σε μαθητές γυμνασίου, ήταν εθελοντικά και πραγματοποιούνταν στο σχολείο εκτός του κανονικού ωραρίου, από εκπαιδευτικούς του σχολείου που το επιθυμούσαν, αλλά και ωρομίσθιους που προσελάμβανε το πρόγραμμα όπου υπήρχε ανάγκη. Όλοι ακολουθούσαν σχετικό επιμορφωτικό πρόγραμμα. Το εύρος και η σύνθεση του πληθυσμού των μαθητών και των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην υλοποίηση της δράσης των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση εμφανίζονται στον πίνακα που ακολουθεί (η «πλήρης ανάπτυξη» αφορά τις περιόδους 2000-2004, 2005-2008 και 2010-2015 και η «μερική ανάπτυξη» αναφέρεται σε περιόδους παρατάσεων που δόθηκαν στα μεσοδιαστήματα).

Κλίμακα ανάπτυξης του προγράμματος	**Βαθμίδα**	**Μαθητές (εύρος)**	**Εκπαιδευτικοί (εύρος)**	**Σχολικές μονάδες**
Πλήρης ανάπτυξη	Γυμνάσιο	757 - 719	20 - 47	15 -29
	Λύκειο	309 - 392	10 -13	6 - 7
Μερική ανάπτυξη	Γυμνάσιο	37 - 547	1 - 8	1 - 6
	Λύκειο	43 - 279	2 - 8	1 - 5

Πίνακας 1. Ο εκπαιδευτικός χάρτης της παρέμβασης στα μαθηματικά

Μαθήματα μαθηματικών στην ίδια κατεύθυνση προσφέρονταν και στα κέντρα στήριξης του προγράμματος (ΚΕΣΠΕΜ – πρόκειται για κέντρα όπου πραγματοποιούνταν μια σειρά από δράσεις υποστηρικτικές της εκπαίδευσης των μαθητών, όπως, μαθήματα πληροφορικής, βοήθειας τν μειονοτικών μαθητών στα μαθήματα της επόμενης μέρας, κ.ά.). Στα μαθήματα αυτά συμμετείχαν 32 - 188 μειονοτικοί μαθητές γυμνασίου και 40 – 123 μαθητές λυκείου ανά έτος αρχής γινομένης από το 2003 και το 2011 αντιστοίχως. Στην τελευταία φάση του προγράμματος (2010-2015) μαθήματα μαθηματικών πραγματοποιήθηκαν, επίσης, τόσο στα ΚΕΣΠΕΜ όσο και σε μειονοτικά κυρίως Δημοτικά Σχολεία. Στα εν λόγω μαθήματα συμμετείχαν κάθε χρόνο 104 έως 215 μαθητές των Δ΄ έως Στ΄ τάξεων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Παρά το γεγονός ότι ο χαρακτήρας της δράσης για τα μαθηματικά ήταν παρεμβατικός, η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων γίνονταν από την αρχή με συστηματικό τρόπο, πρωτίστως για λόγους αξιολόγησης. Τα αποτελέσματα αυτής της αξιολόγησης γρήγορα κατέστησαν εμφανή την ανάγκη διαφοροποίησης της παρέμβασης σε συγκεκριμένους τομείς, συγκεκριμένες κατευθύνσεις ή/και συγκεκριμένες σχολικές μονάδες, εξαιτίας ιδιαίτερων χαρακτηριστικών που συνδέονταν, για παράδειγμα, με την πολυμορφία των μαθηματικών αναγκών, τη νόρμα λειτουργίας ή κάποια συγκρουσιακή συνθήκη. Αυτή η συνειδητοποίηση αλλά και το αυτονόητο ερευνητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει μια τέτοια παρέμβαση, οδήγησαν προοδευτικά σε μια καταρχήν μεθοδολογικά και σταδιακά θεωρητικά συγκροτημένη συλλογή δεδομένων, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Τύπος μελέτης	**Αντικείμενο**	**Θεωρητική πλαισίωση**	**Μέθοδος & εργαλεία / δεδομένα**
Ποσοτική	Βασικές μαθηματικές γνώσεις μαθητών δευτεροβάθμιας	Γνωστική	Επισκόπηση - Απαντήσεις μαθητών σε ερωτήσεις σχετικής δοκιμασίας
Μικτή	Αξιολόγηση της παρέμβασης στα μαθηματικά	Κοινωνιολογική	Περιγραφική - Ερωτηματολόγια, εκθέσεις εκπαιδευτικών και συντελεστών, συνεντεύξεις
	Τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή	Εθνομαθηματική	Εθνογραφική - Σημειώσεις πεδίου και συνεντεύξεις με μαθητές,

Ποιοτικές	των μαθητών		εκπαιδευτικούς, γονείς και τοπικούς επαγγελματίες
	Σχέση τυπικού και άτυπου πλαισίου σκέψης στα μαθηματικά	Πολιτισμικής ψυχολογίας	Εθνογραφική – Παρατήρηση τάξης, σημειώσεις πεδίου και συνεντεύξεις με εκπαιδευτικούς και μαθητές
	Επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών	Κοινοτήτων πρακτικής	Μελέτες περίπτωσης εκπαιδευτικών - συνεντεύξεις
	Αλληλεπίδραση μειονοτικής και πλειονοτικής μαθηματικής εκπαίδευσης	Θεωρίας δραστηριότητας	Μελέτες περίπτωσης – παρατήρηση τάξης και συνεντεύξεις με εκπαιδευτικούς επιλεγμένων σχολικών μονάδων και στελεχών εκπαίδευσης

Πίνακας 2. Μελέτες στο πλαίσιο της παρέμβασης για τα μαθηματικά

Στόχος της ομάδας εργασίας που ασχολήθηκε με τα μαθηματικά ήταν η προοδευτική χαρτογράφηση του κοινωνικού, πολιτισμικού και πολιτικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αναπτύχθηκε η παρέμβαση, με τη φιλοδοξία της ανίχνευσης τουλάχιστον κάποιων κεντρικών όψεων αυτών των συνιστωσών και της αλληλεπίδρασής τους.

Καθώς το πλαίσιο μέσα στο οποίο μελετάται η πρακτική της μαθηματικής εκπαίδευσης στη συγκεκριμένη συνθήκη (τάξη, σχολείο, κοινότητα, νομός, κ.α.) βρίσκεται σε συνεχή και δυναμική αλληλεπίδραση με τις πολλαπλές πτυχές του μικρο- και μακρο-πλαισίου, η παρουσίαση στη συνέχεια εστιάζει σε μια τέτοια πτυχή που στοχεύει στην ανάδειξη πολιτικών και κοινωνικών χαρακτηριστικών της. Συγκεκριμένα, επικεντρώνεται στην εμπειρία του γράφοντα, ενός δηλαδή από τους ερευνητές και επιστημονικού υπεύθυνου της δράσης.

ΟΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗ ΣΚΟΠΙΑ ΤΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΗ

Η προσέγγιση της ανάδειξης κοινωνικο-πολιτικών παραμέτρων της παρέμβασης, που αποτελεί αντικείμενο της παρούσας ενότητας, μέσω μιας προσωπικής εμπειρίας φιλοδοξεί να καταστήσει ορατό τον ερευνητή, μέσα από την αποκάλυψη ‘του εαυτού του’ σε μια κατεύθυνση αμφισβήτησης της ‘ουδετερότητας’ της ερευνητικής δραστηριότητας που είναι συμβατή με μια κοινωνικο-πολιτική ανάγνωσή της. Προς αυτήν την κατεύθυνση, η προσωπική ερευνητική εμπειρία παρουσιάζεται σε πρώτο πρόσωπο, μέσα από μια αναστοχαστική αφήγηση τριών χαρακτηριστικών όψεων ή φάσεών της, κρίσιμων για την κατασκευή της γνώσης που επιχειρείται μέσα από το σύνολο των μελετών του Πίνακα 2: της ‘προσωπικής ιστορίας’ εισόδου στο πεδίο της έρευνας, των ελέγχων, παρεμβάσεων και δυσλειτουργιών των δομών εξουσίας και των κρίσιμων τοπικών συγκρούσεων και ‘φωνών’. Σε κάθε μια από αυτές τις τρεις όψεις ή φάσεις, αξιοποιώντας την τεχνική των κρίσιμων συμβάντων (Goodell, 2006), επιλέγονται κάποια αντιπροσωπευτικά γεγονότα ή/και στιγμιότυπα, τα οποία συμβάλλουν καθοριστικά στη νοηματοδότηση των κοινωνικο-πολιτικών παραμέτρων της παρέμβασης και άρα στη διερεύνησή της από τον γράφοντα ερευνητή.

Η προσωπική ‘ιστορία’ εισόδου στο ερευνητικό πεδίο: Στα μέσα της δεκαετίας του 1990 βρέθηκα για πρώτη φορά στο ‘πεδίο μελέτης’, νέος ερευνητής της Διδακτικής των Μαθηματικών, με μεταπτυχιακές σπουδές και ερευνητική δράση συνολικής διάρκειας παραπάνω από μια δεκαετία στη Μ. Βρετανία. Η Θράκη δεν μου ήταν εντελώς άγνωστη, έτσι τουλάχιστον νόμιζα. Ούτε και τα συναισθήματα της ανημποριάς και του φόβου σε σχέση με τα σχολικά μαθηματικά μου ήταν άγνωστα, αντίθετα ήταν οικεία και στο δικό μου μικρόκοσμο.

Μεγάλωσα σε οικογένεια της εργατικής τάξης με προσφυγική καταγωγή, σε συνοικία της ανατολικής Θεσσαλονίκης. Η εικόνα του ‘γείτονα’ Τούρκου δεν είχε μόνο τα αρνητικά συμφραζόμενα του αιώνιου ‘εχθρού’ που έχτιζε το σχολείο, αλλά και το φιλικό αποτύπωμα που αναδυόταν στις νοσταλγικές αφηγήσεις των γιαγιάδων, γεμάτων από εύηχες τουρκικές λέξεις και εικόνες από μια «χαμένη αλλά όμορφη πατρίδα». Η διδασκαλία των μαθηματικών είχε το χαρακτήρα της ‘πρακτικής αριθμητικής’ στο Δημοτικό Σχολείο (η επίλυση σύνθετων προβλημάτων ήταν το απαύγασμα της μαθηματικής δραστηριότητας και η γρήγορη απάντηση σε υπολογισμούς το μέσο δημόσιας καταξίωσης) και της κυρίαρχα διαδικαστικής και αποσυνδεμένης από την καθημερινή νοηματοδότηση γνώσης στο εξατάξιο Γυμνάσιο (η μαθηματική ικανότητα ταυτιζόταν με την ανάπτυξη τεχνικών και μιας ευρείας τυπολογίας επίλυσης ασκήσεων). Η βασανιστική σχέση με τα μαθηματικά μέχρι την τρίτη τάξη του γυμνασίου παίρνει θετική τροπή, όταν στα μαθήματα στο συνοικιακό φροντιστήριο διαπιστώνω πως η εκμάθηση «μαθηματικών κόλπων» ήταν εφικτή. Η σχέση με το αντικείμενο εξελίσσεται στη συνέχεια σε πρόκληση που μια σειρά από συγκυρίες καθιστούν αντικείμενο σπουδών, αρχικά προπτυχιακών (στα μαθηματικά), στη συνέχεια, μετά από ένα διάλειμμα φοίτησης σε Παιδαγωγική Ακαδημία, μεταπτυχιακών (στη μαθηματική εκπαίδευση) και τέλος επαγγελματική και επιστημονική ενασχόληση.

Τα μέσα της δεκαετίας του 1980 με βρίσκουν στο Λονδίνο να εκπονώ τη διδακτορική μου διατριβή, συμμετέχοντας σε μια δραστήρια ομάδα ερευνητών και υποψηφίων διδακτόρων από διάφορες χώρες, θρησκείες και φυλές. Η δυναμική επόπτρια της διατριβής ενθαρρύνει την ενεργή εμπλοκή στο γίγνεσθαι του Πανεπιστημίου και εν γένει στην επιστημονική δραστηριότητα που αναπτυσσόταν σε σχέση με τη μαθηματική εκπαίδευση στο King’s College και το Institute of Education, ιδρύματα με πρωτοπορία τότε στην έρευνα σε ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης. Ανάμεσα στους τακτικούς ομιλητές οι M. Brown, K. Hart, V. Walkerdine, A. Bishop, C. Hoyles, καθώς και συμφοιτητές, όπως οι Lerman, Ernest, Evans, με σημαντικό ερευνητικό έργο αργότερα στην κατεύθυνση της ‘κοινωνικής στροφής’ στη μαθηματική εκπαίδευση. Οι εμπειρίες από τη συμμετοχή μου στα ανωτέρω και η έρευνα πεδίου στο πλαίσιο της διδακτορικής μου διατριβής σε πολυ-πολιτισμικά σχολεία του Λονδίνου πλαισιοθετούν, μαζί με την προσωπική ‘μαθηματική βιογραφία’, τη δική μου ‘κοινωνική στροφή’ στον τρόπο ανάγνωσης και κατανόησης των φαινομένων μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, η οποία καταλήγει στην πρώτη απόπειρα παρουσίασης σχετικής εργασίας σε διεθνές συνέδριο (αφιέρωμα «Κοινωνία και μαθηματικά», ICMI 5, 1988).

Στις αρχές του 1993, μετά από μια σχεδόν πενταετία εργασίας σε ερευνητικά προγράμματα και διδασκαλίας στο εξωτερικό, βρίσκομαι στο Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης. Ο πρώτος μου χρόνος στη «βαθειά» Θράκη είναι αποκαλυπτικός της άγνοιάς μου για το μειονοτικό στοιχείο. Η «άλλη» γλώσσα που εντοπίζω στο δρόμο, άγνωστη αλλά και ταυτόχρονα οικεία, η συνειδητοποίηση της εγγύτητας με τον ‘άλλο’, οι πρώτες συνεργασίες στο Τμήμα με αντικείμενο τη μειονοτική εκπαίδευση και οι γνωριμίες με μέλη της μειονότητας πλαισιώνουν την αρχική επαφή με μια πραγματικότητα που ελκύει το ερευνητικό μου ενδιαφέρον πρωτίστως από ακαδημαϊκή σκοπιά. Στην επόμενη πενταετία, μια σειρά αποσπασματικών εγχειρημάτων πρόσβασης στο μειονοτικό σχολείο αποδεικνύεται αποκαλυπτική για τις κρίσιμες παραμέτρους της μειονοτικής εκπαίδευσης. Πρόκειται για περιστάσεις με φορτισμένη νοηματοδότηση, όπως:

- μια συνάντηση συνεργασίας με μειονοτικούς εκπαιδευτικούς σε τοπικό καφενείο που, μετά από σταδιακή και αθόρυβη αποχώρηση των θαμώνων μελών της μειονότητας, καταλήγει σε σιωπηλή πρόσκληση αποχώρησης,
- μια επίσκεψη σε σχολικό σύμβουλο μειονοτικών σχολείων που μετατρέπεται σε μαρτυρία ιταμής συμπεριφοράς του προς μειονοτικό εκπαιδευτικό απολογούμενο για κάποια μικρο-παράλειψη,
- μια παραχώρηση άδειας παρακολούθησης μειονοτικής τάξης των μαθηματικών με τη σχεδόν υποχρεωτική συνοδεία του (πλειονοτικού) σχολικού συμβούλου ή η απαγόρευση διανομής δοκιμασίας

μαθηματικών για τους σκοπούς εκπόνησης πτυχιακής εργασίας, εξαιτίας της διατύπωσης των ερωτήσεων στα ελληνικά και στα τουρκικά,

- μια από τις πρώτες επιμορφωτικές συναντήσεις με εκπαιδευτικούς της μειονοτικής εκπαίδευσης για τα μαθηματικά στη Θράκη, όπου η προσδοκία δημιουργίας έντασης εξαιτίας της ενδεχόμενης ερμηνείας της ως 'παρέμβασης στο τουρκόφωνο μέρος του αναλυτικού προγράμματος' επιβάλλει την επιφυλακή των υπευθύνων ώστε να παρέμβουν πυροσβεστικά.

Πρόκειται για στιγμιότυπα και γεγονότα που καθιστούν για πρώτη φορά ορατή στον γράφοντα την προσπάθεια ελέγχου αλλά και διατήρησης δεδομένων της μειονοτικής εκπαίδευσης, τα οποία καθορίζονται από ρητούς ή άρρητους νόρμες, πρακτικές και λόγους που συγκροτούνται τοπικά αλλά και ευρύτερα. Σε αυτήν τη φάση προβληματισμού ξεκινά η συνεργασία μου με το ΠΕΜ, με βάσιμη πια την υποψία ότι τα μαθηματικά αποτελούν για το μειονοτικό μαθητή ένα (ακόμη) λόγο (discourse) πρόκλησης της κονωνικο-πολιτισμικής ταυτότητάς του, ενώ για την πλειονότητα μια πρακτική ελέγχου της ετερότητας (diversity) αλλά και πρόσβασης στην πλειονοτική πραγματικότητα/ατζέντα.

Έλεγχοι, παρεμβάσεις και δυσλειτουργίες των δομών εξουσίας: Στη μακρόχρονη ιστορία του προγράμματος εμφανίζονται συμβάντα ενδεικτικά της προσέγγισης των επίσημων δομών εξουσίας σε θέματα μειονοτικής εκπαίδευσης, τα οποία άμεσα ή έμμεσα σχηματοποιούν τον προσανατολισμό του και, αναπόφευκτα, το σχεδιασμό και τις πρακτικές της παρέμβασης στα μαθηματικά, καθώς και τη διερεύνησή της.

Από την αρχή της δεύτερης φάσης του προγράμματος και σε συνάντηση στο υπουργείο τέθηκε εμφατικά από την ηγεσία το ερώτημα της αποτελεσματικότητας του προγράμματος με πειστικά ποσοτικούς όρους: «πως ξέρουμε ότι οι μαθητές προοδεύουν;». Παρόλο που η ποσοτική καταγραφή 'απόκτησης γνώσεων' ήταν εκτός προσανατολισμού της παρέμβασης, σκεφτήκαμε πως ένα άμεσος τρόπος μιας πρώτης απάντησης θα μπορούσε να είναι τα αποτελέσματα μιας κλασικής δοκιμασίας στα μαθηματικά από μεγάλο δείγμα μειονοτικών μαθητών που συμμετείχαν στο πρόγραμμα. Έτσι, αναπτύχθηκε μια δοκιμασία (τεστ) με στόχο την διερεύνηση βασικών μαθηματικών γνώσεων αποφοίτων της δημοτικής εκπαίδευσης, η οποία μοιράστηκε για τρεις συνεχόμενες χρονιές σε ένα δείγμα που άγγιζε κάθε φορά τους 3.000 μειονοτικούς αλλά και πλειονοτικούς μαθητές της Β/θμιας εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα αυτής της τόσο μεγάλης κλίμακας μέτρησης των επιδόσεων του μαθητικού πληθυσμού της Θράκης για πρώτη φορά επιβεβαίωσαν προς μεγάλη ικανοποίηση όλων μας αυτό που υποψιαζόμασταν: οι μαθηματικές δυσκολίες των δύο πληθυσμών είναι ανάλογες, με τις αναμενόμενες ‘υστερήσεις’ στις επιδόσεις των μειονοτικών μαθητών να μπορούν πια να αποδοθούν με επαρκή αξιοπιστία αφενός σε ελλείμματα της ασαφούς και συχνά αντιφατικής εκπαιδευτικής πολιτικής αλλά και της διδακτικής πρακτικής στα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και αφετέρου στην αδυναμία του δημόσιου σχολείου να αξιοποιήσει με θετικό τρόπο το πολιτισμικό και εκπαιδευτικό κεφάλαιο των μειονοτικών μαθητών.

Το εκπαιδευτικό υλικό για τα μαθηματικά αποτέλεσε σημαντικό σημείο αναφοράς της παρέμβασης τόσο σε μαθησιακό όσο και σε διδακτικό επίπεδο. Μετά την αξιοποίηση και αξιολόγησή του για σχεδόν μια δεκαετία, θεωρήθηκε σημαντικό να προωθηθεί μαζί με τα αντίστοιχα υλικά άλλων μαθημάτων, σε όλα τα δημόσια σχολεία ως τράπεζα υποστηρικτικού υλικού. Για το σκοπό αυτό, και μετά από συμφωνία με την υπεύθυνη υπηρεσία του υπουργείου, προωθήθηκε στο αρμόδιο Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) για έγκριση. Συνάντησε όμως τις γενικότερες αγκυλώσεις της διοίκησης. Η πρώτη υποβολή του αιτήματος κατατέθηκε το 2007 και μέχρι σήμερα, παρά την απουσία επιστημονικών ή άλλων θεμελιωδών ενστάσεων, δεν έχει ολοκληρωθεί. Ο ‘μηχανισμός κωλυσιεργίας’ εντοπίζεται σε μάλλον ήπιες, αλλά επίμονες αντιρρήσεις/επιφυλάξεις διαφορετικών υπευθύνων σχετικά με εξωτερικά κυρίως χαρακτηριστικά του υλικού, που συχνά αντανακλούν πάγιες όσο και ξεπερασμένες αντιλήψεις για τα σχολικά μαθηματικά, τη διδασκαλία και τη μάθησή τους, σε συνδυασμό με μια απίστευτα γραφειοκρατική διαχείριση της διαδικασίας έγκρισης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αντιρρήσεων / επιφυλάξεων αποτελούν επισημάνσεις του τύπου «οι δραστηριότητες δεν καλύπτουν όλο το εύρος της τάδε έννοιας του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών της τάδε τάξης», «υπάρχουν δραστηριότητες που ‘ξεπερνούν’ το αναλυτικό πρόγραμμα», «εμφανίζονται εικόνες που ‘δεν αντανακλούν την ελληνική πραγματικότητα’», κ.ά. Οι τεκμηριωμένες απαντήσεις της ομάδας παρέμβασης και η αναθεώρηση του υλικού με βάση επισημάνσεις του ΙΕΠ δεν οδήγησαν σε κάποια τελική απόφαση. Σήμερα, μετά από οκτώ χρόνια, την αλλαγή τριών τουλάχιστον κυβερνήσεων, αντίστοιχων υπουργών και προέδρων του ΙΕΠ, το θέμα ακόμη εκκρεμεί, καθώς και ο τελευταίος στον οποίο ανατέθηκε, ένας «αποσπασμένος εκπαιδευτικός, επέστρεψε στην υπηρεσία του και δεν έχει ανατεθεί η αρμοδιότητα σε κάποιον άλλον» (πρόσφατη επικοινωνία).

Η φτωχή έως ανύπαρκτη βιβλιογραφία για θέματα που αφορούν στη διδασκαλία μαθημάτων του τουρκόφωνου μέρους του αναλυτικού προγράμματος του μειονοτικού σχολείου σε συνδυασμό με την παντελή απουσία βοηθημάτων για τα αντίστοιχα μαθήματα, ξάφνιασε και προβλημάτισε από την αρχή την ομάδα παρέμβασης στα μαθηματικά. Η εξαιρετικά δραστήρια εγχώρια ‘αγορά εκδόσεων βοηθητικών βιβλίων’ έμοιαζε να συμπράττει σιωπώντας εκκωφαντικά στην επικρατούσα απομονωτική αντιμετώπιση αυτής της πτυχής της μειονοτικής εκπαίδευσης. Σε μια προσπάθεια αντίδρασης, και παρά την επίγνωση των δυσκολιών του εγχειρήματος και της αξιοποίησής του στην πράξη, συγκροτήθηκε ομάδα εργασίας που περιλάμβανε επιστήμονες ειδικούς σε θέματα εκπαίδευσης από την Ελλάδα και την Τουρκία, καθώς και εκπαιδευτικούς της μειονότητας, η οποία ανέλαβε και μετέφερε στην τουρκική γλώσσα μεγάλος μέρος του εκπαιδευτικού υλικού για τα μαθηματικά, ακολουθώντας αυστηρά τα διεθνώς ισχύοντα περί μετάφρασης εκπαιδευτικού υλικού από μια γλώσσα και πραγματικότητα σε μια άλλη. Το προϊόν αυτής της εργασίας δεν δημοσιοποιήθηκε ποτέ, εξαιτίας της αβεβαιότητας για τα αντανακλαστικά της πλειονότητας και της μειονότητας που θα μπορούσε να ενεργοποιήσει και του βαθμού που θα ήταν δυνατό να αντιμετωπισθούν χωρίς να διακυβευθεί η εξέλιξη της παρέμβασης και ενδεχομένως όλου του προγράμματος.

Κρίσιμες τοπικές συγκρούσεις και 'φωνές': Η κοινωνικο-πολιτική οριοθέτηση της μαθηματικής εκπαίδευσης των μειονοτικών μαθητών γίνεται ορατή και σε μια σειρά από γεγονότα που συνδέονται με τους επίσημους και ανεπίσημους τρόπους δράσης ή αδράνειας τοπικών φορέων και παραγόντων της εκπαίδευσης, νοηματοδοτώντας την με συγκεκριμένους τρόπους, δηλαδή, με την άσκηση της εκπαιδευτικής πολιτικής σε μικρο-επίπεδο. Αντιπροσωπευτικά και συνοπτικά αναφέρονται:

- η θεαματική αποχώρηση εκπαιδευτικού της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η οποία δίδασκε πολλά χρόνια σε σχολεία με μειονοτικούς μαθητές, από εθελοντική επιμορφωτική συνάντηση με την απαξιωτική (δημόσια) δήλωση «ας μη μάθουν ποτέ» και η συνακόλουθη αποχώρησή της από το πρόγραμμα,
- η απειλητική στάση εκπαιδευτικού σε μικρό γυμνάσιο με μικτό πληθυσμό απέναντι στο ενδεχόμενο να πραγματοποιούνται μαθήματα μαθηματικών με τους μειονοτικούς μαθητές την ώρα των Θρησκευτικών, στάση που με την ανοχή των τοπικών στελεχών της εκπαίδευσης και το φόβο 'μπλεξίματος' των αναπληρωτών καθηγητών, κράτησε τη συγκεκριμένη σχολική μονάδα εκτός του προγράμματος για πολλά χρόνια, παρά την επιθυμία του διευθυντή,
- η καχύποπτη αντιμετώπιση της παρέμβασης που υιοθέτησαν τοπικοί παράγοντες, εντός ή εκτός της (μειονοτικής ή πλειονοτικής) εκπαίδευσης, ανάλογα με την ιδεολογική τους τοποθέτηση και την προσωπική τους επαγγελματική ατζέντα, με πρόσχημα την 'απουσία γραπτών εντολών' από την μονίμως (και ίσως σκοπίμως) ασαφή, διστακτική και βραδυφλεγή κεντρική εξουσία, η οποία επισήμως κάλυπτε το πρόγραμμα αλλά φρόντιζε να κρατά μια πιο 'σκληρή' γραμμή απέναντι σε αυτό, μέσω των ενδιάμεσων ελεγκτών του,

- οι εντυπωσιακά μεγάλες διαφορές στην αποτελεσματικότητα της παρέμβασης σε γειτονικές σχολικές μονάδες, κυρίως εξαιτίας του διαφορετικού τρόπου ενεργοποίησης των μαθητών και συχνά των γονιών τους, ως αποτέλεσμα των διαφορετικών νοηματοδοτήσεων του όρου «μειονότητα» και «μειονοτική εκπαίδευση» από το εκπαιδευτικό προσωπικό και τον/την διευθυντή/τρια του σχολείου.

Θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθεί, επιπλέον, η πρόσφατη διαπίστωση (μειονοτικού) σχολικού συμβούλου ότι για δεκαετίες οι μειονοτικοί μαθητές συγκεκριμένης περιφέρειας δεν διδάσκονταν ενότητες σημαντικές για τη μαθηματική εκπαίδευση του σύγχρονου πολίτη για λόγους που χάνονται στο χρόνο.

Τα ανωτέρω αποτυπώνουν με ενάργεια τους τρόπους που οι τοπικές και κεντρικές δομές εξουσίας διαμορφώνουν, αλληλεπιδρώντας, έστω και όχι συντονισμένα αλλά εκ των πραγμάτων, εκπαίδευση των μειονοτικών μαθητών στα μαθηματικά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Η αναστοχαστική αφήγηση που προηγήθηκε και συνιστά μια προσπάθεια ανάδειξης της δράσης των κοινωνικο-πολιτικών παραμέτρων της μαθηματικής εκπαίδευσης των παιδιών μιας αναπόφευκτα ευάλωτης μειονοτικής ομάδας, με διακριτές διαφορές ανάμεσα στον πολιτισμό του σπιτιού και του σχολείου, μέσα από την προσωπική κατασκευή του ερευνητή, σκιαγραφεί, έστω αδρομερώς, ένα σύνολο από νόρμες, πρακτικές και λόγους και ταυτότητες που συνιστούν ένα σύνθετο δίκτυο επίσημων και ανεπίσημων διαδρομών επιβολής εξουσίας σε τοπικό και κεντρικό επίπεδο, το οποίο καθορίζει την πρακτική της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η αναζήτηση του ποιος και πώς καθορίζει αυτήν την πρακτική και πώς αυτό επηρεάζει τους συμμετέχοντες σε αυτήν βρίσκεται στον πυρήνα της συζήτησης για την ισότητα, την κοινωνική δικαιοσύνη και τη δημοκρατία στη μαθηματική εκπαίδευση, γενικότερα στην εκπαίδευση και, κατ' επέκταση, στην κοινωνία.

Είναι φανερό ότι κάθε απόπειρα μελέτης ζητημάτων σχετικών με τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών γενικά αλλά πρωτίστως σε σύνθετα περιβάλλοντα, όπως αυτό της μειονοτικής εκπαίδευσης στη Θράκη, χρειάζεται να εστιάσει πρωτίστως σε μικρο- και μακρο- κοινωνικά και πολιτικά χαρακτηριστικά που συγκροτούνται στην αλληλεπίδραση της μειονοτικής με την πλειονοτική 'ατζέντα' τόσο σε επίπεδο πρακτικών όσο και έρευνας. Αυτό συνιστά ένα εξαιρετικά πολύπλοκο ερευνητικό εγχείρημα που προϋποθέτει τη συνεργασία ομάδων ερευνητών και εκπαιδευτικών της πράξης σε μια προσπάθεια χάραξης νέων ερευνητικών προσεγγίσεων και εναλλακτικών κατανοήσεων και ερμηνειών της πρακτικής της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abreu, G. (2005). Cultural identities in the multiethnic mathematical classroom. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the fourth CERME* (pp. 1131 - 1140). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Abreu, G., Bishop, A., & Presmeg, N. C. (2002). *Transitions between contexts of mathematical practices*. Cambridge: Kluwer Academic Publishers.

Alrø, H., Skovsmose, O. & Valero, P. (2005). Culture, diversity and conflict in landscapes of mathematics learning. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the fourth CERME* (pp. 1141 - 1152). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Ασκούνη, Ν. (2006). *Η εκπαίδευση της μειονότητας στη Θράκη: από το περιθώριο στην προοπτική της κοινωνικής ένταξης*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturaltion: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Boaler, J.,&Greeno, J. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematicalworlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171–200). Westport: Ablex.

Bruner, J. (1987). *Actual minds, possible worlds.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10, 113–164.

Cobb, P. Hodge L. L. (2002): A Relational Perspective on Issues of Cultural Diversity and Equity as They Play Out in the Mathematics Classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 4:2-3, 249-284.

Δραγώνα Θ., Φραγκουδάκη Ά. (επιμ.) (2008). *Πρόσθεση, όχι Αφαίρεση, Πολλαπλασιασμός, όχι Διαίρεση. Η μεταρρυθμιστική παρέμβαση στην εκπαίδευση της μειονότητας της Θράκης*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Elbers, E., & de Haan, M. (2004). Dialogic learning in the multi-ethnic classroom. Cultural resources and modes of collaboration. In J. van der Linden, & P. Renshaw (Eds.), *Dialogical perspectives on learning, teaching and instruction* (pp. 17-43). Dordrecht: Kluwer.

Gee, J. (1997). Thinking, learning, and reading: The situated sociocultural mind. In D. Kirshner& J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 235–260). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Goodell, J. E. (2006). Using critical incident reflections: a self-study as a mathematics teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 221-248.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37–68.

Hermans, H. (2001). The dialogical self: Toward a theory of personal and cultural positioning. *Culture and Psychology*, *7*(3), 323-366.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp.19-44). Westport: Ablex Publishing.

Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: The developing 'strong' social turn. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 171-188). Rotterdam: Sense.

Μαυρομμάτης, Γ. (2008). *Εθνικισμός και ιστορία της εκπαιδευτικής πολιτικής: Η εκπαίδευση των Θρακιωτών μουσουλμάνων μειονοτικών 1945-1975*. Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: Τμήμα Πολιτικής Επιστήμης και Ιστορίας, Πάντειο Πανεπιστήμιο.

Pearce, B.W. & Littlejohn, S.W. (1997). *Moral Conflict - When social worlds collide*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Popkewitz, T. (2002). Whose heaven and whose redemption? The alchemy of the mathematics curriculum to save (please check one or all of the following: (a) the economy, (b) democracy, (c) the nation, (d) human rights, (d) the welfare state, (e) the individual). In P. Valero & O. Skovsmose (Eds.), *Proceedings of the Third International MES Conference, Addendum* (pp. 1-26). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Schubauer-Leoni, M.L., & Perret-Clermont, A.-N. (1997). Social interactions and mathematics learning. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 265-283). Hove: Psychology Press.

Valero, P. (2004). Mathematics education research, diversity and inclusion. In M.J. Høines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 50-54). Bergen: Bergen University College.

Valero, P. (2007). A socio-political look at equity in the school organization of mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(3), 225-233.

Valero, P. (2008). Discourses of power in mathematics education research: Concepts and possibilities for action. *PNA* 2(2), 43-60.

Wertsch, J.V. (1991). *Voices of mind: A sociocultural approach to mediated action*. London: Havester Wheastsheaf.

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΥΛΙΚΟΥ, ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Χρόνης Κυνηγός
Ε.Ε.Τ., Φ.Π.Ψ., Φιλοσοφική Σχολή Ε.Κ.Π.Α. και ΕΑΙΤΥ-Διόφαντος
kynigos@ppp.uoa.gr

Η συνεισφορά αυτή στη συζήτηση του στρογγυλού τραπεζιού αφορά στη δημιουργικότητα του εκπαιδευτικού και μάλιστα μέσα από το ρόλο και την πρακτική του ως σχεδιαστή υλικού για τους μαθητές (Taura & Nagai, 2010). Ειδικότερα, θα γίνει συζήτηση για την κοινωνική δημιουργικότητα, αυτήν δηλαδή που αναπτύσσεται σε μια κοινότητα όπου ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη υλικού γίνεται συνεργατικά από εκπαιδευτικούς με ανομοιογενή ιστορία και εμπειρία (Fischer, 1999).

Στη ΔτΜ υπάρχει έντονο ενδιαφέρον, έρευνα και συζήτηση για τις μεθόδους ενδο-υπηρεσιακής υποστήριξης του εκπαιδευτικού μέσα από δράσεις επαγγελματικής εξέλιξης και της κατανόησης των τρόπων με τους οποίους επηρεάζεται η γνώση, οι πεποιθήσεις και η πρακτική του μέσα από αυτές. Υπάρχει επίσης συζήτηση για το ρόλο με τον οποίο συμμετέχει ο εκπαιδευτικός σε τέτοιες δράσεις, ως υποκείμενο κατάρτισης, ως εξελισσόμενος επαγγελματίας ή ως σχεδιαστής εκπαιδευτικού υλικού και δραστηριοτήτων (Guin et al, 2012). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού έτσι όπως του τον αποδίδουν οι ερευνητές και με βάση τον οποίο διερευνούν πτυχές της δράσης, την γνώσης και των πεποιθήσεών του είναι ανοικτό ζήτημα. Εχει εξελιχθεί σχετικά γρήγορα, από αυτόν του διαχειριστικού διεκπαιρεωτή του κειμένου των αναλυτικών προγραμμάτων στον αναστοχαζόμενο δρώντα με αενάως εξελισσόμενη προσωπική παιδαγωγική (Shon, 1983), επηρεαζόμενο από τους θεσμούς και τις κοινότητες που συμμετέχει (Chevallard, 2012).

Οι προσεγγίσεις αυτές έχουν θεωρητικοποιηθεί με διάφορους τρόπους από τους οποίους τρεις μπορούν να ιδωθούν ως κομβικοί για τη μελέτη της δημιουργικότητας του εκπαιδευτικού στο σχεδιασμό ψηφιακού υλικού: το μοντέλο διάκρισης της γνώσης του εκπαιδευτικού το οποίο χρησιμοποιείται και για τη διοργάνωση σεμιναρίων και δράσεων επαγγελματικής εξέλιξης με το ακρώνυμο T.P.a.C.K. (τεχνολογική, παιδαγωγική γνώση και γνώση αντικειμένου, Mishra & Koehler, 2006). Το μοντέλο των παραμέτρων που επηρεάζουν τη διαδικασία με την οποία ένας εκπαιδευτικός ενσωματώνει μια καινοτομία στην καθημερινή του πρακτική (Ruthven, 2014). Δυο μέχρι στιγμής διακριτά μοντέλα μελέτης της γνώσης και δράσης του εκπαιδευτικού μέσα απο τη διαδικασία αέναου σχεδιασμού και ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού, στην προκειμένη περίπτωση ψηφικού. Στο ένα έχει δοθεί η ονομασία 'Documentational Genesis' (Guin et al, 2012) και στην αρχή αναπτυχθηκε με μια εξατομικευμένη αντίληψη για τον εκπαιδευτικό, πως δρα δηλαδή το άτομο σε κοινότητες πρακτικής. Στο άλλο αντίθετα η αρχική προσέγγιση αφορούσε στην αλληλεπίδραση μεταξύ σχεδιαστών και το πως ένα δόμημα που αναπτύσσεται για τους μαθητές μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο γύρω από το οποίο άτομα με διαφορετικές ιστορίες αντιλαμβάνονται τον άλλο αρκετά ώστε να συνεργαστούν για την ανάπτυξη του προκείμενου δομηματος (Boundary Crossing, Akkerman and Bakker, 2011, Kynigos, 2007).

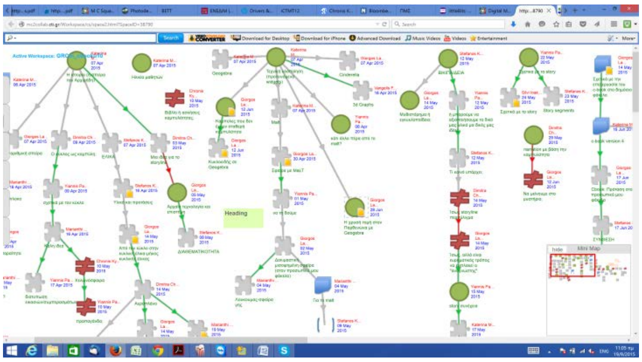
Η δημιουργικότητα του εκπαιδευτικού και μάλιστα στο σχεδιασμό ψηφιακών δομημάτων και υλικού είναι ένα αντικείμενο που πολύ λίγο έχει τύχει της προσοχής των ερευνητών μέχρι στιγμής. Γενικά είναι μια δυσδιάκριτη έννοια ορισμένη σχετικά αδρά ως η διαδικασία ή η ικανότητα και ευχέρεια παραγωγής πρωτότυπων, χρήσιμων ιδεών και δομημάτων. Η υπόθεση εδώ είναι οτι η διαδικασία σχεδιασμού και ανάπτυξης ψηφιακών δομημάτων μπορεί να αποτελέσει πεδίο για την ενθάρρυνση της κοινωνικής δημιουργικότητας των συμμετεχόντων (Shriki, 2010, Sullivan, 2011). Η προσέγγιση του εκπαιδευτικού ως δημιουργικού σχεδιαστή σε επαγγελματικές συλλογικότητες προϋποθέτει την θεώρηση της εκπαίδευσης ως μια δημιουργική παραγωγική διαδικασία υποδομών και πηγών προς αξιοποίηση στη διδακτική πρακτική (Adler, 2000, Laurillard, 2012). Στο μικροεπίπεδο, η διδακτική διέπεται από μια ισχυρή δόση της επιστήμης του σχεδιασμού και οι εκπαιδευτικοί επινοούν δημιουργικούς και και τεκμηριωμένους τρόπους εξέλιξης της πρακτικής τους σε σημαντικό βαθμό μέσα από αυτή τη διαδικασία (Laurillard, 2012).

Τα τελευταία δυο χρόνια, με μια ομάδα ερευνητών συμμετέχουμε και μελετάμε την κοινωνική δημιουργικότητα ομάδων σχεδιαστών που αναπτύσσουν δυναμικά ψηφιακά βιβλία με ρητό στόχο την υποστήριξη της μαθηματικής δημιουργικότητας στους μαθητές (Kynigos, 2015). Έχουμε δημιουργήσει και μελετάμε τις ομάδες αυτές ως κοινωνικο-τεχνολογικά περιβάλλοντα, όπως τα έχει θεωρήσει ο Fischer (2007). Ρωτάμε: πως εγείρεται η κοινωνική δημιουργιότητα σε ένα κοινωνικο-τεχνολογικό περιβάλλον σχεδιασμού ψηφιακού υλικού για τη ΔτΜ (Sawyer & deZutter, 2009); Τι είδους δημιουργικές ιδέες και διαδικασίες αναδύονται από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σχεδιαστών καθώς αλλάζουν και εξελίσσουν τα ψηφιακά βιβλία που μαστορεύουν για τους μαθητές τους;

Θεωρούμε την κοινωνική δημιουργικότητα σαν μια διαδικασία που παράγει μεγάλη πυκνότητα πρωτότυπων και χρήσιμων ιδεών και δομημάτων και την μελετάμε επισημαίνοντας τις ιδέες αυτές, επιλέγοντας τις πιο πρωτόπτυπες και παρατηρώντας τη χρονική εξέλιξή τους. Επισημαίνουμε επίσης σημαντικά 'επεισόδια' κατά τη σχεδιαστική διαδικασία, δηλαδή καταστάσεις όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών παράγει ιδιαίτερα πρωτότυπες ιδέες. Η πυκνότητα πρωτότυπων ιδεών, η εξέλιξη επιλογής από αυτές και η ανάλυση διαλόγου και αλληλεπιδράσεων επιλεγμένων επεισοδίων είναι οι βασικές παράμετροι που χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε την εν λόγω δημιουργικότητα (Daskolia et al, 2015).

Κατα τη διαδικασία μελέτης, μας δημιουργούνται νέα ερωτήματα και μάλιστα με μεγάλη πυκνότητα. Πώς αναπαριστούν τη μαθηματική δημιουργικότητα οι σχεδιαστές (Lev-Zamir & Leikin, 2011); ποιές μπορεί αν είναι οι πτυχές της δημιουργικότητας στην επινόηση ψηφιακού υλικού; πώς ενισχύεται η κοινωνική δημιουργικότητα στους μαθητές ως ενιαία πτυχή της μαθηματικής τους ικανότητας και στάσης απέναντι στα μαθηματικά και το μαθηματικό συλλογισμό; πως μπορεί να εισχυθεί η δημιουργικότητα μέσα από τη χρήση των ψηφιακών βιβλίων; μέσα από τη δυνατότητα μαστορέματος που ενέχουν; τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού αναπαραστάσεων; τη δυνατότητα μαθηματικοποίησης καταστάσεων ή μοντέλων; Μας δημιουργούνται βέβαια και ερωτήματα που αφορούν στη διαδικασία σχεδιασμού. Η διαφορετικότητα στην ιστορία, τις πεποιθήσεις, τις γνώσεις και την πρακτική πώς μπορεί αν ενισχύσει τη δημιουργικότητα στο σχεδιαστή - εκπαιδευτικό; Η αλλαγή στάσης του από αυθεντία αντικειμένου σε συ-σχεδιαστή και άρα συζητητή προσωπικών παιδαγωγικών; η αξιοποίηση ειδικών τεχνολογικών γνώσεων και τεχνικών;

Στο σχήμα, φαίνεται ένα στιγμιότυπο από ένα εργαλείο επικοινωνίας για το συλλογικό σχεδιασμό που χρησιμοποιούν τα μέλη των κοινοτήτων μας στην ασύγχρονη συνεργασία τους. Είναι σχεδιασμένο για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας αλλά και την παραγωγή δεδομένων που βοηθούν τον ερευνητή. Περισσότερα δια ζώσης στο στρογγυλό τραπέζι.



Εικ.2 Αποτύπωση ασύγχρονου συνεργαστικού σχεδιασμού ψηφιακού βιβλίου

ΑΝΑΦΟΡΑ

Η ερευνα που οδήγησε σε αυτά τα αποτελέσματα χρηματοδοτήθηκε απο την Ευρωπαικη Ενωση FP7, στο πλαίσιο της σύμβασης GA 610467: έργο “M C Squared”, http://mc2-project.eu. Το παρόν αρθρο εκφράζει αποκλειστικά τις

απόψεις των συγγραφέων και η Ε.Ε. δεν φέρει ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση γίνει σε πληροφορίες που περιλαμβάνονται σε αυτο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224.

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132-169.

Daskolia, M. (coord) et al. (2015) Operational definitions and criteria for measuring social creativity in the design of digital educational resources for CMT, 'Mathematical Creativity Squared' (2013-16), Technological Development and Demonstration (FP7), ICT-2013.8.1 "Technologies and scientific foundations in the field of creativity" (Project No. 610467).

Fischer, G. (1999). Symmetry of ignorance, social creativity, and meta-design. In *Proceedings of the 3rd conference on Creativity & cognition* (pp. 116-123). New York: ACM.

Fischer, G. (2007). Designing Socio-Technical Environments in Support of Meta-Design and Social Creativity. In C. A. Chinn, G. Erkens, & S. Puntambekar (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference on Computer Supported Collaborative Learning (CSCL '2007)*, (pp. 2-11). I,S.L.S,, Rutgers University. Retrieved May 23, 2015, from http://l3d.cs.colorado.edu/~gerhard/papers/CSCL-2007.pdf.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.) (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. New York: Springer.

Kynigos, C. (2007). Half-baked Logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education*, *6*(2), 335–358.

Kynigos, C. (2015), Designing Constructionist E-Books: New Mediations for Creative Mathematical Thinking?, Constructivist Foundations 10(3): 305–313

Laurillard, D. (2012). *Teaching as a Design Science: Building Pedagogical Patterns for Learning and Technology*. London: Routledge.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, *13*(1), 17-32.

Mishra, P. & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054

Ruthven, K. (2014). Frameworks for analysing the expertise that underpins successful integration of digital technologies into everyday teaching practice. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.) *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Springer, Berlin) pp. 373-393.

Sawyer, R. K., & DeZutter, S. (2009). Distributed creativity: How collective creations emerge from collaboration. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, *3*(2), 81-92.

Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*, New York: Basic Books.

Shneiderman, B. (2000). Creating creativity: User interfaces for supporting innovation. *ACM Transactions on Computer–Human Interaction*, *7*(1), 114–138.

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179.

Sullivan, F. R. (2011). Serious and Playful Inquiry: Epistemological Aspects of Collaborative Creativity. *Educational Technology & Society*, *14*(1), 55-65.

Taura, T., Nagai, Y. (Eds.), 2010. *Design Creativity*. London: Springer.

ΣΧΕΣΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΙΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μαρία Κάττου
Πανεπιστήμιο Κύπρου
kattou.maria@ucy.ac.cy/ kattoum@hotmail.com

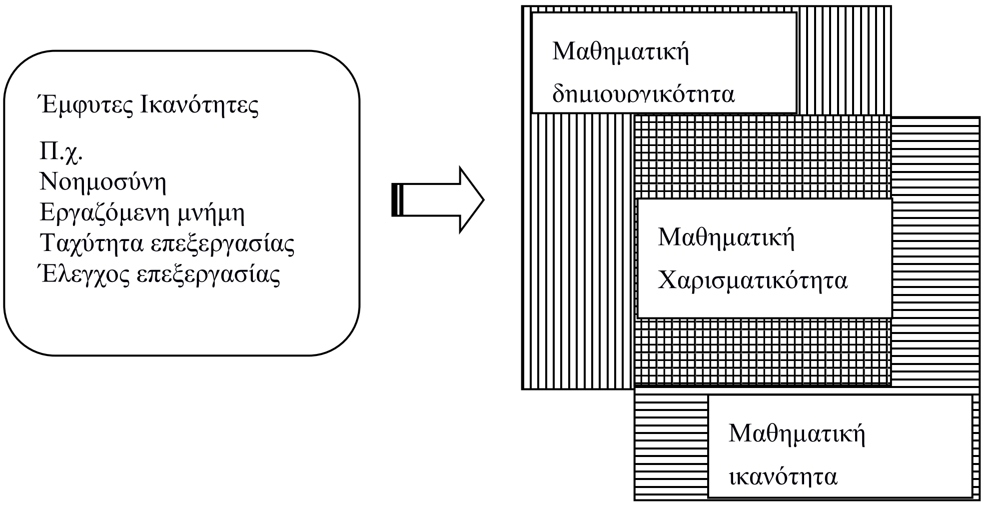
Οι όροι «χαρισματικότητα» και «δημιουργικότητα» χρησιμοποιούνταν μέχρι πρόσφατα συγκεχυμένα, αφήνοντας πολλές φορές να νοηθεί ότι οι δύο λέξεις είναι συνώνυμες. Τα τελευταία χρόνια η ερευνητική κοινότητα προσπαθεί να διευκρινίσει τους ορισμούς των δύο εννοιών και να διερευνήσει τη μεταξύ τους σχέση (Leikin & Lev, 2007). Δύο είναι τα ερωτήματα που προκύπτουν:

- Τι ονομάζουμε δημιουργικότητα και τι χαρισματικότητα στα μαθηματικά;
- Ποια είναι η σχέση μεταξύ δημιουργικότητας και χαρισματικότητας στα μαθηματικά;

Όσον αφορά στο πρώτο ερώτημα, με τον όρο μαθηματική χαρισματικότητα αναφερόμαστε στο σύνολο των μαθηματικών ικανοτήτων που προδιαθέτουν τη δυνατότητα επιτυχούς και εξαιρετικής απόδοσης κατά τη μαθηματική δραστηριότητα (Krutetskii, 1976). Ο όρος μαθηματική δημιουργικότητα αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να εντοπίζει σχέσεις μεταξύ ασύνδετων ιδεών και να χειρίζεται πληροφορίες ευέλικτα (Ervynck, 1991).

Οι επικρατούσες θεωρίες για τη σχέση χαρισματικότητας και δημιουργικότητας είναι δύο. Από τη μια, η δημιουργικότητα θεωρείται ως αναπόσπαστο χαρακτηριστικό της χαρισματικότητας. Για παράδειγμα, το μοντέλο που προτάθηκε το 1978 από το Renzulli ορίζει τη χαρισματικότητα ως το σημείο τομής μεταξύ τριών παραμέτρων: της γνωστικής ικανότητας, της δημιουργικότητας και της επιμονής για την επίτευξη του στόχου. Από την άλλη, η χαρισματικότητα θεωρείται ως προαπαιτούμενο για τη δημιουργικό-τητα. Ενδεικτικά, ο Usiskin (2000) πρότεινε ένα ιεραρχικό μοντέλο με οκτώ επίπεδα. Σε αυτό το μοντέλο, τα χαρισματικά άτομα βρίσκονται στο πέμπτο επίπεδο, ενώ τα δημιουργικά άτομα βρίσκονται μεταξύ του έκτου και του έβδομου επιπέδου. Με άλλα λόγια, τα δημιουργικά άτομα είναι οπωσδήποτε και χαρισματικά, αλλά το αντίθετο δεν ισχύει (Leikin, 2008; Usiskin, 2000).

Στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος «Identifying and Nurturing Mathematically Gifted Elementary School Students in Cyprus», είχαμε την ευκαιρία να αναπτύξουμε και να επιβεβαιώσουμε εμπειρικά, θεωρητικά πλαίσια και μεθοδολογίες για την αναγνώριση χαρισματικών μαθητών στα μαθηματικά. Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο (Διάγραμμα 1), η μαθηματική χαρισματικότητα εκδηλώνεται από μαθητές που συνδυάζουν υψηλές μαθηματικές ικανότητες και υψηλή μαθηματική δημιουργικότητα. Με άλλα λόγια επιβεβαιώνεται ότι όλοι οι χαρισματικοί μαθητές είναι και δημιουργικοί, χωρίς όμως να ισχύει απαραίτητα και το αντίθετο. Ταυτόχρονα, έμφυτες ικανότητες ενός ατόμου, όπως η ευφυΐα, η μνήμη, η ταχύτητα και ο έλεγχος της επεξεργασίας, μπορούν να μετατραπούν σε «μαθηματικό ταλέντο» κάτω από κατάλληλες περιστάσεις (Pitta-Pantazi κ.α., 2011).



Διάγραμμα1: Σχέση χαρισματικότητας και δημιουργικότητας στα μαθηματικά

Στηριζόμενοι στην παραδοχή ότι η δημιουργικότητα αποτελεί χαρακτηριστικό της χαρισματικότητας, δημιουργείται το ερώτημα:

- Πώς διαφέρει η δημιουργικότητα των χαρισματικών και των μη-χαρισματικών μαθητών;

Οι Leikin και Lev (2007) παρατήρησαν ότι η δημιουργικότητα των χαρισματικών μαθητών ήταν υψηλότερη από τη δημιουργικότητα των μη-χαρισματικών μαθητών. Οι Klavir και Gorodetsky (2009) σύγκριναν τις ικανότητες ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας (που σύμφωνα με τον Torrance ορίζουν τη δημιουργικότητα) ανάμεσα σε χαρισματικούς και μη-χαρισματικούς μαθητές στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας επιβεβαίωσαν την ύπαρξη σημαντικής διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων μαθητών, όσον αφορά στην ετοιμότητά τους να εμπλακούν στη δημιουργική διαδικασία, στην ικανότητα να σκέφτονται εναλλακτικές μαθηματικές ιδέες σχετικές με το ερέθισμα, στον βαθμό επεξεργασίας των ιδεών καθώς και στην πρωτοτυπία των λύσεών τους (Klavir & Gorodetsky, 2009).

Μέσα από τη δική μας εμπειρία με χαρισματικούς και μη-χαρισματικούς μαθητές, μας δόθηκε η ευκαιρία να συγκρίνουμε τη δημιουργική ικανότητα των δύο ομάδων μαθητών (Kattou κ.α., 2011). Τα αποτελέσματα της σύγκρισης αποκάλυψαν ότι η πρώτη ομάδα μαθητών ήταν προφανώς πιο ικανή από τη δεύτερη. Ειδικότερα, οι χαρισματικοί μαθητές πρότειναν περισσότερες ορθές απαντήσεις από τους συνομηλίκους τους, στις οποίες είχαν αξιοποιήσει πιο σύνθετες μαθηματικές ιδέες. Από τις απαντήσεις των χαρισματικών μαθητών είχε διαφανεί ότι ήταν σε θέση να επαναπροσδιορίσουν μια κατάσταση, να κάνουν εναλλαγές μαθηματικών ιδεών και αναπαραστάσεων, καταλήγοντας σε πιο πρωτότυπες απαντήσεις. Εν αντιθέσει, οι μη-χαρισματικοί μαθητές επικεντρώθηκαν μόνο σε προφανείς ιδιότητες της προβληματικής κατάστασης και αδυνατούσαν να αντιληφθούν τη βαθύτερη δομή των μαθηματικών εννοιών (Kattou κ.α., 2011).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). On the comparison between mathematically gifted and non-gifted students' creative ability. *Proceedings of the 19th Biennial World Conference of the World Conference of the WCGTC*. Prague, Czech Republic.

Klavir, R., & Gorodetsky, M. (2009). On Excellence and Creativity: A study of Gifted and Expert Students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 221-242). Rotterdam: Sense Publishers.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Seoul, Korea, 8-13 July 2007 (pp. 161-168). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kontoyianni, K., & Kattou, M. (2011). A model of mathematical giftedness: Integrating natural, creative and mathematical abilities. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 39 – 54.

Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan*, *60*(3), 180-184.

Usiskin, Z. (2000). The development into the mathematically talented. *Journal of Secondary Gifted Education*, *11*, 152–162.

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΜΕΣΩΝ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στέφανος Κεΐσογλου
Σχολικός σύμβουλος Μαθηματικών
keisoglu@otenet.gr

«…creating engagement is not about those fancy, expensive graphics but rather about ideas» Prensky, M. (2005).

Ο στόχος της ολιγόλεπτης εισήγησης μου είναι η παρουσίαση μιας θεωρητικά τεκμηριωμένης σύνθεσης ιδεών γύρω από θέματα που σχετίζονται με τον σχεδιασμό από τον διδάσκοντα δραστηριοτήτων με στόχο την ανάπτυξη της Μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών.

- Πως ορίζεται η δημιουργικότητα ενός ατόμου και πως η Μαθηματική δημιουργικότητα;

Από το πλήθος των ορισμών που κατά διαστήματα έχουν δοθεί στη δημιουργικότητας επιλέγουμε αυτόν που έχουν με σαφή και απλό τρόπο διατυπώσει οι Sternberg & Lubart (2000). «Δημιουργικότητα είναι η ικανότητα παραγωγής πρωτότυπου, αυθεντικού υλικού το οποίο έχει κάποια χρησιμότητα». Σχετικά με τη Μαθηματική δημιουργικότητα το μεγαλύτερο μέρος των ερευνητών την συνδέουν, αν όχι ταυτίζουν, με την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων (problem posing – problem solving). (Chamberlin& Moon 2005, Sriraman, 2004). Η επινόηση πρωτότυπων, αναπάντεχων και κομψών λύσεων σε ένα πρόβλημα είναι χαρακτηριστικά της Μαθηματικής δημιουργικότητας.

- Ποιες δραστηριότητες είναι κατάλληλες για την ανάπτυξη της Μαθηματικής δημιουργικότητας στους μαθητές;

Ο Haylock (1997) προτείνει 3 διαφορετικούς τύπους δραστηριοτήτων με τις οποίες ενισχύεται η αποκλίνουσα και δημιουργική σκέψη των μαθητών. Η λύση προβλημάτων (problem solving) μη αλγοριθμικού χαρακτήρα στα οποία οι μαθητές δεν διαθέτουν μεθοδολογία λύσης. Η διατύπωση προβλήματος (problem-posing) η οποία έχει ως αφετηρία μία κατάσταση και ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν κατάλληλα Μαθηματικά ερωτήματα. Τέλος θέματα που απαιτούν αναδιατύπωση, αναδόμηση ενός προβλήματος ή μία κατάσταση προβλήματος. Τα προβλήματα με τα οποία θα εμπλακούν οι μαθητές θα πρέπει να είναι ανοικτά, δηλαδή τα δεδομένα τους δεν δημιουργούν ένα κλειστό περιβάλλον μέσα στο οποίο αναζητείται η μοναδική λύση και επομένως επιδέχονται πολλαπλές λύσεις.

- Ποιος είναι ο ρόλος των ψηφιακών μέσων στην ανάπτυξη της Μαθηματικής δημιουργικότητας;

Τα ψηφιακά μέσα:

Ως εργαλεία έρευνας, αναζήτησης και πειραματισμού δίνουν ευκαιρίες δημιουργικών δραστηριοτήτων. Ως εκφραστικά εργαλεία δίνουν τη δυνατότητα προσωπικής εμπλοκής και δημιουργίας (μαστορέματος) στον μαθητή. Ως εργαλεία επικοινωνίας αναπτύσσουν την κοινωνική πτυχή της δημιουργικότητας μέσα από συμμετοχή σε μορφές συλλογικότητας. (Κυνηγός 2011)

- Μπορούν να υλοποιηθούν δραστηριότητες που αναπτύσσουν την Μαθηματική δημιουργικότητα μέσα στα πλαίσια των σχολικών υποχρεώσεων;

Τα προβλήματα τα οποία επιδέχονται επέκταση παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς δημιουργούν νέα ερωτήματα προς διερεύνηση. (Sheffield 2009). Η εννοιολογική επέκταση μιας ιδέας αποτελεί μία δράση δημιουργικότητας καθώς οδηγεί σε δημιουργία νέων ιδεών.(Ward & all 1999)

Παράδειγμα:

α) Με τα εργαλεία που διαθέτει ένα λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας π.χ το Geogebra, να υπολογίσετε με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους την $\sqrt{32}$. β) Να εξετάσετε ποιοι από τους παραπάνω τρόπους μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[4]{32}$ κ.ο.κ.
γ) Να κατασκευάσετε ένα αρχείο λογισμικού με το οποίο θα μπορείτε να υπολογίσετε την οποιασδήποτε τάξης ρίζα, οποιουδήποτε θετικού αριθμού.
Οι Stoyanova και Ellerton (1997) προτείνουν μία ιδιαίτερα λειτουργική ταξινόμηση στις δραστηριότητες διατύπωσης προβλήματος (problem-posing). Συγκεκριμένα προτείνουν τη διάκριση ελεύθερων, ημιδομημένων και δομημένων καταστάσεων(free, semi-structured, structured). Με βάση την ταξινόμηση αυτή θα μπορούσε να διατυπωθεί σε 3 διαφορετικές μορφές ένα πρόβλημα σχετικό με τετράπλευρα.

Παράδειγμα:

α) Να διατυπώσετε όσο το δυνατόν περισσότερα προβλήματα που να αφορούν σε ένα τετράπλευρο. (ελεύθερο)
β) Σε μία τετράπλευρη πλατεία θέλουμε να τοποθετήσουμε έναν φανοστάτη. Να διατυπώσετε ένα ή περισσότερα σχετικά προβλήματα. (ημιδομημένο)
γ) Να εξετάσετε σε ποιο σημείο θα πρέπει να τοποθετηθεί ένας φανοστάτης σε μία τετράπλευρη πλατεία ώστε να φωτίζονται όσο το δυνατόν ισοδύναμα οι 4 κορυφές του. (δομημένο)
Ολοκληρώνοντας θα πρέπει να τονιστεί ότι η φαντασία και η επινοητικότητα του διδάσκοντα αποτελούν θεμελιώδη προϋπόθεση για έναν αντισυμβατικό σχεδιασμό με στόχο την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών.

Το κινητό τηλέφωνο ενός μαθητή, η wi fi σύνδεση με έναν υπολογιστή και ένα Μαθηματικό λογισμικό αρκούν άραγε για να υπολογιστεί το πλήθος των συγκεντρωμένων σε μία πλατεία;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17(1),* 37–47.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM, 27(2),* 68–74.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity—Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87–100). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The International Journal on Mathematics Education [ZDM], 41*, 13-27.

Sternberg. R, Lubart. T (2000): The Concept of Creativity: Prospects and Paradigms. In R. Sternberg (eds.), *Handbook of Intelligence* 611-630. Cambridge University Press.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
http://www.merga.net.au/documents/RP_Stoyanova_Ellerton_1996.pdf

Ward B. T, Smith M. S, Finke A. R (1999) Creative Cognition in Robert Sternberg ed. *Handbook of Creativity* Cambridge University Press

Κυνηγός, Χρόνης. 2011: Το μάθημα της διερεύνησης : Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών: Από την έρευνα στη σχολική τάξη. Αθήνα : Εκδόσεις Τόπος & Χρόνης Κυνηγός

.

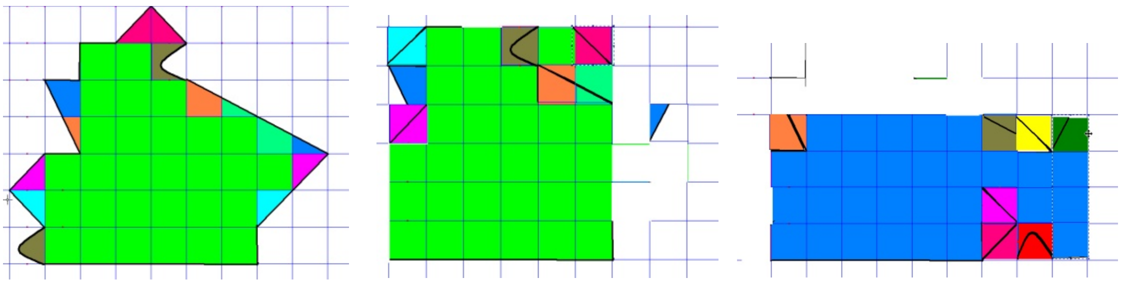
MINI-C: ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΕ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΕΣ ΤΑΞΕΙΣ

Ιωάννης Παπαδόπουλος
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α. Π. Θ.
ypapadop@eled.auth.gr

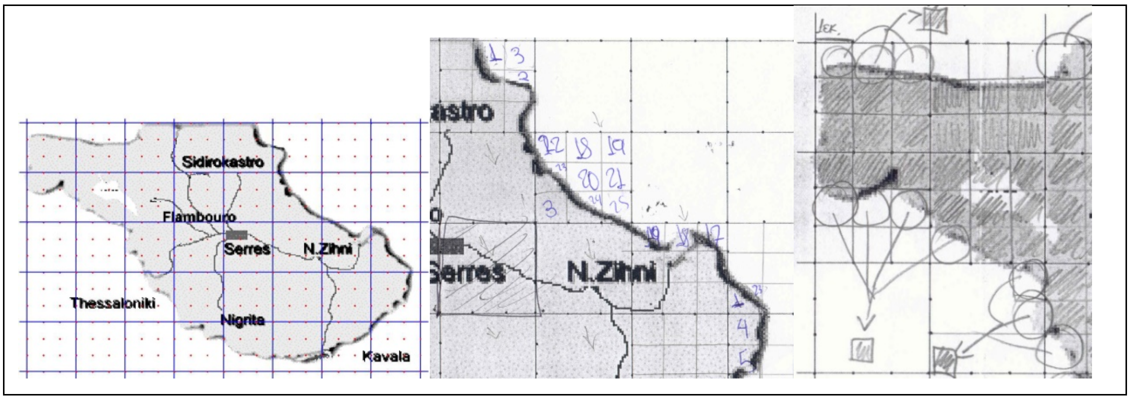
Η mini-c δημιουργικότητα αναφέρεται σε ιδέες που είναι πρωτότυπες σε επίπεδο ατομικής σκέψης ακόμη και αν υπάρχουν και άλλοι που τις έχουν ήδη σκεφτεί (Beghetto & Kaufman, 2009). Σχετίζεται ιδιαίτερα με τη δημιουργικότητα των μικρών μαθητών στο σχολικό περιβάλλον, όπως πχ μπορεί να συμβεί στην προσπάθεια μαθητών να λύσουν κάποια προβλήματα κάνοντας χρήση δικών τους μεθόδων αντί κάποιου τύπου που έχουν διδαχθεί.

Το αρχικό ερώτημα είναι **κατά πόσο η <u>συλλογική</u> «ανακάλυψη» από τους μαθητές ενός μαθηματικού αποτελέσματος που είναι ήδη γνωστό αποτελεί δημιουργική μαθηματική σκέψη;** Η παραδοσιακή απάντηση θα ήταν «Όχι». Αν αυτή η ανακάλυψη δεν είναι νέα για όλους τους άλλους τότε σύμφωνα με την παραδοσιακή προσέγγιση για τη δημιουργικότητα (Big-c) δεν μπορεί να θεωρηθεί δημιουργική. Επίσης, με την οπτική του little-c που εστιάζει στη δημιουργικότητα που εμπλέκεται στις καθημερινές μας δραστηριότητες και εμπειρίες, η δημιουργική αίσθηση που βιώνει ο μαθητής -καθώς έρχεται σε επαφή με μια νέα μαθηματική έννοια, αναπτύσσει την κατανόησή της και κατασκευάζει την προσωπική μαθηματική γνώση- συνήθως παραβλέπεται. Γι αυτό το λόγο προτείνεται η νέα αυτή κατηγορία του mini-c, ειδικά όταν προσπαθούμε να καταπιαστούμε με τη δημιουργικότητα μαθητών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μια δημιουργικότητα που θεωρείται εγγενής στη μαθησιακή διαδικασία (Kaufman & Beghetto, 2009). Με αυτήν την κατηγορία στο μοντέλο που μελετά τη δημιουργικότητα, δεν κινδυνεύουμε να χάσουμε το δημιουργικό δυναμικό που εμφωλεύει στους μαθητές, καθώς ουσιαστικά παρακινούμαστε να την εντοπίζουμε μέσα από τις ερμηνείες των μαθητών όταν καταπιάνονται με μια νέα μαθηματική γνώση και οι οποίες (ερμηνείες) έχουν μοναδικό νόημα για τους ίδιους τους μαθητές προσωπικά. Αυτό βέβαια σημαίνει δασκάλους προετοιμασμένους να αναγνωρίζουν, να καλλιεργούν, και να αποσπούν αυτό το μαθηματικό δημιουργικό δυναμικό των μαθητών. Αυτό περιλαμβάνει μια ευρεία γκάμα επιλογών, από την εύρεση κατάλληλων προβλημάτων που θα μπορούσαν να διεγείρουν τη δημιουργικότητα στους μαθητές, μέχρι την ενθάρρυνσή τους να πάρουν το ρίσκο και να επικοινωνήσουν στην ομάδα τους ή στην τάξη τους αυτή τη «μοναδική» μαθηματική τους κατανόηση ή ερμηνεία. Βασική αρχή σε μια τέτοια επιλογή θα πρέπει να είναι η ισορροπία μεταξύ της αυτονομίας του μαθητή (τόσο σε επίπεδο σκέψης όσο και σε επίπεδο ελευθερίας επιλογών που θα αφήνει το ίδιο το πρόβλημα) και της δομής (δίνεις στους μαθητές ένα σημείο εκκίνησης ή τα όρια μέσα στα οποία θα κινηθούν) (Lassig, 2012).

Σε μια τέτοια λογική, και για να δώσουμε ένα παράδειγμα, δόθηκε σε μαθητές Ε' Δημοτικού μια σειρά από προβλήματα που διαπραγματεύονταν το εμβαδόν σύνθετων και μη-κανονικών σχημάτων. Οι μαθητές, που δεν είχαν καμία προηγούμενη σχετική εμπειρία, κατέληξαν (εργαζόμενοι συλλογικά είτε στο παραδοσιακό περιβάλλον χαρτί-μολύβι είτε στο περιβάλλον του υπολογιστή) σε λύσεις που η μαθηματική κοινότητα γνωρίζει εδώ και χρόνια ως μεθόδους υπολογισμού (ακριβούς ή κατά προσέγγιση) του εμβαδού τέτοιων σχημάτων (Papadopoulos, 2009). Όμως, η εκ νέου ανακάλυψή τους από τους μαθητές αποτελεί επίτευγμα προσωπικό με μοναδικό νόημα γι αυτούς και αναγνωρίζεται ως μια πολύ δημιουργική στιγμή τους. Για μεν τον ακριβή υπολογισμό του εμβαδού, ένα παράδειγμα είναι η περίπτωση μετασχηματισμού του σύνθετου σχήματος σε γνωστό (Εικ. 1) που δεν θα μπορούσε (ή σε κάποιες εξαιρετικές περιπτώσεις πολύ δύσκολα) να υλοποιηθεί χωρίς τη διαμεσολάβηση της τεχνολογίας.



Εικ.1 Μετασχηματισμός σε γνωστό σχήμα



Εικ.2 Επινόηση μεθόδων προσέγγισης του εμβαδού

Για τον κατά προσέγγιση υπολογισμό του εμβαδού ένα παράδειγμα είναι αρχικά η χρήση από τους μαθητές σταδιακών υποδιαιρέσεων της μονάδας μέτρησης προκειμένου να είναι σε θέση να πετυχαίνουν καλύτερες κάθε φορά προσεγγίσεις του εμβαδού. Στη συνέχεια μάλιστα κάνουν πρόσθετες επιμέρους επιλογές που οδηγούν σε ακόμη καλύτερες προσεγγίσεις του εμβαδού και που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν δημιουργικές (Εικ.2).

Σε παραδείγματα σαν αυτά που παρουσιάστηκαν, οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει προϋπάρχουσα μεθοδολογία ώστε να ανατρέξουν σε αυτήν και αυτό που βιώνουν μέσα από τη συνεργασία τους στη διαδικασία της επίλυσης είναι η στιγμή που αναφωνούν “Aha!!”, η στιγμή της επιφοίτησης (illumination), που εκφράζει ακριβώς αυτό το αίσθημα της δημιουργικής εμπειρίας (Liljedahl, 2013). Θεωρώντας ότι ρόλο-κλειδί σε αυτήν την εξέλιξη έπαιξε ο ρόλος του εκπαιδευτικού, τα ερωτήματα που τίθενται είναι:

- Πώς ο εκπαιδευτικός δημιουργεί ένα ασφαλές περιβάλλον προκειμένου να βοηθήσει την τάξη του να αναπτύξει την mini-c δημιουργικότητα?

- Σε ποιο βαθμό η τεχνολογία διευκολύνει την πρόθεση του εκπαιδευτικού να αναπτύξει mini-c δημιουργικότητα;

- Η συλλογική προσπάθεια διευκολύνει πάντα την ανάπτυξη της mini-c δημιουργικότητας;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Beghetto, R., & Kaufman, J. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM*, *41*, 39-44.

Kaufman, J., & Beghetto, R. (2009). Beyond Big and Little: The Four C Model of Creativity. *Review of General Psychology*, *13*(1), 1-12.

Lassig, C. J. (2012). Creating creative classrooms. *The Australian Educational Reader*, *34*(2), 8-13.

Liljedahl, P. (2013). Illumination: an affective experience. *ZDM*, *45*, 253-265.

Papadopoulos, I. (2010). “Reinventing” techniques for the estimation of area of irregular plane figures. From 18th century to the modern classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(5), 869-890.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΟ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

Μαρία Καλδρυμίδου
Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
mkaldrim@uoi.gr

Η δημιουργικότητα στα Μαθηματικά -των μαθητών, των εκπαιδευτικών, των χαρισματικών μαθητών, ατομική ή σε κοινωνικό πλαίσιο αλληλεπίδρασης, σε συμβατικό ή ψηφιακό περιβάλλον,- αποτέλεσε το κεντρικό ζήτημα των εισηγήσεων σε αυτό το στρογγυλό τραπέζι.

Με βάση τις εισηγήσεις που προηγήθηκαν, διαπιστώνεται ότι η έννοια της δημιουργικότητας είναι ακόμα ασαφής. Όπως τόνισε και ο Χρόνης Κυνηγός είναι μια *δυσδιάκριτη έννοια ορισμένη σχετικά αδρά ως η διαδικασία ή η ικανότητα και ευχέρεια παραγωγής πρωτότυπων, χρήσιμων ιδεών και δομημάτων*.

Από τον Στέφανο Κεΐσογλου επιλέγεται ο ορισμός των Sternberg & Lubart σύμφωνα με τον οποίο: *Δημιουργικότητα είναι η ικανότητα παραγωγής πρωτότυπου, αυθεντικού υλικού το οποίο έχει κάποια χρησιμότητα*.

Σύμφωνα με την Μαρία Κάττου, η οποία εστιάζει στη μαθηματική δημιουργιότητα και τη σχέση της με τη χαρισματικότητα, προκρίνεται ο ορισμός του Ervynck, και έτσι ο όρος μαθηματική δημιουργικότητα αναφέρεται *στην ικανότητα του ατόμου να εντοπίζει σχέσεις μεταξύ ασύνδετων ιδεών και να χειρίζεται πληροφορίες ευέλικτα*.

Όπως αναφέρει ο Ιωάννης Παπαδόπουλος στην εισήγησή του, η επινόηση ή η εκ νέου ανακάλυψη ιδεών από τους μαθητές αποτελεί επίτευγμα προσωπικό με μοναδικό νόημα γι αυτούς και αναγνωρίζεται ως μια πολύ δημιουργική στιγμή τους. Αναδεικνύει, λοιπόν τη mini-c δημιουργικότητα, η οποία σύμφωνα με τους Beghetto & Kaufman αναφέρεται σε ιδέες που είναι πρωτότυπες σε επίπεδο ατομικής σκέψης ακόμη και αν υπάρχουν και άλλοι που τις έχουν ήδη σκεφτεί.

Η πρωτοτυπία ή καινοτομία (γενική ή ατομική) μοιάζει να είναι ένα κοινό σημείο στο οποίο εστιάζουν όλες οι προσεγγίσεις της δημιουργικότητας που προαναφέρθηκαν. Όμως στη συνέχεια τίθενται σημαντικά ερωτήματα:

Ένα πρώτο ερώτημα που τίθεται, καθώς ανατρέχουμε στις παραπάνω προσεγγίσεις είναι τι είναι η δημιουργικότητα: ικανότητα, διαδικασία ή κατάσταση;

Ένα δεύτερο ζήτημα που ανακύπτει είναι η χρησιμότητα. Χρήσιμο για ποιον και γιατί. Ας μην ξεχνάμε ότι πολλά από τα Μαθηματικά επινοήθηκαν πολύ νωρίτερα από την εποχή που ανακαλύφθηκε κάποια χρησιμότητά τους....

Ένα τρίτο ερώτημα είναι, ειδικά αν θεωρήσουμε τη δημιουργικότητα ως ικανότητα, είναι η γενικότητά της. Δηλαδή ένα άτομο (μαθητής ή μαθηματικός) είναι παντού, σε οποιοδήποτε πεδίο των Μαθηματικών, δημιουργικός;

Διατρέχοντας, ως εξωτερικός παρατηρητής, τα παραδείγματα που προτείνονται για την ανάπτυξη ή καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα Μαθηματικά, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για καταστάσεις που:

- Δεν έχουν τετριμένες ή αλγοριθμικές λύσεις
- Απαιτούν επαναπροσδιορισμό ή μετασχηματισμό μιας κατάστασης
- Απαιτούν ή προκαλούν εναλλαγές μαθηματικών ιδεών και αναπαραστάσεων
- Προκαλούν επέκταση ιδεών και εννοιολογικών αντιλήψεων
- Επιδέχονται πολλαπλές λύσεις

Θα μπορούσε, όμως, κάποιος να ισχυριστεί ότι όλα τα παραπάνω αποτελούν βασικά επιθυμητά χαρακτηριστικά ενός καλού διδακτικού περιβάλλοντος για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Και έτσι, να θέσει το ερώτημα γιατί αυτά είναι χαρακτηριστικά καλού διδακτικού περιβάλλοντος για την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης και την παραγωγή δημιουργικών λύσεων και δομημάτων; Όπως αναφέρει και ο Ιωάννης Παπαδόπουλος, στην εισήγησή του σε αυτό το στρογγυλό τραπέζι, η επινόηση, ή και η κατανόηση θα έλεγα εγώ, αποτελεί μια δημιουργική στιγμή για τον μαθητή. Ακόμα, και η επινόηση μιας ιδέας, μιας σχέσης, μιας γενίκευσης, ακόμα και όταν αυτές δεν είναι "σωστές" για τα Μαθηματικά, αποτελούν μια έκφραση ατομικής δημιουργικότητας. Όταν, π.χ., σε μια προσπάθεια μαθητών ενός Νηπιαγωγείου να μοιράσουν μια (χάρτινη) τούρτα σε ίσα μέρη περισσεύει πάντα ένα περίεργης μορφής κομμάτι και ένας μαθητής προτείνει να το πάρει η Νηπιαγωγός και έτσι να απαλλαγούν αυτοί από το πρόβλημα, δεν αποτελεί αυτό μια εκδήλωση δημιουργικότητας;

Με τα παραπάνω, δε θέλω να ισχυριστώ ότι η αναζήτηση της δημιουργικότητας ταυτίζεται με το "κάνω μαθηματικά". Σίγουρα, η ανάδειξη και μελέτη της μαθηματικής δημιουργικότητας δηλώνει ότι υπάρχει κάτι ειδικό, κάτι διαφορετικό, το οποίο προσπαθούν να περιγράψουν και να μελετήσουν οι ερευνητές. Μόνο που αυτό, όπως είπε στην εισήγησή του ο Χρόνης Κυνηγός, είναι ακόμα *δυσδιάκριτο*.

Ο δρόμος προς τον προσδιορισμό του, και επομένως προς την προσπάθεια θεωρητικής δόμησής του ως εργαλείο της Διδακτικής των Μαθηματικών, μοιάζει να είναι ακόμα μακρύς.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΣΤΟ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

Άννα Χρονάκη
Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
chronaki@uth.gr

Με πολύ ενδιαφέρον διάβασα τόσο την ανακοίνωση για ένα στρογγυλό τραπέζι με θέμα την δημιουργικότητα στα μαθηματικά όσο και τα κείμενα που κατατέθηκαν και αναμένω με το ίδιο ενδιαφέρον να ακούσω τις εισηγήσεις και να συμμετάσχω στον διάλογο που θα προκληθεί με συναδέλφους ερευνητές και εκπαιδευτικούς στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Το ενδιαφέρον αυτό εδράζει σε μια σειρά από ζητήματα τα οποία θα προσπαθήσω να σκιαγραφήσω παρακάτω.

Η δημιουργικότητα έχει αποτελέσει παραδειγματικά, και ίσως στερεοτυπικά, το άβατο και την αποκλειστικότητα της εργασίας και της παραγωγής στο χώρο των τεχνών, των επιστημών, της κατασκευής τεχνουργημάτων αλλά και των επινοήσεων που παρουσιάζουν μια μορφή καινοτομίας, πρωτοτυπίας, διαφορετικότητας ή/και νεωτερισμού απαιτώντας φαντασία, πρόκληση, αυτόνομη, ή ακόμη και άναρχη, έκφραση. Πως λοιπόν τα ‘μαθηματικά’, τα οποία εγγράφονται κυρίαρχα ως ένα ‘εσωτερικό’ πεδίο πειθαρχίας και κατασκευής γνώσης στο πλαίσιο της ‘διδακτικής των μαθηματικών’ εμπλέκονται σήμερα ενεργά με την δημιουργικότητα;

Τα παραδείγματα που βρίσκουμε στα κείμενα αυτών των ερευνητικών εργασιών μας πείθουν ότι τα πράγματα μπορεί να είναι και διαφορετικά καθώς αποτολμούν να ανιχνεύσουν στοιχεία δημιουργικότητας όπως η πρωτοτυπία στις απαντήσεις, η πολλαπλότητα στρατηγικών κατά την επίλυση προβλημάτων και η αξιοποίηση σύνθετων μαθηματικών ιδεών από τα παιδιά (βλ. Κάττου), η χρήση ψηφιακών μέσων για την υλοποίηση μαθηματικών δραστηριοτήτων που ενεργοποιούν την έκφραση ιδεών (βλ. Κείσογλου), η ενεργοποίηση των μαθητών και των μαθητριών χωρίς πρότερη γνώση σε μια τάξη δημοτικού να αναγνωρίσουν και να κατανοήσουν μαθηματικές δομές ενώ ταυτόχρονα να μπορούν να αυτονομούνται και να επινοούν λύσεις (βλ. Παπαδόπουλος) και η συνεργατική σχεδίαση εκπαιδευτικού υλικού για τα μαθηματικά όπου αναδεικνύεται ότι οι ‘πρωτότυπες’ ιδέες δεν αποτελούν ατομική ικανότητα αλλά εντάσσονται σε συλλογικές διαδικασίες στο πλαίσιο διαλόγου, αλληλεπίδρασης και αναστοχασμού (βλ. Κυνηγός).

Οι έρευνες αυτές ενώ εκκινούν από διαφορετικά ερευνητικά ερωτήματα και μεθοδολογίες μας καλούν να ανοίξουμε τους ορισμούς γύρω από το τι είναι ‘δημιουργικότητα’ και, ταυτόχρονα, ίσως να ξαναδούμε τι σημαίνει ‘μαθηματική δραστηριότητα’, πως νοηματοδοτείται, πως αξιολογείται και πως αναγνωρίζεται αυτό που σήμερα δειλά πάμε να ονομάσουμε ‘δημιουργική μαθηματική δραστηριότητα’, ποιους ή/και ποιες αφορά, αλλά και ποιοι ή/και ποιες μπορούν να έχουν πρόσβαση ή ακόμη ποιοι ή/και ποιες αποκλείονται από μια τέτοια δραστηριοποίηση.

Τέλος, θα ήθελα να θυμηθούμε ότι το δημιουργικό προϊόν, ως έργο τέχνης ή ως επιστημονική επινόηση, δεν είναι αυτόνομο αλλά εντάσσεται σε ένα πλέγμα σχέσεων, και ειδικότερα σχέσεων κυριαρχίας και αντίστασης, που το αναγνωρίζουν, το ονομάζουν, το παράγουν και, εν τέλει, το καθιστούν ως ‘δημιουργικό’. Με άλλα λόγια, ενώ τα παιδιά και οι εκπαιδευτικοί κάνοντας μαθηματικά δεν θεωρείται ότι είναι πάντα σε θέση να αξιολογήσουν την εργασία τους ως δημιουργική, αφήνεται συχνά στα χέρια και στο νου των ‘ειδικών’ να αποφανθούν για τη δημιουργική διάσταση της δράσης ενός υποκειμένου που συνήθως καταχρηστικά αποκαλούμε αδαή, μη-χαρισματικό, μη-ταλαντούχο, χωρίς πρότερη γνώση, χωρίς κατάλληλα υλικά, χωρίς πρόσβαση σε κατάλληλες κοινότητες. Αυτές οι αποφάνσεις, οι οποίες τείνουν να συμπλέουν με πρακτικές αξιολογικής κρίσης για το τι είναι, τελικά, ‘δημιουργικό’ και τι ‘μη-δημιουργικό’ εγγράφονται αναπόφευκτα σε ενυπάρχοντες κυρίαρχους λόγους γύρω από τι είναι ‘μαθηματικά’, πως νοείται η ‘διδακτική των μαθηματικών’ και πως συνδέεται με λόγους παιδαγωγικούς ενώ, ταυτόχρονα, ενέχουν τη δυναμική διεργασιών κατασκευής και ανακατασκευής συγκεκριμένων μαθησιακών ταυτοτήτων.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-1: ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΤΑ ΑΥΘΕΝΤΙΚΑ – ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗΣ ΖΩΗΣ ΩΣ ΠΗΓΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ντίνος Βρυώνης1, Γιώργος Μπαραλής2
[1]Δάσκαλος, [2]Επίκουρος Καθηγητής ΕΚΠΑ
dinvrionis@gmail.com , gmparalis@primedu.uoa.gr

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας μας είναι να διερευνήσουμε κατά πόσο οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης, αλλά και οι ενήλικες γονείς των μπορούν να αντιμετωπίζουν αυθεντικά – ρεαλιστικά προβλήματα. Ειδικότερα επιχειρήθηκε να διερευνηθεί κατά πόσο όταν επιλύουν ρεαλιστικά – αυθεντικά προβλήματα, λαμβάνουν υπόψη τους το πραγματικό «πλαίσιο» το οποίο περιγράφουν, δηλαδή τις πραγματικές συνθήκες και δίνουν αντίστοιχα ρεαλιστικές απαντήσεις. Επιμέρους στόχοι της έρευνας είναι να διερευνήσουμε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών και των γονέων ή το διαμορφωμένο Διδακτικό Συμβόλαιο της τάξης έρχεται σε ρήξη από την ίδια την πραγματικότητα της ζωής με την ενηλικίωση, κάτι που αναμένεται να μην ισχύει.

Λέξεις – κλειδιά: *πραγματικά – ρεαλιστικά προβλήματα, δημιουργικότητα*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά προσφέρουν έναν εξαιρετικά ισχυρό τρόπο ερμηνείας του κόσμου, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης παγκοσμίως, για το λόγο αυτό αναγνωρίζονται ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού.

Πολλοί μαθητές όμως, αλλά ακόμα και εκπαιδευτικοί, δεν αισθάνονται άνετα με τα μαθηματικά και για το λόγο αυτό δεν απολαμβάνουν την ενασχόλησή τους με αυτά. Εξαιτίας, της διαδεδομένης άποψης ότι τα μαθηματικά που διδάσκονται στην τάξη ακολουθούν επιτακτικές φόρμουλες, αυτοί οι μαθητές δεν μπορούν να κατανοήσουν πως τα μαθηματικά θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα. Συνεχίζει, δηλαδή, να υφίσταται η άποψη, ότι τα μαθηματικά της τάξης είναι τυποποιημένα, μη – διαπραγματεύσιμα και ασύνδετα με τον έξω κόσμο. (Greer, 1993; Yoshida, Verschaffel & De Corte, 1997; De Corte &Verschaffel & Greer,2000; Keitel,2000; Lowrie,2004; Γαγάτσης et.al., 2006 Chapman, 2007; Βρυώνης & Μπαραλής, 2009)

Ακόμα και αρκετοί ενήλικες γονείς, παρά του ότι βρίσκονται πολλά χρόνια μέσα στη ζωή και την αγορά, δυσκολεύονται να διαχειριστούν απλά ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής, δεδομένου ότι και αυτοί εκπαιδεύτηκαν να τα αντιμετωπίζουν ως «μαθηματικά προβλήματα» ξεκομμένα από την πραγματική ζωή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα κοντεύει να συμπληρώσει δεκαετία από τη μεγάλη στροφή των ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ στις σύγχρονες θεωρήσεις, που προσεγγίζουν πλέον τα μαθηματικά ως μέσο για την επίλυση ατομικών και κοινωνικών προβλημάτων που σχεδιάζονται έτσι ώστε να ανταποκρίνονται σε όσο το δυνατό περισσότερα «πραγματικά και άμεσα προβλήματα, αναφερόμενα σε αληθινές καταστάσεις» (Keitel,2000).

Η μαθηματική δραστηριότητα και η επίλυση προβλήματος έχουν αναδειχθεί πλέον κεντρικός στόχος του Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά, ενώ ο εκπαιδευτικός της τάξης θα πρέπει να διαμορφώνει κατάλληλο εκπαιδευτικό περιβάλλον διερευνητικής μάθησης που θα καλλιεργεί τα κίνητρα και θα ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα. Η τάση να διδαχτούν τα Μαθηματικά με ένα τρόπο πιο κοντινό με την πραγματικότητα, κυρίως στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, κυριάρχησε σε παγκόσμιο επίπεδο μέσα από την επίλυση κατάλληλων ανοιχτών - αυθεντικών προβληματικών καταστάσεων από την καθημερινή ζωή των παιδιών, ώστε να έχουν νόημα για τα παιδιά, έξω από το σύνηθες τυπικό πλαίσιο (Κολέζα, 2000) που μας προσφέρουν οι αφηρημένες εφαρμογές και οι αλγοριθμικές διαδικασίες.

Τα λεγόμενα «αυθεντικά λεκτικά προβλήματα» ή ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινής ζωής, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση για την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών (Chapman, 2007) μέσα από την ερμηνεία του πραγματικού κόσμου και να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τις δυνατότητες δημιουργικής και κριτικής σκέψης κατά την επίλυσή τους. Παράλληλα, αποκτούν έτσι και τη δυνατότητα για το αντίστροφο, να χρησιμοποιήσουν δηλαδή την αποκτηθείσα μαθηματική γνώση για να επιλύουν απλά ή πιο πολύπλοκα προβλήματα του πραγματικού κόσμου (De Corte, Verschaffel, Greer, 2000).

Αυτού του είδους οι προβληματικές καταστάσεις σε πλαίσιο που μαθηματικοποιούν την πραγματικότητα και με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές είναι ανοιχτές, προσφέρουν *διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων*, αναπαράστασης πιθανών εναλλακτικών ή διαδικασιών επίλυσης, ανάπτυξης στρατηγικών επίλυσης και αναπτύσσουν τη δημιουργική, αναστοχαστική και κριτική μαθηματική σκέψη (Κόσυβας, 1996; Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, 1999). Ο Chiu (2009) συνέδεσε τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα «μη ρουτίνας».

Παρά τις αλλαγές αυτές όμως, παρατηρούμε ότι ακόμα, τόσο οι μαθητές όσο και οι ίδιοι οι δάσκαλοι, δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά όχι ως ένα κλειστό σύστημα, αλλά ως διαδικασία μαθηματικοποίησης της πραγματικότητας. Η προηγούμενη κατάσταση των σχολικών βιβλίων, που περιόριζε την επίλυση προβλήματος κυρίως στις βασικές δεξιότητες και στην επίλυση απλών λεκτικών προβλημάτων (Βρυώνης & Γούπος, 2009), χωρίς να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με «πραγματικά προβλήματα» και να αξιοποιήσουν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες στην επίλυσή τους, διατηρεί ακόμα στις συνειδήσεις εκπαιδευτικών και μαθητών ισχυρές αντιστάσεις.

Οι σχολικές τάξεις που συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά φορμαλιστικά παρουσιάζουν αυξημένες δυσκολίες καλλιέργειας της δημιουργικότητας των χαρισματικών παιδιών στα Μαθηματικά, αλλά και των παιδιών εκείνων που έχουν κάποιες δυσκολίες. Αντίθετα έχει διαπιστωθεί και ερευνητικά, ότι η διδασκαλία που εμπλουτίζεται από τη δημιουργικότητα είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος μαθητών και όχι μόνο για λίγα εξαίρετα άτομα (Silver, 1997).

Παράλληλα και για τους ίδιους λόγους, πολλοί ερευνητές, όπως αναφέρουμε και σε δική μας έρευνα (Βρυώνης, 2010), διαπιστώνουν αδυναμία των μαθητών (Lowrie, 2004) αλλά και των εκπαιδευτικών (Βρυώνης & Μπαραλής, 2009) στην αντιμετώπιση αυθεντικών ρεαλιστικών προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, αφού τείνουν να ξεχνούν τη διαδικασία επιστροφής από το μαθηματικό μοντέλο στις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος, «πλαίσιο» (context), και να τις λάβουν υπόψη τους (Chapman, 2007).

ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Κύριος σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αναδείξει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αλλά ακόμα και οι ενήλικες γονείς των στην αντιμετώπιση ασυνήθιστων ρεαλιστικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής και στην προσπάθεια μαθηματικοποίησης της πραγματικότητας.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2015 και αποτελεί μέρος υπό διαμόρφωση έργου με το οποίο θα ασχοληθούν οι μαθητές στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής μας. Δόθηκαν προς επίλυση 3 συνολικά αυθεντικά ρεαλιστικά προβλήματα ίδια με αυτά που είχαν δοθεί σε πανελλήνια έρευνά μας σε 232 εκπαιδευτικούς (Βρυώνης & Μπαραλής, 2009).

Το δείγμα αποτέλεσαν οι μαθητές της ΣΤ΄Δημοτικού δύο σχολείων του Δήμου Ηρακλείου Αττικής (4 τμήματα), που επιλέγηκαν μέσω «βολικής» δειγματοληψίας. Πρόκειται για σχολεία του αστικού ιστού της Πρωτεύουσας, με μαθητές που προέρχονται από οικογένειες επαγγελματιών και υπαλλήλων με μέση και ανώτερη μόρφωση. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 57 μαθητές. (22 αγόρια και 30 κορίτσια).

Στους μαθητές δόθηκε φυλλάδιο με 3 προβλήματα και διατέθηκε το δεύτερο δίωρο για τη συμπλήρωσή του με την παρουσία του ερευνητή και του δασκάλου του τμήματος. Τονίστηκε στους μαθητές ότι μπορεί να λύσουν τα προβλήματα με όποιο τρόπο θέλουν, αλλά θα θέλαμε ένα μικρό σκεπτικό. Επίσης τονίστηκε ότι αν κάποια από αυτά φαίνεται να τους παραξενεύουν ή για κάποιο λόγο νομίζουν ότι δεν λύνονται, να γράψουν «το πρόβλημα δεν λύνεται γιατί….. π.χ. μου λείπουν αυτά τα στοιχεία κ.λ.π.».

Στη συνέχεια όσοι μαθητές ήθελαν πήραν φυλλάδια με τα ίδια προβλήματα για να τα δώσουν στους γονείς τους να τα λύσουν και αυτοί με τους ίδιους όρους μεταφερμένους από τους μαθητές. Τελικά ανταποκρίθηκαν 34 γονείς (16 άντρες και 18 γυναίκες) καθώς και οι 4 εκπαιδευτικοί.

Τις επόμενες δύο ημέρες πάρθηκαν και ημιδομημένες συνεντεύξεις από 5 μαθητές με σχολιασμό στις διαδικασίες για τον τρόπο με τον οποίο επέλεξαν να επιλύσουν τα προβλήματα καθώς και από 2 από τους εκπαιδευτικούς.

Ακολουθεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας μας, τα οποία σημειωτέον είναι παραπλήσια με τα αποτελέσματα αντίστοιχης πανελλήνιας έρευνάς μας με πληθυσμό 232 εκπαιδευτικούς ΠΕ70.

Πρόβλημα 1ο

«Ένα δοχείο το γεμίζουμε από μια βρύση που βγάζει συνεχώς την ίδια ποσότητα νερού. Αν το νερό έχει φτάσει σε ύψος 3,2 εκατοστά μετά από 10 δευτερόλεπτα, πόσο περίπου θα είναι το ύψος του νερού μετά από άλλα 10 δευτερόλεπτα;»

Πίνακας 1

Πρόβλημα 1ο	Μαθητές		Γονείς	
	N	%	N	%
Ρεαλιστική απάντηση	0	0	3	8,8
Μη ρεαλιστική απάντηση	52	100	31	91,2
Σύνολο	52	100	34	100

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα «ψευδοαναλογίας» παρατηρούμε ότι κανένας μαθητής δεν έδωσε ρεαλιστική απάντηση, ενώ και το ποσοστό των γονέων που απάντησαν ρεαλιστικά είναι μόλις 8,8%.

Η αποτυχία διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις, δημιουργεί μια "ψευδαίσθηση" για την ύπαρξη αναλογίας σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων της καθημερινής ζωής (Lamon, 1999), με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται αναλογικές στρατηγικές για να επιλύσουν ακόμη και τα μη αναλογικά έργα, χωρίς να δίνεται σημασία στην προβληματική κατάσταση και τους περιορισμούς που αυτά εμπεριέχουν.

Η πρώτη αντίδραση μαθητών, εκπαιδευτικών και γονιών κατά την επίλυση του προβλήματος είναι να το αντιμετωπίσουν ως *κλειστό στερεότυπο πρόβλημα* και να επικεντρωθούν στην επιλογή του κατάλληλου τεχνάσματος επίλυσης, χωρίς να λαμβάνουν καθόλου υπόψη τις πραγματικές συνθήκες που καθορίζονται από το σχήμα του δοχείου, το οποίο χωρίς καμία αναφορά λαμβάνεται ως κυλινδρικό ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ακολουθούν ενδεικτικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις που πήραμε:

1η μαθήτρια: Καταλήγει ότι: « Τελικά το πόσο θα χωράει και σε ποιο ύψος θα πάει εξαρτάται από το σχήμα! Εγώ είπα ότι είναι τετράγωνο, γιατί όταν ακούω δοχείο μου έρχεται στο μυαλό το ορθογώνιο. Τώρα όμως μου είναι ξεκάθαρο ότι μπορεί να έχει οπουδήποτε σχήμα, άρα δεν θα ανέβει 6 εκατοστά!»

2η μαθήτρια: (Φτιάχνει ένα δοχείο σε σχήμα αμφορέα, αλλά υπολογίζει το ύψος 6 εκ.) καταλήγει ότι: «Σωστά. Δεν θα είναι η ίδια ποσότητα! Δεν μας λέει να είναι ορθογώνιο το δοχείο, οπότε στο δοχείο που έφτιαξα δεν θα είναι στο ίδιο ύψος το νερό. Άρα το τελικό ύψος εξαρτάται από το σχήμα. Πρέπει να ξέρουμε το σχήμα!»

4η μαθήτρια: «Έκανα «αναγωγή στη μονάδα». Δεν είμαι σίγουρη όμως ότι το έλυσα σωστά, γιατί δεν λέει αν το δοχείο είναι στρογγυλό, ορθογώνιο ή κάπως αλλιώς. Έκανα την περίπτωση που το δοχείο είναι στρογγυλό. Στις εκπομπές μαγειρικής έχω ακούσει που λέει για παράδειγμα «3ml σε δοχείο στρογγυλό», άρα ανάλογα με το δοχείο υπάρχει διαφορά για να το διευκρινίζουν έτσι.»

1η εκπαιδευτικός: (Διδακτορικό κοινωνικές επιστήμες, 22 χρόνια υπηρεσίας): Σχεδιάζει το δοχείο ορθογώνιο και στην ερώτηση μας αν θα μπορούσε να είχε διαφορετικό σχήμα, απαντάει: «Ναι, τότε θα άλλαζε… Εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου. Δεν είναι σωστό να θεωρήσω ότι είναι ορθογώνιο. Από συνήθεια. Δεν θα σκεφτόμουν να το σχεδιάσω διαφορετικά!»

2η εκπαιδευτικός: (23 χρόνια υπηρεσίας): Βρήκα 6 εκατοστά, αλλά τώρα κατάλαβα! Κι αν το δοχείο δεν είναι ομοιόμορφο θα μου πεις; Έχεις δίκιο! Αυτό δεν το σκέφτηκα. Το θεώρησα δεδομένο αλλά δεν είναι!! Ξέρεις έχω συνηθίσει, όταν σχεδίαζα δοχείο το έφτιαχνα πάντα ορθογώνιο. Δεν είναι όμως έτσι. Άρα τελικά δεν είναι 6,4 εκ. το ύψος του νερού. Μπορεί να είναι λιγότερο ή περισσότερο ανάλογα με το σχήμα του δοχείου.»

Πίνακας 2

Πρόβλημα 3ο	Μαθητές		Γονείς	
	N	%	N	%
Ρεαλιστική απάντηση	5	9,6	9	26,5
Μη ρεαλιστική απάντηση	52	90,4	25	73,5
Σύνολο	52	100	34	100

Πρόβλημα 2ο

«Ο καλύτερος χρόνος ενός αθλητή για να τρέξει μια απόσταση 200 μέτρα είναι 21 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο περίπου θα χρειαζόταν για να τρέξει 800 μέτρα;»

Άλλο ένα πρόβλημα ψευδαναλογίας στο οποίο οι ρεαλιστικές απαντήσεις των μαθητών ανέβηκαν στο 9,6%, λόγω της εμπειρίας ορισμένων από τις δικές τους επιδόσεις στο στίβο και τις πισίνες. Τα ποσοστό των γονιών είναι αρκετά χαμηλό, αφού μόνο 1 στους 4 (ποσοστό 26,5%) αναφέρθηκε στην κούραση του αθλητή. Παραθέτουμε ορισμένα σχόλια μαθητών και εκπαιδευτικών που δεν έδωσαν ρεαλιστικές απαντήσεις μετά την παρέμβασή μας και την αναφορά μας στη δυνατότητα διατήρησης σταθερού χρόνου στα επόμενα 200ρια.

1η μαθήτρια: Ε, όχι! Θα κουραζόμουν! Θα κουραστεί ο αθλητής και επομένως θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο! Όμως δεν το σκέφτηκα καθόλου. Με το που το διάβασα το πρόβλημα σκέφθηκα κατευθείαν ότι πρέπει να κάνω «απλή μέθοδο των τριών».

2η μαθήτρια: Βρήκα 84΄΄, αλλά αποκλείεται να κάνει τόσο, γιατί τα πόδια του δεν θα τον κρατούσαν. Θα κουραζόταν!! Δεν το έγραψα όμως, γιατί μόλις τώρα το σκέφτηκα! Άρα θα κάνει παραπάνω από 84΄΄.

3η μαθήτρια: Χωρίς πολύ σκέψη θεώρησα ότι θα τρέχει με την ίδια ταχύτητα. Αλλιώς δεν θα έχει απάντηση το πρόβλημα παρά μόνο στο περίπου, θα μπορούσα δηλαδή να προσθέτω για κάθε 200m εκτός από τα 21΄΄ άλλα 5΄΄ ή και περισσότερα επειδή συνεχώς θα κουραζόταν περισσότερο.

1η εκπαιδευτικός: Απάντησα 84΄΄, αλλά τώρα που με ρωτάς το ξανασκέφτομαι. Είναι ο καλύτερός του χρόνος. … Σωστό. Γι' αυτό λέει πόσο περίπου. Άρα δεν το έλυσα σωστά!. Δεν το σκέφτηκα πρακτικά, αλλά πώς θα το λύσουμε μαθηματικά. Ζητάει πόσο περίπου χρόνο και σίγουρα θα είναι περισσότερο από 84΄΄, γιατί θα κουράζεται όλο και περισσότερο. Μπορεί να κάνει 21΄΄ στο πρώτο 200άρι, 22΄΄ μετά 23΄΄ και 24΄΄, δηλαδή 90΄΄ συνολικά, αλλά αυτό είναι μια μαθηματική απάντηση; Νομίζω πως είναι μια προσέγγιση προς την απάντηση.

2η εκπαιδευτικός: Χθες που το έλυσα είχα επηρεαστεί από την αναγωγή στη μονάδα που διδάσκω τον τελευταίο καιρό… Είναι ζήτημα αν μπορεί να κάνει συνεχώς τον καλύτερο χρόνο. Μπορεί και να μην μπορεί. Σίγουρα δεν μπορεί να συνεχίσει με τον ίδιο ρυθμό σε αγώνα 800μ. Αν όμως πούμε κάτι τέτοιο στα παιδιά πρέπει πάλι να κάνουμε επέκταση του προβλήματος. Θεωρητικά αυτός θα ήταν ο ιδανικός χρόνος, αλλά για κάποιο ρομπότ που δεν θα μείωνε απόδοση. Τώρα ο χρόνος θα είναι μεγαλύτερος. Επομένως και εδώ η πραγματικότητα διαφέρει.

Πρόβλημα 3ο

«Η Ελένη και ο Βασίλης πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Ο Βασίλης μένει σε απόσταση 1200 μέτρα από το σχολείο και η Ελένη σε απόσταση 800 μέτρα από το σχολείο. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών;»

Πίνακας 3

Πρόβλημα 2ο	Μαθητές		Γονείς	
	N	%	N	%
Ρεαλιστική απάντηση	1	1,9	15	44,1
Μη ρεαλιστική απάντηση	51	98,1	19	55,9
Σύνολο	52	100	34	100

Οι ρεαλιστικές απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα αυτό είναι μόλις μία, ποσοστό 1,9%, ενώ το ποσοστό των γονιών είναι αρκετά σημαντικό και φτάνει στο 44,1%.

Εδώ οι διαπιστωμένες δυσκολίες στο να ληφθούν υπόψη οι πραγματικές συνθήκες εντείνονται, επειδή συνυπάρχουν δυσκολίες μετάβασης από μια μορφή αναπάραστασης σε μία άλλη (NCTM, 2000; Γαγάτσης, 2004). Παραθέτουμε σχόλια, όπου γίνεται φανερό ότι η σκέψη των μαθητών είναι πιο δημιουργική και δεκτική σε ανοιχτές λύσεις, ενώ αντίθετα οι εκπαιδευτικοί μετατρέπουν το πρόβλημα σε κλειστό:

1η μαθήτρια: Έβαλα τα σπίτια και το σχολείο στην ίδια ευθεία. Το σκέφτηκα ότι μπορεί και να μην είναι έτσι, αλλά για να μη μπερδευτώ αποφάσισα να τα βάλω στην ευθεία.

2η μαθήτρια: Τα σπίτια τα ξανασκέφτηκα. Θα μπορούσαν να ήταν και απέναντι με το σχολείο στη μέση, οπότε θα έκανα πρόσθεση για να βρω την απόσταση. Μπορεί να ήταν και σε πολλές άλλες θέσεις. Εγώ έκανα τη μία λύση, θα έπρεπε να κάνω και πολλές άλλες λύσεις. Ή θα έπρεπε να μας λέει το πρόβλημα ποια θέλει.

2η εκπαιδευτικός: Υπάρχουν πολλές λύσεις. Δύο αν θεωρήσουμε ότι τα σπίτια βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Εγώ αν το έδινα στα παιδιά αυτές τις δύο λύσεις θα τους έδινα. Αν κάποιο παιδί πεταγόταν και μου έλεγε ότι το ένα σπίτι μπορεί να σχηματίζει γωνία με την ευθεία του άλλου σπιτιού με το σχολείο…. Στην περίπτωση αυτή για να μην μπλέξουμε θα τους έλεγα να θεωρήσουν ότι τα σπίτια και το σχολείο είναι στην ίδια ευθεία, γιατί να σου πω την αλήθεια αλλιώς δεν θα ήξερα ούτε εγώ πώς να το λύσω.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Είναι φανερό ότι στο συγκεκριμένο δείγμα μαθητών, παρά την αλλαγή των ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, δεν έχει επιτευχτεί ακόμα το επιθυμητό αποτέλεσμα στη ρήξη τόσο του διαμορφωμένου «διδακτικού συμβολαίου» (Γαγάτσης, 2006), μέσα στην τάξη, όσο και της καλλιέργειας της δημιουργικότητας των μαθητών και της αντιμετώπισης μη συνηθισμένων αυθεντικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστικός ο σχολιασμός μαθητή της έρευνάς μας, με δυσλεξία και δυσκολίες στα Μαθηματικά: «Αυτά τα προβλήματα είναι σαν ιστορίες που συμβαίνουν και πρέπει να σκεφτείς τι γίνεται εκεί πέρα και όχι σαν να λύνεις πρόβλημα!», υπονοώντας φυσικά σαν «τυποποιημένο σχολικό πρόβλημα» στερεότυπης μορφής (Jonassen et al., 2003).

Ακόμα και για τους γονείς που έλαβαν μέρος στην έρευνα υπήρξε μεγάλη δυσκολία να κατανοήσουν τη φύση του έργου και να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα ρεαλιστικά.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Χρειάζεται άμεσα συνέχιση των ερευνών με εκπαιδευτικές και διδακτικές παρεμβάσεις μεγαλύτερης χρονικής διάρκειας, ώστε να δούμε τις αλλαγές που αυτές θα επιφέρουν και να αποτελέσουν αξιοποιήσιμο εργαλείο για τη διαμόρφωση ευρύτερων επιμορφωτικών προγραμμάτων.

Επίσης η ποιότητα, η ποικιλία, και η αυθεντικότητα των ρεαλιστικών προβλημάτων, που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία, θα πρέπει να αυξηθεί, προκειμένου να αποφευχθεί η πιθανότητα να μετατραπούν και αυτά με τη σειρά τους σε «τυποποιημένου - στερεότυπου» είδους προβλήματα.

Ακόμα τα αυθεντικά προβλήματα θα πρέπει να σχεδιάζονται με στόχο τη μαθηματική τους μοντελοποίηση και επεξεργασία και τη μετέπειτα αξιοποίηση των πραγματικών συνθηκών που περιγράφουν και όχι να δίνονται άκαιρα (π.χ. ως μαθηματικοί γρίφοι).

Τέλος, όπως ήδη έχουμε αναφέρει θα πρέπει να πραγματοποιηθούν διδακτικές παρεμβάσεις, με στοχευμένα ταχύρρυθμα επιμορφωτικά προγράμματα και για τους εκπαιδευτικούς και παράλληλα μπορεί να δημιουργηθεί βάση δεδομένων, που θα παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή, τουλάχιστον αυτών που είναι οι πιο σημαντικές.

Μετά από τέτοιου είδους παρεμβάσεις, που αναφέραμε, οι εκπαιδευτικοί θα είναι περισσότερο ικανοί να ενεργήσουν ανάλογα για να βοηθήσουν τους μαθητές τους να κατανοήσουν τη σχέση της καθημερινής ζωής και των σχολικών τους μαθηματικών και να αντιληφθούν ότι σκοπός της μαθηματικής διδασκαλίας δεν είναι η απομνημόνευση και η εκτέλεση τύπων και διαδικασιών αλλά η εφαρμογή των καινούριων γνώσεων σε νέες καταστάσεις.

Χρειάζεται δηλαδή να διαμορφωθεί σταδιακά μια «μαθηματική κουλτούρα» στην τάξη (Bonotto, 2002), η οποία θα είναι υποβοηθητική στους μαθητές, ώστε να μπορούν να κάνουν μαθηματικά με φυσικό τρόπο και να τα σκεφτούν ως ένα αναπόσπαστο μέρος της καθημερινής τους ζωής αλλάζοντας ουσιαστικά αντιλήψεις και στάσεις για αυτά (Φιλίππου, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bonotto, C. (2002). *Suspension of sense-making in mathematical word problem solving: A possible remedy*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics. Crete, Greece: Wiley & Sons Publishers.

Chapman, O. (2007). Mathematical Modelling in High School Mathematics: Teachers' Thinking and Practice. In W. Blum, W. Henne, & M. Niss (Eds), *Applications and modelling in mathematics education*. Chapter 3.5.1

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. International Journal of Science and Mathematics Education, 7, 55–79.

De Corte, E. ,Verschaffel, L., Greer, B. (2000). *Making sense of word problems*. U.K., Taylor & Francis Ltd

Johanssen, D. H. (2003). Designing research based-instructions for story problem. *Educational Psychology Review*, *15(3)*, 267-296.

Keitel, C. (2000). Cultural diversity, internationalisation and globalisation: challenges and perils for mathematics education. In A. Ahmed, J.M. Kraemer, & H. Williams (Eds.) *Cultural diversity in mathematics education*. Chichester: Ellis Horwood.

Lamon, J. S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lowrie,T.(2004). *Making mathematics meaningful, realistic and personalized: changing the direction of relevance and applicability*. Proceedings of the MAV Annual Conference 2004. Monash University, Clayton Campus, December 2004.

NCTM (2000). *Principals and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM, 3, 75-80.

Βρυώνης, Κ. & Γούπος, Θ. (2009). Η φιλοσοφία των Μαθηματικών και τα νέα ΑΠΣ – ΔΕΠΠΣ. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τ.15: 5-15, Αθήνα: ΥΠΕΠΘ/ΠΙ.

Βρυώνης, Κ. & Μπαραλής, Γ. (2009). Διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων της καθημερινής ζωής, Πρακτικά του 3ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.), σ.279-288, Ρόδος, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Γαγάτσης, Α. (2004). *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών*. Λευκωσία.

Γαγάτσης, Α. et.al. (2006). Διδακτικό συμβόλαιο και μάθηση των μαθηματικών. Στο Α. Γαγάτσης. (εκ.), *Σύγχρονη Έρευνα στη Μαθηματική Παιδεία,* σ.173-187, Λευκωσία.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader books.

Κόσυβας, Γ. (1996). *Η πρακτική του ανοικτού προβλήματος στο Δημοτικό Σχολείο.* Αθήνα: Gutenberg.

Φιλίππου Γ, Αριστοτέλους Ε., Περικλέους Χ. (2006). *Αντιλήψεις των δασκάλων για το ρόλο της γνώσης του πραγματικού κόσμου στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων.* 23ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθ. Παιδείας, ΕΜΕ, Πάτρα 2006. Πρακτικά: 109-116

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ. (1999). Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στο Κονστρουκτιβιστικό Μοντέλο Διδασκαλίας και Μάθησης των Μαθηματικών με Χρήση Ανοιχτών Προβλημάτων (open-ended) και Ομαδο-συνεργατικής Διδασκαλίας. Ερευνητική *Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τ.3-4, 3-36.

ΧΩΡΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΕΛΛΑΔΑΣ ΚΑΙ ΚΥΠΡΟΥ: ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΝΝΟΙΩΝ

Δατσογιάννη Αναστασία, Ελευθερίου Παντελίτσα, Μιχαήλ Παρασκευή, Παναγή Νεκταρία
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη χωρική ικανότητα, τη δημιουργικότητα και σχέση μεταξύ τους στα μαθηματικά, σε 192 μαθητές Ε' και Στ' τάξης Ελλάδας και Κύπρου. Η επίδοση των μαθητών και των δύο χωρών σε έργα χωρικής ικανότητας- σύνθεσης σχημάτων, περιστροφής και προσανατολισμού στο χώρο- εμφανίζεται χαμηλή. Σε δραστηριότητες εμβαδού και περιμέτρου πολλαπλών λύσεων μελετώνται τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας- ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία, με τις δύο πρώτες διαστάσεις να σχετίζονται πιο έντονα μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα δίνουν ενδείξεις για σύνδεση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της δημιουργικότητας των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χωρική ικανότητα θεωρείται ότι διαδραματίζει ένα σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας (Reinhold, 2002),ενώ από τη φύση της αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα. Πέραν όμως της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, η δημιουργικότητα αποτελεί άλλον ένα σημαντικό άξονα ποικίλων ερευνών που στοχεύουν στην ανάπτυξη της (Mann, 2006). Ωστόσο, φαίνεται να απουσιάζουν έρευνες στο χώρο που να μελετούν την σχέση της δημιουργικότητας με τις διαστάσεις της χωρικής ικανότητας, γεγονός το οποίο οδήγησε στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Το ερευνητικό πρόβλημα της εργασίας αποτέλεσε το πώς οι μαθητές ανταποκρίνονται σε έργα χωρικής ικανότητας και σε δημιουργικά έργα πολλαπλών λύσεων γεωμετρικής φύσης σε Ελλάδα και Κύπρο. Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάστηκαν ήταν τα εξής: α)Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές Ε' και Στ' τάξης σε προβλήματα χωρικής ικανότητας σε Ελλάδα και Κύπρο; β)Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές της εκάστοτε χώρας ανά τάξη, σε δραστηριότητες δημιουργικής σκέψης με επίκεντρο την έννοια του εμβαδού και της περιμέτρου; γ)Τι είδους σχέση παρουσιάζεται μεταξύ χωρικής ικανότητας και δημιουργικότητας για τους μαθητές και των δύο χωρών;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Χωρική ικανότητα και μαθηματικά

Ο Lohman (1996) αναφέρει ότι η χωρική ικανότητα κάποιου ατόμου ορίζεται ως η ικανότητά του *να παράγει, να διατηρεί, να ανακαλεί και να* *μετασχηματίζει καλά δομημένες οπτικές εικόνες*. Για τη δομή της χωρικής ικανότητας ο ίδιος ερευνητής (1988) αναφέρει τρεις διαστάσεις: της *οπτικοποίησης των εννοιών του χώρου* (spatial visualization), δηλαδή της ικανότητας αντίληψης φανταστικών κινήσεων στον τρισδιάστατο χώρο και νοερού χειρισμού αντικειμένων, του *προσανατολισμού στο χώρο* (spatial orientation) και των *σχέσεων εννοιών του χώρου, δηλαδή, του* χειρισμού οπτικών μοτίβων και της ικανότητας νοερής περιστροφής ενός αντικειμένου στο χώρο με ταχύτητα και ακρίβεια (Carroll, 1993 στο Γαγάτσης& Καλογήρου, 2013). Σύμφωνα με την βιβλιογραφία διαπιστώνεται πως υπάρχει σχέση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της επιτυχίας στα μαθηματικά γενικά (Hegarty & Kozhevnikof, 1999), ενώ οι Πιττάλης, Χρίστου και Μουσουλίδης (2006) έδειξαν ότι η ΑΕΧ αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της γεωμετρικής ικανότητας.

Δημιουργικότητα

Η δημιουργικότητα αποτελεί μια πολυδιάστατη έννοια με τους ορισμούς να ποικίλουν ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης από κάθε ερευνητή. Ένας ευρέως αποδεκτός ορισμός είναι εκείνος του Torrance (1994), ο οποίος υπογραμμίζει ως κυρίαρχα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία του ατόμου. Η ευχέρεια αφορά τον αριθμό των ορθών λύσεων, η ευελιξία την ικανότητα παραγωγής διαφορετικών ποιοτικά λύσεων από διαφορετικές προοπτικές, ενώ η πρωτοτυπία αναφέρεται στις ασυνήθιστες και καινοτόμες λύσεις. Οι ανοιχτές δραστηριότητες πολλαπλών λύσεων είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας μέσω της μέτρησης της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας των λύσεων (Leikin & Lev, 2007). Ακόμα, σύμφωνα με την βιβλιογραφία η έννοια της ευχέρειας και της ευελιξίας φαίνεται να συνδέονται εμφανιζόμενες σαν δίπολο (Leikinet.al, 2009).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν 192 μαθητές δημοτικής εκπαίδευσης, Ελλάδας και Κύπρου, οι οποίοι φοιτούν στην Ε’ και Στ’ τάξη. Από τους μαθητές της Ελλάδας (σύνολο 71 μαθητές), οι 41 φοιτούν στην Ε’ τάξη και οι 30 στην Στ’. Από τους μαθητές της Κύπρου (σύνολο 121), οι 61 είναι μαθητές της Ε’ και οι 60 της Στ’ τάξης.

Το μέσο συλλογής δεδομένων ήταν το ερωτηματολόγιο, το οποίο εξέταζε δύο άξονες. Η χορήγηση του έγινε σε δύο φάσεις- για τη πρώτη (Μέρος Α’, Β’ και Γ’- χωρική ικανότητα) δόθηκαν 10’ και για την δεύτερη (Μέρος Δ’- δημιουργικότητα) δόθηκαν 60’ καθώς η παράθεση ποικίλων απαντήσεων ανα δραστηριότητα απαιτούσε υψηλό βαθμό συγκέντρωσης.

Αναφορικά με την μελέτη της ικανότητας ΑΕΧ, επιλέχθηκαν τρεις δραστηριότητες με βάση το μοντέλο του Lohman (1988). Η σύνθεση σχημάτων (formboard- FB) κατά την οποία το υποκείμενο επιλύει το έργο

αναζητώντας τα υποσχήματα που συνιστούν ένα σχήμα (βλ. παράρτημα Μέρος Α’), η περιστροφή καρτών (cardrotation- CR) όπου το υποκείμενο εντοπίζει ποιο σχήμα προκύπτει έπειτα από περιστροφή (βλ. παράρτημα Μέρος Β’) και τα προβλήματα προσανατολισμού αντικειμένων (orientation-OR) όπου ο μαθητής με βάση μια εικόνα διαφόρων αντικειμένων προσανατολίζεται ως προς κάποιο σημείο αναφοράς (βλ. παράρτημα, Μέρος Γ’). Όλα τα έργα βαθμολογήθηκαν με 1 και 0 για σωστό και λάθος αντίστοιχα.
Ακολούθως διερευνήθηκε η δημιουργικότητα των μαθητών σε έργα εμβαδού και περιμέτρου (βλ. παράρτημα Μέρος Δ’) με δραστηριότητες οι οποίες αφορούσαν τη διατήρηση εμβαδού και της περιμέτρου μετά από διάφορους μετασχηματισμούς (έργα C1, C2, C3). Τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας (Torrance, 1974) τα οποία μετρήθηκαν ήταν: η ευχέρεια (F) - βαθμολογήθηκε με σωστό/λάθος (1/0) όταν αρχικά ο μαθητής απαντούσε σωστά ή όχι (Cx[1]F), καθώς επίσης και ανάλογα με τον αριθμό λύσεων (CxN) που έδωσε ο κάθε μαθητής, απάντηση η οποία έπαιρνε από 0 (καμία λύση) έως 1 βαθμό (μεγαλύτερο πλήθος λύσεων στο σύνολο των μαθητών). Η ευελιξία (CxFL) μετρήθηκε με βάση τις διαφορετικές κατηγορίες λύσεων που έδινε ο μαθητής. Η διάσταση της πρωτοτυπίας (EX), μετρήθηκε με ποιοτική ανάλυση των λύσεων των συμμετεχόντων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αποτελέσματα Περιγραφικής Στατιστικής

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της καταγραφής των απαντήσεων των παιδιών στα έργα χωρικής ικανότητας, τόσο ανά τάξη, όσο και ανά χώρα. Τα ποσοστά επιτυχίας για όλους τους μαθητές και των δύο χωρών παρατηρούνται χαμηλά, καθώς το μεγαλύτερο ποσοστό είναι αυτό της τάξης του 52,5% (άσκηση προσανατολισμού OR, Ε’ τάξη Ελλάδας).

Πίνακας 1: Ποσοστά (%) επιτυχίας για κάθε κατηγορία ασκήσεων ΑΕΧ για Ελλάδα και Κύπρο ($\bar{x}$).

	Ελλάδα		**Κύπρος**	
	Ε’τάξη (N=41)	Στ’ τάξη (N=30)	Ε’ τάξη (N=61)	Στ΄τάξη (N=60)
FB	41,5	48,0	14,7	16,7
CR	40,3	36,7	25,4	25,0
OR	52,5	40,0	27,0	33,4

[1] Όπου X ο αύξων αριθμός της άσκησης. Πχ η μεταβλητή C1F αντιπροσωπεύει την ευχέρεια (F) στο 1ο έργο δημιουργηκότητας (C)

Το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας μεταξύ όλων των μαθητών εμφανίζεται στη διάσταση της σύνθεσης σχήματος (FB) για τους μαθητές της Κύπρου της Ε' τάξης (14,7%). Μεγαλύτερη επιτυχία καταγράφεται και στις τρεις διαστάσεις της χωρικής ικανότητας για τους μαθητές της Ελλάδας όλων των τάξεων σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της Κύπρου. Αναφορικά με τους τελευταίους, παρατηρείται μια συνεπής αύξηση των ποσοστών επιτυχίας ανά τάξη, με την Στ' τάξη να παρουσιάζει την μεγαλύτερη επιτυχία από όλους τους μαθητές της Κύπρου. Η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στο τεστ χωρικής ικανότητας, καθώς αυξάνεται η ηλικία, δεν χαρακτηρίζεται αλματώδης, αφού οι διαφορές των ποσοστών ανά τάξη της ίδιας χώραςείναι μικρές. Η προαναφερόμενη συνεπής σταθερή αύξηση της επιτυχίας με ταυτόχρονη αύξηση της ηλικίας των παιδιών της Κύπρου δεν εμφανίζεται ξεκάθαρα για τους μαθητές της Ελλάδας. Συγκεκριμένα, η Ε' τάξη φαίνεται να παρουσιάζει μεγαλύτερη επιτυχία στις διαστάσεις της περιστροφής καρτών (CR) και του προσανατολισμού (OR) σε σχέση με τους μαθητές της Στ' τάξης της ίδιας χώρας. Ωστόσο, στην άσκηση σύνθεσης σχήματος (FB) η Στ' τάξη παρουσιάζει το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας (48%) σε σχέση με τους μαθητές της Ε' τάξης (41,5%) της Ελλάδας.
Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν μια γενική περιγραφή της επίδοσης των μαθητών στα έργα που δοθηκαν, αφού δεν πραγματοποιήθηκε έλεγχος της σημαντικότητας των διαφορών με τη χρήση του κριτηρίου t. Συνεπώς δεν ισχυριζόμαστε τη γενίκευση των αποτελεσμάτων αυτών.

Πίνακας 2: Ποσοστό μαθητών Ελλάδας και Κύπρου ($\bar{x}$), ως προς την ευχέρεια (N) και ευελιξία (FL).

		Ελλάδα			**Κύπρος**		
			Ευχέρεια (N)				
		C1N	**C2N**	**C3N**	**C1N**	**C2N**	**C3N**
Ε' τάξη	1 λύση	19,5	19,5	29,3	29,5	13,1	19,7
	2 λύσεις	31,7	2,4	12,2	18	13,1	3,3
	≥3 λύσεις	11	10,95	1,2	13,95	22,95	12,3
	Λάθος/Κενά	13,4	28,05	28,05	12,3	13,95	26,25
Στ' τάξη	1 λύση	30	10	56,7	26,7	13,3	26,7
	2 λύσεις	40	26,7	3,3	15	0	1,7
	≥3 λύσεις	3,3	18,3	0	20	10,8	1,65
	Λάθος/Κενά	11,65	13,3	20	9,15	32,5	34,15
			Ευελιξία (FL)				
		C1FL	**C2FL**	**C3FL**	**C1FL**	**C2FL**	**C3FL**
Ε' τάξη	1 κατηγορία λύσεων (*ΑήΒ)	56,1*	24,4	41,5	70,5*	72,1	31,1
	2 κατηγορίες λύσεων (*ΑκαιΒ)	17*	14,6	2,4	0,0*	0	3,3

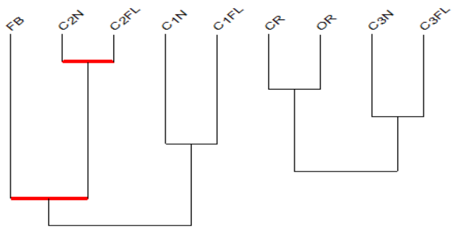
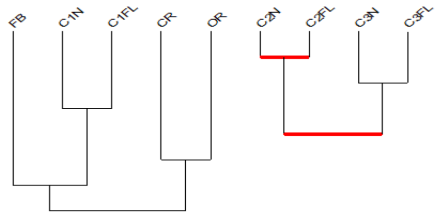
	3 κατηγορίες λύσεων		0	0		0	11,5
	Λάθος/ Κενά	13,45	30,5	14,65	14,75	13,9	20,475
Στ' τάξη	1 κατηγορία λύσεων (*ΑήΒ)	76,7*	33,3	56,7	75,0*	35	26,7
	2 κατηγορίες λύσεων (*ΑκαιΒ)	0,0*	23,3	3,3	3,3*	0	1,7
	3 κατηγορίες λύσεων		13,3	0		0	3,3
	Λάθος/ Κενά	11,65	15	20	10,85	32,5	33,325

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι οι μαθητές των δύο τάξεων Ελλάδας και Κύπρου δεν παρουσιάζουν υψηλή ευχέρεια και ευελιξία στα υπο μελέτη έργα. Αξιοσημείωτα είναι τα ποσοστά κενών και λανθασμένων απαντήσεων σε όλους τους μαθητές. Ειδικότερα, όσον αφορά τον παράγοντα της ευχέρειας παρατηρείται ότι η Ε΄τάξη και στις δύο χώρες σημειώνει κατά μέσο όρο πιο αυξημένη ευχέρεια σε σύγκριση με την Στ’τάξη, με εξαίρεση το έργο C2 για την Ελλάδα και το έργο C1 για την Κύπρο όπου οι μαθητές της Στ’ τάξης παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευχέρεια. Μεταξύ των δύο χωρών εντοπίζεται μεγαλύτερο ποσοστό υψηλής ευχέρειας (3 λύσεις και άνω) στους μαθητές της Κύπρου και των δύο τάξεων έναντι της Ελλάδας, με εξαίρεση το έργο C2 όπου η Στ΄ τάξη της Ελλάδας σημείωσε μεγαλύτερη ευχέρεια σε σχέση με την Στ΄ τάξη της Κύπρου.

Αναφορικά με τον παράγοντα της ευελίξιας, εντοπίζεται για όλους τους μαθητές και των δύο χωρών ιδιαίτερα χαμηλό ποσοστό, καθώς τα υψηλότερα ποσοστά εμφανίζονται σε μια μόνο κατηγορία λύσεων. Μεταξύ των δύο τάξεων της Ελλάδας, υψηλότερη ευελιξία εμφανίζει η Στ΄τάξη με εξαίρεση το έργο C1 όπου το ποσοστό των μαθητών της Ε’ που δίνουν δύο κατηγορίες λύσεων είναι εμφανώς υψηλότερο. Αντίθετα, η Ε’ τάξη της Κύπρου σημειώνει μεγαλύτερη ευελιξία σε σχέση με την Στ’ της ίδιας χώρας, με εξαίρεση το έργο C1. Μεταξύ των δύο χωρών, οι μαθητές της Ε΄ταξης Ελλάδας εμφανίζουν μεγαλύτερη ευελιξία σε σχέση με τους μαθητές της Ε’ τάξης Κύπρου, με εξαίρεση το έργο C3. Για τους μαθητές της Στ΄τάξης της Κύπρου φαίνεται να σημειώνουν υψηλότερη ευελιξία σε σχέση με την ίδια τάξη της Ελλάδας, με εξαίρεση το πρόβλημα C2.

Αποτελέσματα των διαγραμμάτων ομοιότητας

Για τον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ της ΑΕΧ και της δημιουργικότητας των μαθητών στα έργα του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε η ανάλυση ομοιότητας (Lerman, 1981) με το λογισμικό C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive), από την οποία προέκυψαν διαγράμματα ομοιότητας. Σε ένα διάγραμμα ομοιότητας σχηματίζονται ομάδες έργων τα οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο.

	
Διάγραμμα 3: Ομοιότητας δραστηριοτήτων των μαθητών Ελλάδας Ε’ και Στ’ τάξης.	**Διάγραμμα 4: Ομοιότητας δραστηριοτήτων των μαθητών Κύπρου Ε’ και Στ’ τάξης.**

Αναφορικά με τους μαθητές της Ελλάδας (Διάγραμμα 3), εντοπίζονται σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των δύο υπο-μελέτη εννοιών και ένας συντονισμός των μαθητών ως προς τις γνωστικές λειτουργίες τους. Αρχικά, η συμπεριφορά των μαθητών στο έργο (FB), φαίνεται να προσομοιάζει με εκείνη κατά την επίλυση του έργου δεύτερου δημιουργικότητας (C2) καθώς εμφανίζεται η σημαντική σχέση (FB (C2NC2FL)). Ακόμα, οι δύο αυτές δραστηριότητες φάνηκε ότι σχετίζονται και με την επίλυση της δημιουργικής δραστηριότητας C1.

Επιπλέον, η συστηματικότητα της συμπεριφοράς των μαθητών κατά την αντιμετώπιση της δραστηριότητας προσανατολισμού (OR) και εκείνης της περιστροφής καρτών (CR), φαίνεται να έχει μια χαμηλή σχέση ομοιότητας με τη δημιουργική δραστηριότητα μετασχηματισμού σχήματος σταθερής περιμέτρου ((CROR) (C3NC3FL)). Επίσης, αξίζει να αναφερθεί πως οι παράγοντες της δημιουργικότητας ευχέρεια και ευελιξία παρουσιάζουν ισχυρή και συνεπή ομοιότητα μεταξύ τους και στις τρεις δραστηριότητες (C1NC1FL), (C2NC2F) και (C3NC3FL).

Αντίθετα, για τους μαθητές Ε’ και Στ’ τάξης της Κύπρου (Διάγραμμα 4) οι διαστάσεις της χωρικής ικανότητας δε φαίνεται να σχετίζονται σε σημαντικό βαθμό με την δημιουργικότητα χωρίς ωστόσο να εμφανίζεται ισχυρή στεγανοποίηση μεταξύ των δυο ομάδων δραστηριοτήτων. Η μοναδική σχέση ομοιότητας είναι εκείνη μεταξύ της δραστηριότητας σύνθεσης σχήματος (FB) και της δημιουργικής (C1). Επίσης, φάνηκε ότι η ευχέρεια και η ευελιξία, συνδέονται με συνεπή ομοιότητα και στις τρεις δραστηριότητες με τις σχέσεις (C1NC1FL), (C2NC2FL) και (C3NC3FL), ομοίως όπως στο διάγραμμα των μαθητών της Ελλάδας.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ερευνητικό ερώτημα α: Αρχικά, τόσο από τα αποτελέσματα που προέρχονται από το μέσο όρο της επιτυχίας σε κάθε κατηγορία χωρικής ικανότητας ανά χώρα, όσο και από την ενδογενή ανάλυση της επιτυχίας στα προβλήματα της εκάστοτε κατηγορίας, τα αποτελέσματα για όλους τους μαθητές και των δύο χωρών παρατηρούνται χαμηλά. Αυτό έρχεται σε ρήξη με την βιβλιογραφία, όπου διαπιστώνεται πως υπάρχει σχέση μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της επιτυχίας στα μαθηματικά γενικά (Hegarty & Kozhevnikof, 1999). Ακόμα, το γεγονός ότι οι μαθητές δεν ανταποκρίνονται σε χαμηλής δυσκολίας έργα χωρικής ικανότητας, δείχνει την ανάγκη αναδιοργάνωσης της διδασκαλίας της Γεωμετρίας ως προς την προώθηση της αντίληψης εννοιών χώρου από τους μαθητές. Εξάλλου, η VanNiekerk (1995) υπογραμμίζει την αξία της αντίληψης του χώρου για την μελέτη της Γεωμετρίας.

Ακόμα, καταγράφεται μεγαλύτερη επιτυχία και στις τρεις διαστάσεις της χωρικής ικανότητας για τους μαθητές της Ελλάδας σε σχέση με την επίδοση των μαθητών της Κύπρου, ωστόσο τα αποτελέσματα αυτά αναμφισβήτητα δεν μπορούν να γενικευτούν στο σύνολο του πληθυσμού των δύο χωρών. Αναφορικά με τους μαθητές της Κύπρου, υπάρχει μια συνεπής αύξηση των ποσοστών επιτυχίας ανά τάξη, με την Στ’ τάξη να παρουσιάζει την μεγαλύτερη επιτυχία από όλους τους μαθητές της Κύπρου. Η προαναφερόμενη συνεπής σταθερή αύξηση της επιτυχίας με ταυτόχρονη αύξηση της ηλικίας των παιδιών της Κύπρου δεν εμφανίζεται ξεκάθαρα για τους μαθητές της Ελλάδας, με την Ε’ τάξη να παρουσιάζει σε δύο διαστάσεις καλύτερα αποτελέσματα.

Ερευνητικό ερώτημα β: Συνολικά, φαίνεται πως οι μαθητές των δύο τάξεων Ελλάδας και Κύπρου παρουσιάζουν χαμηλή δημιουργικότητα στα υπο μελέτη έργα, παρουσιάζοντας χαμηλή ευχέρεια και ευελιξία.

Ειδικότερα, η ευχέρεια κατά μέσο όρο και στις δύο χώρες εμφανίζεται υψηλότερη στους μαθητές της Ε’τάξης σε σχέση με εκείνους της Στ’, με εξαίρεση το έργο C2 για την Ελλάδα και το έργο C1 για την Κύπρο. Η ευελιξία φαίνεται να διαφοροποιείται καθώς στην Ελλάδα υψηλότερη ευελιξία εμφανίζει η Στ΄τάξη με εξαίρεση το έργο C1, ενώ στην Κύπρο η Ε’ τάξη, με εξαίρεση το ίδιο έργο (C1). Μεταξύ των δύο χωρών, εμφανίζεται μεγαλύτερο ποσοστό υψηλής ευχέρειας (3 λύσεις και άνω) στους μαθητές της Κύπρου και των δύο τάξεων έναντι της Ελλάδας, με εξαίρεση το έργο C2 για τους μαθητές της Στ΄ τάξης. Οι μαθητές της Ε΄ταξης Ελλάδας εμφανίζουν μεγαλύτερη ευελιξία σε σχέση με τους μαθητές της Ε’ τάξης Κύπρου, με εξαίρεση το έργο C3 ενώ για τους μαθητές της Στ΄τάξης της Κύπρου φαίνεται να σημειώνουν υψηλότερη ευελιξία σε σχέση με ίδια την τάξη της Ελλάδας, με εξαίρεση το πρόβλημα C2. Αναμφίβολα, οι διαφοροποίησεις ανα χώρα, τάξη και δραστηριότητα δεν επιτρέπουν ασφαλές συγκριτικό πόρισμα βασισμένο σε κάποια ισχυρή τάση.

Σχετικά με την συσχέτιση μεταξύ των παραγόντων της ευχέρειας και της ευελιξίας, από τον έλεγχο στο πρόγραμμα CHIC φαίνεται να παρουσιάζουν ισχυρή και συνεπή ομοιότητα μεταξύ τους και στις τρεις δραστηριότητες δημιουργικότητας. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με ευρήματα των Leikin et al. (2009), οι οποίοι επισημαίνουν ότι οι δύο αυτές έννοιες συνδέονται η μια με την άλλη εμφανιζόμενες σαν δίπολο.

Ερευνητικό ερώτημα γ: Όπως διαφάνηκε από τα διαγράμματα και των δύο χωρών για όλους τους μαθητές, η χωρική ικανότητα και η δημιουργικότητα των μαθητών συνδέονται. Η συσχέτιση αυτή αναδεικνύεται, ιδιαίτερα για τους μαθητές της Ελλάδας, καθώς τείνουν να συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο σε ορισμένες μεταβλητές δραστηριοτήτων. Ειδικότερα, η συμπεριφορά των μαθητών της Ελλάδας κατά την επίλυση της δραστηριότητας σύνθεσης σχημάτων (FB) φαίνεται να προσομοιάζει με εκείνη κατά την επίλυση των έργων δημιουργικότητας (C2) και (C1), καθώς και οι τρεις απαιτούν από τον μαθητή την ικανότητα σύνθεσης και μετασχηματισμών σχημάτων και οι μαθητές τις αντιμετώπισαν με παρόμοιο τρόπο. Ακόμα, η δραστηριότητα προσανατολισμού (OR) και εκείνης της περιστροφής καρτών (CR) φαίνεται να έχουν μια χαμηλή σχέση ομοιότητας με τη δημιουργική δραστηριότητα (C3). Στους μαθητές της Κύπρου από την άλλη, εντοπίζεται σχέση ομοιότητας μόνο μεταξύ της δραστηριότητας σύνθεσης σχήματος (FB) και της δημιουργικής περί σύνθεσης ισεμβαδικών σχημάτων (C1).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά τα προβλήματα χωρικής ικανότητας, οι μαθητές της Ελλάδας έχουν πιο ανεπτυγμένη AEX, σημειώνοντας καλύτερες επιδόσεις και στις τρεις διαστάσεις της χωρικής ικανότητας έναντι των μαθητών της Κύπρου. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα του συνόλου του δείγματος παρατηρούνται χαμηλά, γεγονός βέβαια που δεν μπορεί να γενικευτεί. Αναφορικά με τη δημιουργικότητα οι μαθητές και των δύο χωρών παρουσιάζουν ιδιαίτερα χαμηλή ευχέρεια και ευελιξία. Οι διαφοροποίησεις που εντοπίζονται ανα χώρα, τάξη και δραστηριότητα δεν επιτρέπουν ασφαλές συγκριτικό πόρισμα βασισμένο σε κάποια ισχυρή τάση. Η ευχέρεια και η ευελιξία φαίνεται να παρουσιάζουν ισχυρή και συνεπή ομοιότητα μεταξύ τους. Τέλος, η έρευνα καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η χωρική ικανότητα και η δημιουργικότητα των μαθητών συνδέονται και εντονότερα στους μαθητές της Ελλάδας γεγονός που υποστηρίζει την αναγκαιότητα επανάληψης ενδελεχών ερευνητικών προσεγγίσεων για τη διερεύνηση αυτής της σχέσης. Η ανάδειξη μιας τέτοιας συσχέτισης θα τονίσει την ανάγκη να εστιάσουν οι εκπαιδευτικοί στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών στα μαθηματικά σε σχέση με την ικανότητα AEX, αφού οι δύο αυτές διαστάσεις φαίνεται να αλληλεπιδρούν στην οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children, *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59–74.

Hegarty, M. and Kozhevnikov, M.(1999). Spatial reasoning abilities, working memory, and mechanical reasoning. In J.SGero and B.Tversky (eds.), *Visual and Spatial Reasoning in Design* (pp. 1-19). Sydney: Key Center of Design Computing and Cognition.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul, Korea, 8-13 July 2007* (pp. 161-168). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Leikin, R., Berman B., & Koichu B. (Eds.) (2009). *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris: Dunod.

Lohman, D.F. (1996). Spatial ability ang g. In I. Dennis & P. TApsfield (Eds.), *Human abilities: their nature and measurement* (pp. 97-116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.). *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 4, pp. 181–248). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. Journal for the Education of the Gifted, 30(2), 236-260.

Πιττάλης, Μ., Μουσουλίδης, Κ. & Χρίστου Χ. (2006). Η ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου ως παράγοντα πρόβλεψης της γεωμετρικής ικανότητας. *Έννοιες του Χώρου και Γεωμετρική Ικανότητα*. 9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου. Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

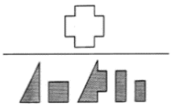
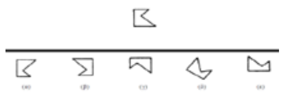
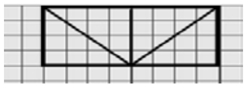
Reinhold, S. (2002).Topology in elementary school mathematics- a contribution to the improvement of children’s spatial ability?YERME Summer School Klagenfurt.

Torrance, E. P. (1974): *The Torrance tests of creative thinking: Technical-norms manual*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Torrance, E.P. (1994). *Creativity: Just wanting to know*. Pretoria, South Africa: Benedic books.

Wheatley, G. H. (1991). Enhancing mathematics learning throught imagery.*ArithmeticTeacher*, 39 (1), 34-36.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ Α’: Ποια από τα σχήματα όταν ενωθούν δίνουν το σχήμα που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή;  Κάθε σχήμα μπορεί μόνο να χρησιμοποιηθεί μια φορά και να περιστραφεί.	**ΜΕΡΟΣ Β’:**Ποια ή ποιες κάρτες που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή θα μπορούσαν να είναι η αρχική όταν την περιστρέψουμε; 
ΜΕΡΟΣ Γ’: α)Να φανταστείς ότι βρίσκεσαι στη γάτα και κοιτάζεις προς το αυτοκίνητο. Να δείξεις πιο κάτω τη θέση των φώτων τροχαίας, σχεδιάζοντας το κατάλληλο τόξο. 	**ΜΕΡΟΣ Δ’:**1)Βρες όσα περισσότερα και διαφορετικά σχήματα μπορείς που να έχουν ίσο εμβαδόν με το παρακάτω σχήμα!  2)Ένας γεωργός θέλει να αγοράσει ένα μικρό ορθογώνιο οικόπεδο επιφάνειας 36 τ.μ για να φτιάξει ένα λαχανόκηπο και να τον περιφράξει. **α)**Πόσες πιθανές διαστάσεις του ορθογώνιου λαχανόκηπου μπορείς να σκεφτείς και πόσα μέτρα περίφραξης θα χρειαστεί κάθε φορά ο γεωργός; Βρες όσες περισσότερες λύσεις μπορείς! **β)**Αν όμως θέλει ο γεωργός να σκεφτεί τι διαστάσεις πρέπει να έχει αυτός ο λαχανόκηπος, ώστε να του στοιχίσει η περίφραξη όσο γίνεται πιο οικονομικά, τι θα τον συμβούλευες για να τον βοηθήσεις; 3)Μια οικογένεια θέλει να φτιάξει ένα κήπο ορθογωνίου σχήματος για τα κουνέλια, αλλά έχει μόνο 16μ. συρματόπλεγμα για να το περιφράξει. **α)**Πόσο πιστεύεις θα είναι το μήκος των πλευρών αυτού του κήπου; Βρες όσες περισσότερες λύσεις μπορείς! **β)**Αν η οικογένεια αποφασίσει να έχει όσο το δυνατόν περισσότερο χώρο/επιφάνεια για τα κουνέλια για να κινούνται με μεγαλύτερη άνεση, ποιο πρέπει να είναι τώρα το μήκος των πλευρών της ορθογώνιας αυτής περίφραξης;

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΕΝΙΣΧΥΟΥΝ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΙ ΙΔΕΕΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Δέσποινα Δεσλή & Μαριάνθη Ζιώγα
Παιδαγωγική Σχολή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ddesli@eled.auth.gr, mizioga@eled.auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία διερευνώνται τα κριτήρια με τα οποία οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επιλέγουν προβλήματα μαθηματικών που προάγουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου. Συμμετείχαν 48 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί από τους οποίους ζητήθηκε να επιλέξουν ένα πρόβλημα και να εξηγήσουν τους λόγους για τους οποίους θεωρούν ότι καλλιεργεί τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Ακολούθησαν συνεντεύξεις με δύο εκπαιδευτικούς, με σκοπό να διερευνηθούν σε βάθος οι απόψεις τους, οι οποίες προκύπτουν συγκεχυμένες και απέχουν πολύ από τις απόψεις των ερευνητών. Αναδεικνύεται η ανάγκη για επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργικότητα κυρίως ορίζεται ως μια ατομική δραστηριοποίηση που στοχεύει στο να παράξει κάτι νέο (Bolden, Harries & Newton, 2010), ως «*πολυδιάστατη ικανότητα ή δεξιότητα του ανθρώπου να σκεφτεί κάτι καινούριο*» (Kwon, Park & Park, 2006, σελ.52). Σύμφωνα με άλλη άποψη, η δημιουργικότητα συνδέεται με την «ιδιοφυία» (Lilly & Bramwell-Rejskind, 2004), ως χαρακτηριστικό ατόμων που έχουν δημιουργήσει κάτι καινοτόμο. Ωστόσο, πρόσφατες έρευνες υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα σχετίζεται στενά με βαθιά ευέλικτη γνώση στα γνωστικά πεδία, με μεγάλο διάστημα εργασίας και όχι με μια στιγμιαία έμπνευση. Επίσης, επηρεάζεται από τη διδασκαλία, την καθοδήγηση και τις εμπειρίες του ατόμου (Silver, 1997). Συνεπώς, η διδασκαλία που καλλιεργεί και ενισχύει τη δημιουργικότητα μπορεί να είναι κατάλληλη για ένα μεγάλο εύρος μαθητών, και όχι μόνο για μερικές εξαιρέσεις. Μέσα στη σχολική τάξη, η δημιουργικότητα θεωρείται ότι μπορεί να βελτιώσει τη συμπεριφορά, τις κοινωνικές δεξιότητες, την αυτοεκτίμηση, τα κίνητρα και τις επιδόσεις (Bolden et al., 2010).

Στα μαθηματικά η δημιουργικότητα συχνά αξιολογείται σύμφωνα με τους εξής τέσσερις δείκτες δημιουργικότητας που πρότειναν οι Torrance (1966, στο Silver, 1997) και Guilford (1967, 1973, στο Klavir & Hershkovitz, 2008): α) *επάρκεια*, την ικανότητα του ατόμου να βρίσκει μεγάλο αριθμό λύσεων που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του ερωτήματος, β) *ευελιξία*, την ικανότητα του ατόμου να κινείται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών και να τις εναλλάσσει, γ) *πρωτοτυπία*, την ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με καινούριο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει αντισυμβατική και μη αναμενόμενη λύση, και δ) *περίτεχνη λύση*, την ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει την δοσμένη ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να προχωρά σε γενικεύσεις, να καταλήγει σε σύνθετες απαντήσεις.

Η επιλογή των κατάλληλων προβλημάτων που θα αναπτύξουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, συνδυασμένη αφενός με τη δημιουργία ενός ασφαλούς περιβάλλοντος, όπου οι μαθητές αισθάνονται ελεύθεροι να 'δοκιμάσουν' τους μαθηματικούς κανόνες, και αφετέρου με το ρόλο του ειδικού συμμετέχοντα ο οποίος παρέχει το θεωρητικό μαθηματικό υπόβαθρο, αποτελεί πολύ σημαντικό συστατικό στην προαγωγή της δημιουργικότητας (Levenson, 2013). Τα 'προβλήματα ανοιχτής απάντησης', για παράδειγμα, σπάνε το στερεότυπο ότι κάθε πρόβλημα έχει μία και μοναδική σωστή λύση και προσφέρονται για να αναδείξουν τη χρήση αποκλίνουσας σκέψης (Kwon et al., 2006). Καθώς οι μαθητές ψάχνουν διάφορες λύσεις και προσεγγίσεις, εκφράζουν ελεύθερα πολλές ιδέες (*επάρκεια*), προσπαθούν να βρουν νέες στρατηγικές όταν οι προηγούμενες δεν επαρκούν για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα (*ευελιξία*) και επινοούν πολλές έξυπνες και απρόσμενες ιδέες (*πρωτοτυπία*). Κατά συνέπεια, οι μαθητές αναδεικνύουν τις δικές τους διαφορετικές στρατηγικές, εμβαθύνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και αναπτύσσουν δημιουργική μαθηματική σκέψη (Klavir & Hershkovitz, 2008). Παρόμοια θετικά αποτελέσματα φαίνεται πως έχει η χρήση των 'μη τυποποιημένων προβλημάτων' (Yeo, 2009). Τα προβλήματα αυτά –συχνά έχουν μία λύση η οποία επιτυγχάνεται με διαφορετικούς τρόπους- δεν μπορούν να επιλυθούν με απλή απομνημόνευση ή εφαρμογή ενός γνωστού τύπου ή αλγορίθμου, αλλά απαιτούν τη χρήση ευρετικών. Αν και εμφανίζονται χαμηλές επιδόσεις στην επίλυση μη τυποποιημένων προβλημάτων (Kaur & Yap, 1999, στο Yeo, 2009), η ενασχόλησή τους με αυτά εξοικειώνει τους μαθητές με σκέψη υψηλού επιπέδου κατά τη διαδικασία κατανόησης, ανάλυσης, εξερεύνησης και εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών (Yeo, 2009).

Αποτελέσματα ερευνών σχετικά με την αξιοποίηση των προβλημάτων που προάγουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά από τη μεριά των εκπαιδευτικών είναι αρκετά αντικρουόμενα. Ο Silver (1997) αναφέρει ότι οι εκπαιδευτικοί συχνά βρίσκουν δύσκολη τη χρήση και διδασκαλία αυτού του είδους των προβλημάτων στην τάξη. Αυτό οφείλεται σε σημαντικό βαθμό στο σχεδιασμό του αναλυτικού προγράμματος, καθώς το διδακτικό υλικό που υποστηρίζει τη διδασκαλία δημιουργικών προβλημάτων είναι πολύ μικρό σε μέγεθος σε σχέση με το υλικό που υποστηρίζει μια πιο αυστηρή διδασκαλία των μαθηματικών. Η έλλειψη της κατάλληλης προετοιμασίας των εκπαιδευτικών αναδεικνύεται ως ένας επιπρόσθετος παράγοντας για την μικρή αξιοποίηση των δημιουργικών προβλημάτων στη σχολική τάξη (Aljughaiman & Mowrer-Reynolds, 2005. Bolden et al., 2010), καθώς φαίνεται πως οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν οι ίδιοι τη δημιουργικότητα. Κυρίως εστιάζουν στην πρωτοτυπία ως στοιχείο της δημιουργικότητας στα μαθηματικά και συνδέουν τη δημιουργικότητα με γνωστικά και συναισθηματικά οφέλη για τους μαθητές (Levenson, 2013). Παρόλο που οι απόψεις τους συχνά είναι συγκεχυμένες και αρκετά συντηρητικές (Desli & Zioga, 2015), εκφράζουν την προτίμησή τους στα δημιουργικά προβλήματα (Chiu, 2007).

Με δεδομένη τη μεγάλη σημασία της αναγνώρισης της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, η επιλογή των κατάλληλων προβλημάτων από τους εκπαιδευτικούς και η αξιοποίησή τους στο δημοτικό σχολείο είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τα κριτήρια με τα οποία οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης επιλέγουν προβλήματα μαθηματικών που προάγουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν 48 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί (83% γυναίκες και 17% άντρες) από διάφορα δημόσια δημοτικά σχολεία της ευρύτερης περιοχής της Θεσσαλονίκης, με ηλικία που κυμαίνεται ανάμεσα στα 26 και τα 58 έτη και μέσο όρο διδακτικής εμπειρίας τα 18 χρόνια. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Αρχικά στους συμμετέχοντες διανεμήθηκε ερωτηματολόγιο, βασισμένο στο ερευνητικό εργαλείο της Levenson (2013), το οποίο μέσα από ανοικτού-τύπου ερωτήσεις τους καλούσε να: α) επιλέξουν από όποιο βιβλίο μαθηματικών (σχολικό ή μη) θέλουν, ή ακόμα και να επινοήσουν μόνοι τους, ένα πρόβλημα που θεωρούν ότι είναι δημιουργικό, β) σημειώσουν την πηγή προέλευσής του, γ) αναφέρουν σε ποια τάξη απευθύνεται και να διευκρινίσουν το είδος της εργασίας (ατομική ή ομαδική) για το οποίο προορίζεται και δ) να εξηγήσουν για ποιους λόγους θεωρούν ότι το πρόβλημα που επέλεξαν καλλιεργεί τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν δόθηκε διευκρίνιση σχετικά με τον όρο ‘πρόβλημα’ και οι συμμετέχοντες ήταν ελεύθεροι να εκφράσουν τη δική τους ερμηνεία. Στη συνέχεια, δύο εκπαιδευτικοί, οι οποίοι επιλέχθηκαν τυχαία ανάμεσα σε αυτούς που συμπλήρωσαν ερωτηματολόγιο, κλήθηκαν σε ημιδομημένη συνέντευξη με σκοπό να διερευνηθούν σε βάθος οι απόψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα γενικά, για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά και για τη χρήση των δημιουργικών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Διαδικασία. Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε στους συμμετέχοντες στο χώρο εργασίας τους, οι οποίοι το συμπλήρωσαν ατομικά και το επέστρεψαν στους ερευνητές τις επόμενες ημέρες. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και προαιρετική, ενώ το ποσοστό επιστροφής των συμπληρωμένων ερωτηματολογίων έφτασε κοντά στο 90%. Οι συνεντεύξεις είχαν διάρκεια περίπου 20 λεπτών και πραγματοποιήθηκαν δύο εβδομάδες μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Προβλήματα που επέλεξαν οι εκπαιδευτικοί ως δημιουργικά. Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών (83%) επέλεξε προβλήματα προερχόμενα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. Το 42% και το 38% αυτών των προβλημάτων προορίζονταν για ατομική ή ομαδική εργασία, αντίστοιχα, ενώ ένα μικρό ποσοστό προτείνονταν να αξιοποιηθεί τόσο ατομικά όσο και ομαδικά από τους μαθητές.

Η Γιώτα, εκπαιδευτικός με 16 χρόνια υπηρεσίας, επέλεξε ως δημιουργικό ένα πρόβλημα από το Τετράδιο Εργασιών της Στ’ τάξης, προτείνοντας την ομαδική εργασία για αυτό (Σχήμα 1). Εξηγώντας τους λόγους για τους οποίους θεωρεί το συγκεκριμένο πρόβλημα δημιουργικό, εστιάζει κυρίως στην ικανότητα των παιδιών για δημιουργία προβλημάτων καθώς και στο μαθηματικό περιεχόμενο του προβλήματος.

Σύμφωνα με την ίδια: «*Θα πρέπει να επιλέξουν ποιο θα είναι το άγνωστο ποσό, την τιμή του γνωστού ποσού και να γράψουν την εκφώνηση. Επίσης θα πρέπει να το λύσουν με δύο τρόπους: με αναγωγή στη μονάδα και με αναλογίες*». Το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν φαίνεται να σχετίζεται με τα ενδιαφέροντα των παιδιών, ούτε πηγάζει από κάποια ιδέα ή απορία τους, αντίθετα, η διατύπωσή του καθοδηγείται από το βιβλίο.

Η εκπαιδευτικός αναφέρει ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με δύο τρόπους με τη χρήση διαφορετικών στρατηγικών, γεγονός που συνδέεται με την καλλιέργεια της ευελιξίας ως ένα στοιχείο δημιουργικότητας. Ωστόσο, οι δύο αυτοί τρόποι προτείνονται από την εκπαιδευτικό και δεν προβλέπεται να αναζητηθούν και να αναδειχθούν από τους ίδιους τους μαθητές, ενώ παράλληλα οδηγούν μέσα από κατευθυνόμενα βήματα σε απόλυτα αλγοριθμικές απαντήσεις. Κατά συνέπεια, το πρόβλημα, με βάση τα δεδομένα του, είναι αρκετά κατευθυντικό και δεν επιτρέπει στους μαθητές πολλά περιθώρια για πρωτοτυπία.

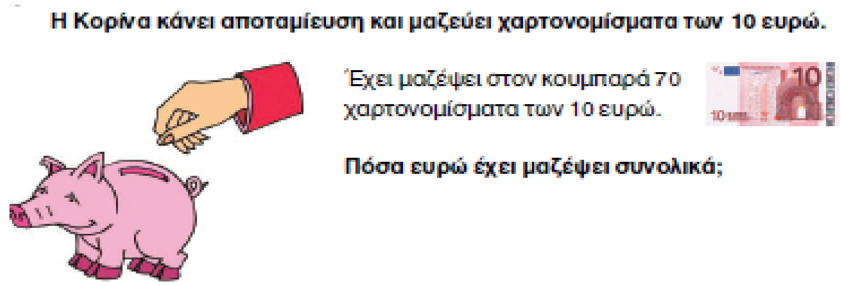
Γράψε ένα δικό σου πρόβλημα για ένα από τα παρακάτω ζευγάρια ποσών:

α) 7 σελίδες σε 4 λεπτά   β) 24 χιλιόμετρα σε 3 ώρες   γ) 7 € τα 2 κιλά

Σχήμα 1: Προτεινόμενο δημιουργικό πρόβλημα (Στ’ τάξη, Τ.Ε., β’ τεύχος, σελ. 40)

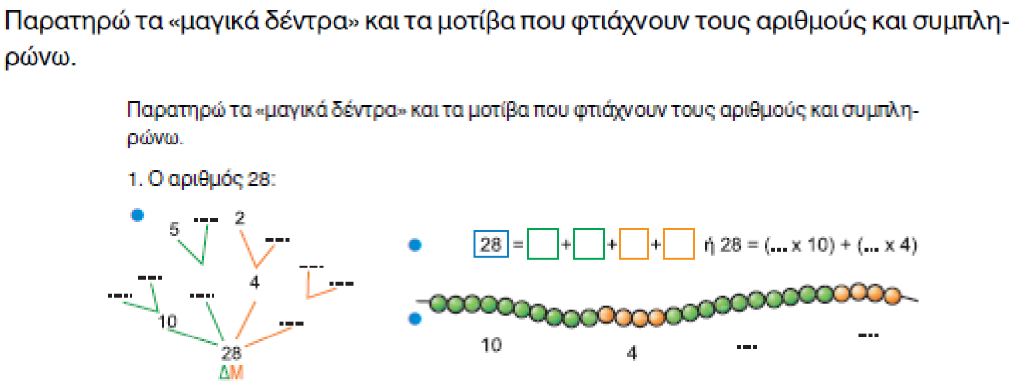
Στο Σχήμα 2 παρουσιάζεται ένα πρόβλημα από το Τετράδιο Εργασιών της Γ’ τάξης για ατομική εργασία που πρότεινε ως δημιουργικό η Ελένη, εκπαιδευτικός με 12 χρόνια υπηρεσίας. Η εκπαιδευτικός συνδέει την έννοια της δημιουργικότητας με το μαθηματικό περιεχόμενο (εκτέλεση πολλαπλασιασμού) αλλά και με την καθημερινή ζωή των παιδιών. Όπως ενδεικτικά αναφέρει: «*Είναι δημιουργικό γιατί εμπλέκεται ο πολλαπλασιασμός με τα ευρώ και αυτό είναι κάτι που θα βοηθήσει τα παιδιά στην καθημερινή τους ζωή (αγορές, ρέστα, κόστος κλπ.)*». Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτεί μία και μοναδική αλγοριθμική απάντηση, γεγονός που δεν εμπόδισε την Ελένη να θεωρήσει το πρόβλημα δημιουργικό. Αντίθετα, θεωρεί ότι είναι πρόβλημα που προσφέρεται για χρήση εποπτικού υλικού καθώς είναι «*βγαλμένο από τις καθημερινές δραστηριότητες και ενδιαφέροντα των μαθητών*», γεγονός που πιθανόν, σύμφωνα με την ίδια, να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών.

Ο Ηλίας, εκπαιδευτικός με 22 χρόνια υπηρεσίας, επέλεξε ένα πρόβλημα της Β’ τάξης (Σχήμα 3) το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο ατομικά όσο και ομαδικά. Αναφορικά με τους λόγους για τους οποίους αυτό το πρόβλημα είναι κατά τη γνώμη του δημιουργικό, εστιάζει αρχικά σε καθαρά γνωστικούς στόχους: «*Διδάσκει διάκριση δεκάδων–μονάδων και τρόπους ανάλυσης αριθμών. Διευκολύνει την πρόσθεση και την αφαίρεση.*» Συνδέει, ωστόσο, τη δημιουργικότητα με την ύπαρξη πολλών λύσεων, την



Σχήμα 2: Προτεινόμενο δημιουργικό πρόβλημα (Γ’ τάξη, Τ.Ε., γ’ τεύχος, σελ. 23)

πρωτοτυπία και τη συζήτηση γύρω από την αναζήτηση διαφορετικών λύσεων. Δίνει έμφαση στις διαφορετικές αναπαραστάσεις ανάλυσης αριθμού (μοτίβο, γινόμενα, δεντροδιάγραμμα, αριθμογραμμή), ενισχύοντας τη δυνατότητα να μοντελοποιήσουν (ζωγραφίσουν) οι μαθητές τα δεδομένα του προβλήματος.



Σχήμα 3: Προτεινόμενο δημιουργικό πρόβλημα (Β' τάξη, Β.Μ., α' τεύχος, σελ. 59)

Τα στοιχεία που ανέφεραν οι συμμετέχοντες ότι προάγουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά αφορούν κυρίως στη δημιουργία προβλήματος από τους ίδιους τους μαθητές (37,5%), το μαθηματικό περιεχόμενο (25%) και τη σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή των παιδιών (16,7%). Ιδιαίτερα αισιόδοξο είναι το γεγονός ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην ιδέα επίλυσης ενός προβλήματος με απρόσμενες, μη συνηθισμένες ερωτήσεις (κυρίως γρίφοι) συνδέοντας αυτή τη διαδικασία με ενίσχυση των κινήτρων των μαθητών και δημιουργικότητα (20,8%). Ωστόσο, πολύ συχνά αναφέρθηκαν στοιχεία που συνάδουν με περισσότερο 'παραδοσιακές' και 'συντηρητικές' προσεγγίσεις όπως, για παράδειγμα, η εφαρμογή συγκεκριμένων βημάτων στην επίλυση και η έμφαση σε αλγοριθμικές τεχνικές (29,1% και 20,8%, αντίστοιχα). Επιπρόσθετα, παρόλο που αρκετοί συμμετέχοντες εντόπισαν ότι η επίλυση προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους είναι στοιχείο δημιουργικότητας, στην πλειοψηφία τους δεν ανέδειξαν ότι οι τρόποι αυτοί είναι προτιμότερο να πηγάζουν από τα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες των μαθητών, και όχι να υπαγορεύονται από την εκφώνηση ή μέσα από απόλυτα ιεραρχημένα βήματα. Οι λόγοι για τους οποίους οι εκπαιδευτικοί επέλεξαν τα προβλήματα ως δημιουργικά συνοψίζονται στον Πίνακα 1[2].

Στοιχεία δημιουργικότητας στα προβλήματα των μαθηματικών	**Ποσοστό**
Δημιουργία / κατασκευή προβλήματος από τους μαθητές	37,5%
Ύπαρξη συγκεκριμένων βημάτων για την επίλυση	29,1%
Μαθηματικό περιεχόμενο	25,2%
Ύπαρξη μη συνηθισμένων ερωτήσεων	20,8%
Έμφαση σε αλγοριθμική σκέψη και τεχνικές	20,8%
Σύνδεση με την καθημερινή ζωή των παιδιών	16,7%

[2] Καθώς οι συμμετέχοντες είχαν τη δυνατότητα να αναφέρουν περισσότερους από έναν λόγους, το άθροισμα των ποσοστών εμφάνισης αυτών των λόγων ξεπερνά το 100%.

Χρήση εποπτικού υλικού και παιχνιδιού	12,6%
Κατασκευές από παιδιά (ζωγραφική)	8,4%
Χρήση και επέκταση προηγούμενων γνώσεων και δεξιοτήτων	8,4%
Ύπαρξη πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα	8,4%
Σενάριο που εγείρει τα ενδιαφέροντα των παιδιών	8,4%
Σύνδεση με άλλες γνωστικές περιοχές, διαθεματικότητα	4,2%
Δυνατότητα να εξελιχθεί με διάφορες παραλλαγές ανάλογα με τις παρατηρήσεις ή τις απορίες των παιδιών	4,2%

Πίνακας 1: Στοιχεία που οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι προάγουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά

β. Αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις. Οι δύο εκπαιδευτικοί που πήραν μέρος στη συνέντευξη (Κατερίνα και Βέτα, με 4 και 30 χρόνια υπηρεσίας, αντίστοιχα) συμφωνούν πως όλα τα γνωστικά αντικείμενα μπορούν να ευνοήσουν την καλλιέργεια και ανάπτυξη της δημιουργικότητας στα παιδιά, όμως περισσότερο η γλώσσα, τα καλλιτεχνικά και η μελέτη περιβάλλοντος.

Κατερίνα: *Όλα τα αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος… σε κάποια όμως είναι πιο εύκολο, για παράδειγμα, στη γλώσσα είναι πιο εύκολο από ό,τι στα μαθηματικά.*

Εν τούτοις, πιστεύουν ότι στην πράξη, στη σχολική τάξη, δεν καλλιεργείται ιδιαίτερα η δημιουργικότητα. Η καλλιέργειά της εξαρτάται από τον εκπαιδευτικό και τις δραστηριότητες που επιλέγει, όμως τα σχολικά βιβλία, η φύση των μαθημάτων και ο τρόπος διδασκαλίας δε προσφέρονται για το σκοπό αυτό. Χαρακτηριστικά, αναφέρθηκε:

Κατερίνα: *Στην πράξη εξαρτάται από τον εκάστοτε εκπαιδευτικό τι δράσεις θα επιλέξει. Όπως είναι τα βιβλία στη γλώσσα και τα μαθηματικά, δε στοχεύουν όλες οι δραστηριότητες στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας. Από εκεί και πέρα πρέπει να επέμβει ο δάσκαλος, είτε διαφοροποιώντας είτε προτείνοντας κάτι άλλο.*

Οι δύο εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι τα δημιουργικά προβλήματα απαιτούν περισσότερο χρόνο από τα μη δημιουργικά για τη διδασκαλία τους. Ως μία επιπλέον απαίτηση που έχουν τα προβλήματα αυτά, εκτός του χρόνου, αναφέρεται η καλή συνεργασία και αλληλεπίδραση των παιδιών.

Βέτα: *Συνήθως αυτά τα προβλήματα τα δουλεύω σε ομάδες, οπότε είναι κι αυτό ένα κομμάτι, το πώς θα συνεργαστούν, το να μην επισκιάσει ο ένας τον άλλον, η αλληλεπίδραση των παιδιών.*

Οι εκπαιδευτικοί δηλώνουν πως δεν είναι εφικτό να εργάζεται η τάξη σε καθημερινή βάση λύνοντας κυρίως δημιουργικά προβλήματα, γιατί δεν επαρκεί ο χρόνος.

Βέτα: *Δύσκολο, θα δουλέψεις ένα ή δυο προβλήματα, όχι παραπάνω. Γιατί έχουν πολλές πράξεις, χρειάζονται χρόνο, η ώρα των μαθηματικών δε φτάνει. Βεβαίως αν δεν ακολουθήσεις το αναλυτικό πρόγραμμα ή την ύλη που σε δεσμεύει, μπορείς να τα καταφέρεις.*

Θεωρούν πως είναι ευθύνη των εκπαιδευτικών να δώσουν στους μαθητές ευκαιρίες για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά. Παράλληλα, τονίζεται και η ανάγκη για αλλαγή στη φιλοσοφία της διδασκαλίας των μαθηματικών, για απαγκίστρωση από το μετωπικό μοντέλο διδασκαλίας.

Κατερίνα: *Βέβαια, είναι δική μας ευθύνη, εμείς είμαστε αυτοί που θα εισάγουμε τα παιδιά σε αυτές τις στρατηγικές, για την τόνωση της φαντασίας, της δημιουργίας… θα πρέπει να αλλάξει η φιλοσοφία των μαθηματικών. Γιατί κυρίως κυριαρχεί το μετωπικό μοντέλο στα μαθηματικά, ότι έχω τους μαθητές απέναντι και κάνω διάλεξη. Αυτό δεν φτάνει για τη δημιουργικότητα.*

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να θεωρούν ότι η δημιουργικότητα είναι δυνατόν να καλλιεργηθεί στο σχολείο μέσα από όλα τα μαθήματα. Εντούτοις, δηλώνουν πως μαθήματα, όπως η γλώσσα και τα εικαστικά, ευνοούν την ανάπτυξη της δημιουργικότητας σε μεγαλύτερο βαθμό από ό,τι τα μαθηματικά, άποψη που συμφωνεί με την έρευνα των Bolden, Harries και Newton (2010). Αναφορικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, θεωρούν ότι δεν ευνοείται η ανάπτυξή της κυρίως γιατί οι ίδιοι περιορίζοται από το αναλυτικό πρόγραμμα και αισθάνονται πίεση από τις απαιτήσεις της εφαρμογής του.

Αρκετές δυσκολίες εντοπίστηκαν στην αναγνώριση των στοιχείων που ενισχύουν τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, το στοιχείο που περισσότερο αναδείχθηκε από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς (37,5%) ήταν η δημιουργία προβλήματος από τους μαθητές. Αν και το στοιχείο αυτό θεωρείται χαρακτηριστικό δημιουργικής δραστηριότητας, οι εκπαιδευτικοί τις περισσότερες φορές αναφέρονταν σε αυτό σε συνδυασμό με την καθοδήγηση από το σχολικό εγχειρίδιο, γεγονός που αντιτίθεται στις περισσότερο φιλελεύθερες προσεγγίσεις. Η δημιουργικότητα άλλωστε στη δημιουργία προβλήματος βρίσκεται κυρίως στη διαδικασία στοχασμού, διατύπωσης, προσπάθειας για επίλυση, αναδιατύπωσης και οριστικής επίλυσης του προβλήματος (Silver, 1997). Ιδιαίτερη σύνδεση, επίσης, οι εκπαιδευτικοί αναγνώριζαν ανάμεσα στη δημιουργικότητα και την έμφαση στο μαθηματικό περιεχόμενο και τις καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Ωστόσο, η εικόνα που έχουν για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, μέσα από τα προβλήματα που επιλέγουν για να την αναπτύξουν, είναι αρκετά περιορισμένη, θολή και συγκεχυμένη, και ενίοτε μακριά από τις απόψεις των ερευνητών. Για παράδειγμα, ελάχιστες ή μηδαμινές ήταν οι αναφορές για την ύπαρξη πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα, την πρωτοτυπία, τη μη τυποποιημένη σκέψη, τα οποία, σύμφωνα με τους ερευνητές (Aljughaiman & Mowrer-Reynolds, 2005. Bolden et al., 2010. Klavir & Hershkovitz, 2008. Kwon et al., 2006. Yeo, 2009) αποτελούν στοιχεία δημιουργικότητας. Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι επέλεξαν προβλήματα σχεδόν αποκλειστικά από τα σχολικά εγχειρίδια ενδεχομένως δείχνει τη δυσκολία τους να επινοήσουν καταστάσεις που θα ενίσχυαν τη δημιουργικότητα των μαθητών τους.

Χρειάζεται, ωστόσο, να αναφερθεί ότι είναι συχνά δύσκολο να χαρακτηριστεί ένα πρόβλημα δημιουργικό ή μη δημιουργικό, ως έχει. Πολύ σημαντικό ρόλο –πέρα από την επιλογή των κατάλληλων προβλημάτων- παίζει ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται και αξιοποιείται στην τάξη από τον εκπαιδευτικό (Levenson, 2013), θέμα που αξίζει να ερευνηθεί περαιτέρω. Τέλος, αναδεικνύεται η σημασία της κατάλληλης και συνεχούς εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών, προκειμένου να είναι σε θέση τόσο να αναγνωρίζουν τα δημιουργικά προβλήματα όσο και να τα χρησιμοποιούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aljughaiman, A. & Mowrer-Reynolds, E. (2005). Teachers' conceptions of creativity and creative students. *The Journal of Creative Behavior, 39* (1), 17-34.

Bolden, D.S., Harries, A.V. & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teachers conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73* (2), 143-157.

Chiu, M. (2007). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 55-79.

Desli, D. & Zioga, M. (2015). Looking for creativity in primary school mathematical tasks. *Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Czech: Prague.

Klavir, R. & Hershkovitz, S. (2008). Teaching and evaluating open-ended problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/klavir.pdf*

Kwon, O.N., Park, J.S. & Park, J.H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pasific Education Review, 7* (1), 51-61.

Lilly, F. & Bramwell-Rejskind, G. (2004). The dynamics of creative teaching. *The Journal of Creative Behavior, 38* (2), 102-124.

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: teachers’ choices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16* (4), 269-291.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *The International Journal of Mathematics Education, 29* (3), 75-80.

Yeo, K.K.J. (2009). Secondary 2 students' difficulties in solving non-routine problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 10*, 1-30.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VORONOI ΚΑΙ ΑΟΖ: ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΕ ΑΥΘΕΝΤΙΚΟ ΧΩΡΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Καφετζόπουλος Γεώργιος – Ιγνάτιος, Κόσυβας Γεώργιος, Λυγάτσικας Ζήνων

Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ, Σχολικός Σύμβουλος κλ. ΠΕ03 Α΄ Αθήνας, Εκπαιδευτικός κλ. ΠΕ03 Πρότυπου Πειραματικού ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

gkafetzo@math.uoa.gr, gkosyvas@gmail.com, zenon7@otenet.gr

Περίληψη: Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος Mascil με θέμα τη συνεργατική διερεύνηση και επίλυση του προβλήματος της Αποκλειστικής Οικονομικής Ζώνης (ΑΟΖ) από μαθητές της Α΄ Λυκείου. Ειδικότερα, πραγματεύεται τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να αξιοποιηθεί ο αυθεντικός χώρος εργασίας για να αναδείξει και να εμπλουτίσει τις μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές σχεδίασαν την ΑΟΖ στο Geogebra, γνώρισαν το γεωμετρικό υπόβαθρο της ΑΟΖ και ανέπτυξαν νοήματα της μεσοκαθέτου. Αξιοσημείωτη είναι η χάραξη της ΑΟΖ με τα διαγράμματα Voronoi στο χάρτη και η συνεισφορά των ακριτικών νησιών στο μέγεθός της.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο όρος διερευνητική μάθηση (inquiry-based learning) αναφέρεται σε μαθητοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας στις οποίες οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, εξερευνούν καταστάσεις και αναπτύσσουν τους δικούς τους τρόπους για την εξεύρεση λύσεων (Maaß & Artigue, 2013). Πρόκειται για τη διδασκαλία στην οποία οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με μεθόδους παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί και γενικότερα οι επιστήμονες. Διερευνητικές προσεγγίσεις της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί σε πολλές χώρες, όπως στο Ηνωμένο Βασίλειο (Jaworski, 1994) και στις ΗΠΑ με διδακτικά πειράματα για τη δημιουργία της «διερευνητικής τάξης των μαθηματικών» (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992). Επιπλέον, το ρεύμα της διερευνητικής μάθησης για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες τα τελευταία χρόνια έχει ευρύτατη απήχηση στην Ευρώπη, όπου σχεδιάζονται και υλοποιούνται μεγάλα προγράμματα (Artigue & Baptist, 2012, Maaß & Artigue, 2013). Το ευρωπαϊκό ερευνητικό πρόγραμμα Mascil (Discovering Mathematics and Sciences in everyday life and at work) ανήκει σε αυτή την κατηγορία.

Η διερεύνηση αποτελεί μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση της μάθησης, όπου τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί αφήνουν τους παραδοσιακούς τους ρόλους. Οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, εξερευνούν, εμπλέκονται, εξηγούν, επεκτείνουν, εκτιμούν, συνεργάζονται (Artigue &

Blomhøj, 2013). Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν την εξερεύνηση, παροτρύνουν, καθοδηγούν.

Οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι μια από τις βασικές δυσκολίες της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η αδυναμία σύνδεσής τους με την πραγματική ζωή. Ο Gravemeijer, εκπρόσωπος των ρεαλιστικών μαθηματικών, αποδίδει τις γνωστικές δυσκολίες των μαθητών στο χάσμα που υφίσταται ανάμεσα στην καθημερινή ζωή και τα φορμαλιστικά μαθηματικά. Ο ίδιος πιστεύει ότι το χάσμα μπορεί να γεφυρωθεί, γιατί η καθημερινή εμπειρία και τα αφηρημένα μαθηματικά δεν είναι εντελώς διαφορετικές οντότητες. Προτείνει μια διαδικασία προοδευτικής μαθηματικοποίησης, στην οποία τα φορμαλιστικά μαθηματικά οικοδομούνται ως φυσική επέκταση της εμπειρικής πραγματικότητας των μαθητών (Gravemeijer, 1999).

Η σύζευξη διερευνητικής μάθησης και αυθεντικού χώρου εργασίας διευκολύνει τη δημιουργική σύνθεση προκλητικών προβλημάτων τα οποία ανατίθενται στους μαθητές. Η αξιοποίηση των δραστηριοτήτων, οι οποίες σχετίζονται με τον αυθεντικό χώρο εργασίας επιτρέπει την ανάπτυξη παιδαγωγικών στρατηγικών που θα φέρουν το μαθητή πιο κοντά στα αυστηρά και αφηρημένα μαθηματικά (Williams & Wake, 2007). Οι μαθητές, υποδυόμενοι το ρόλο του επαγγελματία, καλούνται να συνδυάσουν τις γνώσεις τους, προκειμένου να ανταπεξέλθουν στις διερευνητικές δραστηριότητες. Η χρήση της τεχνολογίας κατά την επίλυση των δραστηριοτήτων προσφέρει δυνατότητες δημιουργίας καινοτόμων κατασκευών από τους μαθητές (Wake, 2014). Ακόμη, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν τους περιορισμούς και τις δυσκολίες, τις οποίες αρκετοί εργαζόμενοι συναντούν στον αυθεντικό χώρο εργασίας καθώς χρησιμοποιούν τα μαθηματικά.

Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να μοντελοποιήσουν πραγματικά προβλήματα, τα οποία προέρχονται από αυθεντικό χώρο εργασίας (World of Work). Η εξάρτηση από το πλαίσιο του χώρου εργασίας φαίνεται να είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που υποστηρίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν περισσότερο τις νέες τους αντιλήψεις (Triantafillou & Potari, 2014). Στο πλαίσιο της διερευνητικής μάθησης, οι μαθητές καταγίνονται με μελετημένες δραστηριότητες, οι οποίες τούς ενθαρρύνουν να διερευνήσουν προβληματικές καταστάσεις. Η ενασχόληση με πραγματικές καταστάσεις αποτελεί πρόκληση και αφυπνίζει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, όταν παρέχονται στους μαθητές τα κατάλληλα εργαλεία. Εξαιτίας των καθορισμένων κανόνων και των περιορισμών στον αυθεντικό χώρο εργασίας, οι μαθητές δεν εμπλέκονται άμεσα με το πλαίσιο του χώρου εργασίας, αλλά χρησιμοποιούν δραστηριότητες και εργαλεία ως καταστάσεις προσομοίωσης (Triantafillou & Potari, 2014).

Ο χώρος εργασίας στην παρούσα έρευνα αποτέλεσε το βασικό πλαίσιο στο οποίο εργάστηκαν οι μαθητές. Στο μέλλον, οι μαθητές θα αντιμετωπίζουν αυθεντικά προβλήματα και έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο θα χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους για την επίλυσή τους. Επομένως, η καινοτομία της έρευνας έγκειται στην αυθεντικότητα της δραστηριότητας και το διαφορετικό προσανατολισμό σχετικά με τις υπάρχουσες εμπειρίες των μαθητών στο σχολείο (Triantafillou & Potari, 2014). Ακόμη, οι Triantafillou και Potari (2014) τονίζουν ότι χρειάζεται περισσότερη έρευνα στον τρόπο με τον οποίο υποστηρίζονται οι μαθητές να πραγματοποιούν συνδέσεις μεταξύ τυπικών και βιωματικών πτυχών της γνώσης κατά την ανάπτυξη του μαθηματικού νοήματος.

Η εργασία αυτή αφορά στη διερεύνηση και χάραξη της ΑΟΖ από μαθητές της Α΄ Λυκείου και αποτελεί μέρος του προγράμματος Mascil. Η ΑΟΖ είναι η περιοχή, στην οποία μία χώρα έχει το δικαίωμα εκμετάλλευσης του υπεδάφους. Όταν δύο χώρες συνορεύουν, ορίζεται ως ΑΟΖ της πρώτης χώρας η περιοχή της οποίας τα σημεία είναι πλησιέστερα στο χερσαίο τμήμα της πρώτης χώρας σε σχέση με τη δεύτερη. Αν επιλεγούν δύο σημεία στις δύο χώρες η μεσοκάθετος του τμήματος που ορίζουν τα σημεία αντιστοιχεί στο σύνορο της ΑΟΖ. Το λογισμικό Geogebra, υποστηρίζοντας τη χάραξη μεσοκαθέτου σε ευθύγραμμα τμήματα κρίνεται κατάλληλο εργαλείο για τον πειραματισμό των μαθητών στην οριοθέτηση της ΑΟΖ για την περίπτωση των τριών ή τεσσάρων σημείων.

Μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι χώρες για τον προσδιορισμό της ΑΟΖ, και την οριοθέτηση θαλασσίων ζωνών που αλληλεπικαλύπτονται με βάση τη Σύμβαση για το Δίκαιο της Θάλασσας, είναι τα διαγράμματα Voronoi, τα οποία αποτελούν ισχυρό διεπιστημονικό εργαλείο μοντελοποίησης με τεράστιο εύρος εφαρμογών (Perham & Perham, 2011; Poehl, 2012; Καρυώτης 2004). Εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές διερευνούν, καθώς εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα που σχετίζεται με αυθεντικό χώρο εργασίας. Βασικά ερευνητικά ερωτήματα αυτής της εργασίας είναι:

(α) Ποιες διερευνήσεις των μαθητών για τη μεσοκάθετο και το διάγραμμα Voronoi ανέδειξαν το μαθηματικό υπόβαθρο της ΑΟΖ;

(β) Το πλαίσιο του αυθεντικού χώρου εργασίας ευνόησε την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση του προβλήματος της ΑΟΖ;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Κατά το σχολικό έτος 2014-2015, σε ένα τμήμα της Α΄ Λυκείου της Βαρβακείου Σχολής Αθηνών, οργανώθηκαν δύο δίωρες πειραματικές διδασκαλίες και δόθηκαν δραστηριότητες οι οποίες οδηγούσαν στην διερεύνηση του ακόλουθου προβλήματος: *Σας έχει ανατεθεί η αποστολή να χαράξετε την ΑΟΖ της Κυπριακής Δημοκρατίας, της Ελλάδας, της Αιγύπτου* *και του Ισραήλ. Να βρείτε έναν «δίκαιο» τρόπο χάραξης των συνόρων της ΑΟΖ. Να λάβετε πρώτα 3 και ύστερα 4 σημεία. Να εισαγάγετε τον χάρτη της περιοχής στο Geogebra και να κατασκευάστε το διάγραμμα Voronoi της περιοχής με ή χωρίς την Γαύδο. Τι συμπέρασμα βγάζετε;*

Η τάξη χωρίστηκε σε 5 ομάδες των 5 μαθητών. Το πρόβλημα της «δίκαιης», χάραξης μιας γραμμής εκμετάλευσης του θαλάσσιου χώρου που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο χωρών, τέθηκε από μια ομιλία του Ν. Λυγερού (ερευνητής στη γεωπολιτική). Από τους μαθητές μας ζητήσαμε να περιορισθούν στη χάραξη «δίκαιων» περιοχών μεταξύ 2, 3 και στη συνέχεια 4 σημειακών χωρών. Η ενασχόληση των ομάδων μαθητών είχε διερευνητικό χαρακτήρα, αφού δόθηκε επαρκής χρόνος να πειραματιστούν με το Geogebra. Στη συνέχεια, εισήχθη από το διδάσκοντα η ορολογία των διαγραμμάτων Voronoi έτσι ώστε και να περάσουν στην χάραξη της ΑΟΖ σε πραγματικό περιβάλλον με χάρτες που προμηθεύτηκαν από το GoogleMaps και εισήχθησαν στο περιβάλλον του λογισμικού. Πραγματοποιήθηκε μαγνητοφώνηση και βιντεοσκόπηση των διδασκαλιών και αξιοποιήθηκαν οι γραπτές λύσεις των μαθητών στις ομάδες καθώς και οι παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών που παρακολούθησαν τη διδασκαλία. Η ανάλυση των δεδομένων αφορά κυρίως στην παρατήρηση των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων εκπαιδευτικού - μαθητών και μαθητών - μαθητών (Collinsetal, 2004). Από τις σημειώσεις των παρατηρητών και τα καταγεγραμμένα οπτικοακουστικά δεδομένα, ταυτοποιήθηκαν κρίσιμα συμβάντα σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα και αποτέλεσαν τη βάση για την ανάλυση περιεχομένου.

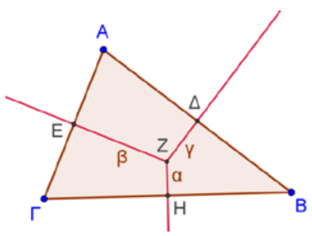
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Οι μαθητές κατά την πρώτη διδασκαλία διερευνώντας την κατάλληλη χάραξη γραμμών για τρία τυχαία σημεία στο Geogebra, σχεδίασαν διχοτόμους, διαμέσους και οδηγήθηκαν στις διαισθητικά στις μεσοκαθέτους σαν την καταλληλότερη μαθηματική έννοια που θα ανταποκρινόταν στο νόημα της λέξης «δίκαιη» .

98. Μ1: Πώς το βρίσκουμε; Ωραία εντάξει. Μπορώ να φέρω την μεσοκάθετο. Α, Β, Γ. […]. Αυτό το σημείο είναι πιο κοντά αυτό.

101. Μ2: Άρα, […] η μεσοκάθετος, χωρίζει αυτά τα δύο σημεία. Αυτό εδώ πέρα το σημείο είναι πιο κοντά από αυτό…[]. Άρα, ξέρουμε…

158. Μ1: Καταλήξαμε... Αποδείξαμε ότι οι διάμεσοι του τριγώνου δεν μπορούν να δείξουνε την ΑΟΖ των 3 σημείων.



164. Μ1: Αα, με μεσοκαθέτους βρήκαμε.

165. Μ2: Μπράβο!

166. Μ1: Χρειάζεται εδώ να το δικαιολογήσω;

167. Ε: Όχι, όχι. […] όμως πώς βρήκες το «δίκαιο» για να πάρουμε τις μεσοκάθετες; Εντάξει;

168. Μ1: … Ίσα κομμάτια ΑΟΖ σε κάθε χώρα. Ναι, όλα εντάξει.

Οι μαθητές της ομάδας μετά από πειραματικές διερευνήσεις με το Geogebra και διαπραγματεύσεις κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η διάμεσος δεν αποτελεί λύση στο πρόβλημα. Η μαθηματική έννοια που ανταποκρίνεται στο πρόβλημα είναι η μεσοκάθετος. Έτσι για να χωρίσουν τη θαλάσσια περιοχή μεταξύ των δύο χωρών Β και Γ κατασκεύασαν τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ. Με τη βοήθεια του λογισμικού εντόπισαν τα σημεία της μεσοκαθέτου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, τα σημεία τα οποία είναι πιο κοντά στο Β και εκείνα τα οποία είναι πιο κοντά στο Γ. Ομοίως, διαίρεσαν τη θαλάσσια περιοχή μεταξύ των Α και Γ και Α και Β κατασκευάζοντας τις μεσοκαθέτους των ΑΓ και ΑΒ. Οι τρεις μεσοκάθετοι τέμνονται σε ένα σημείο, το οποίο είναι το κέντρο Ζ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Αυτό το σημείο ισαπέχει από τις τρεις χώρες Α, Β, Γ. Οι μαθητές έδειξαν να συναποδέχονται ότι δεν απαιτείται αιτιολόγηση της επιλογής της μεσοκαθέτου. Μάλιστα πίστευαν ότι η «δίκαιη» αντιμετώπιση σημαίνει «ίσα κομμάτια ΑΟΖ σε κάθε χώρα». Για τα παραπάνω οι μαθητές αρκέστηκαν στην εμπειρική επιβεβαίωση.

Κατά τη μαθηματική συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη οι μαθητές εκθέτουν τις ανακαλύψεις τους. Ο εκπαιδευτικός εκμαιεύει τις ιδέες των μαθητών που συνδέονται με την επίλυση του προβλήματος, οργανώνει και αξιοποιεί την εργασία τους και βοηθά τους μαθητές να ερμηνεύσουν όσα βρήκαν. Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι η ΑΟΖ της χώρας Α είναι ίση με την ΑΟΖ των χωρών Γ και Β, επειδή το επίπεδο χωρίζεται σε «ίσα εμβαδά με επίκεντρες γωνίες 120^0». Στη συνέχεια ένας άλλος μαθητής υποστήριξε την εικασία: «Κάθε σημείο της ΑΟΖ της χώρας Α απέχει λιγότερο από τη χώρα Α παρά από τη Β». Στο τέλος, η αιτιολόγηση επικυρώνεται από τον εκπαιδευτικό με αναφορά στη σύγκριση των αποστάσεων (π.χ. των σημείων Μ και Λ των γωνιών ΕΖΔ και ΔΖΗ αντιστοίχως) από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ (ΜΑ<ΜΒ και ΛΒ<ΛΑ). Οι γωνίες προσδιορίζουν τις κυψέλες των χωρών Α και Β. Έτσι το διάγραμμα των μεσοκαθέτων χωρίζει το επίπεδο των τριών σημείων σε τρείς απεριορίστες κυψέλες, τις εξής:

γωνία ΕΖΔ (χώρα Α), γωνία ΔΖΗ (χώρα Β) και γωνία ΕΖΗ (χώρα Γ)

Στη συνέχεια οι μαθητές διερεύνησαν το πρόβλημα για τέσσερα σημεία (χώρες Α, Β, Γ, Δ), όχι όμως σύμφωνα με την πλήρη μελέτη (Delaunay).

189. Μ3: Μήπως μπορούμε να το χωρίσουμε σε 3 σημεία, να πάρουμε 3 σημεία τη φορά και να το χωρίσουμε έτσι;

Οι ιδέες των μαθητών για τα τέσσερα σημεία συνέκλιναν στην «τριγωνοποίηση». Η ίδια σκέψη απασχόλησε τους μαθητές της ομάδας 1 στη δεύτερη διδασκαλία. Ο ακόλουθος διάλογος είναι χαρακτηριστικός:

Μ4: Θα κάνουμε το ίδιο που κάναμε στα τρίγωνα, απλά στο ΑΓΔ και στο ΑΒΓ

Μ5: Αυτό λέω τρίγωνα, όμως τρίγωνα!

[…]

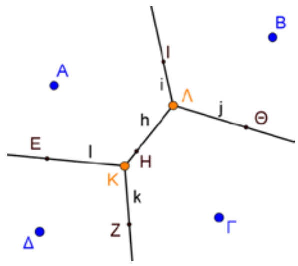
Μ4: Και μετά θα φέρουμε τις μεσοκαθέτους;

Μ5: Ναι βέβαια!

Μ4: Αυτό το σημείο είναι για εδώ σα να λέμε αυτό στο αντίστοιχο τριγωνάκι και θα γίνει άλλο ένα σημείο αυτό όπως αυτό εδώ και θα είναι κολλητάρια. Άρα το Voronoi είναι παντού με τρίγωνα! Έχει παντού τρίγωνα…

Μ5: Άρα είναι η περιοχή του Α αυτή, του Γ αυτή, φέρε να τις χρωματίσω..

Για το ίδιο θέμα (4 σημεία) ανάμεσα στους μαθητές της ομάδας 4 και στον εκπαιδευτικό έγινε η ακόλουθη στιχομυθία:



Ε: Πώς ξέρουμε ότι έχετε βρει τις ΑΟΖ για τις τέσσερις χώρες;

Μ6: Το έχουμε βρει για τα τέσσερα.

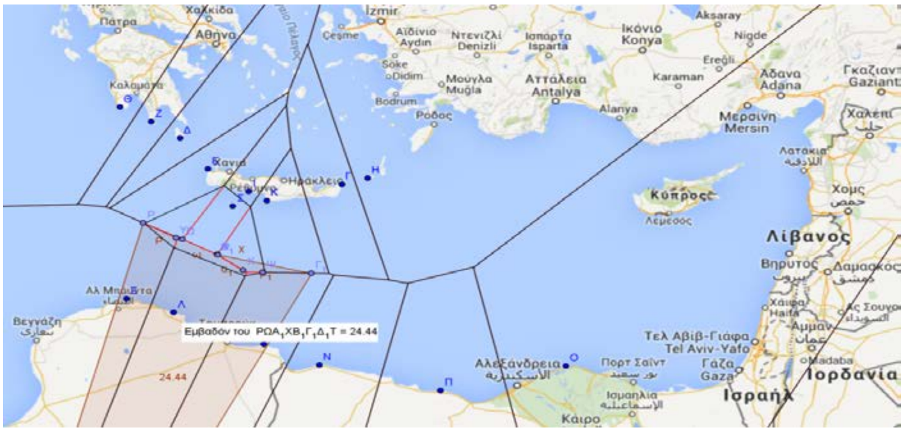
Μ7: [..] Αν πάρουμε ένα σημείο σε οποιοδήποτε επίπεδο (εννοεί την κυψέλη της ΑΟΖ κάθε χώρας), μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτό το σημείο θα απέχει λιγότερο από αυτό το σημείο…

Οι μαθητές σχεδίασαν τις μεσοκαθέτους και βρήκαν τα κέντρα Κ και Λ των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΒΓ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και οι μεσοκάθετες, σχημάτιζαν τώρα την επιθυμητή πολυγωνική γραμμή. Οι τέσσρες απεριόριστες κυψέλες που θα είναι οι ΑΟΖ των τεσσάρων σημείων Α, Β Γ και Δ είναι οι ακόλουθες:

ΙΛΘ (χώρα Β), ΘΛΚΖ (χώρα Γ), ΙΛΚΕ (χώρα Α) και ΕΚΖ (χώρα Δ)

Καθένα από τα αρχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ βρίσκεται στη δική του κυψέλη της ΑΟΖ. Σύμφωνα με την αιτιολόγηση που προσκόμισε ο μαθητής Μ7 σχετικά με τις κυψέλες της ΑΟΖ κάθε σημείο στο εσωτερικό της κυψέλης Α είναι πιο κοντά στο Α από ότι στα Β, Γ και Δ. Αυτή η σημαντική παρατήρηση προκύπτει από τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου. Η ίδια παρατήρηση μπορεί να γίνει για τις κυψέλες της ΑΟΖ των Β, Γ και Δ. Αφού οι μαθητές κατασκεύασαν την πολυγωνική γραμμή που καθορίζει τις ΑΟΖ των τεσσάρων σημείων, συνεδητοποίησαν τις δυσκολίες της χάραξης της πολυγωνικής γραμμής περισσοτέρων των 5 σημείων.

Στην συνέχεια ο εκπαιδευτικός παρουσίασε την έννοια των διαγραμμάτων Voronoi, το μαθηματικό αντίστοιχο της πολυγωνικής γραμμής, χωρίς όμως



να επισέλθει σε τεχνικές λεπτομέρειες όπως η τριγωνοποίηση Delaunay. Παρουσίσε επίσης, την συνάρτηση «ΔιάγραμμαVoronoi» του λογισμικού Geogebra. Αυτό βοήθησε να περάσουν οι μαθητές στο τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας: την χάραξη της ΑΟΖ με ή χωρίς τη νήσο Γαύδο.

Ακολούθησε συζήτηση στην τάξη για τα απομακρυσμένα νησιά (Γαύδος, Καστελόριζο), τα οποία αυξάνουν την ΑΟΖ της χώρας μας.

344. Ε: […]Τώρα για τη Γαύδο που σας έλεγα αν θέλετε να το δείτε άμα ανεβάσετε πάνω τον χάρτη και αν πάρετε το διάγραμμα Voronoi, κοιτάξτε εδώ να δείτε. Αυτή είναι η Γαύδος. Αν δεν υπήρχε η Γαύδος κοιτάξτε πόσο περιοριζόταν η ΑΟΖ της Ελλάδας. ….

351. Μ8: […] Στην ομιλία (βίντεο) του ο κύριος Λυγερός λέει πως το Καστελόριζο έχει μεγαλύτερη ΑΟΖ από την Πελοπόννησο.

352. Ε: […] Η μεσοκάθετος που δείξατε εσείς είναι επάνω. Έτσι; Αυτό είναι το διάγραμμα Voronoi. […]

Στη δεύτερη διδασκαλία οι μαθητές σχεδίασαν και υπολόγισαν με προσομοίωση στο Geogebra την επίδραση της Γαύδου στη μεταβολή της ΑΟΖ της χώρας μας.

Μ9 […] Χωρίς τη Γαύδο και το εμβαδό βγαίνει μικρότερο.

Μ10 Εδώ βγαίνει 22,… 23, … Τέλος πάντων βγαίνει μικρότερο. Ωραία μπορεί εδώ να μας φαίνεται μικρό, αλλά είναι πολλά τετραγωνικά.. Με την κλίμακα είναι πολύ περισσότερα…

Ε: Μάλιστα πολύ ωραία (χειροκρότημα από μαθητές).

Από την προηγούμενη συζήτηση προέκυψε το συμπέρασμα ότι οι επιρροές ακριτικών νησιών όπως το Καστελόριζο και η Γαύδος επιφέρουν αξιοσημείωτες κυψέλες, επεκτείνοντας την ΑΟΖ της χώρας μας και επηρεάζοντας θετικά την ελληνική οικονομία.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνολικά, το περιβάλλον της τάξης που οργανώθηκε από τον εκπαιδευτικό, στο πλαίσιο του Mascil, προσέφερε στους μαθητές ευκαιρίες διερευνητικής μάθησης και πλούσιας μαθηματικής επικοινωνίας. Το αυθεντικό πρόβλημα προκάλεσε μαθηματικά και πραγματολογικά επιχειρήματα ικανοποιώντας τη δημιουργική περιέργεια των μαθητών για τις εφαρμογές των Μαθηματικών. Οι μαθητές των διαφορετικών ομάδων μοιράστηκαν τις απαντήσεις τους στην ολομέλεια, συνέκριναν τις λύσεις τους, έκριναν το συλλογισμό των συμμαθητών τους, αναθεώρησαν τις ιδέες τους ως μια μικρή μαθηματική κοινότητα (Artigue & Blomhøj, 2013). Οι ευκαιρίες μάθησης ήταν άφθονες, επειδή οι μαθητές είχαν πολλές δυνατότητες προβληματισμού κατά τη διάρκεια της διερευνητικής δραστηριότητας.

Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, όπως αποδεικνύεται από την προηγούμενη παρουσίαση των αποτελεσμάτων, προκύπτει ότι οι διαπραγματεύσεις των μαθητών για τη μεσοκάθετο και το διάγραμμα Voronoi ανέδειξαν το γεωμετρικό υπόβαθρο της ΑΟΖ. Οι μαθητές ανακάλυψαν τα μαθηματικά της ΑΟΖ, παραμένοντας ενεργητικοί κατά τη φάση της διερεύνησης στις ομάδες, διατυπώνοντας ποικίλες λογικές εικασίες, στρατηγικές λύσεων και αιτιολογήσεις. Οι λύσεις των μαθητών τέθηκαν στην ολομέλεια της τάξης για περαιτέρω διερεύνηση, ανταλλαγή επιχειρημάτων και εμπλουτισμό της μάθησης. Οι μαθητές εστίασαν στη χάραξη και οριοθέτηση της θεωρητικής ΑΟΖ και τη σχεδίασαν με σχετική ακρίβεια χρησιμοποιώντας το Geogebra. Οι μαθηματικές διαστάσεις που διερεύνησαν οι μαθητές παραπέμπουν σε απλές γεωμετρικές ιδέες, όπως η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος, το περίκεντρο τριγώνου, ο περιγεγραμμένος κύκλος και η σύγκριση αποστάσεων σημείων με βάση την ιδιότητα της μεσοκαθέτου. Τα ευρήματα συμπλέουν με τις διδακτικές διαστάσεις διαφορετικών ερευνών με μαθητές παρόμοιας ηλικίας (Touval, 2011; Poehl, 2012; Colindres, 2015).

Για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, προκύπτει ότι το πρόβλημα της ΑΟΖ και η προσομοίωση της λύσης στο χάρτη με τη σχεδίαση του διαγράμματος Voronoi από το Geogebra, αποτέλεσαν μια θαυμάσια ευκαιρία για την ενασχόληση των μαθητών με μια αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Το πλαίσιο του αυθεντικού χώρου εργασίας ευνόησε την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών στη διερεύνηση και επίλυση της προβληματικής κατάστασης και τούς βοήθησε να στοχαστούν πάνω στις γεωμετρικές έννοιες που συνδέονται με τη μεσοκάθετο. Ο χώρος εργασίας αποτέλεσε ισχυρό μαθησιακό κίνητρο για τους μαθητές, το οποίο επηρέασε θετικά την εξεύρεση της μαθηματικής λύσης του προβλήματος (Triantafillou & Potari, 2014; Perham & Perham, 2011) και τη διαπραγμάτευση των νοημάτων της μεσοκαθέτου. Οι μαθητές ανέλαβαν τον επαγγελματικό ρόλο του νομικού διεθνούς οικονομικού δικαίου. Το πλαίσιο του προβλήματος της ΑΟΖ με τις πολύπλευρες διεπιστημονικές συνδέσεις του, έδωσε τροφή στον προβληματισμό των μαθητών για πραγματολογικά επιχειρήματα σε θέματα διεθνών διαπραγματεύσεων και ερμηνείας του δικαίου της θάλασσας. Επιπλέον, η υψηλή εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα επηρεάστηκε από την οργάνωση και διαχείριση του μαθησιακού περιβάλλοντος της τάξης και την αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας.

Στη χώρα μας η φορμαλιστική διδασκαλία των μαθηματικών είναι ασύνδετη με τον πραγματικό κόσμο. Ο επαγγελματικός χώρος είναι άγνωστο θέμα για την ελληνική εκπαίδευση και η διερεύνηση και λύση προβλημάτων είναι περιορισμένη στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών. Η ανάπτυξη πρακτικών που ευνοούν τη σύνδεση της μαθηματικής μάθησης των μαθητών με το χώρο εργασίας είναι κάτι πρωτόγνωρο για τους έλληνες εκπαιδευτικούς. Η παρούσα έρευνα χαράζει μια κατεύθυνση για αλλαγές στο συντηρητικό τοπίο που ενδημεί για δεκαετίες στη μαθηματική εκπαίδευση της χώρας μας. Ωστόσο, απαιτείται γόνιμη ερευνητική φαντασία και βαθύτερη σκέψη για το σχεδιασμό και τη διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας με σκοπό τη γεφύρωση του αφηρημένου χαρακτήρα των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6).

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education*, The Fibonacci Project.

Cobb P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis, *American Educational Research Journal*, 29, 573-604.

Colindres, C. A. M. (2015). Thunder and Lightning: Understanding Equidistance. *Mathematics Teacher*, *108*(6), 454–460.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*, 155-177.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*, London: Falmer Press.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*, 779–795.

Perham, A. E. & Perham, F. l. (2011). Voronoi Diagrams spring rain. *Mathematics Teacher*, *105*(2), 166–132.

Poehl, T. T. (2012). Delivered Tomorrow: Plane and Truck Geometry. *Mathematics Teacher*, *105*(9), 702–711.

Touval, A. (2011). Teaching the Perpendicular Bisector: A Kinesthetic Approach, *Mathematics Teacher*, *105*(4), 269–273.

Triantafillou, C., & Potari, D. (2014). Revisiting the place value concept in the workplace context: the issue of transfer development. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 337–358.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271–290.

Williams, J. S., & Wake, G. D. (2007). Metaphors and models in translation between college and workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 345–371.

Καρυώτης, Θ. (2004). *Η ΑΟΖ της Ελλάδας*. Αθήνα: Εκδόσεις Λιβάνη.

ΕΜΜΟΝΗ ΣΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ: ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ από ΤΗΝ ΗΛΙΚΙΑ;

Ιωάννης Παπαδόπουλος[1] **Άννα Αναστασιάδου**[2]
[1, 2] Π.Τ.Δ.Ε., Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκη
[1] ypapadop@eled.auth.gr [2] annaanas@eled.auth.gr[2]

Στην εργασία αυτή εξετάζεται κατά πόσο η εμμονή στον αλγόριθμο, ένας παράγοντας που σχετίζεται άμεσα με την επίδειξη δημιουργικής μαθηματικής σκέψης, εξαρτάται από την ηλικία και κατά συνέπεια τη μαθηματική εμπειρία. Στην έρευνα συμμετέχουν μαθητές της Στ' Δημοτικού, και φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης διαφορετικών εξαμήνων και με διαφορετικές επιλογές στα σχετικά με τα Μαθηματικά μαθήματα που έχουν επιλέξει. Τα αποτελέσματα δίνουν ενδείξεις ότι η εμμονή που επιδεικνύεται στον εκάστοτε αλγόριθμο δεν επηρεάζεται από την ηλικία των συμμετεχόντων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργικότητα στη μαθηματική σκέψη έχει αποτελέσει θέμα ερευνητικού ενδιαφέροντος εδώ και πάρα πολύ καιρό. Η ερευνητική κοινότητα δεν έχει καταλήξει σε έναν κοινά αποδεκτό ορισμό και αυτό αποτυπώνεται στη σχετική έρευνα όπου κανείς μπορεί να διακρίνει μια σειρά από διαφορετικές προσεγγίσεις: Δημιουργικότητα σε σχέση με το παραγόμενο προϊόν της σκέψης ή τη διαδικασία της σκέψης (Shriki, 2010), ως γενική ικανότητα ή σχετιζόμενη με συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή (Lev-Zamir & Leikin, 2011), δημιουργικότητα που σχετίζεται με τους προικισμένους μαθητές (Sriraman, 2005) ή δημιουργικότητα για όλους (Silver, 1997) και ακόμη πιο πρόσφατα, μαθηματική δημιουργικότητα όπως αυτή εκφράζεται σε εξωσχολικά περιβάλλοντα, όπως αυτό του εργασιακού χώρου (Noss & Hoyles, 2013). Σε όλες αυτές τις προσεγγίσεις εντοπίζονται εκείνες οι παράμετροι που φαίνεται να επηρεάζουν θετικά ή αρνητικά την παρουσία της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης. Σύμφωνα με τον Haylock (1997) μια τέτοια παράμετρος είναι η «εμμονή» που μπορεί να είναι δύο ειδών: είτε εμμονή με τον αλγόριθμο είτε εμμονή με το μαθηματικό περιεχόμενο. Παρά το γεγονός ότι ο όρος «αλγόριθμος» μπορεί να συνδέεται κυρίως με πράξεις εν τούτοις τον όρο αυτό καθιέρωσε ο Haylock και για τη συγκεκριμένη περίπτωση και έτσι χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία.

Στην έρευνα αυτή μελετάμε την επίδραση της εμμονής στον αλγόριθμο σε διαφορετικούς πληθυσμούς (μαθητές δημοτικού σχολείου και φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος). Το ερευνητικό μας ερώτημα είναι: Σχετίζεται η εμφάνιση της εμμονής στον αλγόριθμο με την ηλικία και αν ναι σε τι βαθμό συμβαίνει αυτό;

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας, ακολουθεί η περιγραφή της μεθοδολογίας, η παρουσίαση και ο σχολιασμός των ευρημάτων και στο τέλος παρουσιάζονται κάποια συμπερασματικά σχόλια.

Η ΕΜΜΟΝΗ ΣΤΟΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ ΚΑΙ Η ΥΠΕΡΒΑΣΗ ΤΗΣ

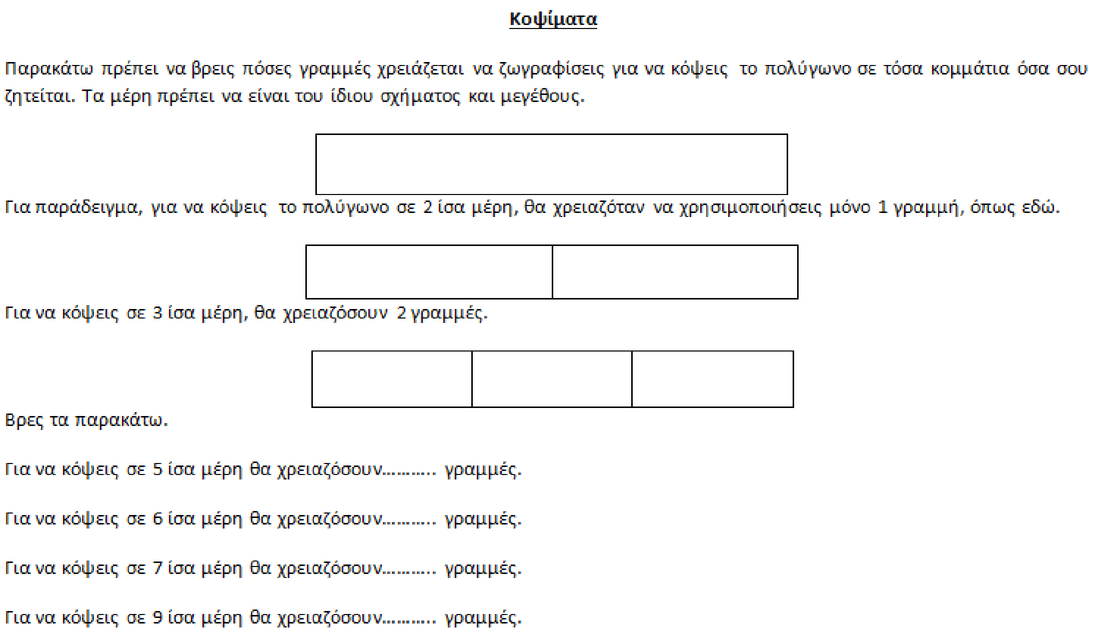
Η ικανότητα των μαθητών να επιδεικνύουν αποκλίνουσα σκέψη κατά την ενασχόλησή τους με μαθηματικά προβλήματα αποτελούσε πάντα ένα κριτήριο δημιουργικότητας. Η αποκλίνουσα σκέψη αποτελεί τον αντίθετο πόλο της συγκλίνουσας σκέψης η οποία αναφέρεται στη διαδικασία προσδιορισμού της μιας και μοναδικής λύσης ενός δοσμένου προβλήματος. Η αποκλίνουσα σκέψη αναφέρεται στη διαδικασία προσδιορισμού πολλών λύσεων και γι αυτό συχνά μετράται με βάση την ικανότητα των μαθητών να επιδεικνύουν *ευελιξία, ευχέρεια,* και *πρωτοτυπία* στις απαντήσεις τους σε ένα πρόβλημα. Η *ευελιξία* αποτελεί ένα μέτρο της ικανότητας του μαθητή να κάνει χρήση μια ποικιλίας διαφορετικών μεθόδων ή προσεγγίσεων για ένα δοσμένο πρόβλημα. Η ευχέρεια αναφέρεται στη μέτρηση του αριθμού των κατάλληλων απαντήσεων που παράγει ο μαθητής. Τέλος, η πρωτοτυπία αποτελεί ένα μέτρο της σχετικής καινοτομίας (ή περιορισμένης συχνότητας εμφάνισης) των απαντήσεων αυτών (Haylock, 1997). Ουσιαστικά δηλαδή η αποκλίνουσα σκέψη δηλώνει ότι το να είναι κανείς δημιουργικός είναι κάτι παραπάνω από το να μπορεί απλά να λύνει προβλήματα.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει η διάκριση ανάμεσα στην διαδικαστική και στην εννοιολογική κατανόηση. Η πρώτη σχετίζεται κυρίως με υπολογιστική ακρίβεια ενώ η δεύτερη χαρακτηρίζεται από μια κατανόηση του πως αυτοί οι υπολογισμοί λειτουργούν. Αυτός ο διαχωρισμός απαντάται και στη διάκριση που κάνει ο Polya (1981) ανάμεσα στη μαθηματική *πληροφορία* και στη μαθηματική *τεχνογνωσία* αντίστοιχα. Ένας μαθητής μπορεί να είναι σε θέση να λύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα εφαρμόζοντας σωστά έναν αλγόριθμο που έχει μάθει χωρίς την ύπαρξη πραγματικής εννοιολογικής κατανόησης σχετικά με το πώς προκύπτει η απάντηση αυτή στο πρόβλημα. Η ύπαρξη κάποιας έστω περιορισμένης εννοιολογικής κατανόησης ταυτόχρονα με την αλγοριθμική (διαδικαστική) επιτρέπει στο μαθητή μεγαλύτερα περιθώρια μαθηματικής δημιουργικότητας. Όμως αυτό το καλό μαθηματικό υπόβαθρο δεν είναι επαρκές κριτήριο για την εμφάνιση ή ανάπτυξη μαθηματικής δημιουργικότητας. Είναι επίσης απαραίτητο να είναι ο μαθητής σε θέση να αποδεσμευτεί από τον εδραιωμένο τρόπο να αντιμετωπίζει καταστάσεις αλλά και να εφαρμόζει αυτό το υπόβαθρο για να δει ευκαιρίες πέρα από αυτές που του εμφανίζονται ως δοσμένες, και ακριβώς σε αυτήν την ικανότητα για *ευελιξία* στην προσέγγιση της επίλυσης προβλήματος ελλοχεύει η δημιουργικότητα (Sriraman, 2009).

Η *εμμονή* στον τρόπο σκέψης μπορεί να θεωρηθεί ως το ακριβώς αντίθετο της ευελιξίας και επομένως η αποδέσμευση από την εμμονή αυτή αποτελεί εν δυνάμει μια ένδειξη μαθηματικής δημιουργικότητας. Ο Haylock (1997) την αποκαλεί και ‘ακαμψία της σκέψης’ και την διακρίνει σε δυο βασικούς τύπους: την *εμμονή με το περιεχόμενο* και την *εμμονή με τον αλγόριθμο*. Ο πρώτος τύπος εμμονής συναντάται όταν οι μαθητές, προσπαθώντας να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, περιορίζουν τη σκέψη τους –χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο- σε ένα στενό και, πολλές φορές, ανεπαρκές, εύρος στοιχείων που μπορούν να σχετίζονται με το πρόβλημα (πχ χρήση μόνο φυσικών αριθμών όταν στο σύνολο των λύσεων του προβλήματος απαιτείται και η χρήση ρητών). Ο δεύτερος τύπος εμμονής εντοπίζεται όταν κάποιος μαθητής συνεχίζει κατ' επανάληψη να είναι προσκολλημένος σε έναν αρχικά επιτυχή αλγόριθμο, ακόμα και όταν αυτός καθίσταται ακατάλληλος ή όχι τόσο ιδανικός. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να είναι ένας που διδάχθηκε πρόσφατα ή που να αναπτύχθηκε μέσα από μια σειρά ερωτημάτων που περιλαμβάνονται σε αυτό καθεαυτό το πρόβλημα. Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο παράδειγμα μπορεί να αντληθεί από το National Numeracy Project στο Ηνωμένο Βασίλειο (Straker 1999, όπως αναφέρεται στο Newton, 2012). Ένα από τα αριθμητικά προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν για την αποτίμηση της ικανότητας επιτέλεσης νοερών υπολογισμών των μαθητών ήταν η αφαίρεση 3000-1997. Παραδόξως, μόνο το 31% των μαθητών ηλικίας 10 ετών έδωσε σωστή απάντηση. Η ανάλυση των προσπαθειών των μαθητών έδειξε ότι πολλοί από αυτούς απέτυχαν επειδή προσπάθησαν να κάνουν νοερή χρήση του κατακόρυφου αλγόριθμου τη στιγμή που θα ήταν ευκολότερο γι αυτούς να χρησιμοποιήσουν πιο άτυπες μεθόδους. Δηλαδή, η αποτυχία προέκυψε ως αποτέλεσμα της εμμονής των μαθητών στο να εφαρμόσουν έναν αλγόριθμο που είχαν πριν διδαχτεί ακόμη και όταν αυτός δεν προσφερόταν για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα ολοκληρώθηκε σε δυο φάσεις. Στην πρώτη φάση συμμετείχαν 50 μαθητές της Στ Δημοτικού από σχολείο της Θεσσαλονίκης που δεν επιλέχθηκαν με κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο. Πρόκειται για δύο τυπικά τμήματα Στ τάξης δημοτικού σχολείου. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα για τη συγκεκριμένη τάξη, οι μαθητές ήταν σε θέση να διαχειριστούν φυσικούς, κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς και να εκτελούν όλες τις πράξεις μεταξύ τους. Στη δεύτερη φάση συμμετείχαν δυο ομάδες φοιτητών (46 και 17 φοιτητές αντίστοιχα) του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. με τη δεύτερη ομάδα να χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη μαθηματική εμπειρία σε σχέση με την πρώτη λόγω των μαθημάτων που επέλεξαν να παρακολουθήσουν.



Κοψίματα

Παρακάτω πρέπει να βρεις πόσες γραμμές χρειάζεται να ζωγραφίσεις για να κόψεις το πολύγωνο σε τόσα κομμάτια όσα σου ζητείται. Τα μέρη πρέπει να είναι του ίδιου σχήματος και μεγέθους.

Για παράδειγμα, για να κόψεις το πολύγωνο σε 2 ίσα μέρη, θα χρειαζόταν να χρησιμοποιήσεις μόνο 1 γραμμή, όπως εδώ.

Για να κόψεις σε 3 ίσα μέρη, θα χρειαζόσουν 2 γραμμές.

Βρες τα παρακάτω.

Για να κόψεις σε 5 ίσα μέρη θα χρειαζόσουν.......... γραμμές.

Για να κόψεις σε 6 ίσα μέρη θα χρειαζόσουν.......... γραμμές.

Για να κόψεις σε 7 ίσα μέρη θα χρειαζόσουν.......... γραμμές.

Για να κόψεις σε 9 ίσα μέρη θα χρειαζόσουν.......... γραμμές.

Εικόνα 1. Δραστηριότητα «Κοψίματα»

Στους μαθητές και φοιτητές δόθηκαν τέσσερις δραστηριότητες επιλεγμένες (και ελαφρά τροποποιημένη η μια από αυτές) από αυτές που χρησιμοποίησε ο Haylock (1997) στη δική του έρευνα. Όλες οι δραστηριότητες ευνοούν στην αρχή την εφαρμογή και ανάπτυξη ενός αλγορίθμου ο οποίος όμως στη συνέχεια δεν αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την λύση των επιμέρους δραστηριοτήτων όπως θα εξηγηθεί στην επόμενη ενότητα. Δίνεται λοιπόν πρώτα η δυνατότητα εδραίωσης ενός αλγορίθμου και στη συνέχεια αποτιμάται η ικανότητα του λύτη να αποδεσμευτεί από αυτόν όταν κάτι τέτοιο έχει νόημα. Οι δραστηριότητες συμπληρώθηκαν στη διάρκεια τεσσάρων συνεδριών για τους μαθητές του δημοτικού και μιας συνεδρίας για τους φοιτητές και συνοδεύονταν από ένα λυμένο παράδειγμα. Στη δεύτερη συνεδρία του δημοτικού συμμετείχαν 46 αντί των 50 μαθητών.

Για τις ανάγκες της εργασίας αυτής θα περιοριστούμε σε δύο από τις δραστηριότητες που δόθηκαν, όπως αυτές φαίνονται στις εικόνες 1 και 2 πιο πάνω. Τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας αποτέλεσαν τα δεδομένα της έρευνας και οι απαντήσεις ταξινομήθηκαν ως προς τα εξής επίπεδα:

(α) Κατά πόσο είναι αποκαλυπτικές μιας εμμονής με τον αλγόριθμο ή μιας αποκλίνουσας σκέψης, και

(β) Πως αυτές κατανέμονται στους τρεις πληθυσμούς, προκειμένου να γίνει αντιληπτή η σχέση της ηλικίας με την εμφάνιση της εμμονής αυτής.

Ισορροπία

Έχετε στη διάθεσή σας τρία βάρη των 20, των 9 και των 5 γραμμαρίων αντίστοιχα και μια τραμπάλα-ζυγαριά. Χρησιμοποιήστε τα τρία βάρη για να πάρετε μια ποσότητα άμμου που θα ζυγίζει 24 γραμμάρια

Κάντε το ίδιο σε κάθε περίπτωση παρακάτω

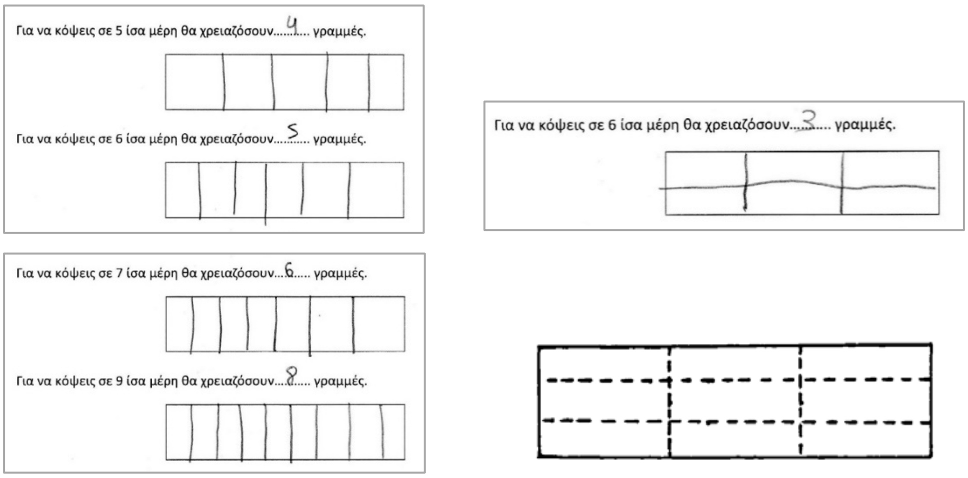
Διαθέσιμα βάρη	Βάρος άμμου που θέλω να πάρω	Πώς να το κάνω	
		A	B
20, 9, 5	24	20, 9	5
16, 7, 3	12		
2, 50, 40	12		
5, 55, 50	10		
14, 11, 3	6		
81, 7, 8	80		
55, 10, 5	60		
7, 6, 10	3		
30, 20, 8	18		
32, 20, 8	20		

Εικόνα 2 Δραστηριότητα «Ισορροπία»

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Δραστηριότητα 1 - Κοψίματα

Στους λύτες δόθηκε ένα ορθογώνιο και ζητήθηκε να βρουν πόσα κοψίματα χρειάζονται για να το χωρίσουμε σε συγκεκριμένο αριθμό ίσων μερών. Το λυμένο παράδειγμα δείχνει ότι για να πάρουμε 2 ίσα μέρη χρειαζόμαστε ένα κόψιμο και για να πάρουμε 3 ίσα μέρη, δύο κοψίματα. Ο χωρισμός σε 2, 3, 5, 7 μέρη θέτει τα θεμέλια του αλγόριθμου των κατακόρυφων γραμμών που το πλήθος τους είναι μειωμένο κατά ένα σε σχέση με τον ζητούμενο αριθμό μερών (Εικόνα 3, αριστερά). Οι δυο ερωτήσεις που μένουν ζητούν το χωρισμό σε 6 και 9 μέρη. Κάνοντας χρήση του πιο πάνω αλγόριθμου, δηλαδή κάνοντας μια γενίκευσή του, αυτό που αναμένεται είναι οι λύτες να φτάσουν στην απάντηση «5 κοψίματα για τα 6 μέρη» και «8 κοψίματα για τα 9 μέρη». Εν τούτοις και οι δυο περιπτώσεις μπορούν να ικανοποιηθούν με τη χάραξη μικρότερου αριθμού κοψιμάτων, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3 (δεξιά). Αν και ο αρχικός σχεδιασμός του Haylock περιελάμβανε μόνο την περίπτωση των 9 μερών εδώ προτιμήθηκε και η περίπτωση των 6 ώστε να δοθεί μεγαλύτερο περιθώριο στην αποδέσμευση από τον αλγόριθμο των κατακόρυφων γραμμών.



Εικόνα 3. Εμμονή στον αλγόριθμο (αριστερά) και αποκλίνουσα σκέψη (δεξιά)

Στην ομάδα των μαθητών του Δημοτικού όλοι πλην τεσσάρων ακολούθησαν πιστά την εφαρμογή του αλγορίθμου των κατακόρυφων κοψιμάτων. Όμως αυτοί οι τέσσερις διαφοροποιήθηκαν μόνον στο ορθογώνιο που ζητούσε το χωρισμό σε 6 ίσα μέρη ενώ για την περίπτωση των 9 μερών εφάρμοσαν και πάλι τον αλγόριθμο.

Στις ομάδες των φοιτητών η εικόνα ήταν λίγο πολύ η ίδια. Όλοι οι φοιτητές με την μικρότερη εμπειρία (-) επέδειξαν προσήλωση στον αλγόριθμο. Στην δεύτερη ομάδα, με την αυξημένη εμπειρία (+) η εικόνα ήταν σχεδόν η ίδια αφού μόνο ένας φοιτητής έδειξε αποκλίνουσα σκέψη και αυτό μόνο για το χωρισμό σε 6 ίσα μέρη (και όχι και για την περίπτωση των 9 μερών). Τα ποσοστά για την κάθε περίπτωση φαίνονται συγκεντρωτικά για κάθε μια δραστηριότητα στον Πίνακα 1.

Δραστηρ.	Μαθητές		Φοιτητές (+)		Φοιτητές (-)	
	Εμμονή	Αποκλίνουσα	Εμμονή	Αποκλίνουσα	Εμμονή	Αποκλίνουσα
Κοψίματα	92% (46/50)	8% (4/50)	94,12% (16/17)	5,88% (1/17)	100% (46/46)	0%
Ισορροπία	82,61% (38/46)	17,39% (8/46)	100% 17/17	0%	97,83% (45/46)	2,17% (1/46)

Πίνακας 1. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Κοινό χαρακτηριστικό όλων των ομάδων είναι το εντυπωσιακά υψηλό ποσοστό εμμονής με τον αλγόριθμο. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στο ότι 4 μαθητές του δημοτικού έδειξαν να διαφοροποιούνται σε σχέση με τον αλγόριθμο αλλά μόνο για μια από τις δυο περιπτώσεις. Δεν μπορεί να συμπεράνει κανείς με ασφάλεια για το αν όντως πρόκειται για αποκλίνουσα σκέψη, καθώς λίγες μέρες νωρίτερα, σε κεφάλαιο του σχολικού εγχειριδίου που διαπραγματεύεται τα ισοδύναμα κλάσματα, υπήρχε η αναπαράσταση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου χωρισμένο σε 6 ίσα μέρη, χωρίς κάτι αντίστοιχο για την περίπτωση χωρισμού σε 9 ίσα μέρη. Το γεγονός ότι δεν επιχείρησαν μια τέτοια διαφορετική προσέγγιση στο χωρισμό σε 9 ίσα μέρη ενισχύει την υποψία ότι ίσως να μην πρόκειται για αποκλίνουσα σκέψη αλλά για επιρροή από το σχολικό εγχειρίδιο. Όμως και στις άλλες ομάδες που και ηλικιακά αλλά και σε επίπεδο μαθηματικών εμπειριών υπερείχαν σε σχέση με τους μικρούς μαθητές τα ευρήματα είναι ενδεικτικά μιας απόλυτης επικράτησης της εμμονής στον αλγόριθμο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επιπλέον το γεγονός ότι δεν υπάρχουν διαφοροποιήσεις ούτε μεταξύ των ομάδων των φοιτητών (μόλις ένας φοιτητής επέλεξε άλλη προσέγγιση για τον χωρισμό σε 6 ίσα μέρη) αν λάβει κανείς υπόψη ότι η μια ομάδα είχε κατ’ επιλογή παρακολουθήσει πρόσθετες παραδόσεις σε πιο εστιασμένα Μαθηματικά (Επίλυση Προβλήματος) και θα ήταν αναμενόμενο τα μέλη της να επιδείξουν μια ευελιξία στις προσεγγίσεις τους.

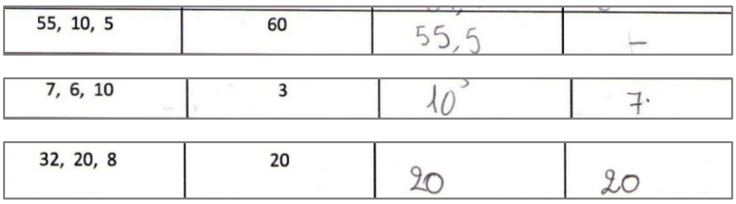
Δραστηριότητα 2 - Ισορροπία

Στη Δραστηριότητα αυτή απαιτείται από τους λύτες να προσδιορίσουν πώς θα υπολογίσουν μια δοσμένη ποσότητα άμμου σε μια ακολουθία επιμέρους προβλημάτων δεδομένου ότι σε κάθε περίπτωση δίνονται μια ζυγαριά ισορροπίας (με δυο δίσκους Α και Β) και τρία βάρη. Ως ένα παράδειγμα, τους δόθηκε η περίπτωση όπου έχοντας δοσμένα τρία βάρη των 20, 9 και 5 γραμμαρίων είναι δυνατόν να σχηματίσουν ποσότητα άμμου με βάρος 24 γρ στο δίσκο Β. Αν τοποθετήσουν τα βάρη των 20 και 9 γρ στο δίσκο Α, και το βάρος των 5 γρ στο δίσκο Β, και στη συνέχεια προσθέσουν άμμο στο δίσκο Β μέχρι η ζυγαριά να ισορροπήσει τότε το βάρος της άμμου θα είναι 24γρ. Το φύλλο εργασίας που δόθηκε περιλάμβανε μια ακολουθία τέτοιων προβλημάτων. Είναι αλήθεια ότι σε κάθε ένα από αυτά είναι δυνατόν να υπολογιστεί η ζητούμενη ποσότητα άμμου κάνοντας χρήση της ίδιας διαδικασίας όπως και στο δοσμένο παράδειγμα. Έτσι ήδη από τα πρώτα παραδείγματα αρχίζει και αναπτύσσεται και εδραιώνεται ο αλγόριθμος: *Χώρισε τις τέσσερις ποσότητες (τρία δοσμένα βάρη και ζητούμενο βάρος της άμμου) σε δυο ζευγάρια που έχουν ίσο άθροισμα. Το άθροισμα των δύο βαρών στο δίσκο Α ελαττωμένο κατά το τρίτο βάρος που βρίσκεται στο δίσκο Β μας δίνει τη ζητούμενη ποσότητα άμμου.* Ο Πίνακας 2 παρακάτω μας δίνει τις απαντήσεις που προκύπτουν αν ο λύτης παρουσιάζει εμμονή με τον συγκεκριμένο αλγόριθμο.

	Διαθέσιμα βάρη	Βάρος άμμου	Πώς να το κάνω	
			Δίσκος Α	Δίσκος Β
1	20 9 5	24	20 9	5
2	16 7 3	12	16 3	7
3	2 50 40	12	50 2	40
4	5 55 50	10	5 55	50
5	14 11 3	6	14 3	11
6	81 7 8	80	81 7	8
7	**55 10 5**	**60**	**55 10**	**5**
8	**7 6 10**	**3**	**7 6**	**10**
9	30 20 8	18	30 8	20
10	**32 20 8**	**20**	**32 8**	**20**

Πίνακας 2. Απαντήσεις που δείχνουν εμμονή στον αλγόριθμο

Ωστόσο οι περιπτώσεις 7, 8 και 10 προσφέρονται για να αναδείξουν την περίπτωση αποκλίνουσας σκέψης από το λύτη. Στην 7 είναι αρκετό να τοποθετήσουμε μόνο τα βάρη 55γρ και 5 γρ στο δίσκο Α. Στην 8, αρκεί να βάλουμε το βάρος των 10 γρ στο δίσκο Α και των 7γρ στο δίσκο Β. Τέλος, στην 10, αρκεί να βάλουμε μόνο το βάρος των 20γρ στο δίσκο Α.



55, 10, 5	60	55,5	–
7, 6, 10	3	10	7·
32, 20, 8	20	20	20

Εικόνα 4. Αποκλίνουσα σκέψη στη Δραστηριότητα «Ισορροπία»

Ένας μικρός μόνο αριθμός μαθητών αν και ανέπτυξαν αρχικά τον αλγόριθμο εν τούτοις παρέκλιναν από αυτόν στα προβλήματα 7, 8 και 10. Από τους 46 μαθητές του δημοτικού που συμμετείχαν στη δραστηριότητα αυτή οι 36 παρουσίασαν την εμμονή με τον αλγόριθμο. Από τους υπόλοιπους μαθητές τρεις παρέκλιναν μόνο στην περίπτωση 7, δύο μόνο στη 10, ένας παρέκλινε στις περιπτώσεις 7 και 10, και μόλις δύο μαθητές αναγνώρισαν τη δυνατότητα αυτή και στις τρεις περιπτώσεις που μπορούσε να γίνει (βλ. απαντήσεις αυτής της κατηγορίας στην Εικ. 4)

Από τις δυο ομάδες των φοιτητών στην ομάδα με την αυξημένη μαθηματική εμπειρία και οι 17 συμμετέχοντες επέδειξαν εμμονή με τον αλγόριθμο για το σύνολο των προβλημάτων. Στην ομάδα των 46 φοιτητών με τη μικρότερη εμπειρία, μόνο ένας φοιτητής παρέκλινε από τον αλγόριθμο για τα προβλήματα 7 και 8 (βλέπε σχετικά ποσοστά σε Πίνακα 1). Στον ίδιο Πίνακα φαίνεται ότι το ποσοστό της αποκλίνουσας σκέψης ήταν μεγαλύτερο στη δραστηριότητα αυτή για δύο από τις τρεις ομάδες που συμμετείχαν. Όμως δεν αντιπροσωπεύει αποκλίνουσα σκέψη για το σύνολο των προβλημάτων. Μόνο δύο μαθητές (δημοτικού σχολείου) στάθηκαν ικανοί να απομακρυνθούν από τον αλγόριθμο και στα τρία προβλήματα. Είναι μάλιστα εντυπωσιακό ότι στο πρόβλημα 10 όπου το ζητούμενο είναι τα 20γρ και ενώ τους δίνεται ήδη ένα από τα τρία βάρη να είναι 20γρ, μόλις 5 από τους 50 μαθητές του δημοτικού μπόρεσαν να κάνουν χρήση πιο άμεσης εναλλακτικής προσέγγισης ενώ κανένας από τους 63 φοιτητές δεν στάθηκε ικανός να δει για το πρόβλημα αυτό παραπέρα από τον αλγόριθμο.

Όλα τα παραπάνω δίνουν ενδείξεις σχετικά με το ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε ήδη από την αρχή. Η εμμονή με τον αλγόριθμο φαίνεται να μην σχετίζεται με την ηλικία αφού τόσο οι μικροί μαθητές όσο και οι φοιτητές παρουσίασαν υπερβολικά μεγάλα ποσοστά εμμονής στον αλγόριθμο ενώ τα ποσοστά αποκλίνουσας σκέψης ήταν μεγαλύτερα για τους μικρούς μαθητές (αν και αυτά δεν κάλυπταν το σύνολο των προβλημάτων). Τα ευρήματα αυτά έρχονται να επιβεβαιώσουν ανάλογα ευρήματα έρευνας που συγκρίνει παρόμοιους περίπου πληθυσμούς (μαθητές δημοτικού, λυκείου, φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος) αναφορικά όμως με την ικανότητα της επιχειρηματολογίας μέσα σε πλαίσια που δεν φαίνεται να έχουν άμεση σχέση με την τάξη των μαθηματικών (Papadopoulos, 2015).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Προφανώς δεν μπορούν να γίνουν γενικεύσεις των ευρημάτων μιας που αυτά βασίζονται σε μια μικρής σχετικά κλίμακας έρευνα. Εν τούτοις αν και δεν μπορεί να δοθεί ακριβής απάντηση στο ερώτημά μας μπορεί να αναφερθεί κανείς σε σαφείς ενδείξεις που ενισχύουν την άποψη ότι η εμμονή με τον αλγόριθμο δεν σχετίζεται απαραίτητα με την ηλικία. Οι ενδείξεις αυτές βοηθούν στο να σχεδιαστεί μια μεγαλύτερης κλίμακας έρευνα σχετικά με το ίδιο ερώτημα. Τα υπερβολικά υψηλά ποσοστά της εμφάνισης της εμμονής πιθανόν σχετίζονται με την απουσία κατάλληλα προσανατολισμένης διδασκαλίας. Μια διδασκαλία, που θα παρέχει στους μαθητές εμπειρίες στα μαθηματικά, που θα ενθαρρύνει τους μαθητές να ξεπερνούν εμμονές και να παράγουν αποκλίνουσα σκέψη και επομένως δημιουργική μαθηματική σκέψη. Τέτοιες ευκαιρίες πρέπει να δίνονται στους μαθητές ακόμη και αν φαίνεται να έρχονται σε κάποιο βαθμό σε αντίθεση με άλλες συμπεριφορές στα μαθηματικά που επίσης έχουν την αξία τους για τον εκπαιδευτικό, όπως η συμμόρφωση με τους κανόνες ή η συστηματική σειρά βημάτων στην επίλυση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, *29*(3), 68-74.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011): Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions, *Research in Mathematics Education*, *13(*1), 17-32.

Newton, L. D. (Ed.) (2012).*Creativity for a new curriculum: 5-11*. Routlege.

Noss, R., & Hoyles, C. (2013). Modeling to address techno-mathematical literacies in work. In R. Lesh et al. (eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 75-86). Springer Netherlands.

Papadopoulos, I. (2015). Beliefs and mathematical reasoning during problem solving across educational levels. In C. Bernack-Schüler, R. Erens, T. Leuders, & A. Eichler (Eds.), *View and Beliefs in Mathematics Education* (183-196). Springer Fachmedien Wiesbaden.

Pólya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving (Combined ed.). New York: Wiley.

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers’ awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, *3*, 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *JSGE The Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM*, *41*, 13-27

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-2: ΙΣΕΣ ΕΥΚΑΙΡΙΕΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΤΟΝ ALTHUSSER

Νίκος Μακράκης
Μαθηματικός
nemakrakis@math.uoa.gr

Οι Pais και Valero (2011) ισχυρίζονται ότι το μεγαλύτερο κομμάτι της έρευνας πάνω στη Μαθηματική Εκπαίδευση υποτιμά την κοινωνικοπολιτική διάστασή της και περιορίζει το αντικείμενό της. Προτείνουν τη μελέτη αυτής της διάστασης και μέσα από τη μελέτη προσεγγίσεων της Κοινωνιολογίας της Εκπαίδευσης και θεωριών της αναπαραγωγής. Προσπαθούμε να εμβαθύνουμε στις τελευταίες μελετώντας τη φιλοσοφία και την επιστημολογία του Althusser και συζητάμε μια προσέγγιση της έρευνας πάνω στην κοινωνικοπολιτική διάσταση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως μελέτη και αποκάλυψη των ιδεολογικών παραδοχών (Μπαλτάς, 2002) που ενυπάρχουν σε αυτή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι κυρίαρχες τάσεις της έρευνας πάνω στην Μαθηματική Εκπαίδευση έχουν υποτιμήσει την κοινωνική, πολιτισμική και πολιτική της διάσταση. Ωστόσο, έχει καταγραφεί το φαινόμενο της λεγόμενης Κοινωνικής Στροφής, αλλά και το φαινόμενο της Κοινωνικοπολιτικής Στροφής που βασίζεται στο ότι η Μαθηματική Εκπαίδευση είναι και μια πολιτικά φορτισμένη δραστηριότητα. Αυτή η στροφή στο πεδίο μελέτης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως δραστηριότητα με κοινωνικές και πολιτικές απολήξεις συνθέτει το πεδίο της έρευνας πάνω στους Κοινωνικοπολιτικούς Παράγοντες της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι Pais και Valero τονίζουν με έμφαση τη σημασία του να μελετηθεί η κοινωνικοπολιτική διάσταση της Μαθηματικής Εκπαίδευσης υπό το φως των θεωριών της αναπαραγωγής που προέρχονται από την Κοινωνιολογία της Εκπαίδευσης (Pais & Valero, 2011). Οι θεωρητικοί της αναπαραγωγής κατά την κυρίαρχη αντίληψη υποστηρίζουν η Εκπαίδευση πάντα σε τελική ανάλυση συμβάλει στην αναπαραγωγή των όρων παραγωγής, δηλαδή στη διαιώνιση της ανισότητας.

Οι παραδοσιακές προσεγγίσεις της έρευνας πάνω στη Μαθηματική Εκπαίδευση στηρίζονταν μόνο στη Γνωστική Ψυχολογία και αγνοούσαν το κοινωνικό χαρακτήρα της. Οι προσεγγίσεις τη θεωρίας της δραστηριότητας (π.χ.: Roth & Radford, 2011) μας προσφέρουν σημαντικά εργαλεία, αλλά αν δε συνδεθούν με έννοιες κοινωνιολογικές και δεν νοηματοδοτηθούν οι έννοιές της με έναν τρόπο που να τις θέτει υπό συνεχή διαπραγμάτευση τότε μπορεί να υποτιμηθεί η μελέτη τους. Οι προσεγγίσεις της Κριτικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (π.χ.: Skovsmose, 1994, Frankenstein, 1983) που μας προτείνουν τη Μαθηματική Εκπαίδευση ως εργαλείο κοινωνικής αλλαγής υποτιμούν έως και αγνοούν τον αναπαραγωγικό χαρακτήρα της εκπαίδευσης. Τέλος, οι προσεγγίσεις της έρευνας που βασίζονται στην υποκειμενικότητα (π.χ.: Brown, 2011α) μας προσφέρουν πάρα πολύ σημαντικά εργαλεία και μια πολύ ενδιαφέρουσα προσέγγιση του πολιτικού στην εκπαίδευση, όμως τείνουν να ερμηνεύουν με έναν αδιέξοδο τρόπο τον αναπαραγωγικό της χαρακτήρα.

Σκοπός μας είναι να δούμε τις προσεγγίσεις της Κοινωνικοπολιτικής Διάστασης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης υπό τη σκοπιά της αναπαραγωγής και με βάση την έννοια της ιδεολογίας. Επίσης, να ξαναδούμε και την ίδια την αναπαραγωγή σε μια νέα βάση εμβαθύνοντας στην έννοιά της. Με βάση αυτά θα διατυπώσουμε κάποια ερωτήματα για την βαθύτερη μελέτη της κοινωνικοπολιτικής διάστασης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Η ΙΔΕΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΠΕΡΑ ΑΠΟ ΤΑ ΑΔΙΕΞΟΔΑ ΤΩΝ ΚΥΡΙΑΡΧΩΝ ΕΡΜΗΝΕΙΩΝ

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε βαθύτερα την έννοια της αναπαραγωγής. Για να καταφέρνει μια καπιταλιστική οικονομία την αναπαραγωγή της, πρέπει να αναπαράγει τις παραγωγικές της δυνάμεις και τις υπάρχουσες σχέσεις παραγωγής. Για να το κάνει αυτό πρέπει και να αναπαράγει και την υποταγή των φορέων της παραγωγής στην κυρίαρχη ιδεολογία. Έτσι ο Althusser ισχυρίζεται ότι το σχολείο αποτελεί έναν από τους ιδεολογικούς μηχανισμούς του κράτους που αναπαράγουν την κυρίαρχη ιδεολογία (Althusser, 1999) και διανέμει τους ανθρώπους στις θέσεις και τα στρώματα της παραγωγής (Μηλιός, 1993). Σημαντικό ρόλο για τούτο παίζει και η τοποθέτηση της εκπαίδευσης απέναντι στον καταπιεστικό διαχωρισμό χειρωνακτικής και πνευματικής εργασίας, με την εκπαίδευση να είναι δομικά διαχωρισμένη από την παραγωγή (ο. π.). Ο εκπαιδευτικός μηχανισμός αναπαράγει την αντίληψη αυτού του απόλυτου ιεραρχικού διαχωρισμού με διάφορους τρόπους, και σίγουρα έχει να κάνει με το να αποκλείει τη γνώση από τους πολλούς και να την αναθέτει σε λίγους, που τους ονομάζει ειδικούς (Coriat, χ.χ.)

Η ιδεολογία συμβάλει στην αναπαραγωγή των κοινωνικών πρακτικών με το να καθιστά τα άτομα με διαρκή τρόπο φορείς τέτοιων πρακτικών, οι οποίες “συνιστούν εξαντλητικά τον κοινωνικό σχηματισμό” (Φορτούνης, 1999, σελ. 159). Δηλαδή το πεδίο του κοινωνικού αποτελείται στο σύνολό του από πρακτικές οι οποίες διαπερνώνται από την ιδεολογία. Η ιδεολογία είναι αυτή η οποία εγκαλεί τα υποκείμενα ως φορείς των συγκεκριμένων πρακτικών.

Το κοινωνικό δεν είναι ομοιογενές αλλά δομημένο, και συνίσταται σε πολλές σχετικά αυτόνομες πρακτικές, από τις οποίες αναφέρουμε την οικονομική πρακτική, την ιδεολογική πρακτική, τη νομικο-πολιτική πρακτική, και άλλες (ο.π.), έχοντας σε τελική ανάλυση καθοριστική πρακτική την οικονομική.

Άρα το κοινωνικό είναι ένα δομημένο όλο πρακτικών. Όμως έχει και κυρίαρχο τρόπο παραγωγής, δηλαδή υφίσταται ταξική διαστρωμάτωση (κοινωνικές τάξεις). Συνεπώς, η εν γένει ιδεολογία που αναφέρεται το κοινωνικό έχει μια εγγενή αντίφαση. Από τη μία η εν γένει ιδεολογία εφόσον αναφέρεται συνολικά στο κοινωνικό έχει μια αντιφατική “ταυτότητα”.

> “Ωστόσο, από την άλλη μεριά, η ‘ταυτότητα’ και η ‘συνοχή’ της ιδεολογίας του εκάστοτε ταξικού κοινωνικού σχηματισμού είναι εγγενώς αντιφατικές και συγκρουσιακές: η ιδεολογία της εκάστοτε ταξικής κοινωνίας διαπερνάται από μία αντίφαση η οποία αποκαθιστά δύο άνισους αντιφατικούς πόλους. ‘Η ταυτότητα είναι αείποτε διαίρεση’ στο σύμπαν της ταξικής πάλης, είχε πει ο Μπαλιμπάρ, και δεν θα μπορούσε να συνιστά εξαίρεση η ιδεολογία της εκάστοτε ταξικής κοινωνίας. Το ιδεολογικό σύστημα, που είναι υπεύθυνο για την αποκατάσταση ενιαίων υποκειμένων, ικανών να “φέρουν” ένα συνεκτικό κοινωνικό όλο, εμφανίζεται ως το πεδίο σύγκρουσης δύο ανίσως ανταγωνιστικών ιδεολογικών συστημάτων, της κυρίαρχης ιδεολογίας και της κυριαρχούμενης ή υποτελούς ιδεολογίας.” (ο.π., σελ. 209)

Ο Althusser παίρνει την διαλεκτική θέση ότι η ενότητα υφίσταται μέσω της πάλης. Εφόσον, όμως, η ιδεολογία διαπερνά όλα τα επίπεδα του κοινωνικού, τότε πρέπει να μιλήσουμε και για την ιδεολογική πάλη.

Οι θεωρητικοί της εκπαίδευσης αποδίδουν στον Althusser ότι περιγράφει το υποκείμενο τόσο εγκλωβισμένο μέσα στην ιδεολογία και τις δομές ώστε δε μπορεί να απεγκλωβιστεί ποτέ και πάντα συνεισφέρει στην αναπαραγωγή των όρων παραγωγής. Όμως το αδιέξοδο του λειτουργισμού δεν είναι πραγματικό ιδωμένης της θεωρίας ως θεωρίας με κορμό την ταξική πάλη. Οτιδήποτε περιγράφει ο Althusser, το κάνει όχι μέσα σε ένα στατικό κοινωνικό όλο αλλά σε ένα δυναμικό-διαλεκτικό, με προωθητική δύναμη την πάλη των τάξεων. Η Ιστορία έχει ως προωθητική δύναμη την πάλη των τάξεων. Όμως αυτή αναφέρεται και στα τρία βασικά επίπεδα, το οικονομικό, το πολιτικό και το ιδεολογικό. Δηλαδή υπάρχουν η οικονομική πάλη, η πολιτική πάλη και η ιδεολογική πάλη.

Ο Althusser περιγράφοντας το σχήμα με το οποίο οι Ιδεολογικοί Μηχανισμοί του Κράτους αποτελούν πεδία ιδεολογικής πάλης αναφέρει την κυρίαρχη ιδεολογία σε μια κοινωνία ως πρωταρχική (primary) ιδεολογία, η οποία αναπαράγεται σε τελική ανάλυση από τους ιδεολογικούς μηχανισμούς του κράτους, αλλά και άλλες ιδεολογίες, τις δευτερεύουσες (secondary) ιδεολογίες, οι οποίες είναι αυτές που παράγονται από τις επιμέρους πρακτικές του (Althusser, 2014), οι οποίες είναι πεδία ιδεολογικής πάλης.

Δηλαδή στο εσωτερικό κάθε Ιδεολογικού Μηχανισμού του Κράτους είναι δυνατόν να αναπτύσσονται πρακτικές που να είναι αντιπαραθετικές με την κυρίαρχη ιδεολογία. Η αναπαραγωγή συμβαίνει, λοιπόν, σε συστοιχία με την πάλη, πρόκειται δηλαδή για τη διαλεκτική ενότητα αναπαραγωγής/πάλης.

Η ΙΔΕΟΛΟΓΙΑ, Η ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Θα επιχειρήσουμε να μιλήσουμε για την εκπαίδευση υπό αυτήν την οπτική.

Ο Πουλαντζάς μιλάει για το αίτημα να "επαναστατικοποιηθούν" οι Ιδεολογικοί Μηχανισμοί του Κράτους (Πουλαντζάς, 2001) και ο Althusser λέει ότι πρέπει να "αφοπλιστούν" (Althusser, 2014). Αυτό βέβαια είναι σίγουρα ένα διακύβευμα της ιδεολογικής πάλης, πάλι σε συνάρτηση με τη συνολική πάλη.

Ο Μηλιός αναφέρεται στο χαρακτηριστικό της Εκπαίδευσης στον καπιταλισμό ως δομικά διαχωρισμένη από την παραγωγή σαν βασικό χαρακτηριστικό που ενδυναμώνει τον ιδεολογικό χαρακτήρα της εκπαίδευσης κάτω από την κυρίαρχη ιδεολογία. Αναφέρει σα διακύβευμα την κατάργηση αυτού του διαχωρισμού, γεγονός που θα καταργήσει το σχολείο, τουλάχιστον όπως το ξέρουμε σήμερα (Μηλιός, 1993).

Αυτές οι προσεγγίσεις συναντούν τις κριτικές του διαχωρισμού χειρωνακτικής και πνευματικής εργασίας. Η κατάργηση του ιεραρχικού διαχωρισμού χειρονακτικής και πνευματικής εργασίας αποτελεί διακύβευμα της ιδεολογικής πάλης. Έχουμε περιγράψει ότι το σχολείο παίζει σημαντικό ρόλο στην αναπαραγωγή αυτού του διαχωρισμού και έχουμε δει και ιστορικά παραδείγματα εκπαιδευτικών συστημάτων που έχουν σταθεί κριτικά απέναντι του (Coriat, χ.χ.).

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά και η Μαθηματική Εκπαίδευση διαμορφώνουν έναν σχετικά ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται αποκλεισμοί σε ομάδες μαθητών (Popkewiz, 2009). Άλλωστε είναι χαρακτηριστικές οι μελέτες που αναδεικνύουν τον ταξικό χαρακτήρα της σχολικής αποτυχίας και της αποτυχίας στα Μαθηματικά.

Μια άλλη παράμετρος της έρευνας αφορά αυτό που αναφέραμε ως ιδεολογικό χαρακτήρα της εκπαίδευσης. Έχει ενδιαφέρον το πως οι πολιτικές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης διαμορφώνουν ένα πρότυπο μαθητή (ο.π.) και με ποιον τρόπο οι μαθητές εσωτερικεύουν τις κοινωνικές δομές. Και εδώ βέβαια υπολογίζεται ο ιδιαίτερος ρόλος της αξιολόγησης των μαθητών. Επίσης, στην έρευνα σημειώνεται και ο ιδιαίτερος ρόλος της βιοπολιτικής (biopolitics) στη Μαθηματική Εκπαίδευση (Pais & Valero, 2012).

Η αντικειμενικότητα με την οποία χαρακτηρίζονται οι αριθμοί, όταν οι ίδιοι μελετώνται ως γεγονότα, παίζει σημαντικό ρόλο στον αναπαραγωγικό χαρακτήρα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Popkewitz, 2009). Άλλωστε η ψευδαίσθηση της ουδετερότητας και η αυτοαναφορικότητα των Μαθηματικών είναι σημαντική για τον αναπαραγωγικό τους χαρακτήρα και η Μαθηματική Εκπαίδευση παίζει καλά αυτόν τον ρόλο (Chassapis, 2000).

Χρησιμοποιείται πολύ συχνά η έννοια της “ανάπτυξης” ως αυτονόητος κοινωνικός στόχος, ο οποίος εμποτίζει τα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών (Mendik, 2011, Llewllyn, 2013), και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την πολιτική του νεοφιλελευθερισμού (ο.π.). Η ανάπτυξη χρησιμοποιείται ως αυταξία χωρίς να μπαίνει το ερώτημα ανάπτυξη για ποιους και προς όφελος ποιων, δηλαδή ως μια ουδέτερη έννοια και ως ένας κοινωνικά αμερόληπτος στόχος (Mendick, 2011). Ένα από τα χαρακτηριστικά του ιδεολογήματος της ανάπτυξης είναι και η έμφαση που δίνει στο μετρήσιμο, στην ταχύτητα και στην ποσότητα (Llewllyn, 2013). Τονίζεται ο εμπορευματικοποιημένος χαρακτήρας των Μαθηματικών στην εκπαίδευση (Pais & Valero, 2011) η οποία συνδέεται με την αντίληψη της γνώσης σαν ιδιοκτησία και σαν κεφάλαιο (Baldino & Cabral, 2011) και με το μαθητή σαν πελάτη. Μάλιστα ο καταμερισμός εργασίας στα σχολεία καταλήγει να δημιουργεί συνθήκες αλλοτρίωσης στους μαθητές (Chasapis, 2000, Baldino & Cabral, 2011).

Ο Pais (2011) μας καλεί να δούμε την ανισότητα στη Μαθηματική Εκπαίδευση και τον αποκλεισμό όχι ως μια ανωμαλία αλλά κάτι το οποίο είναι συστατικό χαρακτηριστικό της και ως ένα “σύμπτωμα” μέσα από το οποίο μπορεί να γίνει φανερή η αλήθεια του συστήματος (ο. π.).

Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΩΣ ΑΠΟΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΙΔΕΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΑΡΑΔΟΧΩΝ ΤΗΣ

Θα βασιστούμε στην εξής παρατήρηση:

> “Οι θεωρητικοί και αναλυτικοί φακοί με τους οποίους εστιάζουμε στην έρευνά μας “περιλαμβάνουν συγκεκριμένες επιλογές με την έννοια των αναλυτικών φίλτρων που εφαρμόζουμε, κυριαρχούμενες από τα υποκείμενα ιδεολογικά κίνητρα και τάσεις της για τις οποίες δεν έχουμε πάντα γνώση”” (Pais & Valero, 2011)

Στην έρευνα πάνω στη Μαθηματική Εκπαίδευση υπάρχουν αντιλήψεις και τρόποι θέασης των πραγμάτων που δεν είναι συνειδητές και τις θεωρούμε δεδομένες και φυσιολογικές.

Σε αυτό το σημείο έχει πολλά να μας συνεισφέρει η επιστημολογία του Luis Althusser. Άμεσα συνδεμένη με επιστημολογία του είναι η αντίληψή του για την ιδεολογία, ως το σύνολο των πλαστών παραστάσεων ενός ανθρώπου για τις πραγματικές συνθήκες ύπαρξής του. Έτσι, η επιστήμη ξεκινάει από μία ιδεολογία και αποτελεί την συνεχή προσπάθεια αποχωρισμού από αυτήν. Αυτή η προσπάθεια είναι διαρκής και έτσι η επιστήμη βρίσκεται πάντα σε κίνηση, χωρίς να έχει κάποιο τέλος. Έτσι, μιλάμε και μετέπειτα για εγγενή παρουσία της ιδεολογίας σε μια επιστήμη με τη μορφή λανθανουσών ιδεολογικών παραδοχών, που δεν επερωτήθηκαν και δε νοούνται καν ως παραδοχές και είναι συστατικά στοιχεία του εννοιολογικού συστήματος.

> "Η εγγενής παρουσία της ιδεολογίας στο εσωτερικό ενός επιστημονικού εννοιολογικού συστήματος πιστοποιεί ότι οι όροι κίνησης της αντίστοιχης επιστήμης δεν υπάρχουν ποτέ αφ' εαυτοί αλλά συναρθρώνονται πάντοτε με τις κοινωνικές συνθήκες και προϋποθέσεις αυτής της κίνησης" (Μπαλτάς, 2002, σ. 82).
>
> ...
>
> "Οι λανθάνουσες ιδεολογικές παραδοχές συνιστούν τα εγγενώς αόρατα όρια της δραστικότητας του επιστημονικού εννοιολογικού συστήματος στο εσωτερικό του οποίου είναι ενταγμένες και χαράσσουν κατά εγγενώς τυφλό τρόπο το σύνορο του αντίστοιχου επιστημονικού αντικειμένου, περιστέλλοντας υποχρεωτικά το αντικείμενο αυτό στο εσωτερικό του εν λόγω συνόρου. Οι λανθάνουσες ιδεολογικές παραδοχές συνιστούν τα, κοινωνικά και ιστορικά προσδιορισμένα, όρια της επιστημονικής γνώσης του πραγματικού αντικειμένου το οποίο το εννοιολογικό σύστημα, στο εσωτερικό του οποίου είναι ενταγμένες, αλληλέγγυα με αυτές, υποδεικνύει και περι-γράφει: Το κατ' αρχήν αδύνατο της επερώτησης τους υποχρεώνει την επιστημονική γνώση αυτού του πραγματικού αντικειμένου, δηλαδή το αντίστοιχο επιστημονικό αντικείμενο, να παραμείνει υποχρεωτικά στο εσωτερικό του συνόρου που αυτές χαράσσουν" (Μπαλτάς, 2002, σ. 83-4).

Ο Μπαλτάς στη βάση της επιστημολογίας του Althusser μιλάει για σε τελική ανάλυση δύο "ταξικά προσδιορισμένες και κοινωνικά δυνατές στάσεις απέναντι στις επιστήμες":

> "Φιλοσοφική εγγύηση της αλήθειας, της αντικειμενικότητας και της εγκυρότητας της επιστημονικής γνώσης ή φιλοσοφική οριοθέτηση της αυτονομίας της κίνησης και των προϊόντων κάθε επιστήμης, περιφρούρηση αυτής της αυτονομίας και μετατροπή ιδεολογικού χαρακτήρα ερωτημάτων σε προβλήματα που παραδίδονται στη γνωστική δικαιοδοσία της αντίστοιχης επιστήμης" (Μπαλτάς, 2002, σ. 122).

Με τον ίδιο να σχολιάζει ότι ο δρόμος του μαρξισμού είναι ο δεύτερος.

Υπό την παραπάνω νοηματοδότηση μπορούμε να πούμε ότι αυτοί οι "αναλυτικοί φακοί" για τους οποίους μιλούν οι Pais, Valero και Brown, έχουν να κάνουν με τις ιδεολογικές παραδοχές για τις οποίες μιλάει ο

Althusser. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι μια στρατηγική για τη μελέτη της Κοινωνικοπολιτικής διάστασης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι η αποκάλυψη των ιδεολογικών παραδοχών της.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα για την ύπαρξη ιδεολογικών παραδοχών στη Μαθηματική Εκπαίδευση και την έρευνα αποτελούν τα τεστ τύπου PISA και TIMMS (Brown, 2011β), εφόσον καθορίζουν συγκεκριμένα πρότυπα για το παιδί που γεννούν αποκλεισμούς (Popkewitz, 2009) και σίγουρα ανταποκρίνονται στα κελεύσματα και ιδεολογήματα της ανάπτυξης του νεοφιλελευθερισμού που τοποθετεί την ποσότητα και την ταχύτητα ως αξίες.

Ιδεολογική παραδοχή αποτελεί και η τοποθέτηση του αντικειμένου της έρευνας ως η μάθηση (learning) και όχι η εκπαίδευση (education), πράγμα που οδηγεί σε μια υποτίμηση της μελέτης των κοινωνικών και των πολιτικών παραγόντων (Pais & Valero, 2011).

Ο Pais τονίζει ότι είναι ιδεολογικός ο τρόπος με τον οποίο οι κυρίαρχες τάσεις στην έρευνα αντιμετωπίζουν το χάσμα των ανισοτήτων στην εκπαίδευση, γιατί θέτουν κάτω από το φακό της έρευνας το πως να μειωθεί αυτό, και όχι το πως να εξαλείφει (Pais, 2011). Αυτό βασίζεται ίσως σε μια παραδοχή ότι η κοινωνική επιλογή είναι μια φυσική κατάσταση που απορρέει από τις αξιολογικές λειτουργίες που έχει η κοινωνία μας (ο.π.).

Υποστηρίζουμε, λοιπόν, ότι οι προσεγγίσεις της κοινωνικοπολιτικής διάστασης στη Μαθηματική εκπαίδευση έχει ενδιαφέρον να την μελετούμε ως πρακτική εντασσόμενη στην ιδεολογική πάλη που συμβαίνει στην κοινωνία. Με αυτήν την έννοια υποστηρίζουμε ότι η έρευνα πάνω στη Μαθηματική Εκπαίδευση έχει ενδιαφέρον να αποκαλύπτει και να κάνει κριτική στις ιδεολογικές παραδοχές που ενυπάρχουν σε αυτή και να τις τοποθετεί κάτω από το φακό της μελέτης της. Ακολουθούμε το σχήμα των Skovsmose και Borba που υποστηρίζουν ότι η έρευνα πάνω στη Μαθηματική Εκπαίδευσης δεν πρέπει να τοποθετείται με βάση μόνο αυτό που βλέπει αλλά με βάση αυτό που θα μπορούσε να δει (Skovsmose & Borba, 2004).

Με αυτό το σκεπτικό, έχει ενδιαφέρον η έρευνα πάνω στην Κοινωνικοπολιτική διάσταση να περιλαμβάνει κριτική σε τρεις άξονες, που προκύπτουν κατά την εκτίμησή μας από την θεωρητική ανάλυση που κάναμε πιο πάνω: τις Δομές της Εκπαίδευσης, το Περιεχόμενο της γνώσης και τη Διδακτική.

Μια προσέγγιση που θέλει να σταθεί με δομικό τρόπο απέναντι στις εκπαιδευτικές και τις κοινωνικές ανισότητες έχει ενδιαφέρον να κάνει ριζική κριτική στις δομές της εκπαίδευσης, σε συστοιχία με τις δομές τις κοινωνίας και της οικονομίας. Η σχολική τάξη και το σχολείο ως ίδρυμα είναι ιστορικά προϊόντα (Popkewitz, 2011). Είναι δηλαδή φαινόμενα που δημιουργήθηκαν υπό συγκεκριμένες κοινωνικοοικονομικές συνθήκες. Η έρευνα κατά τη γνώμη μας έχει ενδιαφέρον να βλέπει πέρα από αυτά και να τα επερωτά (Pais, Stentoft, & Valero, 2010). Η απόλυτη αποδοχή αυτών των θεσμών προβάλλει με υλικούς όρους συγκεκριμένα ιδεολογικά χαρακτηριστικά.

Όσον αφορά το περιεχόμενο της γνώσης (αναφερόμαστε στα σχολικά Μαθηματικά), ερχόμαστε κοντά στην προσέγγιση του Skovsmose, ο οποίος προτείνει εκτός από τις μεθόδους διδασκαλίας να επερωτούμε και το περιεχόμενο της σχολικής γνώσης. Μιλήσαμε εκκινώντας από την επιστημολογία για τις ιδεολογικές παραδοχές στην επιστήμη. Τέτοιες, εκτός από τον τρόπο που οργανώνεται η εκπαίδευση, βρίσκονται και στο περιεχόμενο της σχολικής γνώσης. Ερωτήματα τα οποία αναφέρει και ο Skovsmose και τα οποία περιγράψαμε έχουν ενδιαφέρον εδώ, όπως το πως έφτασε στο να προκύψει ιστορικά η γνώση και ποιον εξυπηρετεί ή εξυπηρέτησε ιστορικά.

Όσον αφορά τη διδακτική, έχει ενδιαφέρον η μελέτη της από τη μεριά της αποκάλυψης των ιδεολογικών παραδοχών που υπάρχουν σε αυτή. Σε αυτό το σημείο έχουν να προσφέρουν πράγματα όλες οι διαφορετικές προσεγγίσεις της Κοινωνικοπολιτικής διάστασης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Το ζήτημα τούτο το θεωρούμε τεράστιο και χρήζει περεταίρω μελέτης.

Ευχαριστίες

Η παρούσα δουλειά αποτελεί τμήμα της διπλωματικής μου εργασίας στο πλαίσιο του προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.. Ευχαριστώ ιδιαίτερα για τη συμβολή τους τους Παναγιώτη Σπύρου, Δημήτρη Χασάπη και Δέσποινα Πόταρη.

Αναφορές

Althusser L. (1999). Θέσεις, Αθήνα: Θεμέλιο.

Althusser L. (2014). On the reproduction of capitalism, London: Verso.

Baldino, R. & Cabral, T. (2011). School and surplus value: Revisiting Althusser Educational Studies in Mathematics (special issue).

Brown T. (2011α). Mathematics education and subjectivity, London: Springer.

Brown T. (2011β). The sublime object of Mathematics in schools στο Proceedings of the first Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester, England.

Chasapis D. (2000). The relationship of children to Mathematical knowledge and its alienation through and by the schooling evaluation practices στο Proceedings of the second Mathematics Education and Society Conference, Montechoro, Portugal.

Coriat B. (χ.χ.). Τα εργοστασιακά πανεπιστήμια στην Κίνα στην πολιτιστική επανάσταση, Αθήνα: Α/συνέχεια.

Frankenstein, M. (1983). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. Journal of Education, Vol. 165, No. 4.

Llewllyn A. (2013). Progress – is it worth it? A discussion of productions of progress in mathematics education στο Proceedings of the second Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester.

Mendick H. (2011). Mathematics / Education and progress, στο Mathematics Education and Contemporary Theory Conference, Manchester, Britain.

Pais, A., Stentoft, D., & Valero, P. (2010). Broadening the role of theory in mathematics education research. Στο E. Jablonka, C. Bergsten, & T. Wedege (Eds.), Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions. Proceedings of MADIF 7, The Seventh Mathematics Education Research Seminar, Stockholm.

Pais, A., & Valero, P. (2011). The specificity of mathematics learning and the disavowal of the political in research. Educational Studies in Mathematics (special issue on contemporary theory).

Pais, A & Valero, P. (2012) Researching research: Mathematics education in the political. Educational studies in mathematics, 80(1-2), 9-24.

Pais, A. (2011). Mathematics Education and the Political: An Ideology Critique of an Educational Research Field. Phd thesis

Popkewitz, T. S. (2009). Curriculum study, curriculum history, and curriculum theory: the reason of reason. Journal of Curriculum studies, 41(3), 301-319.

Popkewitz, T. S. (2011). Pisa. In Pisa Under Examination (pp. 31-46). Sense Publishers.

Roth W. –M. και Radford L. (2011). A cultural-historical perspective in mathematics teaching and learning, Rotterdam: Sense.

Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 27(1), 35-57.

Skovsmose, O., & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. Στο Researching the socio-political dimensions of mathematics education (pp. 207-226). Springer US.

Μηλιός Γ. (1993). Εκπαίδευση και εξουσία, Αθήνα: Κριτική.

Μπαλτάς Α. (2002). Για την επιστημολογία του Λουί Αλτουσέρ, Αθήνα: Νήσος.

Πουλαντζάς Ν. (2001). Οι κοινωνικές τάξεις στο σύγχρονο καπιταλισμό, Αθήνα: Θεμέλιο.

Φορτούνης Γ. (1999). Λουί Αλτουσέρ, το αναπόδραστο μιας αδύνατης θεωρίας. Διδακτορική διατριβή.

«ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ»: ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΔΥΣΚΟΛΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Παν. Παπαδημητρίου, Χαρούλα Σταθοπούλου, Σωτηρία Τζιβινίκου
Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ
takispapadi@yahoo.gr, hastath@uth.gr, sotitzivi@sed.uth.gr

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας για την διερεύνηση και την προσαρμογή του μοντέλου της «ανταπόκρισης στη διδασκαλία και παρέμβαση» στο ελληνικό σχολείο και συγκεκριμένα στο Γυμνάσιο. Η επιμέρους μελέτη έχει βασικό στόχο την κατασκευή ενός ανιχνευτικού εργαλείου στα μαθηματικά με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Οι θεματικές περιοχές που συμπεριλήφθηκαν στο σχεδιασμό του εργαλείου διδάσκονται σε όλους τους ηλικιακούς κύκλους και συνδέονται με βασικά μαθησιακά αποτελέσματα της εξελικτικής πορείας μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων κατά τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Το ανιχνευτικό εργαλείο χορηγήθηκε σε 241 μαθητές της Α΄ τάξης Γυμνασίων της Αττικής και ελέγχθηκε η αξιοπιστία και η αποτελεσματικότητα του.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με πρόσφατη έκθεση του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (OECD, 2013), η Ευρωπαϊκή Ένωση (Ε.Ε.) υστερεί σημαντικά στην ανάπτυξη βασικών δεξιοτήτων των 15χρονων μαθητών στα μαθηματικά σε σχέση με το στόχο που τέθηκε στο Ευρωπαϊκό Συμβούλιο το 2009, ο οποίος προέβλεπε τη μείωση του ποσοστού των μαθητών με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά κάτω από 15% (Official Journal of the European Union, 2009). Στην Ελλάδα το ποσοστό των μαθητών που δεν επιδεικνύει βασικές μαθηματικές δεξιότητες είναι σημαντικά υψηλότερο από το αντίστοιχο ποσοστό των χωρών του ΟΟΣΑ, με ένα ποσοστό περίπου 30% να καταγράφει επιδόσεις κάτω από το βασικό επίπεδο (ΙΕΠ, 2012). Αντίστοιχη ανησυχία καταγράφεται στην Αμερική όπου μεγάλος αριθμός μαθητών φαίνεται να έχει χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά. Σύμφωνα με την Εθνική Έκθεση Αξιολόγησης των ΗΠΑ (2013), η επίδοση των μαθητών που φοιτούν στις τάξεις Δ΄ δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου έπεσε κάτω από τη βάση που έχει οριστεί με βάση τα εθνικά τους στάνταρ (17% και 26% αντίστοιχα, National Center for Education Statistics, 2013). Στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες τα ποσοστά έπεσαν ακόμη περισσότερο: 45% για τους μαθητές της Δ΄ Δημοτικού και 65% για τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου (Cortiella & Horowitz, 2014).

Η σχολική υποεπίδοση και οι αιτίες που σχετίζονται με αυτή αποτελούν ένα πολυπαραγοντικό φαινόμενο που έχει αντίκτυπο στα άτομα, την κοινωνία, και την οικονομική ανάπτυξη. Το Ευρωπαϊκό Συμβούλιο, στο στρατηγικό πλαίσιο για την ευρωπαϊκή συνεργασία στον τομέα της εκπαίδευσης και της κατάρτισης (ΕΕ 2009/C 119/02), θέτει ως βασικές προτεραιότητες την ανάπτυξη καινοτόμων εκπαιδευτικών μεθόδων και την ισότητα ευκαιριών εκπαίδευσης για όλους τους μαθητές. Όλοι οι μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες μάθησης αποτελούν ομάδα στόχο για τις παραπάνω προτεραιότητες ανεξάρτητα αν αυτές σχετίζονται με μαθησιακές δυσκολίες, στερημένο κοινωνικό-οικονομικό περιβάλλον ή αφορούν μετανάστες. Με αυτά τα δεδομένα είναι λογικό να αναζητούνται από όλα τα κράτη συνεκτικές, ολοκληρωμένες και τεκμηριωμένες εκπαιδευτικές πολιτικές αντιμετώπισης του προβλήματος. Μια τέτοια εκπαιδευτική πολιτική για την αντιμετώπιση των δυσκολιών μάθησης πρέπει να περιλαμβάνει μέτρα πολυεπίπεδης πρόληψης, παρέμβασης και υποστήριξης (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2011). Τα μέτρα θα πρέπει να καλύπτουν όλα τα επίπεδα της βασικής εκπαίδευσης, παρεμβάσεις σε σχολικό επίπεδο και προγράμματα υποστήριξης για τους μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες μάθησης ή είναι σε επικινδυνότητα. Την υλοποίηση των παραπάνω επιχειρεί να πετύχει ένα μοντέλο βελτίωσης της σχολικής επίδοσης μαθητών με δυσκολίες μάθησης που άρχισε να εφαρμόζεται την τελευταία δεκαετία στην Αμερική και ονομάζεται «ανταπόκριση στη διδασκαλία και παρέμβαση – RtI&I[3]».

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Αφετηρία διαμόρφωσης του μοντέλου RtI&I αποτέλεσαν η μελέτη των μαθησιακών δυσκολιών και η κριτική που ασκήθηκε στο κριτήριο της απόκλισης που συνδέεται με την ανίχνευση και οριοθέτησή τους (Francis et al. 2005, Kavale et al. 2005, Restori et al. 2009, Kim et al. 2014). Έτσι, στο πλαίσιο αναζήτησης εναλλακτικών τρόπων προσέγγισης του προβλήματος, ο Fuchs έθεσε τους άξονες ενός εκπαιδευτικού μοντέλου βελτίωσης της σχολικής επίδοσης των μαθητών που εμφανίζουν ή κινδυνεύουν να εμφανίσουν δυσκολίες μάθησης ανεξάρτητα από τα αίτιά τους (Fuchs & Fuchs , 1998). Το προτεινόμενο μοντέλο περιλαμβάνει μια συνεχή και πολυεπίπεδη διαδικασία η οποία εστιάζει στο πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές με δυσκολίες μάθησης σε μια επιστημονική παρέμβαση υψηλής ποιότητας, βασισμένη σε ερευνητικά ευρήματα. Το βασικό οργανωτικό σχήμα της προσέγγισης προβλέπει ένα πολυεπίπεδο σύστημα παρέμβασης (τριών επιπέδων) που ξεκινά από το σύνολο των μαθητών και προχωρά στον εντοπισμό εκείνων που έχουν δυσκολίες μάθησης ή είναι σε επικινδυνότητα.

[3] «Responsiveness to Intervention and Instruction»

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ

Η ανίχνευση που διεξάγεται στο πλαίσιο της εφαρμογής του RtI&I, περιλαμβάνει την ανίχνευση όλων των μαθητών στην έναρξη της σχολικής χρονιάς και είναι μία διαδικασία μέτρησης με στοιχεία αξιολόγησης. Ερμηνεύεται ως η διαδικασία συγκέντρωσης δεδομένων που συμβάλουν στη μάθηση και εφοδιάζουν με χρήσιμες πληροφορίες τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές. Εστιάζει τόσο στην εννοιολογική όσο και στη διαδικαστική γνώση και στοχεύει, κυρίως, στον εντοπισμό αυτών που ξέρουν οι μαθητές και στην ικανότητα τους να τα χρησιμοποιούν. Στόχοι της αξιολόγησης είναι η παρακολούθηση της προόδου των μαθητών, η λήψη διδακτικών αποφάσεων, η αποτίμηση της προόδου των μαθητών, καθώς και της αποτελεσματικότητας του εκπαιδευτικού προγράμματος που εφαρμόστηκε. Η αποτίμηση (evaluation) είναι η διαδικασία καθορισμού της αξίας των διαφορετικών δεδομένων που συλλέχθηκαν κατά την αξιολόγηση και σχετίζεται με την ερμηνεία των δεδομένων. Τόσο η αξιολόγηση όσο και η αποτίμηση περιλαμβάνουν μέτρηση (measurement) που εκφράζεται ποσοτικά ή/και αριθμητικά.

Η καθολική ανίχνευση που διεξάγεται στο πλαίσιο εφαρμογής του RtI&I έχει στοιχεία μέτρησης, αξιολόγησης και αποτίμησης αλλά δεν ταυτίζεται με κανένα από αυτά. Η καθολική ανίχνευση (universal screening) είναι το πρώτο βήμα εφαρμογής του RtI&I και περιλαμβάνει οριζόντια χρήση ενός ανιχνευτικού εργαλείου με το οποίο γίνεται ο εντοπισμός των μαθητών που βρίσκονται σε επικινδυνότητα ή αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά και στη γλώσσα. Επιπλέον, τα δεδομένα που συλλέγονται κατά την ανίχνευση σε όλους τους μαθητές αποτελούν πολύτιμα στοιχεία για το σχεδιασμό της διαφοροποιημένης διδασκαλίας στη γενική τάξη (1ο επίπεδο RtI&I) και την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητα της εκπαιδευτικής διαδικασίας για το σύνολο των μαθητών (Kovaleski et al., 2013). Η διαδικασία ανίχνευσης διεξάγεται αρχικά στην έναρξη της σχολικής χρονιάς με σκοπό την επιλογή των μαθητών που θα λάβουν επιπλέον εκπαιδευτική υποστήριξη σε ολιγομελής ομάδες (2ο επίπεδο RtI&I) . Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η μέτρηση στα μέσα της σχολικής χρονιάς προκειμένου να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα της παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε, να εντοπιστούν οι μαθητές που μπορούν να συνεχίσουν χωρίς επιπλέον υποστήριξη ή εκείνοι με δυσκολίες που δεν είχαν επιλεγεί στην αρχή της χρονιάς για παρέμβαση. Βασικός σκοπός της καθολικής ανίχνευσης είναι η έγκαιρη αντιμετώπιση των δυσκολιών στη μάθηση πριν παγιωθούν και οδηγήσουν σε σχολική αποτυχία τους μαθητές. (Kovaleski et al., 2013). Σημαντική παράμετρος είναι η κατάλληλη επιλογή των δοκιμασιών που θα περιλαμβάνει το εργαλείο ανίχνευσης, καθώς αυτές είναι που διαμορφώνουν την εγκυρότητα περιεχομένου του εργαλείου (content validity). Παράλληλα, οι δοκιμασίες θα πρέπει να συγκροτούν ένα εργαλείο ανίχνευσης με προβλεπτική εγκυρότητα (Predictive validity), αξιοπιστία (Reliability) και αποδοτικότητα (Efficiency). Η κατανόηση της έννοιας του αριθμού αναγνωρίζεται από πολλούς ερευνητές ως παράγοντας με ισχυρή προβλεπτική αξία των Μ.Δ. στα μαθηματικά (Gersten, Jordan, & Flojo, 2005, Geary, 2010). Η έλλειψη κατανόησης της έννοιας συνδέεται άμεσα με την εννοιολογική κατάκτηση των μαθηματικών διαδικασιών και ταυτόχρονα θέτει το πλαίσιο αξιολόγησης και διδασκαλίας των μαθητών με Μ.Δ. στα μαθηματικά (Jordan, Kaplan, Olah, & Louniak, 2006, Geary, 2010). Η διδασκαλία των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων καταλαμβάνει μεγάλο μέρος του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο. Η επιτυχής εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων απαιτεί τη συμβολή ποικίλων γνωστικών λειτουργιών και ικανοτήτων και δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους μαθητές με Μ.Δ. (Anghileri 2001, Cawley et al 2007). Οι γεωμετρικές έννοιες που περιλαμβάνονται στο εργαλείο ανίχνευσης είναι βασικές έννοιες που διδάσκονται άτυπα στο Δημοτικό και εμπεριέχουν γνωστικές διαδικασίες οπτικοποίησης εννοιών και ταξινόμησης σχημάτων. Αποτελούν δομικά στοιχεία που απαιτούν τη στοιχειώδη ανάλυση και γενίκευση για την τυπική γεωμετρία που θα ακολουθήσει στις επόμενες τάξεις. Τέλος, η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνεται στους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης (NCTM, 2000), καθώς και βασικό παράγοντα αξιολόγησης της μαθηματικής ικανότητας. Βρίσκεται στην καρδιά των μεθοδολογικών προσεγγίσεων που υιοθετούνται στη Μαθηματική εκπαίδευση και αποτελεί στόχο όλων των τάξεων στη βασική εκπαίδευση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την αξιολόγηση των Μ.Δ. στα μαθηματικά κατασκευάσαμε ένα εργαλείο ανίχνευσης που εστιάζει στην έννοια του αριθμού, στην εκτέλεση βασικών αριθμητικών πράξεων, στην επίλυση λεκτικού προβλήματος και σε βασικές γεωμετρικές έννοιες. Η προκαταρκτική έρευνα έγινε με χορήγηση του εργαλείου καθολικής ανίχνευσης με 46 δοκιμασίες αντικειμενικού τύπου, σε 24 μαθητές ενός τμήματος της Α΄ Γυμνασίου. Ο χρόνος που διατέθηκε στους μαθητές ήταν 40 λεπτά και κρίθηκε επαρκής από το σύνολο των μαθητών που συμμετείχαν. Η επεξεργασία των δεδομένων που συλλέχτηκαν έδωσαν σημαντικά στοιχεία την ανάλυση των δοκιμασιών που συμπεριλήφθηκαν (item analysis) και στην περαιτέρω διαμόρφωση του εργαλείου ανίχνευσης. Ειδικότερα, εξετάστηκε ο βαθμός ευκολίας (Β.Ε.) και ο βαθμός διάκρισης (Β.Δ) κάθε επί μέρους δοκιμασίας. Ο βαθμός δυσκολίας καθορίστηκε από το ποσοστό επιτυχίας σε κάθε δοκιμασία για το σύνολο των μαθητών και ο βαθμός διάκρισης από τον τύπο: $D=(N_A-N_B)/N$, όπου NA ο αριθμός των επιτυχιών στο 1/3 των μαθητών με την καλύτερη βαθμολογία, NB ο αριθμός των επιτυχιών στο 1/3 των μαθητών με τη χειρότερη βαθμολογία και N=8 (1/3 του 24). Ο βαθμός διάκρισης αποτελεί ένα δείκτη που φανερώνει τη διακριτική ικανότητα των ερωτημάτων ενός τεστ, δηλαδή την ικανότητα των ερωτημάτων να ομαδοποιούν τους εξεταζόμενους σε δυνατούς και αδύναμους. Με αυτή την ανάλυση απαλείφθηκαν οι δοκιμασίες με Β.Ε.>90% και οι δοκιμασίες με Β.Δ.<0,25. Στη συνέχεια, με βάση τα αποτελέσματα και την ποιοτική ανάλυση τους, διαμορφώθηκε το τελικό εργαλείο ανίχνευσης με 40 δοκιμασίες αντικειμενικού τύπου. Το τελικό εργαλείο ανίχνευσης χορηγήθηκε σε ένα δείγμα 241 μαθητών της Α΄ Γυμνασίου από 6 διαφορετικά σχολεία της περιφέρειας Αττικής, λίγο μετά την έναρξη του σχολικού έτους. Συμμετείχαν όλοι οι μαθητές στα σχολεία που επιλέχθηκαν ανεξάρτητα από τη μαθηματική τους επίδοση ή τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ

Οι δοκιμασίες που περιλαμβάνονται στο προτεινόμενο εργαλείο ανίχνευσης έχουν ως στόχο να μετρήσουν την επίδοση των μαθητών σε θέματα που απαιτούν μαθηματική γνώση, σκέψη και δεξιότητα στην αναζήτηση μιας απάντησης ή ενός αποτελέσματος. Το εργαλείο περιλαμβάνει 40 ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου, που αναγνωρίζονται από όλους τους διορθωτές είτε ορθές είτε εσφαλμένες. Αναλυτικότερα, περιλαμβάνονται ερωτήσεις επιλογής της σωστής απάντησης και ερωτήσεις που απαιτούν έναν υπολογισμό ή την απάντηση σε ένα απλό πρόβλημα. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίστηκε (και εξασφαλίζεται) η εγκυρότητα των μετρήσεων μεταξύ διαφορετικών βαθμολογητών. Το σύνολο των δοκιμασιών συγκροτεί ένα εργαλείο μέτρησης με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα που περιλαμβάνει δειγματικά γνωστικές περιοχές που έχουν μεγάλη σημασία για το σχολικό έργο στα μαθηματικά (έννοια του αριθμού, απλοί υπολογισμοί, βασικές γεωμετρικές έννοιες και επίλυση προβλήματος). Έτσι, για τη έννοια του αριθμού χρησιμοποιήθηκαν 13 δοκιμασίες που περιλαμβάνουν: Μετατροπή λεκτικής γραφής φυσικού αριθμού σε συμβολική γραφή (2 items), την έννοια του κλάσματος σε γεωμετρική μορφή (1 item), σύγκριση ρητών σε κλασματική μορφή (4 items), σύγκριση ρητών σε δεκαδική μορφή (2 items), μετατροπή ρητού από κλασματική σε δεκαδική μορφή (1 item), τοποθέτηση ή συμπλήρωση αριθμών σε αριθμητική γραμμή (3 items) και μία δοκιμασία σχηματισμού αριθμού που βασίζεται στην αξία θέσης κάθε ψηφίου. Για την ενότητα των υπολογισμών χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 11 δοκιμασίες με βασικές πράξεις φυσικών που περιλάμβαναν μέχρι τριψήφιους αριθμούς, κλασμάτων με μονοψήφιους όρους και δεκαδικών αριθμών. Η ενότητα για τον έλεγχο των βασικών εννοιών της γεωμετρίας περιελάμβανε από μία δοκιμασία για: αναγνώριση παραλληλογράμμου ανεξάρτητα από το είδος ή τον προσανατολισμό του, αναγνώριση ορθής γωνίας ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της ή το μήκος των πλευρών της, υπολογισμό πλευράς παραλληλογράμμου με χρήση της περιμέτρου του, υπολογισμό εμβαδού τριγώνου, αναγνώριση της καθετότητας ή της παραλληλίας. Τέλος, η τελευταία ενότητα δοκιμασιών έχει απλά προβλήματα (αναλογίας, ποσοστών και κλασματικής έννοιας) και ερωτήματα που απαιτούν αποκωδικοποίηση λεκτικών περιγραφών (π.χ. τριπλάσιος του 12, διπλάσιο του 3 αυξημένος κατά 4 κ.λπ.).

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ

Η εγκυρότητα, η αξιοπιστία και η αποδοτικότητα είναι σημαντικοί παράγοντες ενός αποτελεσματικού εργαλείου καθολικής ανίχνευσης. Η εγκυρότητα περιεχομένου (content validity) αποτελεί βασικό τύπο εγκυρότητας και αναφέρεται στο κατά πόσο ένα όργανο μέτρησης καλύπτει εννοιολογικά το εύρος της μεταβλητής που μετράει (Cohen et al., 2008). Αυτό σημαίνει ότι οι ερωτήσεις που συγκροτούν το εργαλείο αποτελούν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του συνόλου των ερωτήσεων που καλύπτουν τη συγκεκριμένη θεματική περιοχή. Είναι προφανές ότι η απαίτηση αυτή σε συνδυασμό με το σύντομο χρονικό διάστημα που απαιτεί μια καθολική ανίχνευση στο πλαίσιο εφαρμογής του RtI&I έχει περιορισμούς. Η εγκυρότητα του περιεχομένου επιτεύχθηκε μέσα από το συσχετισμό του μαθηματικού περιεχομένου του ανιχνευτικού εργαλείου με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών στο Δημοτικό. Ως υλικό έρευνας και τεκμηρίωσης χρησιμοποιήθηκαν όχι μόνο το Πρόγραμμα Σπουδών του Υπουργείου Παιδείας (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2003) αλλά και το σύνολο των βιβλίων μαθητών και εκπαιδευτικών όλων των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Έτσι, η επιλογή των ερωτημάτων βασίστηκε όχι μόνο στις γνώσεις και δεξιότητες που οι μαθητές αναμένεται να έχουν όταν ξεκινούν τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αλλά και στη λειτουργική σχέση που έχουν με τα επόμενα βήματα της σχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Η εκτίμηση της αξιοπιστίας έγινε με τους υπολογισμούς της τιμής του συντελεστή εσωτερικής συνέπειας του Cronbach και την εφαρμογή της μεθόδου διπλής αξιολόγησης (test- retest). Η βαθμολόγηση κάθε μαθητή έγινε με το άθροισμα των σωστών απαντήσεων του φύλλου ανίχνευσης, καταγράφοντας και τα επιμέρους αθροίσματα ανά θεματική περιοχή.

Επιπλέον, υπολογίστηκε ο λόγος εγκυρότητας περιεχομένου (Content Validity Ratio, CVR) και βρέθηκε ίσος με τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει (CVR=1). Προκειμένου να υπολογιστεί ο CVR, δόθηκε μία λίστα από επιλεγμένα ερωτήματα του εργαλείου ανίχνευσης σε 10 μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε, οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να χαρακτηρίσουν τις επιλεγμένες δοκιμασίες ως εξής: «απαραίτητη», «χρήσιμη, άλλα όχι απαραίτητη» ή «μη αναγκαία». Στη συνέχεια ο υπολογισμός του λόγου εγκυρότητας περιεχομένου έγινε με τον ακόλουθο τύπο: $\mathrm{CVR} = \left(n_O - {}^{\mathrm{N}}\!/_{2}\right) : \left({}^{\mathrm{N}}\!/_{2}\right)$ (όπου με n_o συμβολίζεται ο αριθμός των εκπαιδευτικών που ένα κρίνουν ένα ερώτημα ως «απαραίτητο» και με Ν συμβολίζεται ο συνολικός αριθμός των εκπαιδευτικών που έκριναν τα ερωτήματα).

Η εκτίμηση της αξιοπιστίας έγινε με δύο τρόπους: α) μέσω της επανάληψης της μέτρησης (test-retest) και β) με υπολογισμό του δείκτη εσωτερικής συνάφειας άλφα του Cronbach. Στατιστικά, η αξιοπιστία εκτιμήθηκε με τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης r (correlation coefficient), ο οποίος προέκυψε από τη συσχέτιση των δύο βαθμολογιών που προέκυψαν από δύο μετρήσεις στους ίδιους μαθητές με χρονική απόσταση από δύο μέχρι τρεις μήνες. Ο συντελεστής συσχέτισης (r) κυμαίνεται από την τιμή 0, όπου δηλώνεται ότι το εργαλείο μέτρησης δεν είναι αξιόπιστο, μέχρι την τιμή 1.0, που δείχνει ότι διαθέτει τη μέγιστη αξιοπιστία. Οι τιμές συσχέτισης που προέκυψαν για το εργαλείο που κατασκευάσαμε ικανοποιούν τα πρότυπα του οδηγού αντιμετώπισης των Μαθησιακών Δυσκολιών στα Μαθηματικά με βάση την ανταπόκριση στην παρέμβαση (Gersten et al., 2009) και είναι:

Έννοια του αριθμού: 0,81	Γεωμετρία: 0,73
Υπολογισμοί: 0,82	Επίλυση προβλήματος: 0,63
Γενική βαθμολογία: 0,92	

Ο έλεγχος της αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας (internal consistency) ελέγχθηκε με τον υπολογισμό του δείκτη άλφα του Cronbach. Με τη διαδικασία αυτή μετρήθηκε η εσωτερική σταθερότητα του εργαλείου ανίχνευσης. Είναι ένας δείκτης που φανερώνει κατά πόσο διαφορετικές ερωτήσεις (items) μετρούν την ίδια έννοια (μεταβλητή), συγκρίνοντας τη διακύμανση του αθροίσματος των διακυμάνσεων όλων των ερωτήσεων με κάθε μια ερώτηση ξεχωριστά. Για το σύνολο του εργαλείου ο δείκτης άλφα του Cronbach βρέθηκε α=0,897, που αποτελεί υψηλή τιμή (ό.π).

Η αποδοτικότητα σχετίζεται με το χρόνο που απαιτεί η συνολική διαδικασία ανίχνευσης (χορήγηση, βαθμολόγηση και ανάλυση αποτελεσμάτων για όλους τους μαθητές). Το έντυπο εργαλείο ανίχνευσης που κατασκευάσαμε είναι εύκολο στη χορήγησή του, αφού η χορήγηση γίνεται ομαδικά και περιορίζεται στη μία διδακτική ώρα. Ο χρόνος βαθμολόγησης είναι σχετικά μικρός, καθώς τα ερωτήματα είναι αντικειμενικού τύπου και η βαθμολογία δίτιμη (μηδέν/ένα). Η εισαγωγή των αποτελεσμάτων σε πρόγραμμα στατιστικής επεξεργασίας (excel, spss κ.λπ.) εξαρτάται από τον αριθμό των μαθητών και η επεξεργασία που απαιτείται απλή. Έτσι, σε σύντομο χρονικό διάστημα καταγράφονται οι αδυναμίες των μαθητών που υστερούν σημαντικά από το αναμενόμενο επίπεδο της τάξης τους και χρήζουν πρόσθετης εκπαιδευτικής στήριξης. Επιπλέον, και εξίσου σημαντικό, είναι ότι τα δεδομένα που συλλέγονται από το σύνολο των μαθητών συνθέτουν την εικόνα του μαθησιακού δυναμικού του τμήματος (ή της τάξης) και αποτυπώνουν τα μαθησιακά ελλείματα που μπορεί να υπάρχουν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Το εργαλείο ανίχνευσης μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά που κατασκευάσαμε –ως μέρος της διαδικασίας προσαρμογής και εφαρμογής του μοντέλου «ανταπόκριση στη διδασκαλία και παρέμβαση»– θεωρούμε ότι εκπληρώνει σε σημαντικό βαθμό τις απαιτήσεις που τέθηκαν για την κατασκευή του. Η επιλογή των δοκιμασίων που περιλαμβάνει το εργαλείο αποτελούν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των βασικών εννοιών και μαθηματικών δεξιοτήτων που θα έπρεπε να έχει ένας μαθητής στο τέλος του Δημοτικού και ως εκ τούτου εξασφαλίζουν την εγκυρότητα περιεχομένου του. Ο δείκτης συνολικής αξιοπιστίας του εργαλείου κρίνεται πολύ ικανοποιητικός. Οι μικρότερες τιμές που καταγράφηκαν στις ενότητες γεωμετρία και επίλυση προβλήματος αποδίδονται σε ένα σημαντικό βαθμό στην επίδραση που έχει ο επαναληπτικός χαρακτήρας που έχει το περιεχόμενο των μαθηματικών στην Α Γυμνασίου. Μεγάλη είναι και η εσωτερική σταθερότητα του εργαλείου με α=0,897. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων του εργαλείου παρέχει πληροφορίες των αδυναμιών του κάθε μαθητή τόσο σε σχέση με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος όσο και σε σχέση με το σύνολο των μαθητών της τάξης (ή του τμήματος). Έτσι, η επιλογή των μαθητών για παρέμβαση μπορεί να γίνει με βάση αντικειμενικά στοιχεία και χωρίς να χάνεται πολύτιμος χρόνος, με τη σημείωση ότι ο καθορισμός του διαχωριστικού ορίου (cut off) για την επιλογή των μαθητών είναι σημαντικός άλλα όχι απόλυτος (Gersten et al, 2009). Είναι επίσης σημαντικό να αναφέρουμε ότι η έρευνα που πραγματοποιήθηκε, δεν αποτελεί προσπάθεια στάθμισης ενός εργαλείου. Αυτό είναι άλλωστε έξω από τη φιλοσοφία του RtI&I, σύμφωνα με την οποία τα εργαλεία ανίχνευσης που απαιτούνται για την εφαρμογή του, είναι κατασκευές που μπορεί να διαφέρουν από σχολείο σε σχολείο ενσωματώνοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών κάθε περιοχής.

Στην πράξη, η χρήση του εργαλείου και πολύ περισσότερο τα αποτελέσματα των μετρήσεων αντιμετωπίστηκαν με πολύ ενδιαφέρον από τους εκπαιδευτικούς των τάξεων που συμμετείχαν στο δείγμα μας. Η δυνατότητα συνοπτικής αποτύπωσης του μαθηματικού προφίλ των μαθητών με ανάδειξη συγκεκριμένων ικανοτήτων και αδυναμιών ανά θεματική περιοχή στην αρχή του σχολικού έτους και η μετέπειτα σύγκριση με την εικόνα που είχαν διαμορφώσει η ίδιοι στη συνέχεια, κρίθηκε από τους περισσότερους χρήσιμη και ενδιαφέρουσα. Η κατασκευή του εργαλείου είναι το πρώτο βήμα στη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας που μπορεί να έχει η προσαρμογή και εφαρμογή του RtI&I στην Ελλάδα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anghileri, J. (2001). What are we trying to achieve in teaching standard calculating procedures. In Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (PME25), Vol 2, pp. 41- 49. Utrecht: Freudenthal Institute.

Cawley, J. F., Parmar, R. S., Lucas-Fusco, L. M., Kilian, J. D., & Foley, T. E. (2007). Placevalue and mathematics for students with mild disabilities: Data and suggested practices. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 5 (1), pp. 21-39.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Cortiella, C. & Horowitz, S. H. (2014). *The State of Learning Disabilities: Facts, Trends and Emerging Issues*. New York: National Center for Learning Disabilities. Retrieved from: http://www.ncld.org/wp-content/uploads/2014/11/2014-State-of-LD-FINAL-FOR-RELEASE.pdf

Francis, D. J., Fletcher, J. M., Stuebing, K. K., Lyon, G. R., Shaywitz, B. A., & Shaywitz, S. E. (2005). Psychometric approaches to the identification of LD: IQ and achievement scores are not sufficient. *Journal of Learning Disabilities*, 38(2), pp.98-108.

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (1998). Treatment validity: A unifying concept for reconceptualizing the identification of learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 13, pp. 204-219.

Geary, D. C. (2010). Mathematical learning disabilities. In Holmes J. (ed.), *Advances in Child Development and Behavior* (Vol. 38, pp. 45-77). San Diego, CA: Academic Press.

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R. & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to intervention (RtI) for elementary and middle schools (NCEE 2009-4060)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Services. Institute of Education Sciences. U.S. Department of Education.

Gersten, R., Jordan, N. & Flojo, J. (2005). Early Identification and Interventions for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, vol. 38, no. 4, pp. 293-304.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Olah, L. & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77, pp. 153–175.

Kavale, K., Holdnack, J. A., & Mostert, M. P. (2005). Responsiveness to intervention and the identification of specific learning disability: A critique and alternative proposal. *Learning Disability Quarterly*, 28, pp. 2-16.

Kim, R. & Albert, L. (2014). Who can Put ‘Learning Disability Label’ on Your Child? Issues of Sociocultural Effects on Learning Disability. *International Journal of Elementary Education*, Vol. 3, No. 2.

Kovaleski, J. F., VanDerHeyden, A. M., & Shapiro, E. S. (2013). *The RTI approach to evaluating learning disabilities*. New York: Guilford Press.

National Center for Education Statistics (2013). *The Nation's Report Card: A First Look: 2013 Mathematics and Reading* (NCES 2014–451). National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, Washington, D.C.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

OECD (2013). *Education at a Glance 2013: OECD Indicators*. Retrieved from: http://dx.doi.org/10.1787/eag-2013-en

Restori, A. F., Katz, G. S., & Lee, H. B. (2009). A critique of the IQ/achievement discrepancy model for identifying specific learning disabilities. *Europe's Journal of Psychology*, 4, pp.128-145.

The Council of the European Union (2009). Council conclusion on a strategic framework for European cooperation in education and training (ET 2020). *Official Journal*, 2009/C 119/02.

Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2011. Ανακοίνωση [COM(2011)18] «Αντιμετώπιση της πρόωρης σχολικής εγκατάλειψης: Μια βασική συμβολή στην ατζέντα Ευρώπη 2020». Retrieved from: http://www.europarl.europa.eu/meetdocs/2009_2014/documents/com/com_com(2011)0018_/com_com(2011)0018_el.pdf

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2012). *PISA 2009. Πλαίσιο Αξιολόγησης και Αποτελέσματα.* Αθήνα: ΙΕΠ.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης.* Π.Ι.: Αθήνα. ΦΕΚ 303Β/13-03-2003, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003.

ΔΙΚΤΥΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ραχιώτου Λεμονιά,
Γενικό Λύκειο Στυλίδας, lrachiotou@sch.gr

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα βιώματα, οι εμπειρίες και οι παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού από τη συστηματική χρήση φύλλων εργασίας στη διδασκαλία τηςΆλγεβρας σε ένα τμήμα της Α΄ Λυκείου. Τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν διαμορφώθηκαν από το εργαστήρι Άλγεβρας του Πρότυπου Πειραματικού ΓΕΛ της Ευαγγελικής. Περιγράφεται η συμπεριφορά των μαθητών και η βελτίωση της επίδοσής τους. Η εργασία θα μπορούσε να ήταν χρήσιμη ως μαρτυρία ή/και προέρευνα, στο πλαίσιο μιας συστηματικότερης έρευνας για την αξιοποίηση των φύλλων εργασίας στη διδασκαλία της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Το νέο σχολείο του 21ου αιώνα για να είναι ανταγωνίσιμο και αποτελεσματικό πρέπει να είναι εκτός των άλλων και μια κοινότητα μάθησης όπου θα κυριαρχεί κουλτούρα συνεργασίας και συλλογικής ευθύνης, ώστε να μπορούν να αναπτυχθούν διδακτικές πρακτικές και καινοτόμες δράσεις προς όφελος των μαθητών και της ανάπτυξης των μαθησιακών επιδόσεών τους.

Σχολική μονάδα και δικτύωση - Εκπαιδευτικές κοινότητεςπρακτικής και κοινότητες μάθησης

Ο προσδιορισμός των στόχων και γενικότερα ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός ενός σχολείου ξεκινούν από την αναγνώριση των εντός και εκτός του σχολείου πρακτικών απόκτησης γνώσεων. Η εισαγωγή καινοτόμων πρακτικών αποτυπώνεται βασικά στον τρόπο της εξωτερικής και εσωτερικής δικτύωσης του σχολείου. Η εσωτερική δικτύωση δεν είναι απλά ένα οργανωτικό και διοικητικό θέμα του σχολείου αλλά καθορίζει και σε μεγάλο βαθμό την παρεχόμενη εκπαίδευση και το σύνολο της σχολικής ζωής του. Επίσης, η αναβάθμιση της θέσης του στον ευρύτερο κοινωνικό ορίζοντα πρέπει να είναι στόχος κάθε σχολείου. Στο πλαίσιο αυτό έχει δοθεί ιδιαίτερος ρόλος στις δυνατότητες δικτύωσης που προσφέρουν οι τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας. (Εκπαιδευτικός σχεδιασμός και καινοτομίες, Ιντζιδης Β.).

Οι ψηφιακές τεχνολογίες Web 2.0 έχουν δημιουργήσει τα τελευταία χρόνια πολλές ευκαιρίες σε εκπαιδευτικούς και μη, να συγκροτήσουν κοινωνικά δίκτυα και ψηφιακές κοινότητες. Επιτρέπουν τη δημιουργία αλληλεπιδραστικών και συμμετοχικών εφαρμογών, αναπαράγοντας πολλές από τις δυνατότητες που είναι αποτέλεσμα της ανθρώπινης συνεργασίας στο πλαίσιο ομάδων με άμεση επικοινωνία (Carroletal., 2006). Ο χρήστης πλέον είναι σε θέση να αναπτύξει και να αναρτήσει πληροφορίες και σκέψεις του, καταθέτοντας το προσωπικό του στίγμα στο πλαίσιο μιας ομάδας (De Longueville, 2010).

Οι κοινότητες πρακτικής που υπάρχουν από τότε που οι άνθρωποι άρχισαν να μαθαίνουν μαζί, είναι ομάδες ατόμων που μοιράζονται έναν προβληματισμό ή το πάθος για αυτό που κάνουν και αλληλεπιδρούν με τρόπο ώστε να μάθουν να το κάνουν καλύτερα (Wenger, 1998). Η μάθηση δεν μπορεί να διαχωριστεί από την κοινωνιολογική πρακτική της κοινότητας, και κατά συνέπεια η δέσμευση σε μια τέτοια κοινή πρακτική συμπεριλαμβάνει και μάθηση (Lea&Blake, 2002).

Οι κοινότητες μάθησης αποτελούνται από άτομα που συνδέονται με φυσική θέληση, μοιράζονται κοινές αξίες και ιδανικά και επηρεάζουν το ένα το άλλο στη μαθησιακή διαδικασία (Kowch&Schwier, 1997). Η οργάνωση μιας κοινότητας μάθησης οφείλει να ακολουθεί ορισμένους κανόνες. Απαραίτητη είναι η διασφάλιση της επικοινωνίας ανάμεσα στα μέλη μέσα από επιλεγμένα κανάλια, με τρόπο ώστε να μη δημιουργούνται αποκλεισμοί. Όμως, αν και είναι γνωστό ότι η πράξη της επικοινωνίας μεταμορφώνει όλα τα άτομα που εμπλέκονται σε αυτή (Pea, 1994), το ζητούμενο δεν μπορεί να είναι μόνο η επικοινωνία. Το πιο σημαντικό είναι να επιτευχθεί συνεργασία ανάμεσα στα μέλη μιας κοινότητας μάθησης και διαπραγμάτευση νοήματος. Ο Schrage (1990) υποστηρίζει ότι η συνεργασία είναι το κλειδί της επιτυχίας για μια ομάδα και την περιγράφει ως μια πράξη κοινής ανακάλυψης. Η επίτευξη της συνεργασίας ανάμεσα στα μέλη συχνά απαιτεί την υποδιαίρεση της κοινότητας μάθησης σε άλλες μικρότερες ομάδες υπο την καθοδήγηση ενός μέλους. Τα μέλη μοιράζονται τις ίδιες αντιλήψεις ή έχουν θέσει έναν ιδιαίτερο στόχο, όπως ο στόχος της ομάδας δράσης του Εργαστηρίου Άλγεβρας για την παραγωγή διδακτικού υλικού και ειδικότερα φύλλων εργασίας για την διδασκαλία της «Άλγεβρας για όλους» της Α΄ τάξης Λυκείου.

ΤΑ ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ.

Τα φύλλα εργασίας είναι γραπτές οδηγίες, οι οποίες δίνονται από τον καθηγητή στους μαθητές και έχουν ως στόχο να κατευθύνουν τις ενέργειες τους στις ζητούμενες δραστηριότητες. Έτσι, εξασφαλίζεται η συμμετοχή του μαθητή και κυρίως η γραπτή, σε όλες τις φάσεις της δραστηριότητας (Τουμάσης 1994, σελ. 187). Η μέθοδος της διδασκαλίας μέσω ανακάλυψης προωθήθηκε κυρίως από τον Jerome Bruner (1960). Οι μαθητές οδηγούνται στη μάθηση μέσω της καθοδηγούμενης ανακάλυψης.

Οι ερωτήσεις σε ένα φύλλο εργασίας, που επιλέγονται από τους καθηγητές των Μαθηματικών θα πρέπει να μπορούν να αντιμετωπίσουν τα γνωστικά εμπόδια των μαθητών. Είναι σημαντικό, ένας δάσκαλος των Μαθηματικών να κατανοεί ότι οι μαθητές του έχουν ήδη κάποιες γνώσεις για ορισμένες έννοιες και εμπειρίες από προηγούμενες τάξεις ή βαθμίδες εκπαίδευσης. Η προϋπάρχουσα γνώση μπορεί πολλές φορές να αποτελέσει ανασταλτικό παράγοντα στην απόκτηση και κατανόηση μιας έννοιας, ειδικά στα Μαθηματικά. Με τα φύλλα εργασίας, ο σκοπός μας είναι να αναδείξουμε ότι κάποιους από τους κανόνες, που πρέπει να μάθει ένας μαθητής, μπορεί να τους ανακαλύψει, αν του δοθεί η κατάλληλη ευκαιρία από τον δάσκαλο (Freudenthal, 1983).

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Το εργαστήριο Άλγεβρας το συγκροτούν «επαγγελματίες» που μοιράζονται τη γνώση τους και παράγουν νέες ιδέες για τις καθημερινές διδακτικές πρακτικές μιας τάξης. Προάγεται η επαγγελματική μάθηση ως συλλογική ευθύνη και οι εκπαιδευτικοί γίνονται αναστοχαζόμενοι επαγγελματίες. Οι εκπαιδευτικοί επιμορφώνονται συμμετέχοντας ενεργά στο σχεδιασμό και στον καθορισμό του περιεχομένου αυτού του προγράμματος επιμόρφωσης, και σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα αυτή η επιμόρφωση είναι πιο αποτελεσματική από κάθε άλλη. Η γνώση υπηρετείται με ζωντανό τρόπο και δίνεται σε συνδυασμό με την εμπειρία. Ακόμα και αν οι συναντήσεις κάποιες φορές αποτέλεσαν ρουτίνα, η γνώση δόθηκε τόσο διαφορετικά από ένα μαθηματικό εγχειρίδιο.

Κατά το σχολικό έτος 2014-2015 συμμετείχα στο εργαστήριο Άλγεβρας γιατί το θέμα του «Άλγεβρα για όλους» ήταν πολύ δελεαστικό για μένα. Όλα τα χρόνια της διδακτικής μου πορείας σε επαρχιακά σχολεία του νομού Φθιώτιδας, μόνιμη σκέψη και κατεύθυνση της διδασκαλίας μου ήταν πώς να διδάσκω «Μαθηματικά για όλους» μέσα στην τάξη. Θεωρούσα ότι επιτακτική ανάγκη ήταν να βρω έναν τρόπο να κινητοποιήσω όλους τους μαθητές. Από τη μια οι εύκολες ασκήσεις έκαναν τους καλούς μαθητές να αδιαφορούν και σχεδόν να μην αντιγράφουν ό,τι γράφονταν στον πίνακα, και από την άλλη οι δύσκολες ασκήσεις ενεργοποιούσαν έναν - δύο μαθητές της τάξης. Στο Εργαστήριο παράγονταν φύλλα εργασίας τα οποία χρησιμοποιούσα για τη διδασκαλία της Άλγεβρας ενός τμήματος 19 μαθητών της Α΄ Λυκείου του 5ου Γενικού Λυκείου Λαμίας.

Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιαστούν οι παρατηρήσεις του διδάσκοντα κατά τη διδασκαλία και η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών. Η εργασία θα μπορούσε να είναι χρήσιμη ως μαρτυρία ή/και προέρευνα, στο πλαίσιο μιας συστηματικότερης για την αξιοποίηση των φύλλων εργασίας στη διδασκαλία της Άλγεβρας στην Α΄ Λυκείου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΑ ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΆΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ.

Οι μαθητές στην αρχή αντιμετώπιζαν με φόβο τα φύλλα εργασίας, ίσως γιατί τους έδιναν την εντύπωση διαγωνίσματος. Δίσταζαν να γράψουν την απάντηση πάνω στο φύλλο εργασίας και παρόλες τις παροτρύνσεις του καθηγητή περίμεναν πολλές φορές να ακούσουν την σωστή απάντηση ή να την δουν γραμμένη στον πίνακα και απλά να την γράψουν στο φύλλο εργασίας. Σε φύλλα εργασίας, που ανήκαν σε μια μέτριας επίδοσης μαθήτρια, παρατηρούμε πως στο αρχικό είναι όλα σωστά γιατί γράφει τις τελικές σωστές απαντήσεις που διατυπώνονται στην τάξη και γράφονταν στον πίνακα ενώ στα δύο επόμενα φαίνεται ότι προσπαθεί. Είναι ξεκάθαρο ότι η μαθήτρια δίνει αρχικά τις απαντήσεις που θεωρεί σωστές μόνη της και στη συνέχεια διορθώνει τα λάθη της. Οι αδύνατοι μαθητές στην αρχή ήταν διστακτικοί. Όμως σιγά - σιγά ενεργοποιήθηκαν και έκαναν περισσότερα πράγματα μόνοι τους στο φύλλο εργασίας τους.

Το φύλλο εργασίας ανάγκαζε και τους καλούς μαθητές να ενεργοποιηθούν ακόμα και στις απλές ερωτήσεις, το οποίο διαπίστωσα κάνοντας ένα μάθημα (16-12-14) χωρίς φύλλο εργασίας, γράφοντας παραδοσιακά στον πίνακα ό,τι χρειάζονταν. Διαπίστωσα, λοιπόν, ότι τρεις από τους πολύ καλούς μαθητές δεν έγραφαν τις εύκολες ασκήσεις, απλά παρατηρούσαν τον πίνακα γιατί μάλλον τα ήξεραν ήδη από τα φροντιστήριά τους, πράγμα που τους έκανε να δυσανασχετούν. Αντίθετα, με το φύλλο εργασίας έγραφαν τα πάντα με επιμέλεια και αυτό έδινε μια συνέχεια στις ενέργειές τους και σε αυτά που αντιλαμβάνονταν, με αποτέλεσμα να κατανοούν καλύτερα τις έννοιες.

ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΠΟΥ ΕΡΓΑΖΟΤΑΝ ΜΕ ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ.

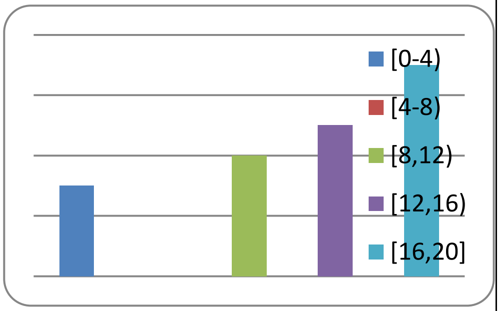
Είναι ουσιώδες ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει την διαδικασία αυτής της διαφοροποίησης. Πρέπει να γνωρίζει τους κανόνες χρήσης, τα πλεονεκτήματα και τις πιθανές δυσκολίες και να είναι προετοιμασμένος να χειριστεί τα προβλήματα τα οποία ενδεχομένως θα προκύψουν στο πλαίσιο της διδακτικής αυτής διαδικασίας.

Η ικανότητα προσαρμογής των γνώσεων στις δεξιότητες των μαθητών προϋποθέτει μεγάλη πείρα και θεωρητική γνώση από την πλευρά του εκπαιδευτικού (Ádám M., Vince S., Attila T., 2010). Οι πρώτες σκέψεις στο μυαλό ενός εκπαιδευτικού που υιοθετεί μια νέα στάση στη μεθοδολογία του, περιλαμβάνοντας νέες μεθόδους και τεχνικές στη διδασκαλία του, όπως στην περίπτωσή μου, είναι: α) Πώς μπορώ να διδάξω πιο αποτελεσματικά; β) Πώς μπορώ να βοηθήσω ώστε όλοι να «μαθαίνουν Μαθηματικά»; γ) Πώς μπορώ να κάνω πιο θετική τη στάση των μαθητών μου απέναντι στα Μαθηματικά; Και όταν εφαρμόσει κάτι διαφορετικό από την παραδοσιακή διδασκαλία, αναρωτιέται αν τελικά αυτός «κάνει Μαθηματικά».

Την σχολική χρονιά 2014-2015 συμμετέχοντας στο Εργαστήριο Άλγεβρας αποφάσισα να χρησιμοποιήσω τα φύλλα εργασίας που δημιουργούσαμε, ανά ομάδα συναδέλφων, τα οποία στη συνέχεια εξετάζαμε όλοι μαζί, ώστε να καθοριστεί η τελική τους μορφή, η οποία αναρτιόνταν στην ιστοσελίδα του Εργαστηρίου. Ως τώρα, τις περισσότερες φορές σχεδίαζα νοερά την διδασκαλία μου με αποτέλεσμα πολλές φορές φτάνοντας στο τέλος να νιώθω ότι είχα παραλείψει σημεία της ύλης που δίδαξα ή ότι τα προσπέρασα γρήγορα γιατί έκανα λάθος στον προγραμματισμό του χρόνου μου. Ήταν πολύ σημαντικό το ότι δεν αναγκαζόμουν να σχεδιάσω από την αρχή τα φύλλα εργασίας, γιατί θα χρειαζόμουν πολύ περισσότερο χρόνο.Στην αρχή είχα μεγάλο ενθουσιασμό για αυτό που εφάρμοζα στην τάξη μου. Όμως, από κάποιο σημείο και έπειτα χρειαζόμουν επιβεβαίωση αν αυτό που έκανα ήταν σωστό. Επειδή δεν δίδασκα συνεχώς δύσκολες ασκήσεις στον πίνακα με τον παραδοσιακό τρόπο, ένιωθα ότι πιθανόν οι μαθητές μου να νομίζουν ότι δεν είμαι καλή μαθηματικός. Επίσης, ένιωθα ότι το ίδιο θα νομίσουν και οι συνάδελφοί μου, ίσως και κάποιοι γονείς. Οι ανησυχίες μου εξαλείφτηκαν μόνο όταν άριστη μαθήτρια σχολιάζοντας το μάθημα, στο τέλος Νοεμβρίου, είπε: «κυρία, μάλλον πέρυσι δεν κάναμε μάθημα», και μια μητέρα που ήρθε να ενημερωθεί: «είστε η μόνη που το κάνετε αυτό».

ΕΠΊΔΟΣΗ ΜΑΘΗΤΏΝ

βαθμ διαγνωστικού	Μαθητές
[0-4)	3
[4-8)	0
[8,12)	4
[12,16)	5
[16,20]	7
Σύνολο	19

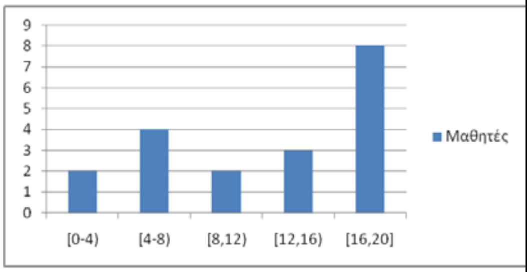


Εικόνα 2. Βαθμολογίες μαθητών στις 15-9-2014.

Στις 15-9-2014 δόθηκε διαγνωστικό τεστ που παράχθηκε στο Εργαστήριο Άλγεβρας και οι βαθμολογίες των μαθητών ήταν όπως στην Εικ.2.

Στην συνέχεια διδάχθηκε το 1ο κεφάλαιο με φύλλα εργασίας. Έγιναν οι περισσότερες ασκήσεις από το βιβλίο και από την τράπεζα θεμάτων. Στις 7-10-2014 δόθηκε τεστ στους μαθητές, των οποίων η επίδοση ήταν:

Βαθμολογία 1ου τεστ	Μαθητές
[0-4)	2
[4-8)	4
[8,12)	2
[12,16)	3
[16,20]	8
Σύνολο	19

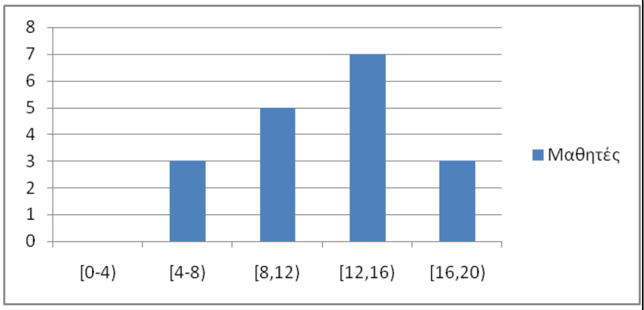


Εικόνα 3. Βαθμολογίες μαθητών στις 7-10-2014.

Παρατηρούμε ότι έχουμε μεγάλο ποσοστό (42%) των μαθητών να έχουν γράψει από 16 έως 20.

Στις 27-11-2014 διδάχθηκε το φύλλο εργασίας για τις νιοστές ρίζες, χωρίς επιπλέον ασκήσεις και δόθηκε την άλλη μέρα τεστ πάνω στο φύλλο εργασίας για την αξιολόγησή του. Η επίδοση των μαθητών ήταν:

Βαθμ 2ο□ τεστ	Μαθητές
[0-4)	0
[4-8)	3
[8,12)	5
[12,16)	7
[16,20)	3
Σύνολο	18



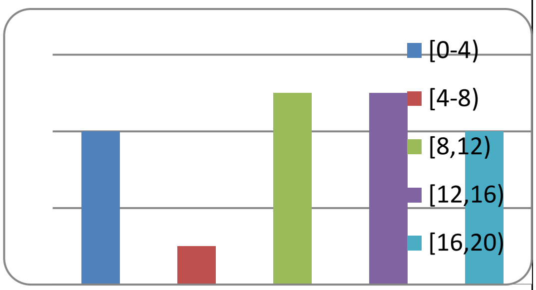
Εικόνα 4. Βαθμολογίες μαθητών στις 27-11-2014

Από την επίδοση των μαθητών είναι ολοφάνερο ότι βοηθήθηκαν οι πιο αδύνατοι και μέτριοι μαθητές αλλά όχι οι καλύτεροι. Από 16 έως 20 έγραψε μόνο το 17% των μαθητών. Η παραπάνω διαπίστωση θα διατυπωθεί και από τους μαθητές όταν στο τέλος της σχολικής χρονιάς τους ζήτησα να μου απαντήσουν αν τους άρεσε η διδασκαλία με τα φύλλα εργασίας, ναι η όχι και γιατί; Έτσι, ενδεικτικά οι αδύνατοι μαθητές έδωσαν απαντήσεις όπως:

«η διδασκαλία με τα φύλλα εργασίας μου άρεσε γιατί έκανε το μάθημα πιο κατανοητό», «τα φύλλα εργασίας λύνουν απορίες εκτός από κάποιες φορές που κάποιες ασκήσεις ήταν λίγο βαρετές». Επίσης, ενδεικτικά οι μέτριοι μαθητές έδωσαν απαντήσεις όπως: «τα μαθηματικά μου φαίνονταν πιο εύκολα», «μου άρεσε γιατί γίνεται πιο ενδιαφέρον το μάθημα και πιο κατανοητό», «ναι, μου άρεσε γιατί περνούσε ευχάριστα η ώρα, ξεφεύγαμε από το βιβλίο. Στα φύλλα εργασίας η θεωρία ήταν πιο ξεκάθαρη, πιο κατανοητή και μπορούσες να την μάθεις καλύτερα από ό,τι στο βιβλίο. Ήταν όμως λίγο βαρετά συνέχεια. Αν δίνονταν φύλλα εργασίας όχι και τόσο συχνά θα ήταν καλύτερα». Ενδεικτικά, οι άριστοι μαθητές έδωσαν απαντήσεις όπως: «η ώρα διδασκαλίας είχε περισσότερο ενδιαφέρον και πιστεύω πως οι μαθητές που αντιμετώπιζαν δυσκολίες έχουν βελτιωθεί σε μεγάλο βαθμό», «η διδασκαλία με φύλλα εργασίας ήταν εποικοδομητική και βοήθησε πιστεύω αρκετούς μαθητές που αντιμετώπιζαν δυσκολίες. Ωστόσο ήταν κάπως κουραστική και δεν συμβάδιζε με τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου γιατί αυτές είναι λίγο πιο δύσκολες. Πιστεύω ότι τα φύλλα ήταν αγχολυτικά και ευχάριστα αλλά πολλές φορές η μετάβαση στο σχολικό βιβλίο ήταν κάπως δύσκολη».

Στις 16-1-2015 αφού έγιναν όλα τα φύλλα εργασίας για το 3ο κεφάλαιο, οι περισσότερες ασκήσεις του βιβλίου, ασκήσεις από την τράπεζα θεμάτων και ασκήσεις από το αρχείο του εκπαιδευτικού, δόθηκε στους μαθητές το διαγώνισμα τετραμήνου. Πάνω από 21% έγραψαν [16, 20].

Βαθμολογία 2ου τεστ	Μαθητές
[0-4)	4
□4-8)	1
[8,12)	5
[12,16	5
[16,20]	4
Σύνολο	19

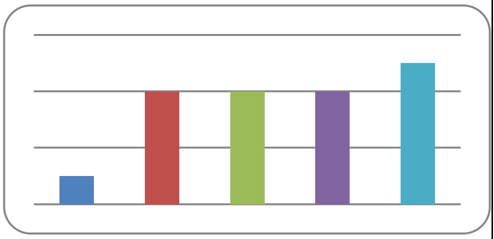


Εικόνα 5. Βαθμολογίες μαθητών στις 16-1-2015.

Στις 5-5-2015 δόθηκε στους μαθητές ένα ακόμα διαγνωστικό τεστ, όμοιο με το αρχικό, αλλά εμπλουτισμένο με κάποιες ακόμα ασκήσεις,όπου παρατηρείται η βελτίωση των μαθητών με βαθμό [16-20] και [0-8).

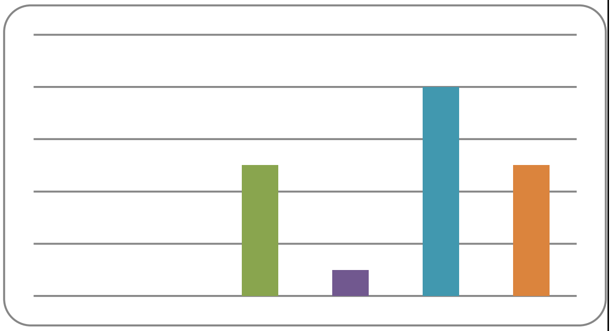
Στις 19-5-2015 οι μαθητές είχαν την τελική εξέταση του Μαΐου σε κοινά θέματα με τα άλλα τρία τμήματα του σχολείου.

2ο Διαγνωστικό	Μαθητές
[0-4)	1
[4-8)	4
[8-12)	4
[12-16)	4
[16-20]	5
Σύνολο	19



Εικόνα 6. Βαθμολογίες μαθητώνστις 5-5-2015.

Βαθμολογία Μαΐου	Μαθητές
[0-4)	0
[4-8)	5
[8-12)	1
[12-16)	8
[16-20]	5
Σύνολο	19



Εικόνα 7. Βαθμολογίες μαθητών στις 19-5-2015.

ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ - ΣΥΜΠΕΡΆΣΜΑΤΑ

Τα σημαντικότερα που είχα να αντιμετωπίσω όμως κατά την διδασκαλία μου με τα φύλλα εργασίας, ήταν:

α) Οι μαθητές θεωρούν ότι ξέρουν Μαθηματικά μόνο αν καταφέρνουν να λύνουν δύσκολες ασκήσεις. β)Η κατανόηση των εννοιών για τους μαθητές είναι μια κουραστική και ανιαρή διαδικασία και βιάζονται να περάσουν στις δύσκολες ασκήσεις. γ) Όταν οι μαθητές διδάσκονται στο σχολείο μια έννοια την γνωρίζουν ήδη, οπότε δεν έχουμε να αντιμετωπίσουμε μόνο την διδασκαλία αυτής αλλά και να τους βοηθήσουμε να ξεπεράσουν τα διδακτικά εμπόδια που τους έχουν δημιουργηθεί για αυτήν. δ) Οι μαθητές σύγκριναν τα φύλλα εργασίας με τα φυλλάδια των ασκήσεων που έφταναν στα χέρια τους από τα φροντιστήριά τους. ε) Οι μαθητές εφόσον μετά την διεκπεραίωση ενός φύλλου δεν μπορούσαν να λύνουν δύσκολες ασκήσεις θεωρούσαν «φαινομενική την κατανόηση», όπως χαρακτηριστικά αναφέρει άριστη μαθήτρια: «κατά την γνώμη μου κάποια φύλλα εργασίας περιείχαν αρκετά εύκολες ασκήσεις που δεν στόχευαν στην κατανόηση των θεματικών ενοτήτων αλλά στο φαινομενικό αποτέλεσμα της λύσης των θεμάτων».

Όμως, με τα φύλλα εργασίας λύθηκαν προβλήματα όπως:

α) Οι ικανότεροι μαθητές σηκώνουν πρώτοι σε όλες τις περιπτώσεις το χέρι, ενώ οι λιγότερο ικανοί ή γρήγοροι συμμετέχουν λιγότερο ή και καθόλου. Αυτό δημιουργεί συναισθηματικά και ψυχολογικά προβλήματα σε αυτούς τους μαθητές, πράγμα άσχημο για την όλη μαθησιακή διαδικασία. β) Επειδή δεν υπάρχει πάντα αρκετός χρόνος για να γραφούν όλες οι ερωτήσεις στον πίνακα, οι αδύνατοι μαθητές δεν θα ήταν σε θέση να τις μελετήσουν στο σπίτι. Βέβαια, υποτίθεται ότι διαθέτουν το σχολικό βιβλίο, απ' όπου έχουν τη δυνατότητα να μελετήσουν στο σπίτι, όπως όμως καλά γνωρίζουν όλοι οι εκπαιδευτικοί, ελάχιστοι μαθητές μελετούν τη θεωρία και τις εφαρμογές του σχολικού βιβλίου. Αντίθετα, κατά τη διδασκαλία της ενότητας με τη συμπλήρωση αυτού του φύλλου εργασίας, κάθε μαθητής θα χρησιμοποιήσει τον χρόνο που χρειάζεται ο ίδιος, εργαζόμενος με το δικό του ρυθμό, ενώ ο καθηγητής θα έχει τη δυνατότητα να βοηθήσει περισσότερο σε ατομικό επίπεδο τους μαθητές που δυσκολεύονται. (Κουλούρης, Α.) γ) Συνεργασίας μεταξύ των μαθητών. Οι μαθητές μπορούν να αλληλοβοηθούνται αλλά και να διαφωνούν μεταξύ τους, οπότε να έχουν ενεργητική συμμετοχή συμπληρώνοντας τα φύλλα εργασίας κατά την διδακτική ώρα και να γίνεται η εκπαιδευτική διαδικασία προσωπική υπόθεση του κάθε μαθητή. δ) Τα φύλλα εργασίας και τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν είναι αναρτημένα στο ιστολόγιο του Εργαστηρίου Άλγεβρας της Ευαγγελικής Σχολής και μπορούν να χρησιμοποιηθούν από οποιονδήποτε διδάσκοντα της Α΄Λυκείου.

Βιβλιογραφία

Ádám, M., Vince, S., Attila, T. (2010) 101 ιδέες για πρωτοπόρους εκπαιδευτικούς. Αθήνα: Καλειδοσκόπιο

Carrol, J., Rosson, M., Convertino, G. &Ganoe, C. (2006). Awareness & Teamwork in computersupported collaborations. *Interacting with Computers*, Vol. 18, p.p. 21-46.

De Longueville, B. (2010). Community-based geoportals: The next generation? Concepts and methods for the geospatial web 2.0. *Computers, Environment & Urban Systems*, Vol. 34, Issue 4, 299 -308.

Ιντζίδης, Β. (2009) Εκπαιδευτικός σχεδιασμός και καινοτομίες, Μορφωτική Πρωτοβουλία, Ενότητα Α, http://blogs.sch.gr/niptylisou/files/2010/04/protovoulia-fakelos.pdf

Τουμάσης, Μ. (1994) *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.

Freudenthal, H., (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Kowch, E. &Schwier, R. (1997) '*Characteristics of technology-based virtual learning communities*', Retrieved January 05, 2005 from http://www.usask.ca/education/coursework/802papers/communities/communities.htm

Κουλούρης, *Α. Φύλλα Εργασίας για τα Μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου,*27ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χαλκίδα, 2010.

Lea, M. & Blake (2002) '*Block 2 exploring theoretical perspectives in distributed learning*', Open University, Milton Keynes

Pea, R.D. (1994) 'Seeing what we build together: distributed multimedia learning environments for transformative communications', *The Journal of the Learning Sciences, 2*, pp.285-299

Wenger, E. (1998) '*Communities of practice learning, meaning and identity*. Cambridge University Press, Cambridge

Schrage, M. (1990) '*Shared Minds: The New Technologies of Collaboration*', New York, Random House

Εργαστήριο Άλγεβρας https://drive.google.com/file/d/0B4-J8heJ6MVkZUY0aVhMb2dGaFk/view?pli=1.

Η ΠΡΟΟΔΟΣ, ΤΟ ΑΙΕΝ ΑΡΙΣΤΕΥΕΙΝ ΚΑΙ Η ΠΑΡΑΔΟΣΗ

Παναγιώτης Σπύρου & Βίλη Μιχελάκου
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
pspirou@math.uoa.gr & villymichel@yahoo.com

Τα μαθηματικά είναι συνυφασμένα με τις αρχές του ορθολογισμού και της αντικειμενικότητας. Στο σχολείο και στις πρακτικές που ξετυλίγονται σε αυτό, έρχονται να συνδυαστούν με την ιστόρηση της κοινωνικής προόδου και συμπαρασύρουν ισχυρές διακρίσεις που επιδρούν στη συγκρότηση ταυτοτήτων των μαθητών. Στην παρούσα εργασία, αναπτύσσεται μία επιστημολογία που αναζητά τους λόγους που επιβάλλουν τις διακρίσεις αυτές, ενώ υποστηρίζεται ο αρνητικός χαρακτήρας που έχουν στα χαρακτηριστικά του σχολείου, καθώς αναδεικνύονται οι πολιτικές και τις οικονομικές διαστάσεις αυτών των λόγων. Ο προβληματισμός μας καταλήγει σε συζήτηση και προτάσεις υπέρβασης του φαινομένου.

ΤΟ “ΤΑΛΕΝΤΟ”, Η ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΦΥΛΑΞΕΙΣ

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ένα από τα βασικά πεδία, αν όχι το μόνο, πού καταξιώνει την ευφυΐα (Μιχελάκου, 2013). Αν προσεγγίσουμε το αξιολογικό πεδίο που τα περιβάλλει –μέσα από τις κοινωνικές και φιλοσοφικές καταξιώσεις που τους επιφυλάσσονται όπως και τις ιεραρχίες που εξασφαλίζουν– συγκροτεί έναν «λόγο» ο οποίος μας καλεί να συνταχθούμε σε αυτόν. Η αφήγηση που τον μεταφέρει διαμορφώνει έναν συνολικό μύθο με ήρωες, τεχνικές αγωνιστικότητας, μάχες και ακόμη υποδείγματα θυσίας, ενώ παράλληλα διαθέτει κριτήρια απαξίωσης και αποκλεισμού.

Προς επίρρωση του τρόπου λειτουργίας αυτών των αξιολογικών παραδόσεων, μέσα στις οποίες συγκροτούμε ταυτότητες και υιοθετούμε ρόλους, θυμίζουμε ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα από την «Απολογία ενός Μαθηματικού» του μεγάλου Άγγλου μαθηματικού G. H. Hardy που γράφει:

> Δεν θυμάμαι να ένοιωσα, όταν ήμουν παιδί, πάθος για τα Μαθηματικά, και η αντίληψη που είχα για την καριέρα του μαθηματικού ήταν κάθε άλλο παρά ευγενής. Έβλεπα τα Μαθηματικά μόνο από την σκοπιά των εξετάσεων και των υποτροφιών: Ήθελα να νικήσω τα άλλα παιδιά, και αυτός ήταν ο καλύτερος δυνατός τρόπος να το επιτύχω…
>
> (Hardy, 1993, σελ. 11)

Αναφέρει ότι μικρός διάβασε ένα βιβλίο για δυο φίλους: ο ένας απέτυχε στη ζωή του ενώ ο άλλος έγινε καθηγητής στο Cambridge. Ο Hardy, σκεφτόταν τον δεύτερο και αναρωτιόταν.

> Αν εκείνος μπορούσε να καταφέρει όλα αυτά, γιατί να μην μπορώ κι εγώ;… έως ότου τα κατάφερα, τα μαθηματικά ήσαν για μένα πάνω απ'όλα ο τρόπος απόκτησης του τίτλου του Εταίρου στο Trinity.
>
> (Hardy, 1993, σελ. 11)

Ο Hardy μας παρουσιάζει με απλότητα αυτό που σήμερα οι κοινωνικοί ψυχολόγοι χαρακτηρίζουν ως διαδικασία ενσωμάτωσης των νέων. Υπάρχει η φαντασιακή αναπαράσταση μιας κοινωνικής αξίας, η εμπλοκή και τέλος η απαραίτητη στιγμή της ταύτισης: «γιατί να μην μπορώ κι εγώ;» Αυτή η φράση προσφέρεται σε κάθε πεδίο δράσης καθώς κατά παρόμοιο τρόπο κάποιος γίνεται ντράμερ, γιατρός κτλ. Θα αποτολμούσαμε τον σχηματικό ισχυρισμό ότι το «ταλέντο» προϋποθέτει την *γοητεία* που ασκεί σε κάποιον μια αξία, την ταύτιση που κάνει, τη διαρκή *ανατροφοδότηση* (Edelman, 2005) του νου στο θέμα. Καθώς μπορεί κανείς να μελετήσει καλύτερα αυτά που έχει επιθυμήσει.

Στην Κοινωνιολογία της Εκπαίδευσης, πολύ νωρίς επιχειρήθηκε να αναλυθούν τα φαινόμενα του ικανού και μη ικανού και των ανισοτήτων. Μέσα σε αυτό το θεωρητικό περιβάλλον υποστηρίχθηκε ότι το σχολείο κατακλύζεται από την παραπλανητική ιδεολογία της «ισότητας των ευκαιριών», πως αποτελεί τον «μεγάλο εξισωτή» στην αναδιανομή του πλούτου (Πιτσιλή-Χατζή 2015· Bourdieu, 1985· Λάσκος, 2006· Φραγκουδάκη, 1985). Συμπέρασμα σε αυτές τις θεωρήσεις είναι ότι ο μύθος αυτός κτίστηκε πάνω στην ιδέα του «φυσικού χαρίσματος». Εγκαταστάθηκε ως αυτονόητο, μια λειτουργία που διατυπώνεται στην σύγχρονη βιβλιογραφία ως «φυσικοποίηση». Ο Bourdieu, αναζητά τους μηχανισμούς διαμέσου των οποίων τα παιδιά των μη προνομιούχων κοινωνικών τάξεων αποκλείονται από το σχολείο. Βασική έννοια κατά τον Bourdieu είναι το «μορφωτικό κεφάλαιο», που όπως υποστηρίζει κληροδοτούν στα παιδιά τους οι οικογένειες. Εκείνοι που ανήκουν σε υψηλότερα κοινωνικά στρώματα διαθέτουν συγκεκριμένα μορφωτικά προνόμια, γνώσεις, δεξιότητες, «καλό γούστο», αξίες αντίστοιχες αυτών που μεταδίδει το σχολείο, θετική στάση προς τη μάθηση και υψηλές προσδοκίες! Τα προνόμια αυτά ασφαλώς δεν τα προϋποθέτει το σχολείο, ωστόσο τα αναγνωρίζει και τα επιβραβεύει. Μάλιστα, τα αξιολογεί ως εγγενείς ιδιότητες των μαθητών/τριών, ως «ευφυΐα» ή «χαρισματικότητα».

Από το 2000 ο Lerman αμφισβητούσε τον προσανατολισμό της ΔΜ κι αξίωνε αλλαγή στην προβληματική της ενώ έκανε λόγο για μια αναγκαία πολιτική στροφή με «την εμφάνιση θεωριών που αντιμετωπίζουν το (μαθηματικό) νόημα, τη σκέψη και την αιτιολόγηση ως προϊόντα της κοινωνικής δραστηριότητας» (σελ. 45). Πιστεύει ότι η φυσιογνωμία της ΔΜ είναι ιστορικά και πολιτικά κατασκευασμένη καθώς αν και έθεσε ως αρχικό στόχο «τα Μαθηματικά για όλους», η διδασκαλία στις τάξεις και αλλού συνέχισε να γίνεται μέσω ισχυρών διακρίσεων. Περεταίρω, ο Lerman καταμετρά και αναλύει τις παραμέτρους που κάνουν την ΔΜ συνένοχη των δαρβινικών παραδοχών του νεοφιλελευθερισμού. Σχετικώς πρόσφατα, όπως θα δούμε παρακάτω, αναπτύσσεται μια πιο ριζική κριτική από την οποία αναδεικνύεται ότι δεν στοχεύει στην δημιουργία χειραφετημένων υποκειμένων με ό,τι μπορεί να συνεπάγεται αυτό. Είναι γνωστό ότι η ΔΜ, από το ξεκίνημά της, συνδέθηκε στενά με τη Γνωστική Ψυχολογία (ΓΨ), σε μια ιστορική περίοδο κατά την οποία η δέσμευση απέναντι στην «πρόοδο» προέβαλλε πανίσχυρη. Ο ρόλος της ΓΨ υπήρξε ουσιώδης στο να καταστήσει το παιδί διαχειρίσιμο μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς παρείχε εργαλεία ορισμού, περιγραφής και μέτρησης των τρόπων με τους οποίους ο μαθητής αναμενόταν να σκέφτεται και να συμπεριφέρεται.

Μέρος της διαχείρισης αυτής κατέστη η υποβάθμιση του μαθητή από παιδί με πλήρη κοινωνική υπόσταση σε *γνωστικό υποκείμενο,* που η σχέση του με τα μαθηματικά περιορίζεται στην ανάπτυξη της διαδικαστικής μαθηματικής σκέψης φαινόμενο που η Valero (2004) ονομάζει “schizomathematicslearner”. Πολύ νωρίς, ο ιδρυτής της φαινομενολογίας Husserl, στην κριτική των ευρωπαϊκών επιστημών αναζητώντας την πορεία της ορθολογικής σκέψης μετά την αναγέννηση, καταλήγει σε μια σημαντική διαπιστώνει τον διαχωρισμό μεταξύ ενός επικοινωνιακού ορθολογισμού κι ενός ακριβολογικού, τεχνοκρατικά αποτελεσματικού ορθολογισμού (Husserl, 2009). Σε αυτό τον διαχωρισμό απέδιδε την κρίση των επιστημών και την δυσκολία του υποκειμένου να κατανοήσει σήμερα τον κόσμο του ακριβώς εξαιτίας αυτής της διαμεσολάβησης που συγκροτεί το «ιδεόντυμα του μαθηματικού φορμαλισμού» (Husserl, 2009, σελ. 108). Εδώ, θα μπορούσαμε να εντάξουμε τον ανωτέρω ισχυρό χαρακτηρισμό διάσπασης του υποκειμένου της Valero. Η διαπίστωση της ενέχει σημαντικές συνέπειες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Η ένσταση που κατατίθεται συνίσταται στο ότι περιγράφοντας, τον μαθητή και γενικότερα το υποκείμενο, ως έναν υπεραναπτυγμένο εγκέφαλο αποστερημένο από το συναίσθημα, το πάθος και τη συγκίνηση υπονομεύουμε τη δυνατότητά μας να ερμηνεύσουμε, με σχετική τουλάχιστον επάρκεια, φαινόμενα όπως αυτό της σχολικής ένταξης, της σχολικής «επιτυχίας» και «αποτυχίας». Η γνώση, για τη συμπεριφορά των δασκάλων και των μαθητών και τα επιτεύγματά τους, αναπτύσσεται μέσα από ισχυρές *διαιρετικές πρακτικές*, που είναι αποφασιστικής σημασίας στη συγκρότηση της άποψής μας για τους διδασκόμενους και κυρίως της δικής τους αυτοαξιολόγησης και αυτοεκτίμησης (Walshaw, 2013). Πιστεύεται δηλαδή ότι μέσω αυτών κατασκευάζεται η ιδιαίτερη θέση που αποκτά ο μαθητής σε σχέση με τα σχολικά μαθηματικά, από τη στιγμή που οι πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης θέτουν σε λειτουργία τις κατηγορίες ικανότητα/ανικανότητα και τις διαδικασίες ένταξης/αποκλεισμού. Έτσι, οι μαθητές αλλά και οι δάσκαλοι μαθαίνουν να σκέφτονται για τον εαυτό τους με τρόπους που έχουν προσχεδιαστεί και δρουν αναλόγως (Walshaw, 2013). Δηλαδή, δεν μπαίνουν μόνο στη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών μόνο, αλλά μαθαίνουν κυρίως τον τρόπο *να γίνονται* ένας ορισμένος τύπος ανθρώπου και να υιοθετούν τις κατηγορίες που τους διατίθενται (Llewellyn, 2013). Οι παραπάνω ερευνητές, μαζί με άλλους, συγκροτούν μια νέα τάση στο πεδίο της ΔΜ που συλλαμβάνει την κρίσιμη εναλλακτική ιδέα ότι η εκπαίδευση –και προφανώς και η μαθηματική εκπαίδευση- δεν αποτελεί απλώς πεδίο μεταβίβασης (ή κατασκευής) της γνώσης, αλλά, κυρίως, πεδίο *διακυβέρνησης* του παιδιού και του εφήβου. Ο μαθητής στο σχολείο δεν «ακούει» μόνο ούτε συμμετέχει απλώς σε μαθησιακές δραστηριότητες· Αυτό που κάνει περισσότερο είναι ότι επιτελεί. Γεγονός που σημαίνει ότι επαναλαμβάνει και διαρκώς επαναλαμβάνει κανόνες και *τελετουργικά*, τα οποία τον μαθαίνουν ─μαζί με τα μαθηματικά─ τρόπους να σκέφτεται και να συμπεριφέρεται, να ερμηνεύει τα πράγματα και να κατανοεί τον κόσμο. Για να γίνει αυτή η ανάλυση προϋποθέτει κάποια νέα θεωρητικά εργαλεία που αναφέρουμε αμέσως παρακάτω.

ΠΟΛΙΤΙΚΟΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΣΤΡΟΦΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ

Αιτία της κοινωνικοπολιτική στροφής, όπως ονομάστηκε, της ΔΜ, (βλ. ενδεικτικά σχετικό αφιέρωμα σε τεύχος του Educational Studies in Mathematics, επιμέλειας των Presmeg, Brown και Walshaw το 2012)), στάθηκε η ανάδυση νέων θεωρήσεων μεταδομιστικών, ψυχαναλυτικών και άλλων οι οποίες, άλλοτε σε συνέργεια και άλλοτε σε αντιπαράθεση με την κριτική θεωρία, οδηγούν σε τομή ως προς τις θεωρίες/λόγους και μεθοδολογίες καθώς επιτρέπει την ανάδειξη νέων, ρηξικέλευθων μελετών και θέσεων σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση και έρευνα (Μιχελάκου, 2013). Κομβικό σημείο αποτέλεσε η αξιοποίηση «Φουκωικών» παραδοχών δια μέσου των οποίων διερευνάται η κατασκευή της ταυτότητας/υποκειμενοποίησης (Μιχελάκου, 2013). Για τον Φουκώ, «λόγοι» σημαίνουν κάτι περισσότερο από επικοινωνία και ομιλία· συνεπάγονται μορφές κοινωνικής ιεράρχησης και κοινωνικών πρακτικών που, σε διαφορετικές στιγμές, δομούν θεσμούς και συγκροτούν τα άτομα σε σκεπτόμενα, συναισθανόμενα και δρώντα υποκείμενα. Στη θεωρία του Φουκώ, η γλώσσα δεν αντανακλά την υπάρχουσα πραγματικότητα αλλά τη συγκροτεί, συνθέτει κοινωνικές ταυτότητες και σχέσεις· είναι ένας «μηχανισμός» παραγωγής του κοινωνικού κόσμου. Τα νοήματα φτιάχνονται μέσα στους λόγους και δεν υπάρχει αλήθεια ανεξάρτητη αυτών: «η πρόσβασή μας στην πραγματικότητα διαμεσολαβείται πάντοτε από τη γλώσσα» (Phillips & Jorgensen, 2009, σελ. 31). Η αλήθεια επίσης δε βρίσκεται έξω από την εξουσία ούτε της λείπει η εξουσία […] παράγεται αποκλειστικά χάρη σε πολλαπλές μορφές καταναγκασμού και παράγει κανονικά αποτελέσματα εξουσίας. Κάθε κοινωνία έχει το καθεστώς αλήθειας της […], τους τύπους λόγου τους οποίους δέχεται και τους κάνει να λειτουργούν ως αληθείς· τους μηχανισμούς και τις βαθμίδες που επιτρέπουν σε κάποιον να ξεχωρίσει τις αληθείς από τις ψευδείς αποφάνσεις, τα μέσα με τα οποία καθοσιώνονται· τις τεχνικές και τις μεθόδους που αποδίδουν αξία στην απόκτηση της αλήθειας (Φουκώ, 1987, σελ 37). Λειτουργώντας ως άγραφοι νόμοι, οι λόγοι δρουν *παραγωγικά*, διαμορφώνουν κίνητρα δράσης συγκροτώντας οντότητες και σχέσεις, σκιαγραφώντας τρόπους ύπαρξης στον κόσμο, καθορίζοντας τις δυνατότητες, καθώς και τα όρια, μιας υπόστασης με σημασία. Δίνουν σχήμα στη σκέψη μας, στις απόψεις μας, στις πεποιθήσεις μας, στις πρακτικές μας. Οι λόγοι είναι ισχυρά εξουσιαστικοί μέσα στο τρίπτυχο αλήθεια – εξουσία – ταυτότητα (Walshaw, 2013).

Με αυτή τη θεωρητική προοπτική και με βάση και τα μαθηματικά συγκροτείται ένας τέτοιος λόγος. Το κοινωνικό βάρος που αποδίδεται στη μαθηματική εκπαίδευση εκφράζεται στο κύρος του αντικειμένου, στην κοινωνική θέση των μαθηματικά εγγράμματων, στη θέση του μαθήματος στο σχολικό πρόγραμμα, στα χρήματα που διαθέτουν οι οικογένειες για φροντιστήρια. Αυτό πιστεύεται ότι δεν είναι κάτι το «φυσικό» και το «αντικειμενικό». Διαμορφώθηκε και επικράτησε ως αντίληψη κάτω από συγκεκριμένους ιστορικούς και κοινωνικούς όρους. Δεν ισχύει παντού, με τον ίδιο τρόπο και η ισχύ της είναι ενδεχομενική (όχι αναγκαία), δηλαδή μπορεί να γίνει και αλλιώς. Τα μαθηματικά, όπως προαναφέραμε, καταλήγουν σε αξιολογητή της «γενικής διανοητικής ικανότητας» του ατόμου, κατακτώντας εκείνη τη συμβολική εξουσία που τους επιτρέπει να συντηρούν την κυριαρχία της λογικομαθηματικής νόρμας σκέψης και επιχειρηματολογίας (Walkerdine, 1988). Είναι αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό στο οποίο οφείλεται η συμπερίληψη των μαθηματικών μεταξύ εκείνων των συστημάτων λόγου που υποστηρίζουν τις θεμελιώδεις αρχές του μοντερνισμού, όπως είναι το πρωτείο της επιστημονικής ορθολογικότητας, η αντικειμενικότητα. Η μαθηματική εκπαίδευση μεταφέρει τη *σωτήρια αφήγηση της προόδου* στις πρακτικές διαπαιδαγώγησης του σχολείου. Πρόκειται για την αφήγηση των διαφωτισμένων πολιτών, που συνεισφέρουν στην παγκόσμια κοινωνία της γνώσης, (Popkewitz, 2004).

Ωστόσο, αποτελεί κατάκτηση του 20ου αιώνα η επιστημολογική έκπτωση των απόλυτων μεταφυσικών αληθειών, η σχετικότητα της επιστημονικής αλήθειας, όπως αυτή αποτυπώθηκε μέσα στις διαψευστικές θεωρίες (Batens, 1996). Τεκμηριώθηκε συστηματικά η επίγνωση μας ότι επιστήμη δεν παράγει «ουδέτερες» αντικειμενικές αλήθειες και δεν μπορεί να αποφύγει εντελώς φορτίσεις που υπηρετούν συμφέροντα και προκαταλήψεις (Γαβρόγλου, 2013). Με μια ανάλογη επιστημολογική κριτική αποδόμηση των «φυσικοποιημένων αληθειών» και την προβολή εναλλακτικών, οι ερευνητές του πολιτικοινωνικού ρεύματος της ΔΜ, αποστασιοποιούνται από τις αναγκαιότητες που προβάλλονται ως θέσφατα στην υπηρέτηση των νεωτερικών αξιών για την επιστήμη, την διδασκαλία και τους κανόνες ανταγωνισμού στο επίπεδο του σχολείου. Μέσα σε αυτό τον προβληματισμό η γενικόλογη εμπιστοσύνη μας στην παιδεία δεν μας εγγυάται ένα καλύτερο κόσμο! Στο άρθρο «Από τη διερώτηση του *πώς* στη διερώτηση του *γιατί*» οι Pais, Stentoft και Valero (2010) υποστηρίζουν ότι η ΔΜ ως ερευνητικό πεδίο παράγει έρευνα που υποστηρίζει τις καθιερωμένες πρακτικές διδασκαλίας και εκμάθησης και καταλήγουν να εντοπίσουν ως κρίσιμο το ερώτημα: *τι υποκειμενικότητες (πολίτες) κατασκευάζει η εκπαίδευση;*

ΤΟ ΝΕΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Όλα τα παραπάνω πρέπει να τα δούμε στην ιστορική περίοδο που ζούμε όπου σχεδιάζονται, επιχειρούνται και υλοποιούνται δραματικές αλλαγές και αυτές οι επισημάνσεις γίνονται ιδιαίτερα γόνιμες (Valero, 2010). «Η νεοφιλελεύθερη ορθολογικότητα […] διαπλάθει κάθε ανθρώπινο ον και διαμορφώνει κάθε θεσμό […] με βάση το μοντέλο της επιχείρησης» (Brown, 2013, σελ. 89). Έτσι, προκύπτει και η γνώση να υπάγεται στην επιχειρηματική λογική και να μετατρέπεται η εκπαίδευση σε εμπόρευμα. Όροι όπως στόχοι, απόδοση, μάνατζμεντ και αξιολόγηση, εισβάλλουν στον κόσμο των διδασκόντων και των πρωταγωνιστών της εκπαίδευσης, καθώς η εκπαίδευση επηρεάζεται κατά αύξοντα τρόπο από τη λογική της αγοράς και του μάρκετινγκ. Η εκπαίδευση κατασκευάζεται ως ένα σύστημα όπου οι μαθητές, οι δάσκαλοι και τα σχολεία είναι υπόλογα, όπου οι γονείς και η κοινωνία παίρνουν θέση καταναλωτή και οι μαθητές γίνονται προϊόντα έτοιμα για μετατροπές. Η εγκυρότητα του συστήματος διασφαλίζεται μέσω των μετρήσιμων στόχων, των δεδομένων που αποδεικνύουν τον βαθμό ανταπόκρισης στα πλάνα και της κατασκευής διακριτών επιπέδων προόδου (Llewellyn, 2013). Ο μέχρι τώρα κύριος σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης συνίσταται στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών· ο Cobb, μάλιστα, συμπυκνώνει το παραπάνω νόημα στον όρο *επιστήμη σχεδιασμού* (Cobb, 2007). Από τη μεριά του ο Biesta (2005) ισχυρίζεται ότι αυτή η προσέγγιση αναπαράχθηκε στους ευρύτερους εκπαιδευτικούς κύκλους πάνω από δύο δεκαετίες, και κυριάρχησε η «τεχνική γλώσσα της εκμάθησης» ενώ σχεδόν απορρίφθηκε η «γλώσσα της εκπαίδευσης».

Όσο για τα μαθηματικά, αξίζει εδώ να αναφερθεί αυτό που ισχυρίζεται με μια χαρακτηριστική διατύπωση η Pais (2012): Στην ουσία, έχουμε μια αντιστροφή που εκπλήσσει: τα μαθηματικά καθίστανται σημαντικά αν και στερούνται ιδιαίτερης αξίας χρήσης (γεγονός που το ξέρει ο μέσος επιστήμονας που στη ζωή του χρησιμοποιεί μαθηματικά της πρωτοβάθμιας και μόνο κάτω από όρους σπάνιας επαγγελματικής ειδίκευσης θα χρησιμοποιήσει περισσότερα μαθηματικά). Ωστόσο, αποδίδουν στους ανθρώπους σχολική και επαγγελματική αξιοπιστία και η θέση τους στο σχολικό πρόγραμμα και στις εξετάσεις καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τη ροή προς τις σχολές με κοινωνικό κύρος, διότι κυρίως είναι κατασκευασμένα για να είναι *μετρήσιμα*!

Βέβαια, όπως τονίζει ο Ken Robinson (lianma2002, 2011), στις ραγδαίες αλλαγές που βρισκόμαστε εκτεθειμένοι να λάβουμε ακόμη υπόψη ότι το σημερινό σχολείο οφείλει την συγκρότηση και τους στόχους του σε ανάγκες μιας προηγούμενης εποχής, που σήμερα έχουν ξεπεραστεί. Μετά τον Β΄ παγκόσμιο πόλεμο χρειάστηκε μεγάλο πλήθος πτυχιούχων πανεπιστημίων καθώς επήλθε μια ραγδαία ανάπτυξη της βιομηχανίας. Αντίθετα τώρα, στο πεδίο των αναγκών του νεοφιλευθερισμού, η τάση αυτή έχει αντιστραφεί. Χρειάζονται λίγοι, πολύ εξειδικευμένοι και προπάντων ευκαιριακοί (Giroux, 2015). Μετά από όλα αυτά, αποτελεί εύλογο ερώτημα αν οι στόχοι και οι μέθοδοι της εκπαίδευσης πρέπει να παραμείνουν οι ίδιοι.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συμπερασματικά, υιοθετούμε το επιχείρημα της Πιτσιλή-Χατζή (2015) όσον αφορά τις διακρίσεις και το ταλέντο: «χωρίς να υπονοούμε ότι οι υπάρχοντες γνώμονες εξουσίας-γνώσης μπορούν να ανατραπούν εντός των πλαισίων της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωρούμε σημαντικό να απασχολήσουν σχετικά ερωτήματα τη Διδακτική των Μαθηματικών» (σελ. 101). Η συζήτηση πρέπει να στραφεί στα αναλυτικά προγράμματα, τις τάξεις των μαθηματικών και τις εφικτές ταυτότητες στις οποίες μπορούμε να επιδράσουμε ανάλογα με την ευελιξία των παιδαγωγικών μας απόψεων. Υποστηρίζουμε ακόμη ότι βάσει των ανωτέρω τίθεται ίσως η ανάγκη για επαναπροσδιορισμό του όρου *μαθηματική εκπαίδευση,* αφού «οτιδήποτε μετρά ως το νόημα της *μαθηματικής εκπαίδευσης* σε μια δοσμένη χρονική στιγμή, είναι μια σύνθετη κατασκευή, η οποία περιλαμβάνει πολλούς συμμέτοχους, πρακτικές και λόγους» (Valero, 2010). Στα επιτελεία της εκπαίδευσης μπαίνουν τα ερωτήματα: Μήπως τα μαθηματικά καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος του χρόνου των εφήβων, με αμφίβολη ούτως ή άλλως χρήση; Ορισμένα κεφάλαια, όπως ο Απειροστικός Λογισμός, θα μπορούσαν να μην διδαχθούν στο Λύκειο αλλά μέσα στα Πανεπιστήμια και τα Πολυτεχνεία; Τι ρόλο παίζουν τα εξεζητημένα θέματα στις εισαγωγικές που ενισχύουν την σημασία του φροντιστηρίου; Πόσοι θα τα αξιοποιήσουν, τα μαθηματικά του Λυκείου, αν συνυπολογισθεί ότι ελάχιστοι θα καταλήξουν σε μια τόσο εξειδικευμένη εργασία; Πόσο έχει συρρικνωθεί η γεωμετρική σκέψη (π.χ. στερεομετρία), ενώ την ίδια στιγμή κυριαρχεί ένας ντετερμινιστικός τρόπος της παραγωγικής μόνο σκέψης (της Γεωμετρίας ή της Άλγεβρας). Μήπως λείπει μια έγκαιρη, αφομοιώσιμη ύλη σε πιθανότητες και συνδυαστική; Μήπως είναι πιο κατάλληλος εξοπλισμός για μια ζωή σε ένα κόσμο το πλείστον ενδεχομενικό;

Από την άλλη πόσο στερείται μιας οικολογικής ή και καλλιτεχνικής παιδείας, που θα αποτελούσε ίσως ισχυρότερο εργαλείο κατανόησης του κόσμου και των σχέσεων στις οποίες καλείται να ζήσει; Μήπως θα έπρεπε να εκπαιδεύσουμε τα παιδιά μας σε πιο απλά πράγματα, πχ να συζητούν καλύτερα δίχως να διακόπτει ο ένας τον άλλο; Τι μας λένε θεωρίες, όπως του Ranciére (Appelbaum, 2011), αλλαγής μοντέλου διδασκαλίας, όπου δεν μαθαίνει ο μαθητής, αλλά ο δάσκαλος καθώς βοηθά τον μαθητή να αναπτύξει τη δημιουργικότητα του και να μην περιθωριοποιείται; Πρέπει να αλλάξουμε τις σχέσεις εξουσίας της μάθησης;
Τι σημαίνει η αλλαγή στο φινλανδικό πρόγραμμα που εγκατέλειψε την διδασκαλία μεμονωμένων γνωστικών αντικειμένων; Μήπως αυτό αποτελεί μια διέξοδο; Πως θα διδάξουμε ενεργοποιώντας αυθεντικές απορίες στους μαθητές, ώστε να εντάσσονται στην εκπαιδευτική με μεγαλύτερη προθυμία; (Θα έλεγα ότι σε αυτή την κατεύθυνση όλο και περισσότεροι διδάσκοντες αναλαμβάνουν και επινοούν ενδιαφέρουσες πρωτοβουλίες).
Παραδείγματα διεπιστημονικών, χωροχρονικά εντοπισμένων κοινωνικο-πολιτισμικών αλληλεπιδράσεων σε κατάλληλους χώρους (όπως μουσεία) μπορούν να συμβάλλουν στην δημιουργία ζωντανών ερωτημάτων των μαθητών;
Οι απορίες πάμπολλες κι εκεί χαράσσονται οι γραμμές ευθραστότητας του σήμερα (Φουκώ, 2012).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Appelbaum, P. (2011). *Mathematical practices as sculpture of utopia: Models, ignorance, and the emancipated spectator*, Mathematics Education and Contemporary Theory 1, Manchester, United Kingdom.

Batens D., (1996). *Ανθρώπινη γνώση Συνηγορία υπέρ μιας χρήσιμης ορθολογικότητας* (μτφ. επ. Ι. Μπαλτάς). Ηράκλειο: ΠΕΚ.

Biesta, G. (2005). Against learning. Reclaiming a language for education in an age of learning. *Nordic Studies in Education*, *25*(1), 54-66.

Bourdieau, P. (1985). Το συντηρητικό σχολείο: οι ανισότητες στην εκπαίδευση και την παιδεία. Στο Α. Φραγκουδάκη (Επ.), *Κοινωνιολογία της εκπαίδευσης-Θεωρίες για την κοινωνική ανισότητα στο σχολείο* (σελ. 357-392). Αθήνα: Παπαζήση.

Brown W., (2013) Τώρα είμαστε όλοι δημοκράτες. Στο Δ. Βεργέτης (Επ.), *Που πηγαίνει η Δημοκρατία* (σελ. 83-107). Αθήνα: Πατάκη.

Γαβρόγλου, Κ. (2013, Μάιος 19). Αποδομώντας το μεγάλο καμάρι της κυρίαρχης ιδεολογίας, *Η Αυγή*. Ανακτήθηκε από http://www.avgi.gr/.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics and learning* (pp. 3-38). New York: Information Age.

Edelman, G. M. (2005). *Αιθέρας θεικός, λαμπερή φωτιά* (μετ. Π. Τασιόπουλος, Α. Μάμαλης). Αθήνα: Κάτοπτρο.

Giroux H. A. (2015), Education and the Politics of Disruption, preprint pages 20. http://www.henryagiroux.com/online_articles.htm.

Husserl, E., (2012). *Η Κρίση των ευρωπαϊκών επιστημών και η υπερβατολογική φαινομενολογία*. Αθήνα: Νήσος.

Λάσκος, Χ. (2006). *Η κοινωνιολογία της εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Θεωρητικές τάσεις και θεμελίωση*. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης, ΑΠΘ.

Lerman, S. (2000), The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Westport, CT: Ablex.

lianma2002 (2011, 16 Σεπτεμβρίου). Ken Robinson- Αλλαγή των εκπαιδευτικών προτύπων – DOC TV (αρχείο βίντεο). Ανακτήθηκε από https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=MukR5xt3s6w#.

Llewellyn, A. (2013). *Progress – is it worth it? A discussion of productions of progress in mathematics education*. Paper presented in the Second Manchester conference on Mathematics Education and Contemporary Theory (MECT2), 21 June – 23 June 2013, Manchester, United Kingdom.

Μιχελάκου, Σ. (2013). *Η κοινωνικοπολιτική στροφή στη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Pais, A. (2012). A critical approach to equity in mathematics education. In O. Skovsmose & B. Greer (Eds.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (pp. 49-93). Rotterdam: Sense.

Pais, A., Stentoff, D., & Valero, P. (2010). From questions of how to questions of why in mathematics education research. In Gellert, U., Jablonka, E. & Morgan, C. (Eds.), *Proceedings of the Sixth International Mathematics Education and Society Conference (MES6)* (Vol. 2, pp. 398-407). Berlin: Freie Universität.

Phillips, L. & Jorgensen, M. W (2009). *Ανάλυση λόγου Θεωρία και Μέθοδος* (μτφ. Α. Κιουπκιολής). Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2015), Ο λόγος (discourse) της μαθηματικής ικανότητας υπό μια φουκωική προσέγγιση και μια μελέτη για την εξατομίκευση του από μαθητές/μαθήτριες Αδημοσίευτη Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Popkewitz, T. S. (2004). School subjects, the politics of knowledge, and the projects of intellectuals in change. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-political dimensions of mathematics education:*

Issues of Power in theory and methodology (pp. 251-267). Boston: Kluwer.

Presmeg, N., Brown, T., & Walshaw, M. (Eds.) (2012). Special Issue: Mathematics Education and Contemporary Theory, *Educational Studies in Mathematics, 80*.

Valero, P. (2004). Socio-political perspectives on mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*. Boston: Kluwer.

Valero, P. (2010). Mathematics education as a network of social practices. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. LIV-LXXX). Lyon: Institut National de Récherche Pédagogique.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.

Walshaw, M. (2013). Post-structuralism and ethical practical action: Issues of identity and power. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 100-118.

Φραγκουδάκη Α., (1985). *Κοινωνιολογία της εκπαίδευσης-Θεωρίες για την κοινωνική ανισότητα στο σχολείο.* Αθήνα: Παπαζήση.

Φουκώ, Μ. (1987). *Εξουσία, γνώση και ηθική* (μτφ. Ζ. Σαρίκας). Αθήνα: ύψιλον/βιβλία.

Φουκώ, Μ. (2012). *Ετεροτοπίες και άλλα κείμενα* (μτφ. Τ. Μπέτζελος). Αθήνα: Πλέθρον.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ

Τουλτσινάκη Μαρία, Σταυρόπουλος Παναγιώτης
Π. Μ. Σ.«Διδακτική και μεθοδολογία των μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
maria_toul@yahoo.gr, stavropoulos.panagiotis@gmail.com

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μια έρευνα που αφορά μη βλέποντες μαθητές. Πρόκειται για μια προσπάθεια καλύτερης κατανόησης των τυπικών αλγεβρικών συμβόλων μέσω της χρήσης της γεωμετρίας. Για το λόγο αυτό, σχεδιάστηκαν 4 διαφορετικές δραστηριότητες που δόθηκαν στους συμμετέχοντες σε ειδικά φύλλα με ανάγλυφα σχήματα. Οι μαθητές μέσω τις απτικής αντίληψης, των χειρονομιών και χρήση της γλώσσας επαναπροσεγγίζουν το θέμα της παραγοντοποίησης με τη βοήθεια εμβαδών επίπεδων ορθογώνιων παραλληλογράμμων και τετραγώνων. Στο τέλος της έρευνας, παρατηρούμε αλλαγές ως προς την εννοιολογική κατανόηση του χειρισμού συμβόλων, για παράδειγμα τη χρήση της παρένθεσης, καθώς και μια εμβάθυνση ως προς το χειρισμό αυτών.

Λέξεις- κλειδιά: χειρισμός συμβόλων, μη βλέποντες, απτική αντίληψη, χειρονομίες, γλώσσα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία σκοπός μας είναι να ασχοληθούμε με τους μη βλέποντες μαθητές σε σχέση με τον χειρισμό αλγεβρικών συμβόλων καθώς και την ικανότητά τους να μεταβαίνουν από τυπικές αλγεβρικές μορφές σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Με δεδομένη την μικρή βιβλιογραφία σε σχέση με τους μαθητές με προβλήματα όρασης και τα μαθηματικά σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η συγκεκριμένη έρευνα αποκτά ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε σχέση με τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν και την συνεισφορά τους σε αυτό το πεδίο.

Τα κυριότερα σημεία στα οποία στηρίζεται η έρευνα αυτή είναι ο ρόλος της γλώσσας και των χειρονομιών, σαν συστατικά μέρη της λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας με τους μη βλέποντες μαθητές, καθώς και η διαδικασίας της οπτικοποίησης η οποία γίνεται δια μέσου της απτικής τους αντίληψης. Η κατανόηση και χρήση των αλγεβρικών φορμαλιστικών συμβόλων είναι επίσης ένα σημαντικό στοιχείο της έρευνας μας ενώ η επικοινωνίας σε αυτό το τυπικό κομμάτι γίνεται μέσω των ειδικών συμβόλων της γραφής Braille.

Η γραφή Braille αποτελεί για τους μαθητές με οπτική αναπηρία κύριο συστατικό της βασικής τους εκπαίδευσης που εκτός από ανάγνωση, μαθηματικά, κοινωνικές επιστήμες, γλώσσα και τέχνες στα πλαίσια ενός διευρυμένου βασικού προγράμματος περιλαμβάνει δεξιότητες σε τομείς όπως η κοινωνική αλληλεπίδραση, αναψυχή και ψυχαγωγία, η χρήση της υποστηρικτικής τεχνολογίας, ανεξάρτητη διαβίωση, προσανατολισμός και κινητικότητα (Allman, Lewis, 2014).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Γλώσσα και χειρονομίες στη διδακτική πράξη

Ο όρος γλώσσα χρησιμοποιείται για να αναφερθεί σε ολόκληρη τη γλωσσική υποδομή που υποστηρίζει τη μαθηματική επικοινωνία και τις απαιτήσεις της για την ακρίβεια, σαφήνεια και την οικονομία της έκφρασης. Η λεκτική επικοινωνία στα πλαίσια μίας τάξης θα πρέπει να βασίζεται σε όρους και έννοιες τα νοήματα των οποίων θα είναι κατανοητά στους μαθητές . Σε μαθητές με προβλήματα όρασης ή και ολική απώλεια όρασης, σαφώς η λεκτική επικοινωνία αποκτά ένα περισσότερο σύνθετο και σημαντικό ρόλο. Για παράδειγμα, ρήματα όπως τα βλέπω ή αισθάνομαι αποκτούν άλλη σημασία και λειτουργία στην διαδικασία της μάθησης. Επίσης μαθητές με προβλήματα όρασης μπορεί να δημιουργήσουν ένα μη τυπικό λεξιλόγιο για τα μαθηματικά αντίστοιχο με το τυπικό (Αργυρόπουλος, 2008).

Εκτός από τη λεκτική επικοινωνία, το μη λεκτικό κομμάτι καλύπτει ένα μεγάλο μέρος από αυτό που κάποιος θέλει να εκφράσει και πολλές φορές αυτά τα δύο έρχονται σε σύγκρουση. Ιδιαίτερα στα μαθηματικά, οι χειρονομίες είναι ένας τρόπος ο ομιλητής να έχει πρόσβαση σε μη προσβάσιμα λεκτικά αντικείμενα, με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η διαδικασία της ομιλίας. Σύμφωνα με τις Iverson & Goldin-Meadow (1998), οι χειρονομίες είναι κομμάτι της ομιλίας μας, με την έννοια ότι μπορούν τονίσουν κάτι που θέλουμε να πούμε ή να υποκαταστήσουν κάτι που δε λέμε με το λόγο μας. Επιπρόσθετα ο McNeill (1992) υποστηρίζει την άποψη ότι οι χειρονομίες και η ομιλία είναι κομμάτι της ίδιας γνωστικής πηγής ενώ προτείνει την παρακάτω κατηγοριοποίηση των χειρονομιών σε εικονικές (*Iconic*), μεταφορικές (*Metaphoric*), δεικτικές (*Deictic*) και παλμικές (*Beat gestures*). Σε μαθητές με προβλήματα όρασης οι χειρονομίες και γενικότερα η στάση του σώματος αποκτά κύρια πηγή έκφρασης που κατά ένα μεγάλο ποσοστό μας βοηθά να καταλάβουμε την βαθύτερη σκέψη του μαθητή. Πολλές φορές οι χειρονομίες λειτουργούν και σαν την αιτία να γεννηθούν ιδέες και όπως έχει παρατηρήσει ο Radford (2009) τελικά μπορούν για ένα τυφλό μαθητή να αποτελέσουν πηγή για την συγκρότηση της σκέψης του ίδιου.

Τα σύμβολα στα μαθηματικά και η χρήση τους

Τα μαθηματικά σύμβολα αποδίδουν ακρίβεια και αποτελεσματικότητα στους διάφορους μαθηματικούς συλλογισμούς, φέρουν δηλαδή μαζί τους νόημα και χρηστικότητα. Είναι αυτά που βοηθούν τόσο στο να λύσουμε μαθηματικά προβλήματα, όσο και να σκεφτούμε μαθηματικές συσχετίσεις (Tall, Gray et al.,2001). Γι’ αυτό και ο ρόλος τους είναι σημαντικός καθώς και καθοριστικός στην εννοιολογική κατανόηση αλλά και στην πρακτική των μαθηματικών. Η ιδέα του νοήματος των συμβόλων (symbol sense) εισάγεται από τον Arcavi (1994), ως μια άμεση διαδικασία μάθησης δια μέσου μιας οπτικής δημιουργίας νοήματος από τον μαθηματικό συμβολισμό. Η ιδέα αυτή στηρίζεται στη διάκριση των συμπεριφορών των ατόμων ως προς τη λειτουργία και το νόημα που αποδίδουν στα σύμβολα, διακρίνοντας τις εξής περιπτώσεις: α) Άτομα που έχουν την ικανότητα να εκτιμούν τη δύναμη και την ισχύ των συμβόλων, με σκοπό να παρέχουν σχέσεις, γενικεύσεις και αποδείξεις, οι οποίες κάτω από άλλες συνθήκες είναι αθέατες, β) Άτομα που εγκαταλείπουν τα σύμβολα για να υιοθετήσουν μία διαφορετική, πιο αποτελεσματική προσέγγιση, με σκοπό να βρεθεί μία ευκολότερη λύση ή αναπαράσταση, γ) Άτομα που χειρίζονται και ερμηνεύουν συμβολικές εκφράσεις ως δύο συμπληρωματικές όψεις της ίδιας διαδικασίας, δ) Άτομα που κατασκευάζουν με επιτυχία συμβολικές σχέσεις που εκφράζουν τις λεκτικές ή γραφικές πληροφορίες, θεωρώντας το ανάλογο πλαίσιο και έχουν τη δυνατότητα να αναγνωρίζουν την καταλληλότητα ή μη της συγκεκριμένης έκφρασης, και τέλος ε) Άτομα που αναγνωρίζουν το διαφορετικό ρόλο που καλούνται να παίξουν τα σύμβολα σε διαφορετικά περικείμενα πλαίσια και κατανοούν τις διαφορετικές χρήσεις και ερμηνείες που παρουσιάζονται σε αυτά.

Πιο συγκεκριμένα τώρα, η χρήση συμβόλων στην άλγεβρα παίζει σπουδαίο ρόλο, καθώς μέσω αυτών γενικεύει την αριθμητική (Samo, 2009). Στο Braillesystem για μη βλέποντα άτομα, ο συμβολισμός είναι πιο δύσκολος και περίπλοκος, με αποτέλεσμα να προκαλεί αρκετούς περιορισμούς κατά την γραπτή αναπαράσταση ενός μαθηματικού συλλογισμού.

Οι έρευνες τώρα, συμφωνούν ότι η όραση λειτουργεί ως ενισχυτής της μνήμης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μαθηματικές περιοχές όπως η άλγεβρα, που δεν σχετίζονται τόσο με τις εικόνες αλλά με τα σύμβολα, να βασίζονται περισσότερο στην όραση για την απομνημόνευσή τους παρά πεδία που σχετίζονται, όπως η γεωμετρία. Αυτός είναι πιθανότατα και ο λόγος που οι περισσότεροι μη βλέποντες μαθητές είναι καλύτεροι στη γεωμετρία (Figueiras, Arcavi, 2012).

Οπτικοποίηση

Η έννοια της οπτικοποίησης στα μαθηματικά έχει άμεση σχέση με αυτή της νοητικής εικόνας, δηλαδή της νοητικής αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας ή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Κατά την Presmeg (2006) η νοητική εικόνα (mental image) είναι ένα νοητικό σχήμα το οποίο απεικονίζει μια οπτική ή χωρική πληροφορία. Στην ουσία η οπτικοποίηση, είναι μία διαδικασία που πρέπει να περιλαμβάνει διαδικασίες κατασκευής και μετασχηματισμού, τόσο οπτικών νοητικών εικόνων όσο και όλων των αναπαραστάσεων χωρικής φύσης που μπορεί να εμπλέκονται στα μαθηματικά (Presmeg, 2006). Ο πολύπλοκος ρόλος της οπτικοποίησης έχει άμεση σχέση με τον διαισθητικό τρόπο κατανόησης μίας μαθηματικής έννοιας και τον σχηματισμό εννοιακών εικόνων (Tall&Vinner, 1981),χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορεί ο διαισθητικός αυτός τρόπος να οδηγήσει σε παρανοήσεις. Επιπλέον ο Bishop (1989), επισημαίνει ότι η ικανότητα οπτικοποίησης περιλαμβάνει τη μετάφραση και αφηρημένων σχέσεων δηλαδή δεν υποστηρίζει μόνο μια διαδικασία επαγωγικού συλλογισμού.

Στο κομμάτι της οπτικοποίησης για μαθητές με προβλήματα όρασης βασιζόμαστε περισσότερο στην απτική αντίληψη όπως επίσης σημαντικότερο ρόλο έχει και η διαίσθηση μέσω εικόνων που δημιουργούνται με τα μάτια του μυαλού (Miller, 1987). Η απτική αντίληψη είναι ένα πολυδιάστατο θέμα το οποίο δεν αφορά αποκλειστικά και μόνο την αίσθηση της αφής (Millar 1994, 1997).

Συνοψίζοντας, στην παρούσα έρευνα επιθυμούμε να διερευνήσουμε το πως η χρήση της γεωμετρίας ενισχύει την κατανόηση των συμβόλων στην άλγεβρα σε μαθητές με προβλήματα όρασης. Τα δύο βασικά μας ερευνητικά ερωτήματα είναι:

1. Κατά πόσο οι μαθητές με προβλήματα όρασης μπορούν να μεταβούν από τη γεωμετρική απεικόνιση σε αλγεβρικές τυπικές μορφές;
2. Πως επιτυγχάνεται η κατανόηση των αλγεβρικών συμβόλων στην παραγοντοποίηση δια μέσου της γεωμετρίας;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στη έρευνα συμμετείχαν τέσσερις μαθητές (τρία κορίτσια και ένα αγόρι) με προβλήματα όρασης (ολική τύφλωση) ηλικίας 15-16 ετών. Οι δύο ήταν μαθητές της Γ Γυμνασίου και οι δύο μαθητές της Α Λυκείου. Όλοι οι μαθητές είχαν διδαχθεί την παραγοντοποίηση και τις ταυτότητες, όπως επίσης και τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων, καθώς μας ενδιέφερε να δούμε αν θα αναγνωρίσουν τις διαδικασίες αυτές στις ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες που τους δόθηκαν. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε αίθουσα ενός ειδικού σχολείου για μη βλέποντες μαθητές. Αυτό έγινε γιατί θέλαμε οι μαθητές να είναι εξοικειωμένοι με τον χώρο στο οποίο θα βρίσκονταν αλλά και για να έχουμε πρόσβαση σε απαραίτητα υλικά, όπως οι μηχανές Braille. Στους συμμετέχοντες δόθηκαν τέσσερα διαφορετικά φύλλα εργασίας με μια δραστηριότητα στο καθένα ενώ χρειάστηκαν ειδικά φύλλα ώστε τα σχήματα να είναι ανάγλυφα. Όλα τα δεδομένα συλλέχθησαν με συνεντεύξεις και παρατήρηση. Όλες οι παρεμβάσεις βιντεοσκοπήθηκαν, ενώ παρόντες ήταν και οι δύο ερευνητές.

Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές ήταν τέσσερις. Το μαθηματικό αντικείμενο που διαπραγματευόμαστε μέσω των δραστηριοτήτων μας, είναι οι τρόποι παραγοντοποίησης μιας αλγεβρικής παράστασης. Ο σχεδιασμός είναι τέτοιος ώστε να οδηγούνται οι μαθητές σε αυτούς, δια μέσω εμβαδών ορθογώνιων παραλληλογράμμων και τετραγώνων.

Δραστηριότητα 1η

Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές αρχικά σημειώνουν στη γραφή Braille την ακόλουθη αλγεβρική παράσταση : $α^2 + αβ$. Στη συνέχεια τους δίνεται σε ειδικό χαρτί ένα ανάγλυφο σχήμα που περιέχει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που έχει χωριστεί σε ένα ορθογώνιο διαστάσεων α,β και ένα τετράγωνο με πλευρά α. Ουσιαστικά τα δύο μονώνυμα που εμφανίζονται στην αλγεβρική παράσταση είναι τα εμβαδά των δύο αυτών επιμέρους σχημάτων. Με την άθροιση των δύο εμβαδών, έχουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με κορυφές ΑΒΓΔ και διαστάσεις α+β και α.

Δραστηριότητα 2η

Στην δεύτερη δραστηριότητα, οι συμμετέχοντες καλούνται να γράψουν αρχικά στη γραφή Braille την ακόλουθη αλγεβρική παράσταση αγ+βγ+αδ+βδ. Στην συνέχεια, σε ειδικό χαρτί τους δίνεται ανάγλυφο ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που έχει χωριστεί τώρα σε τέσσερα παραλληλόγραμμα με τέτοιες διαστάσεις α,β,γ,δ ώστε τα εμβαδά τους να ισούται με τα μονώνυμα που εμφανίζονται στην αλγεβρική παράσταση. Οι μαθητές συνεχίζουν ομοίως με πριν, για να υπολογίσουν το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διαστάσεων (α+β) και (γ+δ).

Δραστηριότητα 3η

Σε συνέχεια της δεύτερης δραστηριότητας, αρχικά οι μαθητές γράφουν την αλγεβρική παράσταση $α^2+αβ+αβ+β^2$ και τους δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ σε ανάγλυφη μορφή κατάλληλα χωρισμένο σε δύο τετράγωνα με πλευρές α και β αντίστοιχα, και δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαστάσεων α, β. Ομοίως, από το εμβαδό του ΑΒΓΔ το οποίο είναι (α+β) επι (α+β) αναμένεται οι μαθητές να συσχετίσουν την αρχική αλγεβρική παράσταση με το $(α+β)^2$ το οποίο με την τυπική αλγεβρική μορφή, είναι γνωστή ταυτότητα. Τέλος με τις κατάλληλες ερωτήσεις γίνεται προσπάθεια να κατανοηθούν οι συνδέσεις που έκαναν οι μαθητές και κατά πόσο βοήθησε η χρήση της γεωμετρικής απεικόνισης.

Δραστηριότητα 4η

Η τελευταία από τις δραστηριότητες αυτής της μορφής αναμένεται να δυσκολέψει περισσότερο τους μη βλέποντες μαθητές με δεδομένη τη δυσκολία της οπτικοποίησης, τις αδυναμίες του ανάγλυφου σχήματος και τις διαφορές στην απτική αντίληψη. Η αλγεβρική παράσταση που δίνεται είναι η $α^2$-αβ-αβ+$β^2$ και το ανάγλυφο σχήμα το ΑΒΓΔ, ένα τετράγωνο που χωρίζεται κατάλληλα. Εδώ έχουμε τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ να είναι ίσες με α, στις οποίες οι πλευρές με μήκος β περιέχονται, και εφόσον γίνει η αναγνώριση του σχήματος από τους μαθητές ζητάμε μέσω της κατάλληλης προσθαφαίρεσης εμβαδών να καταλήξουν στο αποτέλεσμα $(α-β)^2$.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Μετά την απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων και την παρακολούθηση των αντιδράσεων των μαθητών μέσω των βίντεο καταγραφής, η κωδικοποίηση των δεδομένων στο μη λεκτικό κομμάτι έγινε με την βοήθεια του διαχωρισμού των χειρονομιών κατά McNeil (1992). Ενώ στην λεκτική επικοινωνία μέσω σημειώσεων έγινε καταγραφή των επαναλαμβανόμενων εκφράσεων σε μία προσπάθεια αναγνώρησης του μη τυπικού λεξιλογίου του κάθε μαθητή ξεχωριστά (Αργυρόπουλος, 2008).

Στην 1η δραστηριότητα, το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων παρουσίασαν δυσκολία σε δύο σημεία. Αρχικά, ως προς την αναγνώριση των σχημάτων και των διαστάσεων τους και τελικά στην τοποθέτηση παρένθεσης στο μήκος της πλευράς ΑΒ που ισούται με α+β, κατά τον υπολογισμό του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Η δραστηριότητα αυτή επιλέχθηκε για την εισαγωγή της παραγοντοποίησης μέσω εμβαδών παραλληλογράμμων. Πρόκειται για την πιο απλή μορφή παραγοντοποίησης, τον κοινό παράγοντα, ενώ το σχήμα είναι το απλούστερο δυνατό. Οι συμμετέχοντες μέσα από αυτό, αποκτούσαν μια πρώτη ιδέα για το τι θα ακολουθούσε, αρχίζουν να είναι πιο υποψιασμένοι και δεν είναι τυχαίο ότι ακόμα και αυτοί που δυσκολεύτηκαν ή καθυστέρησαν να κάνουν τις κατάλληλες διασυνδέσεις ή να θυμηθούν ξεχασμένους τύπους εμβαδών, σταδιακά με τις επόμενες δραστηριότητες συνεχώς βελτιώνονταν.

Στη 2η δραστηριότητα οι μαθητές αναγνωρίζουν ευκολότερα τα σχήματα, τις διαστάσεις τους και τα εμβαδά, ενώ στον υπολογισμό του συνολικού εμβαδού δεν παραλείπουν να βάλουν παρενθέσεις που απαιτούνται στο μήκος και πλάτος. Στην ερώτηση όμως αν αυτό που έχουν γράψει στο φύλλο τους, τους θυμίζει κάτι από την άλγεβρα, οι περισσότεροι δυσκολεύονται να καταλάβουν ότι πρόκειται για παραγοντοποίηση κατά ομάδες. Στην συγκεκριμένη δραστηριότητα, φαίνεται ότι ο γεωμετρικός τρόπος ερμηνείας της ισότητας είναι πολύ πιο εύκολος για τους μαθητές από την τυπική παραγοντοποίηση κατά ομάδες, που αποτελεί μια δυσκολότερη προέκταση της ιδέας του κοινού παράγοντα.

Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα της 3ης δραστηριότητας ήταν ικανοποιητικά και για τους 4 μαθητές με δεδομένη την εξοικείωση με τα σχήματα και την λογική τους, όπως επίσης και την ιδιαιτερότητα της συγκεκριμένης παραγοντοποίησης που είναι μία γνωστή ταυτότητα. Η αναγνώριση των επιμέρους σχημάτων και των εμβαδών έγινε σχετικά εύκολα. Αυτό που είναι αξιοπρόσεκτο στη συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι ότι υπήρξαν αρκετοί μαθητές που εντόπισαν από την αρχή την ταυτότητα και έδιναν την απάντηση μέσω μόνο των αλγεβρικών δεδομένων, παρακάμπτοντας το σχήμα.

Η 4η δραστηριότητα ήταν αυτή που δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές, με δεδομένο ότι έπρεπε να αφαιρέσουν ευθύγραμμα τμήματα και εμβαδά. Μόνο η Μ3 είχε ικανοποιητική απόδοση ενώ οι Μ2 και Μ4 χρειάστηκαν αρκετή βοήθεια για να απαντήσουν και η Μ1 δεν απάντησε καθόλου. Το φαινόμενο της εκ των προτέρων αναγνώρισης της ταυτότητας $(\alpha\text{-}\beta)^2$ και της αλγεβρικής τυπικής απάντησης παρατηρείται και εδώ, αλλά η γεωμετρική απόδειξη δυσκόλεψε τους μη βλέποντες μαθητές.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συμπεράσματα

Οι δραστηριότητες της παρούσας έρευνας σκοπό έχουν να διερευνήσουν κατά πόσο οι μαθητές με ολική απώλεια όρασης μπορούν να κάνουν την μετάβαση από ένα γεωμετρικό σχήμα σε τυπικές αλγεβρικές παραστάσεις καθώς και αν βοηθάει η χρήση της γεωμετρίας στην κατανόηση την αλγεβρικών συμβόλων. Η εισαγωγική 1η δραστηριότητα πετυχαίνει να εξοικειώσει τους μαθητές με την λογική της έρευνας ενώ η χρήση του συμβόλου της παρένθεσης αποκτά ιδιαίτερο νόημα στην αντίληψη των μαθητών. Είναι μία πρώτη επαφή της μετάβασης από την άλγεβρα στην γεωμετρία, και αντίστροφα, που όπως είδαμε στα αποτελέσματα έγινε επιτυχώς από όλους τους μη βλέποντες μαθητές μέσω νοητικών σχημάτων που απεικονίζουν μία χωρική πληροφορία (Presmeg, 2006). Στην 2η δραστηριότητα οι μαθητές αναγνώρισαν ευκολότερα το σχήμα και η διαδικασία μετασχηματισμού σε αλγεβρική μορφή έγινε και με την ενίσχυση ενός περισσότερο διαισθητικού τρόπου σκέψης και εννοιακών εικόνων (conceptimage) (Tall&Vinner, 1981) που σχημάτισαν στην πρώτη δραστηριότητα. Εδώ η γεωμετρική απόδειξη μίας ισότητας ήταν ευκολότερη για τους μαθητές από την αλγεβρική, γεγονός που ενισχύει την αξία αυτής της μετάβασης και τον ρόλο της διαίσθησης μέσω εικόνων που δημιουργούνται με τα μάτια του μυαλού (Miller, 1987). Η μη βλέποντες μαθητές σε αυτή τη δραστηριότητα αρχίζουν να αποκτούν την ιδέα του νοήματος των συμβόλων (symbol sense) δια μέσου μιας απτικής δημιουργίας νοήματος από τον μαθηματικό συμβολισμό, δηλαδή εγκαταλείπουν τα σύμβολα για να υιοθετήσουν μία διαφορετική, πιο αποτελεσματική προσέγγιση, με σκοπό να βρεθεί μία ευκολότερη λύση (Arcavi, 1994).Η 3η δραστηριότητα έχει την ιδιαιτερότητα ότι η φορμαλιστική αλγεβρική μορφή της είναι ιδιαιτέρως γνωστή στους μαθητές οι οποίοι είχαν την τάση να παρακάμπτουν την γεωμετρική μορφή της παράστασης για να δώσουν την απάντησή τους. Συνεπώς η κατασκευή συμβολικών σχέσεων που εκφράζουν τις λεκτικές ή γραφικές πληροφορίες γίνεται με επιτυχία, θεωρώντας το ανάλογο πλαίσιο έχοντας τη δυνατότητα να αναγνωρίζουν την καταλληλότητα της συγκεκριμένης έκφρασης (Arcavi, 1994). Η μετάβαση στο ανάγλυφο σχήμα και το αντίστροφο γίνεται με ευκολία, ενώ η εντύπωση που προκάλεσε στους μαθητές, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η οπτικοποίηση της ταυτότητας είχε ιδιαίτερη αξία δημιουργώντας νέες διαδικασίες ερμηνείας και αναστοχασμού . Με σκοπό την διερεύνηση των ορίων της διαδικασίας που ακολουθείται μέχρι στιγμής δίνεται η 4η δραστηριότητα η οποία αλγεβρικά είναι πάλι μία από τις γνωστές ταυτότητες $(α\text{-}β)^2$ ενώ η γεωμετρική της ερμηνεία διαφέρει αρκετά από τις προηγούμενες. Παρατηρείται μία ρήξη σε σχέση με την μέχρι στιγμής συγκρότηση των εννοιακών εικόνων (concept image) (Tall&Vinner, 1981), ενώ οι μη βλέποντες μαθητές ακολουθώντας την διαίσθησή τους οδηγούνται σε παρανοήσεις. Το γεγονός ότι η μετάβαση δεν πραγματοποιείται με επιτυχία στην πλειοψηφία των μαθητών οδηγεί μάλλον στο συμπέρασμα ότι υπάρχει αδυναμία στην διαδικασία εκείνη της οπτικοποίησης που περιλαμβάνει τη μετάφραση και αφηρημένων σχέσεων δηλαδή δεν υποστηρίζει μόνο μια διαδικασία επαγωγικού συλλογισμού (Bishop, 1989). Στον αλγεβρικό τυπικό χειρισμό οι μαθητές, με μία μόνο εξαίρεση, περιορίζονται στον να χειρίζονται και ερμηνεύουν συμβολικές εκφράσεις ως δύο συμπληρωματικές όψεις της ίδιας διαδικασίας (Arcavi, 1994) δηλαδή δεν έχουμε κάποια ουσιαστική συμβολή της γεωμετρίας στην αλλαγή κατανόησης των συμβόλων.

Συζήτηση

Στα πλαίσια της παραπάνω έρευνας διαπιστώσαμε τον σημαντικό ρόλο που μπορεί να έχει η γεωμετρία στην κατανόηση αλγεβρικών συμβόλων στην παραγοντοποίηση, σε μη βλέποντες μαθητές. Οι κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, η απτική αντίληψη, το λεκτικό και μη μέρος, έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην επίτευξη αυτής της καλύτερης κατανόησης του χειρισμού των συμβόλων όσον αφορά αυτό το συγκεκριμένο μαθηματικό πεδίο. Αυτή η έκβαση οδηγεί σε νέα ερωτήματα. Θα μπορούσε η γεωμετρία να βοηθήσει στην κατανόηση και σε άλλα πεδία της άλγεβρας; Αν ναι, με ποιο τρόπο; Δημιουργείται έτσι η αναγκαιότητα περαιτέρω έρευνας σε αυτό τον τομέα για άτομα με προβλήματα όρασης όπως επίσης και συγκριτικές μελέτες με βλέποντες. Η ανάδειξη του ιδιαίτερου τρόπου της εκπαιδευτικής προσέγγισης των μη βλεπόντων μαθητών μπορεί τελικά να δώσει μια νέα διάσταση στην διδακτική των μαθηματικών και κατ' επέκταση στην πρακτική των καθηγητών για το σύνολο των μαθητών, βλεπόντων και μη;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυρόπουλος, Β. (2008). Σημειώσεις για την εκπαίδευση του παιδιού με σοβαρά προβλήματα όρασης – Διδακτικές προσεγγίσεις. *Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*, Βόλος.

Allman, C., Lewis, S. (2014) ECC Essentials: Teaching the Expanded Core Curriculum to Students with Visual Impairments. *New York: AFB*

Arcavi, A. (1994).Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of mathematics*, 24-35.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), pp.7-16.

Figueiras, L., &Arcavi, A. (2012) Learning to see: the viewpoint of the blind. *12th International Congress on Mathematical Education*

Iverson, J. M., & Goldin-Meadow, S. (1998). Why people gesture when they speak. *Nature*, 396, 228.

Lampert, M. (1998).Talking mathematics in school. Cambridge, MA: *Cambridge University Press*.

McNeill, D. (1992). Hand and mind: What gestures reveal about thought.Chicago: *University of Chicago Press*.

Millar, S. (1994).Understanding and Representing Space.Theory and Evidence from Studies with Blind and Sighted Children. Oxford :*Clarendon Press*.

Millar, S. (1997). Reading by touch. London. *Roughtledge*.

Miller, A.I. (1987). Imagery in scientific thought. *MITPress*.

Presmeg, N.C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics.In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 205-235.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings.*Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111–126.

Samo, M. A. (2009). Students' Perceptions about the Symbols, Letters and Signs in Algebra and How Do These Affect Their Learning of Algebra: A Case Study in a Government Girls Secondary School Karachi. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., &Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *1*(1), 81-104.

Tall D. ,Vinner S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics* ,12, 151-169.

«ΘΕΛΩ ΚΙ ΕΓΩ ΝΑ ΠΗΓΑΙΝΩ ΓΙΑ ΨΩΝΙΑ ΑΛΛΑ … ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΤΩΝ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ»: Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ-ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ

Χρυσικού Βασιλική, Σταθοπούλου Χαρούλα, Σταυρούση Παναγιώτα, Στρογγυλός Βασίλης
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

chrysikou@uth.gr, hastath@uth.gr, stavrusi@uth.gr, vstroggilos@uth.gr

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας-δράσης, όπου η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών σε μαθητές με νοητική αναπηρία, εξετάζονται ως κοινωνικά και πολιτισμικά ενταγμένες διαδικασίες. Ο στόχος της έρευνας είναι να μελετηθεί με ποιον τρόπο η δημιουργία συνεργασίας σχολείου και οικογένειας επηρεάζει την εκπαιδευτική διαδικασία και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε κοινωνικές δραστηριότητες που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Οι συζητήσεις με τις μητέρες ενίσχυσαν την επιλογή διδακτικών στόχων και πλαισίων μάθησης που έχουν νόημα για τους μαθητές. Αντίθετα, παράγοντες όπως οι αντιλήψεις των μητέρων για την κοινωνική ένταξη, εμπόδισαν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε κοινωνικές δραστηριότητες εκτός του σχολικού πλαισίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πραγματοποίηση χρηματικών συναλλαγών αποτελεί μια σημαντική δεξιότητα που χρειάζεται να περιλαμβάνεται στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα των μαθητών με νοητική καθυστέρηση, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να συμμετέχουν αυτόνομα σε διάφορες κοινωνικές δραστηριότητες (π.χ. αγορές προϊόντων, γεύμα σε εστιατόριο, αγορά εισιτηρίου λεωφορείου, κτλ.) (Browder & Grasso, 1999; Butler, Miller, Lee, & Pierce, 2001). Ακόμη κι αν οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες ή δεν έχουν κατακτήσει ορισμένες απαραίτητες δεξιότητες για να πραγματοποιήσουν αγορές, είναι σημαντικό να τους παρέχονται ευκαιρίες για πλήρεις εμπειρίες μαθαίνοντάς τους διάφορες στρατηγικές (π.χ. να πληρώνουν με ένα νόμισμα μεγαλύτερης αξίας) (Mechling, Gast, & Bartholde, 2003).

Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η συνεργασία του σχολείου με τους γονείς ή κηδεμόνες των μαθητών με αναπηρία ενισχύει τη μαθησιακή διαδικασία (Spann, Kohler, & Soenksen, 2003; Ukeli & Akem, 2013). Οι γονείς μπορούν να παρέχουν πληροφορίες για τα διάφορα κοινωνικά πλαίσια που έχουν σημασία και αποτελούν κατάλληλα περιβάλλοντα για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών (DiPipi-Hoy & Jitendra, 2004). Εκτός από τη συμμετοχή τους σε συναντήσεις με τους εκπαιδευτικούς, οι γονείς μαθητών με σοβαρές δυσκολίες μπορούν να συμβάλουν αποτελεσματικά και στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα των παιδιών (Tekin-Iftar, 2008). Σύμφωνα με τους DiPipi-Hoy και Jitendra (2004), η συμμετοχή των γονέων στην εφαρμογή του προγράμματος εκπαίδευσης των μαθητών δίνει, μεταξύ των άλλων, την ευκαιρία στους γονείς να αντιληφθούν τις δυνατότητες των παιδιών τους για αυτόνομη διαβίωση.

Στην παρούσα εργασία, αντικείμενο προβληματισμού αποτέλεσαν η ελλιπής συνεργασία με τις οικογένειες των τριών μαθητών και οι περιορισμένες μαθησιακές ευκαιρίες για την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων που παρέχονται στους μαθητές από το οικογενειακό πλαίσιο. Στο πλαίσιο μιας έρευνας-δράσης, η πρώτη συγγραφέας (ερευνήτρια-εκπαιδευτικός) αλλάζει τις διδακτικές της πρακτικές αναγνωρίζοντας την ανάγκη συνεργασίας με τις οικογένειες με στόχο την ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε κοινωνικές δραστηριότητες εντός και εκτός του σχολικού πλαισίου που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Ο στόχος της έρευνας είναι να μελετηθεί με ποιον τρόπο η δημιουργία συνεργασίας εκπαιδευτικού και μητέρων επηρεάζει την εκπαιδευτική διαδικασία και πώς αυτό, στη συνέχεια, επιδρά στη λειτουργία της οικογένειας και στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε κοινωνικές δραστηριότητες.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας-δράσης, στην οποία μελετώνται οι κοινωνικο-πολιτισμικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με νοητική καθυστέρηση. Στο πλαίσιο αυτής, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός συνεργάζεται με τους επόμενους τρεις συγγραφείς που αποτελούν την ομάδα των κριτικών φίλων. Η εκπαιδευτικός διδάσκει μαθηματικά στους δεκαεννέα μαθητές και μαθήτριες (ηλικίας 16 έως 36 ετών) ενός Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. (Εργαστήριο Ειδικής Επαγγελματικής Εκπαίδευσης και Κατάρτισης)[1] της Ελλάδας. Στην έρευνα συμμετέχουν τρεις μαθητές με σοβαρή νοητική καθυστέρηση που συγκροτούν ένα από τα έξι τμήματα του σχολείου[2], καθώς και οι μητέρες τους ως τα μέλη της οικογένειας που έχουν αναλάβει κατά κύριο λόγο την καθημερινή εκπαίδευση και φροντίδα τους.

Η Κατερίνα είναι 16 ετών και της αρέσει να βλέπει τηλεόραση. Ο Βαγγέλης είναι 24 ετών και του αρέσει να πηγαίνει βόλτες και να κάνει ιππασία. Η Αναστασία είναι 29 ετών και της αρέσει να ακούει μουσική και να πηγαίνει για καφέ με την αδερφή της. Στα μαθηματικά, ο Βαγγέλης μπορεί να αριθμήσει προφορικά μέχρι το τριάντα εννιά, η Κατερίνα μέχρι το είκοσι επτά, ενώ η Αναστασία μέχρι το δέκα. Και οι τρεις μαθητές μπορούν να γράψουν και να διαβάσουν έναν αριθμό μέχρι το δέκα, αλλά δυσκολεύονται να συγκρίνουν δύο αριθμούς στο συμβολικό επίπεδο (δηλ. χωρίς τη χρήση αντικειμένων ή εικόνων). Έχουν δυσκολία να διατηρήσουν την ένα-προς-ένα αντιστοιχία καθώς μετρούν ένα σύνολο έως δέκα αντικειμένων, αλλά γνωρίζουν ότι ο τελευταίος αριθμός που ανέφεραν κατά την καταμέτρηση αναπαριστά το πλήθος του συνόλου των αντικειμένων. Ακόμη, μπορούν να κάνουν νοερές προσθέσεις μέχρι το τρία (δηλ. 1+1, 2+1).

Πέρα από το ατομικό προφίλ των μαθητών, μας ενδιαφέρει η κουλτούρα του σχολείου που υλοποιείται η παρούσα έρευνα-δράση. Η επικοινωνία με τους γονείς των μαθητών πραγματοποιείται σε μη συστηματική βάση και όποτε αυτό κρίνεται αναγκαίο. Αρκετοί γονείς συμμετέχουν σε σχολικές εκδηλώσεις, ενώ η επικοινωνία αφορά, κυρίως, την ενημέρωση των γονέων για την πρόοδο των μαθητών ή για θέματα που σχετίζονται με τη σχολική φοίτηση (π.χ. απουσίες). Όσον αφορά τη συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών, κατά τη διάρκεια των κοινών δράσεων ή εκδηλώσεων του σχολείου υπάρχει ομαδικό και συνεργατικό κλίμα μεταξύ των συναδέλφων. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, όμως, κάθε εκπαιδευτικός εργάζεται αυτόνομα στην αίθουσά του μειώνοντας τη δυνατότητα ανάπτυξης συνεργατικών σχέσεων.

Η έρευνα-δράση πραγματοποιείται μέσω αλλεπάλληλων φάσεων ή κύκλων (σχεδιασμός-δράση-παρατήρηση-στοχασμός), όπου κάθε φάση ουσιαστικά αποτελεί επανασχεδιασμό της προηγούμενης. Οι μέθοδοι συλλογής των δεδομένων αποτελούνται κυρίως από την παρατήρηση και τις συνεντεύξεις. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός διατηρεί ερευνητικό ημερολόγιο, στο οποίο καταγράφονται σημειώσεις πεδίου, σκέψεις, επεξηγήσεις και ερμηνείες. Ορισμένα μαθήματα, οι συνεντεύξεις με τις μητέρες των μαθητών και οι συναντήσεις στο τέλος κάθε κύκλου με τους κριτικούς φίλους, ηχογραφούνται και στη συνέχεια απομαγνητοφωνούνται και αναλύονται.

Εντοπισμός του προβλήματος

Από τις ημι-δομημένες συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν με τις μητέρες των μαθητών, φάνηκε πως είναι προστατευτικές και παρέχουν στα παιδιά περιορισμένες μαθησιακές ευκαιρίες για την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων στην καθημερινότητα (π.χ. περιορισμένη εμπλοκή στη μαγειρική, στην αγορά προϊόντων και την πραγματοποίηση χρηματικών συναλλαγών). Ο Βαγγέλης πηγαίνει στο μίνι μάρκετ του χωριού, όπου ο ίδιος μπορεί να θυμηθεί δύο-τρία προϊόντα και να τα ζητήσει. Στη συνέχεια, όμως, ο υπάλληλος εντοπίζει τα προϊόντα, υπολογίζει τα ρέστα και τα τοποθετεί σε μια σακούλα μαζί με τα προϊόντα. Αντίθετα, οι μητέρες των κοριτσιών ανέφεραν ότι οι δύο μαθήτριες έχουν συχνή φυσική παρουσία σε διαδικασίες αγοράς προϊόντων αλλά δεν έχουν ενεργητική συμμετοχή στις χρηματικές συναλλαγές, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο απόσπασμα:

> Μητέρα Αναστασίας: Στα μαγαζιά που της έχω πάρει ρούχα… *(η Αναστασία)* πήγε, διάλεξε… "Θέλω αυτή την κόκκινη την μπλούζα, θέλω εκείνα τα παπούτσια".
>
> Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός: Και μετά βγάζει εκείνη τα χρήματα;
>
> Μητέρα Αναστασίας: Όχι, δεν το έχω κάνει… να τα δίνει εκείνη στο ταμείο.

Οι μητέρες εξέφρασαν την επιθυμία να αποκτήσουν τα παιδιά τις απαραίτητες δεξιότητες που τους χρειάζονται για να πραγματοποιούν αυτόνομα αγορές προϊόντων.

Σχεδιασμός των βημάτων δράσης

Η παρατήρηση στο φυσικό περιβάλλον της τάξης και του σχολείου, σε συνδυασμό με τις συνεντεύξεις των μαθητών και των μητέρων τους, διαμόρφωσαν μια ολιστική εικόνα των αναγκών των μαθητών στρέφοντας παράλληλα την εστίαση από την τάξη των μαθηματικών στη συνεργασία σχολείου-οικογένειας αναδεικνύοντας τον σπουδαίο ρόλο της στη μάθηση των μαθηματικών. Οι μαθητές και οι μητέρες τους συμφώνησαν να επιλεγεί ως διδακτικός στόχος η πραγματοποίηση χρηματικών συναλλαγών μέχρι πέντε ευρώ. Πιο συγκεκριμένα, επιδιώκεται, μέσω της συνεργασίας με την οικογένεια, η ενεργή συμμετοχή των μαθητών σε κοινωνικές δραστηριότητες αγοράς προϊόντων εντός και εκτός του σχολικού πλαισίου.

Εφαρμογή των βημάτων δράσης

Αρχικά, ζητήθηκε από τους μαθητές να πραγματοποιήσουν ατομικά αγορές στη γωνιά του σούπερ μάρκετ που υπάρχει στην τάξη των μαθηματικών. Οι μαθητές είχαν τον ρόλο του πελάτη, χωρίς να τους έχουν δοθεί σαφείς οδηγίες να ακολουθήσουν, ενώ τον ρόλο του ταμία είχε ένας μαθητής άλλου τμήματος. Στο επόμενο απόσπασμα φαίνεται η προσπάθεια της Κατερίνας:

Ταμίας: Έχουμε ένα ανα για τα πιάτα, έχουμε ένα αποσμητικό για το σπίτι. Η τιμή του είναι 2 ευρώ και 1 ευρώ. 3 ευρώ παρακαλώ. *(Η Κατερίνα δεν είχε χρήματα κι έφυγε από το ταμείο κατευθυνόμενη στην ντουλάπα που υπάρχουν τα χρήματα. Πήρε διάφορα νομίσματα, χωρίς να τα κοιτάξει.)*

Κατερίνα: Ορίστε τα λεφτά. *(Η Κατερίνα δίνει στον ταμία όλα τα χρήματα.)*

Ταμίας: Δεν θα μου τα δώσεις όλα. […] Δώσε μου εμένα το 10αρικο να σου δώσω ρέστα. *(Η Κατερίνα του δίνει όλα τα χρήματα που έχει.)* Περίμενε κράτα αυτά. Λοιπόν, 10 ευρώ. *(Η Κατερίνα σπρώχνει ξανά προς τον ταμία όλα τα χρήματα που έχει.)* Μην μου τα δίνεις όλα, πάρ' τα. Αυτά είναι δικά σου. *(Της δίνει τα ρέστα μαζί με τα υπόλοιπα χρήματα και τα ψώνια. Η Κατερίνα παίρνει τα χρήματα και τα ψώνια και αποχωρεί χωρίς να χαιρετήσει.)*

Από τη δραστηριότητα αυτή φάνηκε ότι οι μαθητές δεν γνωρίζουν τις απαραίτητες νόρμες που χρειάζονται για την πραγματοποίηση αγορών (π.χ. έχω χρήματα μαζί μου, χαιρετισμός υπαλλήλου, δίνω ένα συγκεκριμένο ποσό, παίρνω τα ψώνια κατά την αποχώρηση, κ.ά.). Σε συνεργασία με τις μητέρες των μαθητών διαμορφώνεται ένα πρόγραμμα δραστηριοτήτων που περιλαμβάνει επισκέψεις και αγορές σε διαφορετικά πλαίσια στην κοινότητα και έχει διάρκεια οκτώ εβδομάδων (24 διδακτικές ώρες).

Σε όλες τις δραστηριότητες χρησιμοποιήθηκαν ρεαλιστικά σενάρια της καθημερινής ζωής των μαθητών. Ένα από αυτά τα σενάρια βασίστηκε στην αξιοποίηση κάποιων αβγών που μας έφερε η μητέρα της Αναστασίας. Μέσω του καταιγισμού ιδεών οι μαθητές σκέφτηκαν να τα χρησιμοποιήσουν για την παρασκευή ενός κέικ στην κουζίνα του σχολείου. Αρχικά, αναζήτησαν μία συνταγή στο ίντερνετ και στη συνέχεια αποφάσισαν ότι χρειάζεται να αγοράσουν κι άλλα υλικά και πρέπει να επισκεφτούν το σούπερ μάρκετ. Μάλιστα προτάθηκε από τους ίδιους τους μαθητές ένα συγκεκριμένο σούπερ μάρκετ, στο οποίο συνηθίζουν να πηγαίνουν οικογενειακώς.

Παράλληλα και μέχρι να ολοκληρωθούν οι απαραίτητες διαδικαστικές ενέργειες για τον προγραμματισμό της επίσκεψης, χρησιμοποιήθηκαν οι άδειες συσκευασίες από αντικείμενα καθημερινής χρήσης που υπάρχουν στη τάξη των μαθηματικών για να μάθουν οι μαθητές να δίνουν ένα ποσό μέχρι πέντε ευρώ με την στρατηγική του ένα-ευρώ-παραπάνω (one-more-than ή next-dollar strategy) (Denny & Test, 1995). Όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες, επάνω στις συσκευασίες υπάρχουν τιμές και οι μαθητές καλούνται να δώσουν όσα είναι τα ευρώ και ένα παραπάνω για τα λεπτά (π.χ. η πρώτη συσκευασία κοστίζει 3,54€ και η μαθήτρια δίνει 4€) (Εικόνες 1-2).

Εικόνες 1-2: Οι μαθητές εφαρμόζουν τη στρατηγική του ένα-ευρώ-παραπάνω

Πριν την επίσκεψη στο σούπερ μάρκετ, κάθε μαθητής ετοίμασε τη δική του λίστα για το σούπερ μάρκετ χρησιμοποιώντας εικόνες των προϊόντων από διαφημιστικά φυλλάδια (μία προσαρμογή που χρησιμοποιήθηκε γιατί οι μαθητές έχουν δυσκολίες στη γραφή και την ανάγνωση). Επίσης, μέσα από τη βιντεο-μοντελοποίηση (video-modeling) και τα παιχνίδια ρόλων οι μαθητές κατανόησαν ότι είναι απαραίτητο να πάρουν χρήματα μαζί τους προτού επισκεφτούν το σούπερ μάρκετ.

Το επόμενο βήμα ήταν η βασισμένη στην κοινότητα διδασκαλία (community based instruction), όπου οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν τα απαραίτητα βήματα της διαδικασίας αγοράς των υλικών για την παρασκευή του κέικ στο φυσικό χώρου του σούπερ μάρκετ (παίρνω καλάθι, χρήση λίστας, αναζήτηση προϊόντων, τοποθέτηση στο καλάθι, πιθανή ερώτηση σε υπάλληλο, χαιρετισμός του ταμία, τοποθέτηση σε σακούλες, πληρώνω, παίρνω ρέστα και απόδειξη) (Εικόνες 3-4).


Εικόνες 3-4: Οι μαθητές κάνουν αγορές σε σούπερ μάρκετ της κοινότητας

Το κάθε παιδί πραγματοποίησε τα βήματα αγοράς των προϊόντων αυτόνομα, έχοντας τον κατάλληλο βαθμό προτροπής από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό ανάλογα με τις δυνατότητές του να ολοκληρώσει το έργο. Την επόμενη ημέρα υλοποιήθηκε η παρασκευή του κέικ στην κουζίνα του σχολείου. Οι μαθητές συνεργάστηκαν και χρησιμοποιώντας τα οπτικοκοποιημένα βήματα της συνταγής έψησαν και κέρασαν κέικ τους συμμαθητές τους.

Σε όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων η οικογένεια ενημερώνεται για τα αποτελέσματα αυτών με διάφορους τρόπους (τηλεφωνική επικοινωνία, τετράδιο μαθηματικών-επικοινωνίας, διά ζώσης συναντήσεις). Μετά την ολοκλήρωση μιας συνολικής δράσης, όμως, ετοιμάζεται και δίνεται σε κάθε μαθητή ένα DVD που περιέχει διαφορετικά βίντεο με την προσπάθειά του σε κάθε μία δραστηριότητα (π.χ. αγορά στο σούπερ μάρκετ, παρασκευή κέικ). Ο στόχος είναι να κινητοποιηθούν οι οικογένειες και να ενθαρρύνουν την ενεργητική συμμετοχή και εμπλοκή των μαθητών σε παρόμοιες κοινωνικές δραστηριότητες που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και πραγματοποιούνται εκτός του σχολικού πλαισίου.

Αξιολόγηση της δράσης και στοχασμός

Οι γονείς και οι σημαντικοί άλλοι σε κάθε οικογένεια αναγνώρισαν την προσπάθεια των μαθητών, τους έδωσαν συγχαρητήρια και τόνωσαν την αυτοπεποίθηση των μαθητών. Τα παιδιά έγιναν οι «σταρ» της οικογένειας για λίγα λεπτά και περιέγραψαν αυτές τις στιγμές με πολύ μεγάλη χαρά:

> Εγώ το είδα το DVD στο σούπερ μάρκετ, στην τηλεόραση! Είδα τον εαυτό μου στο DVD! […] Μ’ άρεσε πολύ το DVD! (Βαγγέλης)

> Ωραίο ήταν το DVD. Ξεκινούσε, τελείωνε, πάλι ξεκινούσε… Δηλαδή, δεν χορταίναμε να το βλέπουμε! (Μητέρα Κατερίνας)

> Είμαι πάρα πολύ χαρούμενη. Η Αναστασία το έχει βάλει το DVD να το δουν όλοι. Ήρθαν οι ξαδέρφες της και τους το έβαλε, στη φίλη μας, σε όλους. […] Τι να πω, συγχαρητήρια. (Μητέρα Αναστασίας)

Και οι τρείς μητέρες εξέφρασαν την ικανοποίησή τους από το εκπαιδευτικό πρόγραμμα που εφαρμόστηκε δείχνοντας, παράλληλα, την απογοήτευσή τους από τις προηγούμενες σχολικές εμπειρίες των μαθητών και τον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων:

> Και μετά θα ‘ρθει κάποιος άλλος, κι αυτά θα πάνε όλα χαμένα. […] Θα αρχίσουν πάλι από την αρχή, 1+1=2 κι εκεί θα μείνουν! Γιατί, αυτά δεν τα έκανε κανείς άλλος, αυτά που τα χρειάζεται η Αναστασία. (Μητέρα Αναστασίας)

> Αυτή η δουλειά που κάνετε με την Κατερίνα και με τ’ άλλα παιδιά είναι ωραία. Γιατί τα άλλα χρόνια δεν είχε βελτίωση. Δεν έκαναν, έτσι… πράγματα τα ίδια τα παιδιά. Αυτή η πρακτική που κάνετε, που πηγαίνετε στο σούπερ μάρκετ, είναι πολύ ωραία. (Μητέρα Κατερίνας)

Η μητέρα της Αναστασία, της έδωσε αρκετές φορές τη δυνατότητα να συμμετέχει στη διαδικασία αγοράς προϊόντων μετατρέποντας τον ρόλο της Αναστασίας από παθητικό σε ενεργητικό:

> Εγώ μια μέρα δεν έδωσα σημασία, μπήκα μέσα, προχώρησα και λέει *(η Αναστασία)* «Που πας, το καρότσι;». (Μητέρα Αναστασίας)

> Τώρα ας πούμε είναι να πάμε στο σούπερ μάρκετ και λέει *(η Αναστασία)* «Εγώ θα ψωνίσω». Δηλαδή, δεν είναι ότι το κάνει επειδή της το λέω εγώ, της αρέσει πολύ! (Μητέρα Αναστασίας)

Παρόλο που όλες οι μητέρες αναγνώρισαν τη σπουδαιότητα των διδακτικών στόχων, η μητέρα της Κατερίνας και η μητέρα του Βαγγέλη δυσκολεύτηκαν να εφαρμόσουν το εκπαιδευτικό πρόγραμμα εκτός του σχολικού πλαισίου. Οι σημαντικότεροι λόγοι που εντοπίστηκαν είναι ο ελλιπής χρόνος, η δυσκολία έκθεσης και ένταξης των μαθητών στο κοινωνικό πλαίσιο, οι προηγούμενες εμπειρίες και οι χαμηλές προσδοκίες των γονέων:

> Μητέρα Κατερίνας: Απλά ντρέπομαι λίγο.
>
> Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός: Γιατί;
>
> Μητέρα Κατερίνας: Για τον κόσμο που θα την δει έτσι.
>
> Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός: Δεν την παίρνετε στο σούπερ μάρκετ μαζί σας;
>
> Μητέρα Κατερίνας: Την παίρνω στο σούπερ μάρκετ. Απλά στον φούρνο και σε τέτοια, που μας ξέρουν… Δεν θέλω να… Ο κόσμος σχολιάζει. Δεν είναι μεγάλη πόλη.
>
> Ερευνήτρια-Εκπαιδευτικός: Στο σούπερ μάρκετ που πηγαίνετε…
>
> Μητέρα Κατερίνας: Εκεί δεν έχω πρόβλημα. Την έχω πάρει στον φούρνο πολλές φορές αλλά δεν κάθεται και καλά. Δεν καθόταν. Τώρα, έχει αλλάξει λίγο, όχι πολύ. Φεύγει να δει άλλα πράγματα κι εγώ την κυνηγάω από πίσω.

Η έρευνα βρίσκεται σε εξέλιξη και αναμένεται στον επόμενο κύκλο να ενισχυθεί ο ρόλος των μητέρων στη λήψη αποφάσεων με στόχο την υλοποίηση αντίστοιχων δράσεων που ενισχύουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στο οικογενειακό και ευρύτερο κοινωνικό πλαίσιο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι μητέρες των μαθητών συνέβαλαν στην εκπαιδευτική διαδικασία παρέχοντας πληροφορίες σχετικά με τα διαφορετικά κοινωνικά πλαίσια που έχουν σημασία για τις οικογένειες των μαθητών. Επίσης, συνεργάστηκαν με την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό κατά τη διάρκεια της επιλογής των διδακτικών στόχων. Η επιλογή έγινε με βάση το «κριτήριο της ουσιαστικής λειτουργικότητας» (Browder & Cooper-Duffy, 2003), δηλαδή με κριτήριο εάν οι δεξιότητες είναι λειτουργικές (δηλ. χρήσιμες στην καθημερινή ζωή) και ηλικιακά κατάλληλες (δηλ. βασίζονται στη χρονολογική και όχι στην αναπτυξιακή ηλικία) για τους τρεις μαθητές.

Με βάση τις πληροφορίες που προέκυψαν από τη συνεργασία με τις μητέρες, η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός μπόρεσε να εντάξει τις μαθηματικές δραστηριότητες σε πλαίσια αυθεντικών καθημερινών καταστάσεων που έχουν νόημα για τους μαθητές και καλύπτουν τις πραγματικές τους ανάγκες. Αφορμή για την έναρξη της δραστηριότητας που παρουσιάστηκε, αποτέλεσε το δώρο που έστειλε η μητέρα της Αναστασίας. Η αξιοποίηση των προϊόντων που έφερε στην τάξη η ίδια η μαθήτρια ενθάρρυνε τη συμμετοχή και τη διατήρηση του ενδιαφέροντος των μαθητών κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Η χρήση των DVD έδωσε πολλαπλές ευκαιρίες για συζήτηση και αλληλεπίδραση με τους μαθητές στο πλαίσιο της οικογένειας και επέτρεψε να αναδειχθούν οι δυνατότητες των μαθητών σε σημαντικά μέλη του ευρύτερου οικογενειακού πλαισίου. Όπως υποστηρίζουν οι Dipipi-Hoy και Jitendra (2004) οι γονείς, μέσω της συμμετοχής τους στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα των παιδιών τους, έχουν τη δυνατότητα να καταλάβουν τις δυνατότητες των παιδιών και να συμβάλλουν στη συνέχισή του.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν παράγοντες του οικογενειακού πλαισίου που μπορεί να περιορίσουν τις ευκαιρίες ενεργής συμμετοχής των μαθητών σε κοινωνικές δραστηριότητες που ενισχύουν τη μαθηματική σκέψη. Οι αντιλήψεις των γονέων για την κοινωνική ένταξη των μαθητών με αναπηρία, ο διαθέσιμος ελεύθερος χρόνος και οι χαμηλές προσδοκίες τους φαίνεται πως αποτέλεσαν εμπόδια για τις δύο μητέρες. Σύμφωνα με τις Zoniou-Sideri και Nteropoulou-Nterou (2007) οι αντιλήψεις των γονέων, οι προσδοκίες και οι προηγούμενες εμπειρίες τους αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες για την εκπαίδευση των παιδιών με αναπηρία. Ακόμη και μετά την ενηλικίωση, οι γονείς ατόμων με αναπηρία συνεχίζουν να εκφράζουν έντονη ανάγκη να φροντίσουν τα παιδιά τους για διάφορους λόγους, μεταξύ των οποίων η αντίληψή τους ότι δεν υπάρχει κάποια εναλλακτική (Cuskelly, 2006). Πολλές φορές, δηλαδή, οι γονείς έχουν περιορισμένες προσδοκίες και διστάζουν να θέσουν υψηλότερους στόχους ή δυσκολότερα έργα.

Σύμφωνα με τους Lam, Wong, Leung, Ho και Au-Yeung (2010), όσο οι γονείς μαθητών με αναπηρία πιστεύουν ότι η κοινωνική ένταξη των παιδιών είναι δύσκολη και τους επιφέρει προβλήματα, τόσο πιο αρνητικά θα είναι τα συναισθήματά τους. Και αντίστροφα, η έλλειψη θετικών συναισθημάτων θα έχει ως αποτέλεσμα τη δυσκολία των γονέων να επιτρέψουν στους μαθητές να συμμετέχουν, όχι μόνο φυσικά αλλά και κοινωνικά, στην κοινότητα. Εφόσον οι γονείς πιστεύουν στη σημαντικότητα της κοινωνικής ένταξης των παιδιών, είναι απαραίτητη η συστηματική ενίσχυση και ενθάρρυνση της οικογένειας ώστε να διευρύνουν τις δυνατότητες πρόσβασης των μαθητών σε ποικιλία πλαισίων πραγματοποίησης χρηματικών συναλλαγών.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Το Ε.Ε.Ε.Ε.Κ. είναι σχολική δομή της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην οποία φοιτούν μαθητές με αναπηρία και ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες.
2. Η συμμετοχή των μαθητών στην έρευνα έχει εξασφαλισθεί με τη γραπτή συγκατάθεση των γονέων τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Browder, D. M., & Cooper-Duffy, K. (2003). Evidence-based practices for students with severe disabilities and the requirement for accountability in “No child left behind”. *The Journal of Special Education, 37*(3), 157-163.

Browder, D. M., & Grasso, E. (1999). Teaching money skills to individuals with mental retardation: A literature review with practical applications. *Remedial and Special Education, 20*(5), 297-308.

Butler, F. M., Miller, S. P., Lee, K., & Pierce, T. (2001). Teaching mathematics to students with mild-to-moderate mental retardation: A review of the literature. *Mental Retardation, 39*(1), 20-31.

Cuskelly, M. (2006). Parents of adults with an intellectual disability. *Family Matters, 74*, 20-25.

DiPipi-Hoy, C., & Jitendra, A. (2004). A parent-delivered intervention to teach purchasing skills to young adults with disabilities. *The Journal of Special Education, 38*(3), 144-157.

Denny, P. J., & Test, D. W. (1995). Using the one-more-than technique to teach money counting to individuals with moderate mental retardation: A systematic replication. *Education & Treatment of Children, 18*(4), 422-32.

Lam, S., Wong, B., Leung, D., Ho, D., & Au-Yeung, P., (2010). How parents perceive and feel about participation in community activities: The comparison between parents of preschoolers with and without autism spectrum disorders. *Autism, 14*(4), 359-377.

Mechling, L. C., Gast, D. L., & Bartholde, S. (2003). Multimedia computer-based instruction to teach students with moderate intellectual disabilities to use a debit card to make purchases. *Exceptionality*, *11*(4), 239-254.

Spann, S. J., Kohler, F. W., & Soenksen, D. (2003). Examining parents' involvement in and perceptions of special education services: An interview with families in a parent support group. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *18*(4), 228-237.

Tekin-Iftar, E. (2008). Parent-delivered community-based instruction with simultaneous prompting for teaching community skills to children with developmental disabilities. *Education and Training in Developmental Disabilities*, *43*(2), 249-265.

Ukeli, V. T., & Akem, I. A. (2013). Parental role in mathematics achievement of visually impaired students in Benue state. *Journal of Educational and Social Research*, *3*(5), 25-36.

Zoniou-Sideri, A., & Nteropoulou-Nterou, E. (2007). Experiences of disabled children's families concerning school-family collaboration. *International Journal of Parents in Education*, *1*(0), 174-181.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-3: ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ‘ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΩΝ’ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ ΑΠΟ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΝΗΠΙΑΓΩΓΟΥΣ: ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ξένια Βαμβακούσση & Μαρία Καλδρυμίδου
Π.Τ.Ν., Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
xvamvak@cc.uoi.gr mkaldrim@uoi.gr

Για την εργασία αυτή αναλύσαμε δραστηριότητες σχετικά με τις κανονικότητες που σχεδίασαν μελλοντικές νηπιαγωγοί, οι οποίες παρακολούθησαν διδασκαλία σχετικά με τις κανονικότητες στο νηπιαγωγείο, συμμετείχαν σε εργαστήρια στα οποία προετοίμασαν σχετικό εκπαιδευτικό υλικό και έκαναν πρακτική άσκηση, σχεδιάζοντας και πραγματώνοντας δραστηριότητες με το υλικό αυτό. Προσδιορίζουμε δυσκολίες και προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μελλοντικές νηπιαγωγοί με τις κανονικότητες και τη διδακτική τους προσέγγιση, με σκοπό την ανάδειξη ζητημάτων που πρέπει να ληφθούν υπόψη για τη βελτίωση της εκπαίδευσής τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ενασχόληση με τις κανονικότητες[1] αναγνωρίζεται ως σημαντική για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών σε διάφορους τομείς, όπως η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και η επίλυση προβλήματος (Liljedahl, 2004; Mulligan, & Michelmore, 1997). Τα τελευταία χρόνια τονίζεται ιδιαίτερα η αξία των κανονικοτήτων για την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης. Πράγματι, η επαγωγική γενίκευση, ο εντοπισμός σχέσεων μεταξύ διαδοχικών όρων μιας κανονικότητας, η συσχέτιση του όρου με τη θέση του και το πέρασμα από την λεκτική περιγραφή του κανόνα στην τυποποίησή του είναι σημαντικά στοιχεία της αλγεβρικής και της συναρτησιακής σκέψης. Η από νωρίς ανάπτυξη τέτοιων ικανοτήτων θεωρείται θεμελιώδης για τη μετέπειτα ικανότητα των παιδιών στην άλγεβρα και την ανάλυση (Κυλάφης, 2009; Τζεκάκη, 2010). Είναι, λοιπόν, σημαντική η αναγνώριση και αξιοποίηση των πρώιμων εμπειριών και ικανοτήτων σχετικά με τις κανονικότητες τις οποίες έχουν τα παιδιά στην πρωτοσχολική ηλικία (Clements & Sarama, 2009; Τζεκάκη, 2010).

Η θεώρηση των κανονικοτήτων ως βάση για την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης αντανακλάται στα προγράμματα σπουδών για τα μαθηματικά στην πρωτοσχολική εκπαίδευση διεθνώς. Για παράδειγμα, στο ελληνικό (πιλοτικό) πρόγραμμα σπουδών για το νηπιαγωγείο, οι κανονικότητες εντάσσονται στον άξονα περιεχομένου Άλγεβρα (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011, σελ. 170-171). Η απλή ένταξη των κανονικοτήτων στα μαθηματικά του νηπιαγωγείου δεν εξασφαλίζει, ασφαλώς, την ανάπτυξη των επιθυμητών ικανοτήτων από τα παιδιά. Κεντρικό ρόλο έχει η διδακτική διαχείριση των κανονικοτήτων από τον εκπαιδευτικό (Clements & Sarama, 2009; Κυλάφης, 2009). Απ' όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, οι σχετικές συστηματικές έρευνες με εκπαιδευτικούς στις μικρές ηλικίες είναι ελάχιστες (π.χ., Economopoulos, 1998; Waters, 2004). Ωστόσο, υπάρχουν ενδείξεις ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν συγκεχυμένες αντιλήψεις για το τι συνιστά κανονικότητα, καθώς και τους διαφορετικούς τύπους κανονικοτήτων. Επιπλέον, δυσκολεύονται να οργανώσουν μια σειρά δραστηριοτήτων με σταδιακά πιο απαιτητικές κανονικότητες, ή να θέσουν μια ποικιλία ερωτημάτων στα παιδιά. Τέλος, φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τη σημασία των κανονικοτήτων για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην περίπτωση της αξιοποίησης των κανονικοτήτων για την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης, καθώς η σχέση ανάμεσά τους δεν είναι ούτε προφανής, ούτε εύκολα μεταφράσιμη σε διδακτική πράξη. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για μελλοντικούς εκπαιδευτικούς που δεν έχουν το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο και, επιπλέον, δεν έχουν εξοικείωση με τις κανονικότητες μέσω τις δικιάς τους σχολικής εμπειρίας. Η μύηση των μελλοντικών εκπαιδευτικών στις κανονικότητες και η προετοιμασία τους για τη διδασκαλία είναι ένα ζητούμενο στο χώρο της εκπαίδευσης εκπαιδευτικών.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε στοιχεία από τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίστηκαν διδακτικά τις κανονικότητες μελλοντικές νηπιαγωγοί, οι οποίες παρακολούθησαν ένα διδακτικό τρίωρο με θέμα τις κανονικότητες στο νηπιαγωγείο, συμμετείχαν σε εργαστήρια στα οποία προετοίμασαν σχετικό εκπαιδευτικό υλικό και πραγματοποίησαν πρακτική άσκηση, στην οποία πραγμάτωσαν δραστηριότητες με υλικό που σχεδίασαν στο πλαίσιο των εργαστηρίων. Στόχος μας είναι να προσδιοριστούν δυσκολίες και προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μελλοντικές νηπιαγωγοί με τη διδασκαλία των κανονικοτήτων, ώστε να αναδειχθούν ζητήματα που πρέπει να ληφθούν υπόψη για τη βελτίωση της εκπαίδευσής τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συλλογή και ανάλυση των στοιχείων

Στην έρευνα αναλύσαμε 10 εργασίες οι οποίες προήλθαν από 10 ομάδες των δύο ατόμων, φοιτήτριες του 3ου έτους στο Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, οι οποίες είχαν επιλέξει το μάθημα Διδακτική Μαθηματικών ΙΙ. Στο μάθημα αυτό, οι φοιτήτριες αξιολογούνται με βάση γραπτή εργασία, στην οποία –ανάμεσα σε άλλα– περιγράφουν, αναλύουν και αξιολογούν τις δραστηριότητες που πραγμάτωσαν στην πρακτική άσκηση, επιλέγοντας μία από τις θεματικές ενότητες που δουλεύτηκαν στα εργαστήρια. Τα στοιχεία που αναλύσαμε προέρχονται από τις εργασίες των φοιτητριών που επέλεξαν τις κανονικότητες, με την εξαίρεση ορισμένων εργασιών η ποιότητα των οποίων ήταν ιδιαίτερα χαμηλή. Στην ανάλυση συμπεριλήφθηκαν τελικά 3 εργασίες χαμηλού, 4 εργασίες μεσαίου και 3 εργασίες υψηλού επιπέδου, οι οποίες είχαν βαθμολογηθεί με 5-6, 7-8 και 9-10, αντίστοιχα.

Οι δραστηριότητες που παρουσιάζονταν στις εργασίες αυτές αναλύθηκαν ως προς: α) το είδος των κανονικοτήτων και των αναπαραστάσεων που χρησιμοποιήθηκαν (εμπράγματες/αισθητηριακές, εικονικές, συμβολικές), β) τη μαθηματική ορθότητα, γ) το/τους στόχο/ους της δραστηριότητας σύμφωνα με τις φοιτήτριες, σε αντιδιαστολή με το τι έκαναν τελικά τα παιδιά και δ) την οργάνωση των δραστηριοτήτων σε σειρά αυξανόμενης δυσκολίας (ως προς το είδος της μονάδας επανάληψης και ως προς το είδος της αναπαράστασης που χρησιμοποιήθηκε) . Συνολικά, αναλύθηκαν 56 δραστηριότητες.

Στοιχεία για τη διδασκαλία και τα εργαστήρια

Η διδασκαλία επικεντρώθηκε σε κανονικότητες οι οποίες προκύπτουν από την επανάληψη μιας (σύνθετης) μονάδας από στοιχεία (π.χ. ΑΒΑΒΑΒ, ΑΒΓΑΒΓΑΒΓ), γνωστές ως «επαναλαμβανόμενα μοτίβα», και σε κανονικότητες κάθε όρος των οποίων προκύπτει από τον προηγούμενο με ένα συστηματικό τρόπο, γνωστές ως «εξελισσόμενα μοτίβα» (Τζεκάκη, 2010). Τυπικό παράδειγμα τέτοιων κανονικοτήτων είναι η αριθμητική ακολουθία και, γενικότερα, οι αριθμητικές πρόοδοι.

Στο θεωρητικό μέρος του μαθήματος (1 διδακτικό τρίωρο) συζητήθηκε η σημασία της πρώιμης ανάπτυξης της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης και ο ρόλος των κανονικοτήτων για το σκοπό αυτό. Παρουσιάστηκαν παραδείγματα επαναλαμβανόμενων και εξελισσόμενων μοτίβων, αναλύθηκαν οι παράγοντες που καθορίζουν τη δυσκολία των μοτίβων για τα παιδιά όπως το πλήθος στοιχείων στη μονάδα επανάληψης, το είδος αναπαράστασης και το πλήθος παραμέτρων που λαμβάνονται υπόψη (Skoumpourdi, 2013). Τέλος, αναλύθηκαν και συνδέθηκαν με την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης οι στόχοι σχετικά με τις κανονικότητες που συμπεριλαμβάνονται στο Π.Π.Σ. (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011, σελ. 170-171), οι οποίοι είναι οι εξής: α) αναγνώριση, η οποία τεκμαίρεται με εύρεση λάθους και συμπλήρωση όρων που λείπουν β) συνέχιση, η οποία προϋποθέτει την αναγνώριση, γ) «μετάφραση» κανονικότητας από ένα υλικό σε ένα άλλο, γ) επινόηση-κατασκευή και δ) περιγραφή.

Ιδιαίτερη βαρύτητα δόθηκε στην περιγραφή των κανονικοτήτων. Πράγματι, πολλά νήπια είναι σε θέση να περιγράψουν μια απλή κανονικότητα ακολουθώντας μια «ρυθμική» προσέγγιση (π.χ., απαγγέλλοντας κόκκινο-πράσινο, κόκκινο-πράσινο, …), ή παρατηρώντας τοπικά τη διαδοχή των όρων (π.χ., μετά το κόκκινο είναι το πράσινο, μετά το πράσινο είναι το κόκκινο, …). Ωστόσο, αυτού του είδους η περιγραφή δεν προϋποθέτει απαραίτητα ότι έχει εντοπιστεί ο κανόνας (Κυλάφης, 2009). Προκειμένου να υποστηριχθούν τα νήπια στον εντοπισμό και την περιγραφή κανόνων, συζητήθηκαν δύο τρόποι να δει κανείς και να περιγράψει μια κανονικότητα: α) να εντοπίσει τη μονάδα επανάληψης (για τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα) και β) να συσχετίσει κάθε όρο με τη θέση του (π.χ., το πρώτο είναι κόκκινο, το δεύτερο είναι πράσινο, το τρίτο είναι κόκκινο, κ.λπ.).

Στα 2 δίωρα εργαστήρια που αφορούσαν τις κανονικότητες, οι φοιτήτριες συμμετείχαν σε δραστηριότητες σχετικές με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος με διαφόρων τύπου κανονικότητες, εργάστηκαν με παραδείγματα συγκεκριμένων έργων σχετικά με τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης και τη συσχέτιση του όρου με τη θέση του, και σχεδίασαν και συζήτησαν δραστηριότητες σχετικά με τις κανονικότητες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Με την εξαίρεση μιας δραστηριότητας που αφορούσε εξελισσόμενο μοτίβο (εμπράγματη αναπαράσταση της αριθμητικής ακολουθίας ως κλίμακας), το σύνολο των δραστηριοτήτων που σχεδίασαν οι φοιτήτριες αφορούσε τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Χρησιμοποιήθηκαν κυρίως εμπράγματες (26, 46,4%) και εικονικές αναπαραστάσεις (20, 35,7%), ενώ παρατηρήθηκαν και ηχητικά και κινητικά μοτίβα (10, 17,9%). Τα μοτίβα τύπου ΑΒΑΒ και ΑΒΓΑΒΓ εμφανίστηκαν με μεγαλύτερη συχνότητα (35,7% έκαστο στο σύνολο των δραστηριοτήτων).

Μαθηματική ορθότητα

Σε 3 από τις 56 δραστηριότητες εμφανίστηκαν καταστάσεις στις οποίες δεν υπήρχε στην ουσία η κανονικότητα που θεωρούσαν οι φοιτήτρεις. Για παράδειγμα, σε μία από αυτές το ζευγάρι λουλούδι-φύλλο εναλλασσόταν συμμετρικά (λουλούδι/φύλλο, φύλλο/λουλούδι). Αν και κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μοτίβο τύπου ΑΒΒΑ, εντούτοις η μονάδα που έχει αναγνωρισθεί από τις φοιτήτριες είναι το ζευγάρι φύλλο/λουλούδι. Μια αντίστοιχη περίπτωση είναι η κατασκευή που φαίνεται στην Εικόνα 1. Ενώ οι φοιτήτριες αναγνώρισαν το μοτίβο ως τύπου ΑΒΑΒ, Η τελική κατασκευή που παράγεται είναι τελικά, αν θέλουμε να την περιγράψουμε με όρους κανονικότητας, μια μονάδα..

Εικόνα 1: Κανονικότητα – μονάδα;

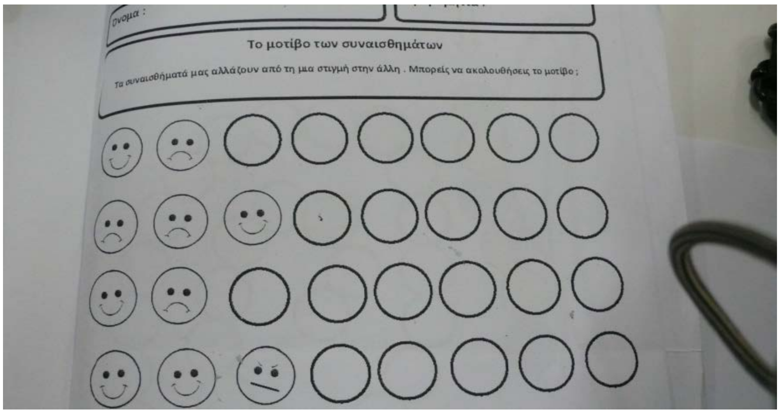
Επιπλέον, παρουσιάστηκαν σφάλματα στη μετάφραση κανονικοτήτων από τις φοιτήτριες, τέτοια ώστε να αλλοιώνουν τη δομή της κανονικότητας. (βλ. ενότητα Μετάφραση παρακάτω).

Στόχοι

Από τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος, δύο ζητήθηκαν κατά κύριο λόγο από τα παιδιά, η συνέχιση και η κατασκευή. Πιο συγκεκριμένα:

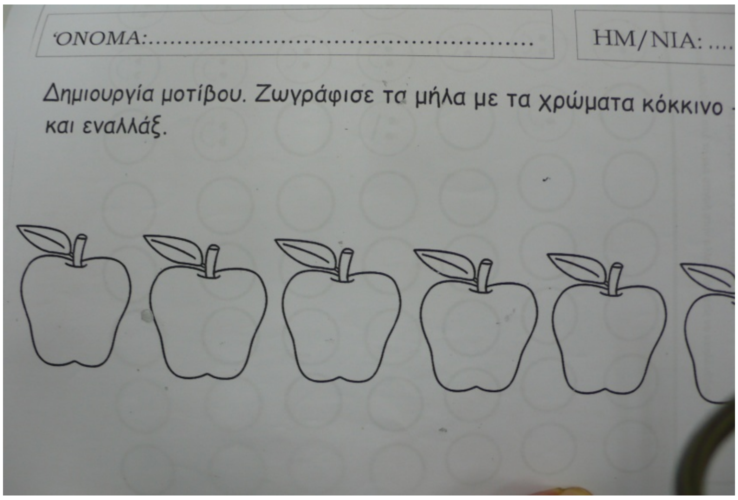
Αναγνώριση. Σε 1 μόνο δραστηριότητα ζητήθηκε ο εντοπισμός "λαθών".

Συνέχιση. Σε 17 δραστηριότητες ζητήθηκε συνέχιση της κανονικότητας, στις 11 από τις οποίες δινόταν μόνο μια φορά η μονάδα του μοτίβου που θα έπρεπε να επαναληφθεί (Εικ. 2). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις δεν υπάρχει συνέχιση κανονικότητας, αλλά τοπική αναπαραγωγή/επανάληψη του δοθέντος συνδυασμού αντικειμένων.



Εικόνα 2: Συνέχιση με εμφάνιση μόνο μια φορά της μονάδας

Κατασκευή. Η κατασκευή κανονικοτήτων από τα παιδιά με χρήση διάφορων υλικών, όπως χάντρες, τουβλάκια, ζυμαρικά, καραμέλες, ήταν μια από τις πιο δημοφιλείς δραστηριότητες/έργα που δόθηκαν στην τάξη. Είκοσι πέντε δραστηριότητες (44,6% επί του συνόλου των δραστηριοτήτων) αφορούν την κατασκευή ακολουθίας αντικειμένων. Στις 16 από αυτές τα παιδιά καλούνται να επινοήσουν ένα μοτίβο. Στις νέα (9) από αυτές τις περιπτώσεις, ωστόσο, δόθηκε ο κανόνας από τη φοιτήτρια/νηπιαγωγό (βλ. Εικόνα 3). Σε αυτές τις περιπτώσεις κατασκευής με οδηγία (Εικ. 3), πάλι δεν είναι εύκολο να διακρίνουμε αν τελικά πρόκειται για κατασκευή κανονικότητας ή για επαναληπτική τοπική αναπαραγωγή, όπως και στις περιπτώσεις της συνέχισης με μια εμφάνιση της μονάδας.



Εικόνα 3: Κατασκευή με οδηγία

Ένα άλλο χαρακτηριστικό ως προς το οποίο διαφοροποιούνται οι δραστηριότητες κατασκευής σχετίζεται με τον τρόπο που συμμετέχουν τα παιδιά στην κατασκευή: υπάρχουν περιπτώσεις όπου κάθε παιδί φτιάχνει μια δικιά του ακολουθία αποφασίζοντας για τη μονάδα επανάληψης (βραχιόλια, κορνίζες, φάρμακα), όπως και περιπτώσεις όπου η τάξη ως σύνολο αποφασίζει ποια θα είναι η μονάδα επανάληψης και κάθε παιδί πραγματοποιεί μετά την κατασκευή. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η τάξη ως σύνολο ή η ομάδα ως σύνολο (η τάξη χωρισμένη σε 2 ομάδες) πραγματοποιεί μια κατασκευή (τρενάκι, πύργοι, ακολουθία αυτοκινητακίων) όπου κάθε παιδί με τη σειρά του βάζει το επόμενο στοιχείο της κατασκευής.

Μετάφραση. Οι προσπάθειες των φοιτητών/νηπιαγωγών να εντάξουν στο πρόγραμμα δραστηριότητες που θα εμπεριείχαν μετάφραση της κανονικότητας σε άλλο πλαίσιο ήταν ο τομέας που παρουσίασε τη μεγαλύτερη δυσκολία και αναδεικνύει ενδεχομένως καλύτερα από όλες τις περιπτώσεις τις αδυναμίες στην εννοιολογική αντίληψη που έχουν οι φοιτητές/τριες για το θεματικό πεδίο των κανονικοτήτων.

Ως περιπτώσεις που εμπεριέχουν και μετάφραση μπορούν να ενταχθούν δραστηριότητες όπως οι παρακάτω:

1. Χρησιμοποιείται μια ακολουθία σημάτων από τους φοιτητές/νηπιαγωγούς (π.χ. κόκκινο/κίτρινο, μαντήλι/μπαλόνι) και τα παιδιά πρέπει να κάνουν κάποιες προσυμφωνημένες κινήσεις (π.χ. 1 φορά παλαμάκια/2 φορές χτύπημα ποδιών) ή να αναπαράγουν κάποια ηχητικά σήματα στο ξυλόφωνο.

Στην περίπτωση αυτή, τα παιδιά συνδέουν αποσπασματικά κάθε ένα όρο της μιας κανονικότητας με ένα όρο της άλλης, χωρίς να έχουν ολοκληρωμένη αίσθηση, ούτε για τη μία κανονικότητα, ούτε για την άλλη.

2. Δίνεται μια ακολουθία 3 γεωμετρικών σχημάτων (κύβος, πυραμίδα, παραλληλεπίπεδο) και τα παιδιά πρέπει να το αναπαράγουν με ηχητικές κινήσεις (μια παλαμάκια για τον κύβο, 2 παλαμάκια για την πυραμίδα και

ένα χτύπημα ποδιών για το παραλληλεπίπεδο) και έτσι η κανονικότητα τύπου ΑΒΓ μεταφράζεται σε κανονικότητα τύπου ΔΔΔΕ.

Λεκτική περιγραφή. Σε 5 μόνο δραστηριότητες (8,9%) ζητήθηκε από τα παιδιά να περιγράψουν λεκτικά την κανονικότητα. Επισημαίνουμε ότι οι 4 από αυτές έγιναν από την ίδια ομάδα φοιτητριών. Σε αυτές τις δραστηριότητες δόθηκε βαρύτητα στον εντοπισμό της μονάδας και στο πλήθος των επαναλήψεων. Σε καμία από τις δραστηριότητες δεν εμφανίστηκε η συσχέτιση του όρου της κανονικότητας με τη θέση του.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, περιγράφοντας τις οδηγίες που έδωσαν οι ίδιες στα παιδιά, ή από εκφωνήσεις ασκήσεων σε φύλλα εργασίας, οι φοιτήτριες φαίνεται να χρησιμοποίησαν τη «ρυθμική» περιγραφή (π.χ. «ένα μήλο κόκκινο, ένα μήλο πράσινο και εναλλάξ», βλ. Εικόνα 2).

Οργάνωση δραστηριοτήτων

Σε γενικές γραμμές, οι φοιτήτριες έλαβαν υπόψη τους παράγοντες που αυξάνουν τη δυσκολία των κανονικοτήτων για τα παιδιά, εστιάζοντας κυρίως στο πλήθος των στοιχείων της μονάδας επανάληψης και ξεκινώντας με εμπράγματες/αισθητηριακές αναπαραστάσεις. Ωστόσο, υπήρχε υπήρχαν και 3 περιπτώσεις εργασιών, στις οποίες οι δραστηριότητες ξεκίνησαν με συνθετότερες μορφές (ΑΑΒΑΑΒ, ΑΒΓΑΒΓ, ΑΒΓΔΕΕΑΒΓΔΕΕ) και ακολούθησαν οι απλούστερες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να πούμε ότι η συνολική εικόνα δείχνει ότι το θεματικό πεδίο των κανονικοτήτων είναι ιδιαίτερα απαιτητικό για τις φοιτήτριες/μελλοντικές νηπιαγωγούς, τόσο όσον αφορά την κατανόησή τους, όσο και τη διδακτική τους διαχείριση (Economopoulos, 1998; Waters, 2004).

Πράγματι, υπάρχουν σαφείς αλλά και αποχρώσες ενδείξεις ότι, σε σημαντικό βαθμό, οι φοιτήτριες αντιμετωπίζουν εννοιολογικές δυσκολίες με την κανονικότητα. Το πρώτο τεκμαίρεται από τις περιπτώσεις "κανονικοτήτων" στις οποίες υπάρχει μια αλληλουχία μορφών, κινήσεων, χρωμάτων, που όμως δε διέπεται από ένα σταθερό κανόνα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτές οι φοιτήτριες έχουν μια "ολιστική" αντίληψη για την κανονικότητα ("αν υπάρχει μια σειρά και κάποιο είδος επανάληψης, τότε είναι κανονικότητα"). Ένας άλλος δείκτης είναι η "μετάφραση" κανονικοτήτων κατά τρόπο τέτοιον ώστε να μεταβάλλεται η δομή τους (π.χ., το πλήθος των στοιχείων της μονάδας επανάληψης).

Από την άλλη μεριά, αναλύοντας τις διδακτικές επιλογές των φοιτητριών, διαφαίνεται ότι σε μεγάλο βαθμό, έχουν μια περιορισμένη αντίληψη για την κανονικότητα: Εστιάζουν στην δεδομένη a priori κανονικότητα και παραβλέπουν την κανονικότητα ως χαρακτηριστικό μιας κατάστασης που διαπιστώνεται a posteriori. Προς αυτήν την κατεύθυνση συνηγορούν δύο βασικά ευρήματα της ανάλυσης των διδασκαλιών. Το πρώτο είναι η απουσία, ουσιαστικά, δραστηριοτήτων στις οποίες τα παιδιά καλούνται να αναγνωρίσουν μια κανονικότητα. Το δεύτερο είναι η μεγάλη συχνότητα εμφάνισης δραστηριοτήτων συνέχισης και κατασκευής, στις οποίες η μονάδα επανάληψης δίνεται μόνο μία φορά και συνοδεύεται από οδηγία επανάληψης. Και στις δύο περιπτώσεις, η κανονικότητα είναι δεδομένη εκ των προτέρων (για τη νηπιαγωγό) και τα παιδιά καλούνται να την πραγματώσουν ακολουθώντας την οδηγία και όχι να την αναγνωρίσουν. Στο ίδιο πλαίσιο θα μπορούσε να ενταχθεί και η περίπτωση "μετάφρασης" όπου οι όροι μιας κανονικότητας (δεδομένης μόνο για τις φοιτήτριες) αντιστοιχίζονται αποσπασματικά ένας προς έναν με τους όρους μιας κανονικότητας που παράγουν τα παιδιά, χωρίς αυτά να έχουν ολοκληρωμένη εικόνα για καμία από τις δύο κανονικότητες.

Σημειώνουμε, επίσης, ότι οι φοιτήτριες στην πλειοψηφία τους παραβλέπουν τη σημασία της λεκτικής περιγραφής των μοτίβων, ως ένα μέσο για να εστιάσουν τα παιδιά στη δομή της κανονικότητας (Τζεκάκη, 2010), παρά το γεγονός ότι κατά την προετοιμασία τους δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα σε αυτή την πτυχή. Συνακόλουθα, στη μεγάλη πλειοψηφία τους, δεν ενέταξαν στο σχεδιασμό τους δραστηριότητες σχετικά με τον εντοπισμό της μονάδας και τη συσχέτιση του όρου με τη θέση του. Επιπλέον, όταν οι ίδιες περιγράφουν εξελισσόμενα μοτίβα στα παιδιά (συνήθως ως οδηγία για την κατασκευή τους) καταφεύγουν συνήθως στη ρυθμική περιγραφή.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε, ότι τα ευρήματα αυτά υποδεικνύουν ότι οι φοιτήτριες δεν αντιλαμβάνονται τη σημασία της σχέσης μεταξύ των δομικών στοιχείων της κανονικότητας. Όμως, ενδεχομένως, οι επιλογές αυτές να μην είναι πάντα απόρροια της περιορισμένης εννοιολογικής αντίληψης των φοιτητριών για την κανονικότητα, αλλά να αντικατοπτρίζουν την προσπάθειά τους να διασφαλίσουν ότι οι "στόχοι" της δραστηριότητας είναι σαφείς για τα παιδιά και ότι η δραστηριότητα θα ολοκληρωθεί με επιτυχία. Αυτό συνάδει με περιγραφές της διδασκαλίας που συναντήσαμε σε πολλές από τις εργασίες, στις οποίες δηλωνόταν ρητά ότι οι φοιτήτριες ξεκίνησαν εξηγώντας λεκτικά στα παιδιά τι είναι μοτίβο (αν και δεν είναι σαφές από τις περιγραφές τους το πώς έγινε αυτό), έδωσαν παραδείγματα και στη συνέχεια προχώρησαν στις δραστηριότητες με τα παιδιά. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτά είναι στοιχεία μιας «παραδοσιακής» αντίληψης για τη διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία περιορίζει τις ευκαιρίες των παιδιών να ανακαλύψουν τις μαθηματικές ιδέες.

Δεδομένης της σημασίας της προετοιμασίας των εκπαιδευτικών προκειμένου να διδάξουν μαθηματικά, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες και ειδικότερα όσον αφορά τις κανονικότητες (Clements & Sarama, 2009; Κυλάφης, 2009), οι παραπάνω διαπιστώσεις οδηγούν σε ένα βασικό και πολυδιατυπωμένο ερώτημα: ποια μαθηματική και παιδαγωγική γνώση χρειάζονται οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί; Πώς πρέπει να οργανώσουμε τη διδακτική προσέγγισή μας, ειδικά σε θεματικές περιοχές που ελάχιστα έχουν διδαχθεί στη σχολική τους ζωή, ώστε να μπορούν να διαχειριστούν διδακτικά το μαθηματικό περιεχόμενο;

Τα ευρήματά μας υποδεικνύουν ορισμένα στοιχεία τα οποία θα ήταν ωφέλιμα για το σχεδιασμό της προετοιμασίας των μελλοντικών εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία κανονικοτήτων με στόχο την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι οι πρέπει να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στο να αναγνωρίσουν, να μεταφράσουν, να επινοήσουν/κατασκευάσουν και, κυρίως, να περιγράψουν οι ίδιες οι φοιτήτριες κανονικότητες, σε κατάλληλο επίπεδο δυσκολίας. Επίσης, είναι σημαντικό να αξιολογήσουν σχετικές δραστηριότητες ως προς τι πραγματικά καλούνται να κάνουν τα παιδιά, ενδεχομένως και δραστηριότητες με τα χαρακτηριστικά αυτών που αναλύθηκαν σε αυτή την εργασία. Τέλος, φαίνεται ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αφιερωθεί χρόνος για την ανατροφοδότησή τους σε σχέση με το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων τους πριν και μετά τη διδασκαλία.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Ο αγγλικός όρος pattern αποδίδεται στα ελληνικά με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, εκ των οποίων οι όροι μοτίβο, πρότυπο και κανονικότητα έχουν χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (π.χ. ΔΕΠΣ-ΑΠΣ, Τζεκάκη (2010), Πιλοτικό ΑΠΣ). Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιούμε τον όρο *κανονικότητα* και τους όρους *επαναλαμβανόμενο* και *εξελισσόμενο μοτίβο*, οι οποίοι έχουν επικρατήσει στο χώρο όταν αναφερόμαστε στο συγκεκριμένο είδος κανονικότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Economopoulos, K. (1998). What comes next? The mathematics of pattern in kindergarten. *Teaching Children Mathematics, 5*(4), 230-233.

Κυλάφης, Π. (2009). *Ο ρόλος των patterns στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα*. Αδημοσίευτη μεταπτυχιακή διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών. Ανακτήθηκε από http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kylafis.panagiotis.pdf

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.

Mulligan, J. & Michelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309-330.

Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners’ performance on patterning. *International Journal for Mathematics in Education (Hellenic Mathematical Society), 5*. 108-131.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Προσχολική-Πρώτη Σχολική Ηλικία (Β’ μέρος). Ανακτήθηκε από http://ebooks.edu.gr/info/newps

Waters, J. L. (2004) A study of mathematical patterning in early childhood settings. In I. Putt, R. Faragher, & M. MacLean (Eds.), *Proceedings of the* 27th *Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 321-328). Sydney, Australia: MERGA.

Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΕ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μαριλένα Νικολαΐδου-Μουσουλίδου* & Νικόλας Μουσουλίδης**
*Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, **Πανεπιστήμιο Λευκωσίας
mousoulides.n@unic.ac.cy

Σκοπό της παρούσας εργασίας αποτέλεσε η διερεύνηση της αξιοποίησης της μοντελοποίησης στην επιμόρφωση εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης σε διερευνητικές μεθόδους διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στην εργασία παρουσιάζονται τα μοντέλα που ανέπτυξαν, ως μέρος ενός προγράμματος επιμόρφωσης, δεκατέσσερις εκπαιδευτικοί κατά την επίλυση ενός προβλήματος μοντελοποίησης της εξάντλησης των αποθεμάτων φυσικού αερίου. Σε αντίθεση με πιο παραδοσιακές προσεγγίσεις, οι δραστηριότητες μοντελοποίησης προσφέρουν ευκαιρίες στους εκπαιδευτικούς για διατύπωση και έλεγχο υποθέσεων, κατασκευή μοντέλων και επικοινωνία των λύσεων, στοιχεία απαραίτητα στη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω διερευνήσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Καθώς η σύγχρονη κοινωνία και οικονομία χαρακτηρίζεται από περίπλοκα, δυναμικά και ισχυρά συστήματα πληροφοριών που βασίζονται τόσο σε γνώσεις όσο και σε δεξιότητες, τα τελευταία χρόνια έχει προκύψει ανάγκη για επαναπροσδιορισμό της φύσης των σχολικών μαθηματικών, ενώ παρατηρείται παράλληλα μια στροφή στην αξιοποίηση πιο σύνθετων προβλημάτων και διερευνήσεων στα σχολικά μαθηματικά (English & Mousoulides, 2015: Mousoulides, 2013). Αυτή η στροφή είναι απαραίτητη, καθώς περισσότερο σήμερα παρά στο παρελθόν οι μαθητές-μελλοντικοί πολίτες χρειάζεται να αναπτύξουν μεγάλο εύρος δεξιοτήτων, όπως είναι η δημιουργικότητα, η πρωτοτυπία, η επίλυση προβλήματος και η μοντελοποίηση (Doerr & English, 2003).

Πέρα από τις αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών, αντίστοιχες διαφοροποιήσεις και βελτιώσεις πρέπει να υπάρξουν και στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, ώστε η διδασκαλία των μαθηματικών να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των νέων αναλυτικών προγραμμάτων και της ανάγκης σύνδεσης των σχολικών μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Mousoulides, Sriraman, & Lesh, 2008). Το πώς οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται τις δραστηριότητες μοντελοποίησης και η διαδικασία που ακολουθούν για να τις επιλύσουν, είναι μια από τις παραμέτρους που επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο θα διδαχθούν οι μαθηματικές έννοιες. Ο επαναπροσδιορισμός του ρόλου του εκπαιδευτικού αναγνωρίστηκε, από τους ίδιους τους συμμετέχοντες σε προγράμματα επιμόρφωσης, ως απαραίτητος, καθώς οι δραστηριότητες διερεύνησης προσφέρουν ευκαιρίες ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης μόνο όταν παρέχεται κατάλληλη υποστήριξη από τους εκπαιδευτικούς (Diezmann, Watters, & English, 2002: Mousoulides, et al., 2008: Mousoulides, 2013).

Η διερεύνηση των μοντέλων και των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος των εκπαιδευτικών κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός σύνθετου προβλήματος, σε ένα πρόγραμμα επιμόρφωσης, αποτελεί τον κύριο άξονα μελέτης στην παρούσα εργασία. Τα μοντέλα και οι διαδικασίες αυτές παρουσιάζονται, παράλληλα, με τις βασικές αρχές σχεδιασμού του προγράμματος επιμόρφωσης, στο πλαίσιο του οποίου υλοποιήθηκε η επιμόρφωση των συμμετεχόντων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μοντελοποίηση και Διερεύνηση

Η μοντελοποίηση μπορεί να εξυπηρετήσει τις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας και οικονομίας, καθώς προσφέρει ευκαιρίες σύνδεσης των προβληματικών καταστάσεων που εμφανίζονται στο φυσικό και κοινωνικό κόσμο με τις αφηρημένες μαθηματικές δομές (Doerr & English, 2003: Lesh & Doerr, 2003). Στην παρούσα εργασία ο όρος μοντελοποίηση ορίζεται ως η διαδικασία μετασχηματισμού ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματική μορφή (Mousoulides et al., 2008). Η διαδικασία μοντελοποίησης ξεκινά από την απλοποίηση της προβληματικής κατάστασης και καταλήγει στην κατασκευή μοντέλων, δηλαδή, εννοιολογικών συστημάτων που περιγράφουν πώς τα στοιχεία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (Kelly & Lesh, 2000). Η μελέτη των μοντέλων που κατασκευάζουν οι μαθητές δίνει πληροφορίες για την κατανόηση, τις προϋπάρχουσες ιδέες και τις νοητικές κατασκευές των μαθητών (Lesh & Doerr, 2003).

Τα σημαντικά πλεονεκτήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή δραστηριοτήτων μοντελοποίησης στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών έχουν γίνει αντικείμενο έρευνας και αναφοράς από διάφορους ερευνητές (Blum & Niss, 1991: English & Mousoulides, 2015). Παρόλα αυτά, η εφαρμογή δραστηριοτήτων μοντελοποίησης και διερεύνησης στα σχολικά μαθηματικά δεν είναι η αναμενόμενη, καθώς αρκετές φορές οι εκπαιδευτικοί δεν είναι σε θέση να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αξιοποιήσουν πλήρως τις δραστηριότητες μοντελοποίησης και διερεύνησης, περιορίζοντας τη χρήση τους σε εξάσκηση δεξιοτήτων δευτερευούσης σημασίας, όπως η πρόσθεση ή η αφαίρεση ή παρέχοντας πολύ προφανή δεδομένα και ζητούμενα, ώστε οι διαδικασίες συσχέτισής τους υπονοούνται άμεσα (English & Mousoulides, 2015).

Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών στη Μοντελοποίηση

Για να μπορέσει ένας εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές του να αναπτύξουν μαθηματικά μοντέλα και να αποκτήσουν εννοιολογική κατανόηση πρέπει να είναι ικανός να αντιλαμβάνεται τον τρόπο ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών και να ανταποκρίνεται με κατάλληλες παιδαγωγικές στρατηγικές (Doerr & English, 2003: Mousoulides, 2013). Κατά τη διδασκαλία δραστηριοτήτων μοντελοποίησης και διερεύνησης οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να ‘ακούνε’ και να ανταποκρίνονται στον τρόπο σκέψης των μαθητών τους, αλληλεπιδρώντας μαζί τους, χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις, αιτιολογώντας τις διάφορες υποθέσεις και επιλογές δεδομένων και επικοινωνώντας μαθηματικά τα αποτελέσματα (English & Mousoulides, 2015). Οι εκπαιδευτικοί είναι συμμέτοχοι στη διαδικασία αυτή, καθώς ενθαρρύνουν τους μαθητές να μοιράζονται τα μοντέλα τους με άλλους για να λάβουν ανατροφοδότηση και κάποια μορφή κριτικής (Doerr & English, 2003). Η κριτική δεν παίρνει τη μορφή της επιλογής μεταξύ ιδεών που ανταγωνίζονται, αλλά παρέχει την ευκαιρία στους μαθητές να ελέγξουν τα μοντέλα τους, να τα συγκρίνουν με άλλα και να τα αναθεωρήσουν με σκοπό τη βελτίωσή τους (Doerr & English, 2003).

Σε πολλές περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί δεν επιτυγχάνουν να εφαρμόσουν αποτελεσματικά τις δραστηριότητες μοντελοποίησης, με αποτέλεσμα να μην επωφελούνται στον καλύτερο βαθμό οι μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να είναι οι ίδιοι ικανοί λύτες προβλημάτων μοντελοποίησης, ενώ παράλληλα πρέπει να βρίσκονται σε θέση να προσδιορίσουν με ευκολία το βαθμό ορθότητας των λύσεων που προτείνονται από τους μαθητές, ακόμη και όταν αυτές διαφέρουν από την απάντηση που περιμένουν. Για αυτό, πρέπει να ληφθεί υπόψη το μαθηματικό υπόβαθρο του εκπαιδευτικού και να ενισχυθεί με γνώσεις σχετικά με τη διδασκαλία, όπου η εστίαση θα μετακινηθεί από τις πράξεις και διαδικασίες επίλυσης των μαθητών, στην ερμηνεία αυτών των διαδικασιών και σε προσπάθεια βελτίωσής τους (Lesh & Doerr, 2003: Mousoulides et al., 2008).

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πρόγραμμα Επιμόρφωσης

Στο πλαίσιο των ερευνητικών προγραμμάτων Mascil (www.mascil-project.eu) και MaT^{2}MSc (www.mat2msc-project.eu) αναπτύχθηκε μια σειρά από προγράμματα επιμόρφωσης για εκπαιδευτικούς. Στο πρόγραμμα επιμόρφωσης, αναφορά στο οποίο γίνεται στην παρούσα εργασία, οι συμμετέχοντες (εκπαιδευτικοί, γονείς, μαθητές και ερευνητές) συνεργάστηκαν με επίκεντρο την ταυτόχρονη (επαγγελματική) ανάπτυξη όλων των συμμετεχόντων, οι οποίοι εργάστηκαν ως συν-ερευνητές που δραστηριοποιούνται σε διαφορετικά επίπεδα της εκπαίδευσης.

Οι δεκατέσσερις εκπαιδευτικοί Δημοτικής Εκπαίδευσης συμμετείχαν σε μια σειρά από επιμορφωτικά εργαστήρια συνολικής διάρκειας 20 ωρών, σε μερικά από τα οποία είχαν τη δυνατότητα να συνεργαστούν με γονείς των μαθητών τους (βλ. Mousoulides, 2013). Κατά τη διάρκεια των εργαστηρίων οι εκπαιδευτικοί ενημερώθηκαν για τη φύση, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα από τη χρήση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, είχαν τη δυνατότητα να εργαστούν οι ίδιοι στην επίλυση δραστηριοτήτων μοντελοποίησης και σύνθετων διερευνήσεων (βλ. δραστηριότητα «*Αποθέματα Φυσικού Αερίου*»), να επιμορφωθούν σε θέματα γενικής διδακτικής και θεμάτων μοντελοποίησης (π.χ. τεχνικές διατύπωσης ερωτήσεων) και τέλος να σχεδιάσουν τις δικές τους δραστηριότητες μοντελοποίησης για εφαρμογή στην τάξη τους, σε συνεργασία με ερευνητές και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην επιμόρφωση.

Επίλυση Δραστηριότητας Μοντελοποίησης

Η δραστηριότητα που δόθηκε στους εκπαιδευτικούς αφορούσε στα αποθέματα φυσικού αερίου και στον υπολογισμό της πιθανής ημερομηνίας εξάντλησής τους. Συγκεκριμένα η δραστηριότητα παρείχε στους συμμετέχοντες τις ακόλουθες πληροφορίες:

“Το 2014 τα παγκόσμια αποθέματα φυσικού αερίου υπολογίστηκαν στα 187,1 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα. Η ετήσια κατανάλωση φυσικού αερίου την τελευταία 10ετία ανέρχεται κατά μέσο όρο στα 2,5 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα. Να υπολογίσετε πότε θα εξαντληθούν τα αποθέματα φυσικού αερίου.”

Η δραστηριότητα απαιτούσε από τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιήσουν διάφορες υποθέσεις στην ανάπτυξη των μοντέλων τους. Κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας, μας ενδιέφερε κυρίως: (α) η ερμηνεία των δεδομένων του προβλήματος από τους εκπαιδευτικούς, (β) οι τρόποι με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί αξιοποίησαν τις παρεχόμενες πληροφορίες και επιπρόσθετα δεδομένα που ανάκτησαν από το διαδίκτυο, και (γ) η φύση των μοντέλων που κατασκεύασαν οι εκπαιδευτικοί για την επίλυση του προβλήματος.

Οι εκπαιδευτικοί εργάστηκαν σε ομάδες των τριών και δύο ατόμων, ενώ συνολικά σχηματίστηκαν πέντε ομάδες εργασίας. Οι εκπαιδευτικοί είχαν στη διάθεσή τους εξήντα λεπτά για να αναπτύξουν τα μοντέλα τους, τα οποία στη συνέχεια παρουσίασαν στην ολομέλεια για συζήτηση και αναστοχασμό στην πορεία λύσης τους.

Συλλογή Δεδομένων και Ανάλυση

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν τα φύλλα εργασίας των εκπαιδευτικών και οι σημειώσεις που λήφθηκαν από τους ερευνητές κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Στα φύλλα εργασίας είναι καταγραμμένος ο τρόπος εργασίας και παρουσιάζεται ο τρόπος ανάπτυξης των μοντέλων. Επιπλέον, η δραστηριότητα βιντεοσκοπήθηκε και έγινε ανάλυση της απομαγνητοφώνησής της. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας ακολούθησε ποιοτικές μεθόδους και συγκεκριμένα ερμηνευτικές τεχνικές (Miles & Huberman, 1994). Οι ερμηνευτικές τεχνικές ανάλυσης των ποιοτικών δεδομένων από την εφαρμογή της δραστηριότητας χρησιμοποιήθηκαν για αναγνώριση και κωδικοποίηση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μοντελοποίησης των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στη δραστηριότητα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι εκπαιδευτικοί βρήκαν το πρόβλημα αρκετά ενδιαφέρον και προκλητικό, ενώ σημείωσαν παράλληλα τον προβληματισμό τους, καθώς δεν παρέχονταν όλες οι ‘απαραίτητες πληροφορίες’. Ενώ στο σύνολό τους οι εκπαιδευτικοί ανέπτυξαν μια σειρά από διαφορετικά μοντέλα, μερικοί αντιμετώπισαν δυσκολίες στην πλήρη κατανόηση και τη χρήση της έννοιας του μέσου όρου στην ανάπτυξη των αντίστοιχων μοντέλων για την επίλυση του προβλήματος. Από τις πέντε λύσεις που προτάθηκαν και οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια, δύο μπορούν να χαρακτηριστούν ως αποσπασματικές και αρκετά ανεπαρκείς, χωρίς να αξιοποιούν περισσότερες πληροφορίες από το διαδίκτυο ή άλλες πηγές (Μοντέλο Α), δύο ως αρκετά ολοκληρωμένες, οι οποίες αξιοποίησαν σε ικανοποιητικό βαθμό πληροφορίες από το διαδίκτυο (Μοντέλο Β), ενώ μια λύση παρουσίασε ένα πιο συνεκτικό και ολοκληρωμένο μοντέλο, το οποίο έλαβε υπόψη του τόσο τις παρεχόμενες πληροφορίες όσο και τις τάσεις διαφοροποίησης της κατανάλωσης και παραγωγής φυσικού αερίου (Μοντέλο Γ).

Μοντέλο Α

Δύο ομάδες εκπαιδευτικών ανέπτυξαν αρκετά παρόμοια και ταυτόχρονα ανεπαρκή μοντέλα. Τα μοντέλα και των δύο ομάδων παρουσίασαν αδυναμίες, κυρίως λόγω της ελλιπούς κατανόησης της έννοιας του μέσου όρου και της λανθασμένης χρήσης του στην επίλυση του προβλήματος με τα αποθέματα φυσικού αερίου. Κατά την εργασία τους οι δύο ομάδες αναφέρθηκαν στην αύξηση της κατανάλωσης του φυσικού αερίου τα επόμενα χρόνια, δηλώνοντας ότι λόγω μιας σειράς περιβαλλοντικών και οικονομικών θεμάτων θα μειωθεί η κατανάλωση πετρελαίου και κατά συνέπεια θα αυξηθεί η κατανάλωση φυσικού αερίου.

Η μια από τις δύο ομάδες χρησιμοποίησε ως μέση ετήσια κατανάλωση τα επόμενα χρόνια τα 3,0 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα, χωρίς να παρουσιάσει ένα συγκεκριμένο τρόπο υπολογισμού της νέας αυτής κατανάλωσης. Όταν ρωτήθηκαν από τους ερευνητές, τα άτομα της ομάδας ανέφεραν ότι η αύξηση αυτή (0,5 δισ. κυβικά μέτρα) είναι εύλογη. Για τον υπολογισμό της ημερομηνίας εξάντλησης των αποθεμάτων η ομάδα χρησιμοποίησε απλές γραμμικές συναρτήσεις, καταλήγοντας στο μοντέλο: *[(187,1 – 2,5) / 3]*.

Η δεύτερη ομάδα χρησιμοποιώντας παρόμοια προσέγγιση χρησιμοποίησε ως νέα ετήσια κατανάλωση τα 2,7 δισεκατομμύρια κυβικά μέτρα, δηλώνοντας την αύξηση στην κατανάλωση του φυσικού αερίου ως το αποτέλεσμα από τον περιορισμό της χρήσης του πετρελαίου και την αύξηση της χρήσης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Αξιοποιώντας, παράλληλα, σχετική πληροφόρηση, η ομάδα συμπεριέλαβε στο μοντέλο της την πιθανή ύπαρξη νέων αποθεμάτων (ΝΑ) φυσικού αερίου, καταλήγοντας στο μοντέλο: *{[(187,1 – 2,5) + ΝΑ] / 2,7}*.

Χαρακτηριστικό της εργασίας των δύο ομάδων ήταν η απουσία της κατανόησης του μέσου όρου, η οποία είχε ως αποτέλεσμα τον περιορισμό των προτεινόμενων λύσεων. Το συμπέρασμα ότι η κατανάλωση κατά το 2014 ανήλθε στα 2,5 δισ. κυβικά μέτρα ως απόρροια του στοιχείου που δόθηκε (μέση ετήσια κατανάλωση για τα τελευταία 10 χρόνια) οδήγησε σε αρκετά ελλιπή μοντέλα και απουσία αναζήτησης επιπλέον πληροφόρησης, η οποία θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στην βελτίωση των προτεινόμενων μοντέλων.

Μοντέλο Β

Σε άλλες δύο ομάδες η εργασία ξεκίνησε με την απαρίθμηση όλων των πιθανών παραγόντων που θα μπορούσαν να έχουν αντίκτυπο στην κατανάλωση φυσικού αερίου. Τα αποτελέσματα των δύο ομάδων ήταν αρκετά παρόμοια, ενώ οι ομάδες αναφέρθηκαν στους ακόλουθους παράγοντες: αύξηση της χρήσης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας, νέοι νόμοι και περιορισμοί στη χρήση του πετρελαίου και του ορυκτού άνθρακα, τιμή φυσικού αερίου και διαθεσιμότητά του, ανακάλυψη νέων κοιτασμάτων φυσικού αερίου (στη μια ομάδα έγινε αναφορά σε νέες τεχνολογίες εξόρυξης φυσικού αερίου, οι οποίες θα βοηθήσουν στην εκμετάλλευση υφιστάμενων, αλλά όχι προσβάσιμων, κοιτασμάτων.

Στη βάση των πιο πάνω παραγόντων οι δύο ομάδες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η κατανάλωση φυσικού αερίου θα αυξηθεί. Επιβεβαίωσαν το συμπέρασμά τους αναζητώντας σχετική πληροφόρηση από το διαδίκτυο, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η κατανάλωση το 2014 ανήλθε στα 3,1 και 3,2 δισ. κυβικά μέτρα αντίστοιχα για τις δύο ομάδες. Η μια ομάδα κατέληξε στο μοντέλο: *{[(187,1 - 2,5) + ΝΑ] / 3,5}*, επιλέγοντας λίγο αυθαίρετα ως νέα κατανάλωση το 3,5. Η δεύτερη ομάδα, συμπεριλαμβάνοντας τη δυνατότητα ανακάλυψης νέων κοιτασμάτων, κατέληξε στο ακόλουθο μοντέλο: *{[(187,1 - 2,5) + ΝΑ] / 3,52}*, αφού θεώρησαν (λαμβάνοντας υπόψη και στοιχεία από το διαδίκτυο που αναφέρονταν σε αύξηση της κατανάλωσης του φυσικού αερίου κατά 2,5% κατά έτος). Σύμφωνα με τα φύλλα εργασίας τους, "*η παρούσα κατανάλωση* *είναι 3,2 και με 2,5% ετήσια αύξηση της κατανάλωσης μπορούμε να υποθέσουμε ως νέα κατανάλωση το 3,52. Έχουμε υπολογίσει μια συνολική αύξηση 10% για τα επόμενα χρόνια"*.

Όπως φαίνεται στην εργασία και των δύο ομάδων, ενώ είχε ληφθεί υπόψη η ανακάλυψη νέων κοιτασμάτων φυσικού αερίου και η συμπερίληψη της αντίστοιχης παραμέτρου στο μοντέλο τους, εντούτοις δεν έγιναν προσπάθειες 'ποσοτικοποίησης' ή αριθμητικού καθορισμού της παραμέτρου αυτής. Το στοιχείο αυτό, όπως και μια προσπάθεια πιο ακριβούς καθορισμού του μοντέλου αποτέλεσαν συστατικά στοιχεία της εργασίας μιας άλλης ομάδας, η οποία παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Μοντέλο Γ

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν σε αυτή την ομάδα ξεκίνησαν, όπως και στις δύο προηγούμενες ομάδες, με μια απαρίθμηση όλων των πιθανών παραγόντων που θα μπορούσαν να έχουν αντίκτυπο στην κατανάλωση φυσικού αερίου. Κατά την προετοιμασία της λίστας τους χρησιμοποίησαν πηγές από το διαδίκτυο, λαμβάνοντας υπόψη τους πιο σύνθετες και λεπτομερείς πληροφορίες, τις οποίες αξιοποίησαν στη συνέχεια στον καθορισμό του δικού τους μοντέλου. Η ομάδα αυτή κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η κατανάλωση φυσικού αερίου θα αυξηθεί, σημειώνοντας όμως ότι: *"η αύξηση της κατανάλωσης φυσικού αερίου το 2014 ήταν μόνο 0,4%, ενώ μεταξύ 2004 και 2014 η μέση ετήσια αύξηση της κατανάλωσης ήταν 2,4%"*.

Η ομάδα αυτή προχώρησε, παράλληλα, σε ένα πιο αναλυτικό υπολογισμό των κοιτασμάτων φυσικού αερίου, σημειώνοντας ότι: *"ενώ την τελευταία δεκαετία η μέση ετήσια αύξηση των αποθεμάτων φυσικού αερίου ήταν 2,5%, η αύξηση αυτή για το 2014 ήταν μόνο 1,6%"*. Αξιοποιώντας τις πληροφορίες αυτές, οι εκπαιδευτικοί κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι *"δεν αναμένεται τα αποθέματα φυσικού αερίου να αυξηθούν δραματικά τα επόμενα χρόνια"*. Η ομάδα συνέχισε την αναζήτηση επιπλέον πληροφόρησης, η οποία θα μπορούσε να βοηθήσει στη βελτίωση του μοντέλου, και η οποία εστιάστηκε στη σχέση της κατανάλωσης φυσικού αερίου σε σχέση με άλλες πηγές ενέργειας. Αξιοποιώντας διάφορες πηγές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι: *"η κατανάλωση φυσικού αερίου και η χρήση ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές θα αυξηθεί [τα επόμενα χρόνια], ενώ παράλληλα θα υπάρξει μείωση της κατανάλωσης πετρελαίου"*.

Ως αποτέλεσμα, το προτεινόμενο μοντέλο περιελάμβανε τόσο την αύξηση στην κατανάλωση όσο και την αύξηση στην παραγωγή φυσικού αερίου. Το τελικό μοντέλο της ομάδας ήταν: $\{[187{,}1*(1+1{,}4\%)^n]/[3{,}2*(1+0{,}6\%)^n]\}$. Σύμφωνα με τα φύλλα εργασίας των εκπαιδευτικών της ομάδας αυτής, η πρόβλεψη ήταν ότι η *"παραγωγή φυσικού αερίου θα αυξάνεται σε ετήσια βάση κατά 1,4% (μειωμένη κατά 1,6% σε σχέση με την παραγωγή το 2014)"*, ενώ παράλληλα θα αυξάνεται κατά 0,6% σε ετήσια βάση η κατανάλωση φυσικού αερίου (αυξημένη κατά 1,4% σε σχέση με την κατανάλωσης το 2014). Η ομάδα σημείωσε, παράλληλα, ότι πέραν της μαθηματικής προσέγγισης της λύσης τους, εκτίμησε ότι τα αποθεματικά φυσικού αερίου δεν πρόκειται να εξαντληθούν ποτέ, καθώς: *''ακόμη και αν η κατανάλωση αυξηθεί περισσότερο από την παραγωγή, θα υπάρξει μεγαλύτερη στροφή στις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, ώστε η παραγωγή και κατανάλωση του φυσικού αερίου και πετρελαίου να εξισορροπηθούν''*.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκαν οι προτεινόμενες λύσεις μιας ομάδας εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης κατά την επίλυση ενός προβλήματος μοντελοποίησης, το οποίο αποτελούσε μέρος ενός προγράμματος επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών σε θέματα αξιοποίησης της μοντελοποίησης και διερεύνησης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι οι δραστηριότητες μοντελοποίησης μπορούν να είναι προκλητικές και ενδιαφέρουσες για τους εκπαιδευτικούς, ενώ τα πλαίσια που αυτές διαπραγματεύονται να βρίσκονται στα άμεσα ενδιαφέροντά τους, δημιουργώντας καταστάσεις εξάσκησης και επίλυσης προβληματικών καταστάσεων (Boaler, 2001). Συγκεκριμένα, φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί, σε διαφορετικό φυσικά βαθμό οι εκπαιδευτικοί της κάθε ομάδας, βίωναν το ρόλο που καλούνταν να επιτελέσουν (μηχανικοί ενέργειας), αναζητώντας τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειάζονταν για να επιλύσουν όσο πιο ρεαλιστικά μπορούσαν το πρόβλημα, ανακαλώντας παράλληλα τις μαθηματικές σχέσεις και διαδικασίες που απαιτούνταν για την επίλυση του προβλήματος.

Επιπλέον, το πλαίσιο της δραστηριότητας παρείχε τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να εργαστούν τόσο ως εμπειρογνώμονες όσο και ως μαθητές: να σκεφτούν, να εφαρμόσουν και να αξιολογήσουν πιθανούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Φυσικά, όπως έχει παρουσιαστεί και στα αποτελέσματα, δεν ήταν όλα τα προτεινόμενα μοντέλα των εκπαιδευτικών αποτελεσματικά και ολοκληρωμένα, στοιχείο που υπογραμμίζει τη δυσκολία αξιοποίησης δραστηριοτήτων μοντελοποίησης και διερεύνησης στην τάξη. Υπογραμμίζει όμως, παράλληλα, την ανάγκη για σχεδιασμό στοχευμένων προγραμμάτων επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στα εν λόγω θέματα.

Πέρα από την αυθεντικότητα του πλαισίου των δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, οι εκπαιδευτικοί είχαν τη δυνατότητα να προτείνουν πολλές και διαφορετικές λύσεις, στοιχείο απαραίτητο στην επίλυση προβλήματος. Αυτό επιτυγχάνεται από την πολλαπλότητα των σωστών λύσεων, αφού τα δεδομένα μπορούν να δώσουν διαφορετική αίσθηση σε διαφορετικά άτομα, ανάλογα με τις γνώσεις και τις εμπειρίες τους (Lesh & Doerr, 2003). Οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονταν ότι στα προβλήματα μοντελοποίησης δεν υπάρχει μια προκαθορισμένη τροχιά μάθησης και ούτε μόνο ένα κοινά αποδεχτό αποτέλεσμα. Αντιθέτως, επεκτείνουν τις τυποποιημένες διαδικασίες που χρησιμοποιούνται συνήθως και τις εμπλουτίζουν με εμπειρίες και γνώσεις από την πραγματική ζωή (English & Mousoulides, 2015).

Οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να αναπτύξουν μια σειρά στρατηγικών για να βοηθήσουν τους μαθητές τους να παρουσιάζουν και να επεξηγούν αναλυτικά την πορεία σκέψης τους, να μπορούν να αναθεωρούν και να βελτιώνουν τις λύσεις τους και να επεκτείνουν τις λύσεις τους σε άλλα προβλήματα (Diezmann et al., 2002). Ολοκληρώνοντας, ο εκπαιδευτικός πρέπει να παρακινεί τους μαθητές του να μην σκέφτονται απλά τα μοντέλα λύσης ενός προβλήματος, αλλά να αξιοποιήσουν τα μοντέλα ως παρακινητικά εργαλεία σκέψης (Lesh & Doerr, 2003)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η εργασία βασίζεται σε δράσεις που έχουν αναληφθεί στο πλαίσιο των ερευνητικών προγραμμάτων MASCIL – Mathematics and Science for Life (FP7/2012-2015, n° 320693) και MAT^{2}SMc (Comenius, LLP), τα οποία έχουν λάβει χρηματοδότηση από την Ε.Ε. Η εργασία αντανακλά μόνο τις απόψεις των συγγραφέων και η Ε.Ε. δεν είναι υπεύθυνη για την οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται στην παρούσα δημοσίευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blum W., & Niss M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues, *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Boaler, J. (2001). Mathematical Modelling and New Theories of Learning. *Teaching Mathematics and its Applications*, *20*,121-128.

Diezmann, C.M., Watters, J.J., & English, L.D. (2002). Teacher behaviours that influence young children’s reasoning. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for PME* (Vol 2, pp. 289-296). Norwich, UK: PME.

Doerr, H., & English, L. (2003). A Modeling perspective on students’ mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

English, L., & Mousoulides, N. (2015). Bringing STEM in a real world problem. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *20*(9), 532-539.

Kelly, A.E., & Lesh, R.A. (Eds.) (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd Ed.). London: Sage Publications.

Mousoulides, N., Sriraman, B., & Lesh, R. (2008). The Philosophy and Practicality of Modeling Involving Complex Systems. *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, *23*, 134-157.

Mousoulides, N. G. (2013). Facilitating parental engagement in school mathematics and science through inquiry-based learning: an examination of teachers’ and parents’ beliefs. *ZDM*, *45*(6), 863-874.

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ρίτα Παναούρα, Γεωργία Παναούρα-Μάκη
Πανεπιστήμιο Frederick, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου
pre.pm@frederick.ac.cy, maki-panaoura.g@cyearn.pi.ac.cy

Στη δημοτική εκπαίδευση της Κύπρου επιδιώκεται η εφαρμογή ενός μοντέλου διερευνητικής διδασκαλίας στα μαθηματικά. Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκαν οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών δημοτικής ως προς την αξιοποίηση της διερευνητικής διδασκαλίας στα μαθηματικά με τη συμπλήρωση ερωτηματολόγιου και εντοπίστηκαν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά τη διδακτική εφαρμογή της προσέγγισης, μέσω της παρατήρησης δύο διδασκαλιών και την ποιοτική ανάλυση αντίστοιχων συνεντεύξεων. Έχει διαφανεί ότι τα χρόνια εμπειρίας της εφαρμογής και η αντίστοιχη συσσωρευμένη εμπειρία επηρεάζουν τις πεποιθήσεις επάρκειας των εκπαιδευτικών, έχουν εντοπιστεί πρακτικές δυσκολίες διαχείρισης της τάξης και έχει υπογραμμιστεί η ανάγκη της πρακτικής επιμόρφωσης.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εδώ και κάποιες δεκαετίες το NCTM (1991) υπογραμμίζει την ανάγκη εφαρμογής της διερευνητικής προσέγγισης κατά τη διδασκαλία και μάθηση, χρησιμοποιώντας πρακτικές όπως η διερεύνηση υποθέσεων, η αιτιολόγηση και η συμπερασματολογία. Αν και έχουν αναπτυχθεί δεκάδες έρευνες τόσο στο χώρο των Φυσικών Επιστημών (π.χ. Liu, Lee & Lin, 2010) όσο και στο χώρο των Μαθηματικών (π.χ. Chapman, 2011), η αξιοποίηση της συγκεκριμένης προσέγγισης είναι ένα θέμα με ερωτήματα που χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης. Το επιστημονικό περιοδικό ZDM in Mathematics Education το 2013 αφιέρωσε έναν τόμο με εννέα κείμενα στην ανάπτυξη και εφαρμογή μοντέλων διερευνητικής διδασκαλίας και μάθησης. Πρόκληση για τους ερευνητές παραμένει η εισήγηση τρόπων υιοθέτησης του μοντέλου από τους σημερινούς εκπαιδευτικούς, οι οποίοι (α) έχουν διδαχτεί με ένα διαφορετικό μοντέλο που δεν τους έχει προσφέρει εμπειρίες διερεύνησης, (β) δεν κατανοούν πλήρως το προτεινόμενο διδακτικό μοντέλο και (γ) δεν μπορούν να χειριστούν διδακτικές καταστάσεις όπως η κάλυψη της ύλης και η οργάνωση του διδακτικού χρόνου.

Η διερεύνηση ως πρακτική μάθησης συνεπάγεται, σύμφωνα με τους Guedet και Trouche (2011), «τη διατύπωση ερωτήσεων, την εξερεύνηση, την εύρεση πληροφοριών και την ανακάλυψη γνώσης» (σ. 402). Συμβάλλει στην κατανόηση των μαθηματικών ως μία δημιουργική ανθρώπινη επινόηση

(Rasmussen & Kwon, 2007). Αν και η διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας και μάθησης δεν είναι μια καινούρια πρόταση, δεκάδες έρευνες και εκθέσεις συνεχίζουν να προβάλλουν την ανάγκη αξιοποίησής της, καθώς συμβάλλει στην επίτευξη κατανόησης τόσο στα μαθηματικά όσο και στις φυσικές επιστήμες (Marshall & Horton, 2011).

Η διερευνητική διδασκαλία και μάθηση στηρίζεται στις βασικές αρχές του κοινωνικού οικοδομισμού (Aulls & Shore, 2008). Ο μαθητής προσαρμόζει μια καινούρια κατάσταση ή εμπειρία στις προηγούμενες εμπειρίες και, στο πλαίσιο των διατομικών διαφορών, οικοδομεί τη νέα γνώση. Με βάση το μοντέλο των Marshall και Horton (2011) διακρίνονται κατά τη διαδικασία αυτή τέσσερα βασικά συστατικά: (α) *ενεργοποίηση*, όπου εκτίθενται οι προηγούμενες παρανοήσεις και η προηγούμενη γνώση, (β) *διερεύνηση*, όπου το άτομο διερευνά μία έννοια, (γ) *επεξήγηση*, όπου η προηγούμενη γνώση αξιοποιείται για την εννοιολογική κατανόηση της καινούριας κατάστασης και (δ) *επέκταση*, όπου η νέα γνώση εφαρμόζεται σε νέες καταστάσεις. Η έρευνα γύρω από τη διερευνητική μάθηση δείχνει ότι οι μαθητές με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά βελτιώνουν την ικανότητά τους στην επιχειρηματολογία (Tuan, Chin, Tsai & Cheng, 2005), ενώ οι μαθητές με ψηλές επιδόσεις βελτιώνουν την ικανότητά τους για ανάπτυξη διερευνητικών προσεγγίσεων χωρίς καθοδήγηση (Bell, Smetana & Binns, 2005). Την ίδια στιγμή η διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να ανιχνεύσει καλύτερα τον τρόπο σκέψης των παιδιών και να εντοπίσει τις παρανοήσεις και τα λάθη τους (Burns, 2004).

Βασική παράμετρος επιτυχίας της οποιασδήποτε προσπάθειας εισαγωγής μιας καινοτομίας στην εκπαίδευση είναι ο εκπαιδευτικός, οι αντιλήψεις και πεποιθήσεις του. Σύμφωνα με τους Soprano και Yang (2013), βασική προϋπόθεση αποδοχής και υιοθέτησης των αρχών της διερευνητικής προσέγγισης είναι οι βιωματικές εμπειρίες που έχουν οι εκπαιδευτικοί. Σημαντικό ρόλο σε αυτό το επίπεδο έχουν να διαδραματίσουν τα προγράμματα σπουδών που προετοιμάζουν εκπαιδευτικούς και τα προγράμματα επιμόρφωσης των εν υπηρεσία εκπαιδευτικών, τα οποία πρέπει να λαμβάνουν βιωματικό χαρακτήρα με ενεργό εμπλοκή των εκπαιδευτικών σε διερευνητικές δραστηριότητες (Malloy, 2003).

Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στις γνώσεις και τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας και τις πεποιθήσεις επάρκειάς τους για αντιμετώπιση των δυσκολιών κατά την εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης. Υπάρχει μεγάλη συσχέτιση των πεποιθήσεων του εκπαιδευτικού με τις πεποιθήσεις επάρκειάς του και με τις πρακτικές που ακολουθεί (Song & Looi, 2012). Οι εκπαιδευτικοί με ψηλές πεποιθήσεις επάρκειας δείχνουν μεγαλύτερη προθυμία στην υιοθέτηση καινοτόμων προσεγγίσεων (Gordon, Lim, McKinnon & Nkala, 1998) και μεγαλύτερη ευελιξία στην αντιμετώπιση απρόβλεπτων καταστάσεων, δυσκολιών και παρανοήσεων των μαθητών τους (Bingham-Brown, 2012). Η προσπάθειά μας επικεντρώνεται στην εισήγηση βελτιωμένων προσεγγίσεων προετοιμασίας και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών σε σχέση με την αξιοποίηση της διερευνητικής προσέγγισης στα μαθηματικά.

Στο κυπριακό εκπαιδευτικό σύστημα αναπτύχθηκε ένα νέο αναλυτικό πρόγραμμα για τα μαθηματικά (2010). Θα πρέπει να αναφερθεί ότι πρόκειται για ένα συγκεντρωτικό εκπαιδευτικό σύστημα, με ένα κοινό αναλυτικό πρόγραμμα που καθορίζεται από την πολιτεία, τα ίδια διδακτικά εγχειρίδια για όλους, και τη διοργάνωση επιμορφώσεων σε κεντρικό επίπεδο με στόχο την παρουσίαση των εκάστοτε επιδιώξεων. Σε αυτό το πλαίσιο η εφαρμογή του νέου αναλυτικού προγράμματος για τα μαθηματικά συνοδεύτηκε από σειρά επιμορφώσεων των εκπαιδευτικών δημοτικής και από την ανάπτυξη νέας σειράς σχολικών εγχειριδίων. Ήδη για το δημοτικό σχολείο έχει μέχρι στιγμής αναπτυχθεί η σειρά των εγχειριδίων των τεσσάρων πρώτων τάξεων. Βασικό στοιχείο του νέου διδακτικού μοντέλου που παρουσιάζεται στα διδακτικά εγχειρίδια και που γίνεται προσπάθεια να εφαρμοστεί στην τάξη είναι η ουσιαστική αξιοποίηση της διερευνητικής μεθόδου διδασκαλίας για την οικοδόμηση ή κατανόηση μίας μαθηματικής έννοιας.

Ο κύριος σκοπός της παρούσας έρευνας διακρίνεται σε δύο κύριες διαστάσεις, οι οποίες είναι: (α) η διερεύνηση των πεποιθήσεων και των πεποιθήσεων επάρκειας των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ως προς την αξιοποίηση της διερευνητικής προσέγγισης διδασκαλίας των μαθηματικών και (β) ο εντοπισμός των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί κατά την εφαρμογή της διερευνητικής προσέγγισης διδασκαλίας ή γενικότερα των πρακτικών διδασκαλίας που ακολουθούνται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση αναπτύχθηκε ποσοτική έρευνα με τη δόμηση και συμπλήρωση ενός ερωτηματολογίου για τη διερεύνηση των πεποιθήσεων και των πεποιθήσεων επάρκειας των εκπαιδευτικών. Στη δεύτερη φάση έγινε αρχικά παρατήρηση διδασκαλίας δύο εκπαιδευτικών, οι οποίοι κλήθηκαν να διδάξουν εφαρμόζοντας διερευνητική προσέγγιση και ακολούθως πραγματοποιήθηκε σε ατομικό επίπεδο μαζί τους ημιδομημένη συνέντευξη.

Το ερωτηματολόγιο που δομήθηκε αφορούσε στις επιδιώξεις του εκπαιδευτικού συστήματος της Κύπρου όπως σκιαγραφούνται στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Η τελική μορφή του αποτελείται από 39 δηλώσεις με κλίμακα Likert (1=διαφωνώ απόλυτα, 5=συμφωνώ απόλυτα) που μετρούσαν τις γνώσεις, τις αντιλήψεις τους για τις πρακτικές που προτείνονται, τις πεποιθήσεις και τις πεποιθήσεις επάρκειας για την αξιοποίηση και εφαρμογή της διερευνητικής προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι δηλώσεις ήταν της μορφής «Μπορώ να οργανώνω τη συνεργασία των παιδιών κατά τη διάρκεια μιας διερεύνησης» και «Χρειάζομαι περισσότερη επιμόρφωση, για να μπορώ να χειρίζομαι το χρόνο μίας διερεύνησης».

Το ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε από 123 εκπαιδευτικούς που δίδασκαν μαθηματικά κατά την περσινή σχολική χρονιά σε Α΄, Β΄ ή Γ΄ τάξη, εφόσον σε αυτές τις τάξεις είχε εφαρμοστεί το νέο διδακτικό μοντέλο που περιλάμβανε τη διερευνητική προσέγγιση. Από τους εκπαιδευτικούς 87 ήταν γυναίκες και 36 άντρες, ενώ 50 δίδασκαν σε Α΄ τάξη, 38 σε Β΄ τάξη και 35 σε Γ΄ τάξη. Οι περισσότεροι από αυτούς (55) είχαν λιγότερα από 5 χρόνια υπηρεσίας, 54 είχαν από 5-15 χρόνια υπηρεσίας, ενώ μόλις 14 είχαν πάνω από 16 χρόνια υπηρεσίας.

Η δεύτερη φάση της έρευνας αναπτύχθηκε δύο μήνες μετά την ολοκλήρωση της πρώτης φάσης, επιλέγοντας με τυχαίο τρόπο δύο εκπαιδευτικούς (μία εκπαιδευτικό με το ψευδώνυμο Μαρία και έναν εκπαιδευτικό με το ψευδώνυμο Νίκος). Τους ζητήθηκε να διδάξουν ένα σαραντάλεπτο μάθημα μαθηματικών το οποίο θα περιλάμβανε τη διερεύνηση μίας μαθηματικής έννοιας, η οποία παρουσιαζόταν στο σχολικό εγχειρίδιο. Με αυτό τον τρόπο δόθηκε η δυνατότητα μελέτης της διδακτικής συμπεριφοράς των εκπαιδευτικών στο ρεαλιστικό πλαίσιο της τάξης (Rowley, 2002). Η Μαρία δίδασκε σε Β΄ τάξη, χρησιμοποιώντας για δεύτερη φορά τα νέα εγχειρίδια, ενώ ο Νίκος, που δίδασκε σε Γ΄ τάξη, για πρώτη χρονιά ερχόταν σε επαφή με το νέο υλικό και την αξιοποίηση της διερευνητικής προσέγγισης. Το φύλλο παρατήρησης εστιάστηκε στις στρατηγικές που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός για την αντιμετώπιση απρόβλεπτων διδακτικών καταστάσεων κατά τη διερευνητική διδασκαλία: (α) τις οδηγίες που δίνει πριν και κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας διερεύνησης, (β) τις αντιδράσεις του κατά τη διατύπωση αποριών ή κατά τον εντοπισμό λαθών και παρανοήσεων και (γ) το χρόνο που αφιερώνεται για τη δραστηριότητα και για τη διαχείριση της τάξης. Η ημιδομημένη συνέντευξη που ακολουθούσε στόχευε στην ερμηνεία από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς των καταστάσεων που βίωσαν κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης διερευνητικής διδασκαλίας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά έγινε διερευνητική παραγοντική ανάλυση (KMO=0.873, $p<0.05$), για να ομαδοποιηθούν οι δηλώσεις του ερωτηματολογίου. Προέκυψαν πέντε παράγοντες, οι οποίοι εξηγούσαν το 63% της συνολικής διασποράς. Συγκεκριμένα, ο πρώτος παράγοντας αποτελείται από 7 δηλώσεις και εκφράζει τις πεποιθήσεις επάρκειας των εκπαιδευτικών όσον αφορά στο χειρισμό του χρόνου διδακτικών καταστάσεων κατά τη διερευνητική διδασκαλία. Ο δεύτερος παράγοντας εκφράζει τις πεποιθήσεις επάρκειας όσον αφορά στις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν (7 δηλώσεις), ο τρίτος παράγοντας τις πεποιθήσεις και απόψεις των εκπαιδευτικών για την αποτελεσματικότητα της επιμόρφωσης (6 δηλώσεις), ο τέταρτος τις γνώσεις τους για τη διερευνητική προσέγγιση μάθησης (6 δηλώσεις). Ο τελευταίος παράγοντας αποτελείται από 13 δηλώσεις που αφορούν στις πεποιθήσεις τους για την εφαρμογή του μοντέλου στην διδακτική πράξη. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις του συνόλου του δείγματος στους συγκεκριμένους παράγοντες.

Παράγοντας	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Π1: ΠΕ για τον χειρισμό του χρόνου	2,69	0,55
Π2: ΠΕ για τις διδακτικές πρακτικές	3,02	0,98
Π3: Π για την αποτελεσματικότητα της επιμόρφωσης	3,12	1,11
Π4: Γνώσεις για τη διερευνητική προσέγγιση	3,68	0,75
Π5: Π για την εφαρμογή του μοντέλου διδασκαλίας	3,07	0,43

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις των παραγόντων που αφορούν στις πεποιθήσεις και τις πεποιθήσεις επάρκειας των εκπαιδευτικών

Ο πιο χαμηλός μέσος όρος εντοπίστηκε στις πεποιθήσεις επάρκειας των εκπαιδευτικών για το χειρισμό του χρόνου που έχουν στη διάθεσή τους για την ανάπτυξη της διερευνητικής προσέγγισης διδασκαλίας και μάθησης, ενώ ιδιαίτερα ψηλός ήταν ο μέσος όρος που αφορούσε στις γνώσεις τους για το διερευνητικό μοντέλο διδασκαλίας των μαθηματικών. Φαίνεται ότι οι πεποιθήσεις τους για το θέμα είναι ψηλότερες από τις αντίστοιχες πεποιθήσεις επάρκειας, εφόσον η έλλειψη εμπειριών ενισχύει την ανασφάλειά τους και δυσκολεύει την επίδειξη ευέλικτης διδακτικής συμπεριφοράς για την αντιμετώπιση των πρακτικών δυσκολιών. Έγινε cluster analysis ως προς τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τη διερευνητική μάθηση με βάση τον τέταρτο παράγοντα και διάκριση του δείγματος σε τρεις ομάδες (34 εκπαιδευτικοί με ψηλό επίπεδο γνώσεων, 59 με μέτριο επίπεδο γνώσεων και 20 με χαμηλό επίπεδο γνώσεων). Η ανάλυση διασποράς (ANOVA) έδειξε ότι τα άτομα με ψηλό επίπεδο γνώσεων στο συγκεκριμένο θέμα είχαν ψηλές πεποιθήσεις και ψηλές πεποιθήσεις επάρκειας ($F=4.49$, $p=0.013$). Από την άλλη, τα άτομα με χαμηλό επίπεδο γνώσεων είχαν εκφράσει την ανάγκη επιμόρφωσης στο συγκεκριμένο θέμα, δεδομένο που καταδεικνύει αναγνώριση της αξίας της διερευνητικής μεθόδου και ψηλό βαθμό αυτοαναπαράστασης και συναίσθησης των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν. Σε ανάλυση διασποράς (ANOVA) ως προς την τάξη που διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί ($F=12.153$, $p<0.05$) φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί της Α΄ τάξης έχουν ψηλότερες πεποιθήσεις και πεποιθήσεις επάρκειας, εξαιτίας ίσως του γεγονότος ότι έχουν συσσωρεύσει μία εμπειρία τριών χρόνων γύρω από το συγκεκριμένο θέμα. Την πιο έντονη ανάγκη περαιτέρω επιμόρφωσης στο μοντέλο διερευνητικής διδασκαλίας εξέφρασαν οι εκπαιδευτικοί της Γ΄ τάξης, όπου η εισαγωγή έγινε την ίδια χρονιά με τη διεξαγωγή της έρευνας.

Για τη διερεύνηση της πρακτικής που ακολουθείται στο σχολικό περιβάλλον έγινε παρατήρηση δύο διδασκαλιών. Η Μαρία αξιοποίησε διερεύνηση που παρουσιάζεται στο βιβλίο της Β΄ τάξης σύμφωνα με την οποία ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει παιχνίδια (αυτοκίνητα με 4 τροχούς, τρένα με 10 τροχούς, ποδήλατα με 2 και με 3 τροχούς) χρησιμοποίησε 34 τροχούς. Τα παιδιά καλούνται να βρουν διαφορετικούς συνδυασμούς παιχνιδιών που κατασκευάστηκαν. Η Μαρία ξεκίνησε τη διδασκαλία δείχνοντας στα παιδιά ένα αυτοκίνητο και ένα ποδήλατο και ζητώντας τους να υπολογίσουν το άθροισμα των τροχών. Στη συνέχεια κάλεσε τα παιδιά να εργαστούν στη συγκεκριμένη διερεύνηση του βιβλίου. Αφιέρωσε 2.5 λεπτά στην εισαγωγική συζήτηση, 26 δευτερόλεπτα για να διατυπώσει δύο φορές την οδηγία, 4 λεπτά για να εργαστούν τα παιδιά και 3 λεπτά για να παρουσιάσουν τις λύσεις τους. Τα λάθη των παιδιών αφορούσαν κυρίως τη μη εύρεση σωστών γινομένων. Η εκπαιδευτικός δεν αφιέρωσε χρόνο για αυτοδιόρθωση, διατυπώνοντας, εκτός από μία περίπτωση, η ίδια τις σωστές απαντήσεις. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης διατύπωσε την άποψη ότι τα «παιδιά είναι πολύ μικρά για να εργαστούν αυτόνομα και ακόμα και στις πιο μεγάλες τάξεις δεν έχεις αρκετό χρόνο για να τους αφήσεις». Ειδικότερα πιστεύει ότι οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά δεν μπορούν να δουλέψουν χωρίς καθοδήγηση, όμως και οι μαθητές με ψηλή επίδοση «χάνονται στο σύνολο των 19 μαθητών που έχω». «Προτιμώ να επικεντρώνω εγώ την προσοχή τους και να θέτω ερωτήματα, για να μη γίνεται αναστάτωση και να χάνουμε πολύ χρόνο». Τέλος, όταν της ζητήθηκε να σχολιάσει τη συμπερίληψη των διερευνήσεων και εξερευνήσεων στα σχολικά εγχειρίδια, έδειξε ότι κυρίως ανακαλούσε και επαναλάμβανε πλεονεκτήματα της διερευνητικής προσέγγισης όπως αυτά αναγράφονται στο αναλυτικό πρόγραμμα ή όπως έχουν διατυπωθεί σε επιμορφώσεις, εκφράζοντας τα ως αναμενόμενες απαντήσεις από έναν εκπαιδευτικό.

Ο Νίκος ξεκίνησε τη διδασκαλία του με διερεύνηση που δεν παρουσιάζεται στο σχολικό εγχειρίδιο, όπου έδωσε πέντε διαφορετικά κέρματα σε ομάδες παιδιών και τα κάλεσε να επιλέξουν τι θα ήθελαν να αγοράσουν από αναρτημένο τιμοκατάλογο. Κατά τη διάρκεια της ομαδικής εργασίας έδωσε διευκρινήσεις σε δύο ομάδες που το είχαν ζητήσει, ενώ κατά την παρουσίαση των απαντήσεων ζητούσε αιτιολόγηση και έθετε συμπληρωματικά ερωτήματα στις ομάδες που δεν παρουσίαζαν. Στη συνέντευξη δήλωσε ότι ενεργούσε έτσι, για να «κρατά το ενδιαφέρον όλων των παιδιών». Ένα παιδί είχε δηλώσει ότι θα αγόραζε κάτι που στοίχιζε 15 σεντ και θα έδινε για το σκοπό αυτό 15 όμοια κέρματα του ενός σεντ. Δηλώνοντας ότι η απάντηση είναι σωστή, ο εκπαιδευτικός ζήτησε από τα υπόλοιπα παιδιά να κρίνουν κατά πόσο μία τέτοια συμπεριφορά θα λειτουργούσε σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Η συζήτηση με το Νίκο επικεντρώθηκε κυρίως στις δυσκολίες που αντιμετωπίζει στην τάξη κατά τη διάρκεια μίας διερεύνησης. Δήλωσε ότι δεν έχει ιδιαίτερες δυσκολίες, όμως «προϋπόθεση για να πετύχει είναι η απόκτηση εμπειριών στα λάθη και στις δυσκολίες των παιδιών, για να είσαι σε ετοιμότητα αντιμετώπισής τους». Τόνισε ότι η διδασκαλία αφορά το «μέσο μαθητή» και τα λάθη συνήθως είναι κοινά και αναμενόμενα. Θεωρεί ότι είναι δύσκολο να έχει τον έλεγχο της τάξης σε πιο ανοικτά ζητήματα, όπως στις «μαθηματικές εξερευνήσεις», εφόσον σε αυτού τους είδους τις δραστηριότητες «εύκολα μπορεί η συζήτηση να μην είναι επικεντρωμένη» και θεωρεί ότι ο ίδιος χρειάζεται περισσότερες εμπειρίες για να νιώσει μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση ως προς τις διδακτικές στρατηγικές που χρησιμοποιεί.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα έρευνα εξέτασε τις πεποιθήσεις και τις πεποιθήσεις επάρκειας των εν ενεργεία εκπαιδευτικών όσον αφορά στην αξιοποίηση και εφαρμογή του μοντέλου της διερευνητικής διδασκαλίας με βάση το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών. Διαφάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί που έλαβαν μέρος στην έρευνα έχουν θετικές πεποιθήσεις ως προς την αξία των αποτελεσμάτων της διερευνητικής διδασκαλίας και μάθησης, ενώ ψηλότερες πεποιθήσεις επάρκειας έχουν οι εκπαιδευτικοί με μεγαλύτερη εμπειρία ως προς την εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου. Οι εκπαιδευτικοί έχουν εκφράσει τη δυσκολία τους να χειριστούν τη διδακτέα ύλη και το διδακτικό χρόνο, δηλώνοντας ότι η αβεβαιότητα ως προς τη σταθερότητα των μαθησιακών αποτελεσμάτων οδηγεί στην υιοθέτηση πιο αλγοριθμικών και καθοδηγούμενων προσεγγίσεων για την κατάκτηση της γνώσης. Αν και το δείγμα της έρευνας είναι μικρό και μη αντιπροσωπευτικό, διαφαίνεται μία τάση θετικής βελτίωσης των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών με την αύξηση της διδακτικής εμπειρίας εφαρμογής και την περαιτέρω επιμόρφωσή τους. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν ικανοποιητικές γνώσεις στο συγκεκριμένο θέμα, οι οποίες χρειάζεται να συνδυαστούν με περαιτέρω θετικές εμπειρίες για ενίσχυση των πεποιθήσεών τους και κυρίως των πεποιθήσεων επάρκειάς τους. Προς την κατεύθυνση αυτή οι επιμορφωτικές δράσεις που οργανώνονται από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο χρειάζεται να μεταφερθούν και στο επίπεδο της σχολικής μονάδας, για να λαμβάνουν οι εκπαιδευτικοί ανατροφοδότηση ως προς τις στρατηγικές ευέλικτου και αποτελεσματικού χειρισμού των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν (Bingham-Brown, 2012) και να τους γίνονται εισηγήσεις για αποδοτικότερη πρακτική εφαρμογή.

Όταν οι εκπαιδευτικοί σχεδιάζουν τη διδασκαλία τους, χρειάζεται να έχουν κατά νου τις σύγχρονες επιδιώξεις και τους στόχους της μαθηματικής παιδείας, που δεν συνάδουν με τους στόχους και τις προσεγγίσεις που οι ίδιοι βίωσαν ως μαθητές (Ferguson, 2010). Ως εκ τούτου οι εμπειρίες του ως μαθητές χρειάζεται να καλύπτονται από εμπειρίες διερεύνησης ως φοιτητές και από επιτυχείς εμπειρίες διδακτικής πρακτικής. Η διαπίστωση αυτή υπογραμμίζει το ρόλο της δόμησης των προγραμμάτων σπουδών των παιδαγωγικών τμημάτων όσον αφορά στην αξιοποίηση της διερευνητικής μάθησης κυρίως στα μαθήματα περιεχομένου των μαθηματικών, ώστε να οικοδομηθούν θετικές εμπειρίες διερεύνησης των μαθηματικών εννοιών και δόμησής τους μέσα από διαδικασίες προβληματισμού, δοκιμής, αιτιολόγησης, αναστοχασμού, ευελιξίας στη χρήση στρατηγικών (Northcutt & Schwartz, 2013). Μέσα από αυτή την προσέγγιση θα δομηθούν οι «αυθεντικές εμπειρίες» του Bandura (1997) για τη διαμόρφωση των αντίστοιχων πεποιθήσεων επάρκειας.

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μία πρώτη σκιαγράφηση του βαθμού κατανόησης και υιοθέτησης του μοντέλου της διερευνητικής διδασκαλίας των μαθηματικών σε ένα συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σύστημα. Μία μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να συνδέσει σε μεγαλύτερο βαθμό τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών με την πραγματική τους συμπεριφορά κατά τη διδακτική πράξη και να επικεντρωθεί στη διερεύνηση των πρακτικών που ακολουθούνται για αυτοδιαχείριση της διδακτικής συμπεριφοράς του εκπαιδευτικού για αντιμετώπιση των δυσκολιών που πηγάζουν από την υιοθέτηση καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων διερεύνησης και εξερεύνησης μαθηματικών εννοιών.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Aulls, M.W. & Shore, B.M. (2008). *Inquiry in Education, Volume I:The Conceptual Foundations for Research as a Curricular Imperative*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: Freeman.

Bell, R. L., Smetana, L., & Binns, I. (2005). Simplifying inquiry instruction: Assessing the inquiry level of classroom activities. *The Science Teacher, 72*(7), 30-33.

Bingham–Brown, A. (2012). Non-traditional preservice teachers and their mathematics efficacy beliefs. *School Science and Mathematics, 112 (3),* 190-198.

Burns, M. (2004). Writing in math. *Educational Leadership*, *62*, 30-33.

Chapman, O. (2011). Elementary school teachers’ growth in inquiry – based teaching of mathematics. *ZDM Mathematics Education, 43,* 951-963

Ferguson, R. F. (2010). *Student perceptions of teaching effectiveness. Discussion brief.* Cambridge, MA: National Center for Teacher Effectiveness and the Achievement Gap Initiative.

Gordon, C., Lim, L., Mckinnon, D., & Nkala, F. (1998). Learning approach, control orientation and self-efficacy of beginning teacher education students. *Asia Pacific Journal of Teacher & Development, 1* (1), 53-63.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 399–411.

Liu, O., Lee, H. & Linn, M. (2010). Multifaceted Assessment of Inquiry based science learning. *Educational Assessment, 15,* 69-86.

Malloy, C. E. (2003). The New Math. *Principal Leadership (Middle School Ed.)*, *3*(7), 48-53.

Marshall, J. & Horton, R. (2011). The relationship of teacher-facilitated inquiry – based instruction to student higher order thinking. *School Science and Mathematics, 111 (3),* 93-101.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA.

Northcutt, C. & Schwartz, R. (2013). *Pre-service teachers’ understanding and perceptions of scientific inquiry and self-efficacy in a research internship.* Paper presented at the international conference of the National Association for Research in Science Teaching, Rio Grande, Puerto Rico.

Rasmussen, C., & Kwon, O. (2007). An inquiry oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 189–194.

Rowley, J. (2002). Using case studies in research. *Management Research News*, *25* (1), 16-27.

Song, Y. & Looi, C. (2012). Linking teacher beliefs, practices and student inquiry based learning in a CSCL environment: A tale of two teachers. *International Journal of Computer Supported Collaborative Learning*, *7*(1), 129-159.

Soprano, K. & Yang, L. (2013). Inquiring into my science teaching through action research: a case study on one pre-service teacher's inquiry based science teaching and self-efficacy. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*, 1351-1368.

Tuan, H., Chin, C., Tsai, C. & Cheng, S. (2005). Investigating the effectiveness of inquiry instruction on the motivation of different learning styles students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 3*, 541-566.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ

Ιωάννης Παπαδόπουλος
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.
ypapadop@eled.auth.gr

Στην εργασία αυτή φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης αναλύουν και συγκρίνουν δύο προβλήματα με ανάλογη μαθηματική δομή που προφανώς δεν αποτελούν προβλήματα που συναντώνται στην πραγματικότητα αλλά εμπλέκουν χρήσιμες μαθηματικές ιδέες και δεξιότητες. Εντοπίζονται και ταξινομούνται τα κριτήρια με τα οποία οι φοιτητές αξιολογούν και συγκρίνουν τα προβλήματα όπως επίσης και τα κριτήρια με τα οποία προσδιορίζουν το κατά πόσο η κατάσταση που περιγράφει ένα πρόβλημα μπορεί να απαντηθεί στην πραγματική ζωή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι απαραίτητη στους εκπαιδευτικούς η απαιτούμενη γνώση προκειμένου (α) να επιλέξουν και να αναπτύξουν δραστηριότητες με στόχο να ενισχύσουν την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά, και (β) να βελτιστοποιήσουν τα μαθησιακά αποτελέσματα από τη χρήση τέτοιων δραστηριοτήτων (Chapman, 2013). Σύμφωνα πάντα με την Chapman (2013), αυτή η γνώση μεταξύ άλλων περιλαμβάνει: (α) την κατανόηση της φύσης μιας αξιόλογης δραστηριότητας (εμπλέκει σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο; Μπορεί να λυθεί με πολλούς τρόπους; Με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων; Συνδέει διάφορες μαθηματικές ιδέες;), (β) την ικανότητα προσδιορισμού, επιλογής και δημιουργίας δραστηριοτήτων με πλούσιο μαθηματικό και παιδαγωγικό περιεχόμενο, και (γ) τη γνώση του επιπέδου γνωστικών απαιτήσεων των δραστηριοτήτων. Στα πλαίσια της εκπαίδευσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών σε σχέση με τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους είναι σημαντικό οι φοιτητές να εμπλέκονται σε μια διαδικασία απόκτησης μιας τέτοιας γνώσης σχετικά με τη χρήση προβλημάτων στη διδακτική πρακτική. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται ένα μέρος μιας μεγαλύτερης έρευνας η οποία μελετά δεξιότητες επίλυσης προβλήματος αλλά και δεξιότητες στην αξιολόγηση προβλημάτων. Πιο ειδικά, το ερευνητικό ερώτημα που απασχολεί τη συγκεκριμένη εργασία αναφέρεται σε κάποια από τα κριτήρια με τα οποία αξιολογούν και συγκρίνουν προβλήματα οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η επιλογή μαθηματικών δραστηριοτήτων από τον εκπαιδευτικό αποτελεί ένα κρίσιμο πρώτο βήμα στην προσπάθειά του να παρέχει στους μαθητές του την ευκαιρία να εμπλακούν σε μια πιο προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Το National Council of Teachers of Mathematics (1991) υποδεικνύει στους εκπαιδευτικούς την επιλογή και χρήση «αξιόλογων μαθηματικών προβλημάτων». Οι Sullivan και Mousley (2001) ισχυρίζονται ότι (α) η επιλογή προβλημάτων για χρήση στην τάξη αποτελεί στοιχείο-κλειδί στο ρόλο του δασκάλου, (β) η διαδικασία λήψης απόφασης στην οποία υπεισέρχονται οι δάσκαλοι προκειμένου να κάνουν την επιλογή αυτή είναι πολύπλοκη, και (γ) η επαγγελματική ανάπτυξη των δασκάλων πρέπει να δώσει έμφαση στο να τους βοηθήσει να κατανοήσουν αυτήν την πολυπλοκότητα.

Σχετικά πρόσφατες μελέτες (Osana, Lacroix, Tucker & Desposiers, 2006; Arbaugh & Brown, 2005) προσπαθούν να ρίξουν φως στο πώς αντιλαμβάνονται οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί γενικά το θέμα της αξιολόγησης και ανάλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι Osana et.al. (2006) ερεύνησαν την ικανότητα αξιολόγησης προβλημάτων από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς στη βάση των γνωστικών απαιτήσεων που τα προβλήματα αυτά προβάλλουν στους μαθητές. Ταυτόχρονα μελέτησαν τους παράγοντες που επιδρούν στον τρόπο που κάνουν οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί την αξιολόγηση αυτή. Τα ευρήματά τους δείχνουν ότι σε γενικές γραμμές υπήρξε δυσκολία στο να ταξινομηθούν με ακρίβεια προβλήματα με αυξημένη γνωστική πολυπλοκότητα και ότι σημαντικό ρόλο στην ταξινόμηση έπαιξε το επιφανειακό χαρακτηριστικό της έκτασης του κειμένου. Υπήρχε μια τάση, να χαρακτηρίζουν προβλήματα με μικρή έκταση κειμένου ως προβλήματα με λιγότερες γνωστικές απαιτήσεις. Οι Arbaugh και Brown (2005) ενέπλεξαν μια ομάδα καθηγητών μαθηματικών στη χρήση ενός συνόλου κριτηρίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια κριτική εξέταση μαθηματικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδωσαν ενδείξεις ότι η έμφαση σε αυτήν την κριτική εξέταση επηρέασε τον τρόπο σκέψης τους σχετικά με τη φύση και την επιλογή των μαθηματικών προβλημάτων. Υπήρξε μια εξέλιξη στον τρόπο προσέγγισης των προβλημάτων και αλλαγή στο μοτίβο επιλογής τους για χρήση στην τάξη. Σε ανάλογο ερευνητικό πρόγραμμα που συντόνισε η Boston (2013) μελετήθηκε η επιλογή και χρήση από καθηγητές μαθηματικών, γνωστικά απαιτητικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί ανέπτυξαν νέες απόψεις σε σχέση με την επίδραση τέτοιων προβλημάτων στη μάθηση. Ταυτόχρονα όμως καθώς ανέλυαν και αξιολογούσαν τα προβλήματα φάνηκε ότι παρέβλεπαν τις υποκείμενες μαθηματικές έννοιες ή συνδέσεις που εμπεριείχαν τα προβλήματα αυτά και επέμεναν στο να θεωρούν ότι η παρουσία ή μη μιας συγκεκριμένης πορείας βημάτων είναι αυτή που προσδιορίζει το επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων του προβλήματος. Επίσης κάποιοι έδιναν έμφαση σε χαρακτηριστικά του προβλήματος που φαινόταν να απουσίαζαν, όπως το να είναι το πρόβλημα τοποθετημένο σε ένα πλαίσιο της καθημερινής ζωής. Αυτό το δεύτερο αποτελεί ερώτημα προς ανάλυση στα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα με φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος οι οποίοι τα αναλύουν τόσο σε επίπεδο επίλυσης όσο και σε επίπεδο ανάλυσης-σύγκρισης των προβλημάτων αυτών.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν 43 τριτοετείς φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης στα πλαίσια μαθήματος σχετικού με την επίλυση προβλήματος. Στους φοιτητές δόθηκαν τρία φύλλα εργασίας. Τα δύο πρώτα φύλλα περιείχαν από ένα πρόβλημα το καθένα (το πρόβλημα του ρεζερβουάρ και το πρόβλημα του σαλιγκαριού, βλ. Εικ. 1) και μια σειρά από ερωτήσεις (ίδιες για κάθε πρόβλημα) που σχετίζονταν με το πώς σκέφτονται να λύσουν το πρόβλημα, ποιες πράξεις θα εκτελέσουν, τεκμηρίωση των πράξεων.

1. Το πρόβλημα του ρεζερβουάρ

Ένα πρωινό, ένας νυσταγμένο άντρας έρχεται στο βενζινάδικο. Το ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου του, που χωρά **50** λίτρα βενζίνης, είναι σχεδόν άδειο. Έβαλε **10 λίτρα** βενζίνη, όμως, κατά τη διάρκεια της ημέρας κατανάλωσε τα **5 λίτρα**. Το επόμενο πρωί, και πάλι έβαλε 10 λίτρα και κατά τη διάρκεια της ημέρας κατανάλωσε 5 λίτρα. Αν η διαδικασία αυτή συνεχίζεται και στις επόμενες μέρες, μετά **από πόσα πρωινά** το ρεζερβουάρ του αυτοκινήτου θα είναι γεμάτο;

2. Το πρόβλημα του σαλιγκαριού

Ένα πρωινό, ένα νυσταγμένο σαλιγκάρι έρχεται στη βάση ενός κατακόρυφου τοίχου και αποφασίζει να αναρριχηθεί στην κορυφή του. Το ύψος του τοίχου είναι 6 μέτρα. Το σαλιγκάρι ανεβαίνει **μισό** μέτρο κατά τη διάρκεια της ημέρας και γλιστρά προς τα κάτω **ένα τρίτο του** μέτρου κατά τη διάρκεια της νύκτας. Αν αυτού του είδους η μετακίνηση του σαλιγκαριού συνεχίζεται και τις επόμενες μέρες και νύχτες, μετά **από πόσες** μέρες το σαλιγκάρι θα φτάσει στην κορυφή του τοίχου;

Εικόνα 1. Τα προβλήματα που δόθηκαν στους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς

Οι φοιτητές έπρεπε στη συνέχεια να λύσουν το πρόβλημα με βάση τις πράξεις αυτές και αν αυτό δεν τους ήταν αρκετό καλούνταν να κάνουν χρήση διαγραμμάτων, σχεδίων ή πινάκων. Τέλος ζητούνταν τεκμηρίωση για την ορθότητα της απάντησης, περιγραφή δυσκολιών που αντιμετώπισαν, προτεινόμενες αλλαγές στην εκφώνηση ώστε να λύνεται ευκολότερα. Επειδή κάποιοι επέλεγαν να μην απαντήσουν σε όλα τα ερωτήματα για το λόγο αυτό στους πίνακες που ακολουθούν ο συνολικός αριθμός απαντήσεων στα επιμέρους ερωτήματα ποικίλλει (και δεν είναι πάντα 43)

Στην εργασία αυτή όμως έμφαση δίνεται στο τρίτο φύλλο εργασίας που ζητούσε μια ανάλυση των προβλημάτων και σύγκριση μεταξύ τους. Το φύλλο περιείχε τέσσερις ερωτήσεις (Εικ. 2).

3. Συγκρίνοντας τα δυο προβλήματα

Διάβασε ξανά τα δυο προβλήματα και απάντησε στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

3.1. Θα συμφωνούσες με κάποιον που θα υποστήριζε ότι τα δυο αυτά προβλήματα είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους;

( ) Ναι. ( ) Όχι. ( ) Δεν μπορώ να αποφασίσω. Δώσε όσο περισσότερα επιχειρήματα μπορείς για να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

3.2. Θα συμφωνούσες με κάποιον που θα υποστήριζε ότι τα δυο αυτά προβλήματα είναι πολύ όμοια μεταξύ τους;
( ) **Ναι.** ( ) **Όχι.** ( ) **Δεν μπορώ να αποφασίσω.** Δώσε όσο περισσότερα επιχειρήματα μπορείς για να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

3.3. Θα συμφωνούσες με κάποιον που θα υποστήριζε ότι η κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα του ρεζερβουάρ δεν μπορεί ποτέ να συμβεί στην πραγματική ζωή;
( ) **Ναι.** ( ) **Όχι.** ( ) **Δεν μπορώ να αποφασίσω.** Δώσε όσο περισσότερα επιχειρήματα μπορείς για να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

3.4. Θα συμφωνούσες με κάποιον που θα υποστήριζε ότι η κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα του σαλιγκαριού δεν μπορεί ποτέ να συμβεί στην πραγματική ζωή;
( ) **Ναι.** ( ) **Όχι.** ( ) **Δεν μπορώ να αποφασίσω.** Δώσε όσο περισσότερα επιχειρήματα μπορείς για να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

Εικόνα 2. Ερωτήσεις ανάλυσης-σύγκρισης

Και τα δύο προβλήματα θεωρούνται μη-τυποποιημένα προβλήματα με την έννοια ότι ο λύτης δεν μπορεί απλά να ανακαλέσει αλγοριθμικές διαδικασίες στις οποίες έχει εκπαιδευτεί προκειμένου να τα λύσει. Αυτό που θα αποτελούσε ικανό εργαλείο στα χέρια του λύτη θα ήταν δύο τύποι διαφορετικών αναπαραστάσεων: ένα σχέδιο (εξεικονιστική όψη του προβλήματος) και ένας πίνακας (περιγραφική όψη). Για το πρώτο πρόβλημα η δυσκολία δεν προκύπτει από την ανάγκη για προσθέσεις και αφαιρέσεις οπότε και μπορεί να προκύψει κάποιο λάθος, αλλά από την ανάγκη ορθής κατανόησης της όλης κατάστασης που περιγράφει η εκφώνηση του προβλήματος. Όμως, ακόμη και αν τα διαδοχικά ανεβοκατεβάσματα του σαλιγκαριού κατανοηθούν σωστά, και πάλι, μια στρατηγικής άμεσης ερμηνείας όπως 1/2-1/3=1/6 του μέτρου και άρα 6:1/6=36, οδηγεί σε λανθασμένη λύση, αφού το μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη ότι την τελευταία ημέρα το σαλιγκάρι φτάνει στο χείλος του πηγαδιού και έτσι δεν γλιστρά προς τα πίσω. Εξετάζοντας το συγκεκριμένο πρόβλημα, φαίνεται ότι ένα κατάλληλο σχεδιάγραμμα θα μπορούσε ως μια επιλεγμένη στρατηγική να απεικονίσει τις διαδοχικές μετακινήσεις του σαλιγκαριού και να δώσει έμφαση στο γεγονός της τελευταίας ημέρας. Πράγματι, παρόλο που η πληροφορία αυτή περιλαμβάνεται στην εκφώνηση είναι πιο πιθανό ο λύτης να την ανακαλύψει σε ένα σχέδιο. Μια ακόμη πιο συστηματική προσέγγιση του λύτη πάνω στο πρόβλημα θα μπορούσε να περιλαμβάνει τη στρατηγική της οργάνωσης της σχετικής πληροφορίας σε έναν πίνακα (έναν συνδυασμό των ημερών, και των διαστημάτων πάνω και κάτω κάθε μέρα). Αυτή είναι μια πληροφορία που ο μελλοντικός εκπαιδευτικός θα έπρεπε ίσως να λάβει υπόψη του στη σύγκριση και ανάλυση των δύο προβλημάτων. Εδώ ακριβώς επικεντρώνεται και η μικρής κλίμακάς αυτή έρευνα. Στο να αποτυπώσει και να οργανώσει τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Τέλος, ένα θέμα που πρέπει να σχολιαστεί είναι το γιατί περιλαμβάνονται δύο ερωτήματα (3.1 και 3.2) που φαίνονται να είναι ίδια ή γιατί δεν ενώνονται σε ένα; Η επιλογή αυτή έγινε για να εντοπιστεί το κυρίαρχο στοιχείο στο οποίο επικεντρώνεται ο εκπαιδευτικός κατά τη σύγκριση. Μπορεί να βασιστεί στη μαθηματική δομή που τα καθιστά «όμοια» ή σε περιφερειακά στοιχεία όπως η θεματολογία ή το είδος των εμπλεκόμενων αριθμών που τα καθιστά «διαφορετικά». Η ταυτόχρονη συμπερίληψη και των δύο σε μια ερώτηση ίσως δεν αποτυπώσει το γεγονός ταυτόχρονης θετικής ανταπόκρισης κάποιου εκπαιδευτικού και στα δύο ερωτήματα.

Τα απαντημένα φύλλα εργασίας αποτέλεσαν τα δεδομένα τα οποία στη συνέχεια αποτέλεσαν αντικείμενο θεματικής ανάλυσης (Braun & Clarke, 2006).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σύγκριση των προβλημάτων (ερωτήσεις 3.1 και 3.2)

Σε σχέση με τα ερωτήματα 3.1 και 3.2 οι δυνατές επιλογές για το καθένα ήταν τρεις: Ναι(Ν) – Όχι(Ο) – Δεν μπορώ να αποφασίσω(Δ). Αυτό σημαίνει ότι οι δυνατοί συνδυασμοί απαντήσεων και για τα δυο ερωτήματα ήταν συνολικά εννιά. Έτσι από τη μια έχει ενδιαφέρον ίσως να παρουσιαστεί το πώς κατανέμονται οι συγκεντρωμένες απαντήσεις κατά μήκος των 9 διαφορετικών συνδυασμών (Πίνακας 1) αλλά κυρίως να εντοπιστούν τα κριτήρια με βάση τα οποία επιλέγονται οι απαντήσεις.

Ν-Ν	Ν-Ο	Ο-Ν	Ο-Ο	Δ-Δ	Ν-Δ	Ο-Δ
1/43	1/43	29/43	6/43	2/43	2/43	1/43

Πίνακας1. Κατανομή των απαντήσεων με βάση τους δυνατούς συνδυασμούς

Όλα τα επιμέρους κριτήρια που ορίστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν από τους φοιτητές, αφού συγκεντρώθηκαν, ταξινομήθηκαν με βάση τέσσερις άξονες: (α) αν σχετίζονται με τη διαδικασία της επίλυσης, (β) αν αναφέρονται στις εμπλεκόμενες έννοιες, (γ) αν σχετίζονται με το είδος των αριθμών που εμπλέκονται, και (δ) αν λαμβάνουν υπόψη τους το κείμενο της εκφώνησης (Πίνακας 2).

Στην κατηγορία «Επίλυση» το κριτήριο ήταν το ποιες πράξεις θα έπρεπε να γίνουν για να λυθεί το πρόβλημα (πρόσθεση και αφαίρεση) όπως επίσης και η σειρά με την οποία πρέπει να γίνουν για να επιτευχθεί η λύση (πρώτα αφαίρεση και μετά πρόσθεση). Επίσης, το αν η μαθηματική δομή που κρύβεται πίσω από το κείμενο είναι η ίδια, γεγονός που παραπέμπει στην ίδια στρατηγική επίλυσης (πχ βρίσκω κάθε μέρα μετά το γλίστρημα το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σαλιγκάρι και προσθέτω το νέο ύψος στο οποίο θα φτάσει, ή βρίσκω την ποσότητα βενζίνης που μου έχει απομείνει στο τέλος της ημέρας και προσθέτω την ποσότητα που βάζω το πρωί). Το αν παρουσιάζουν τον ίδιο ή διαφορετικό βαθμό δυσκολίας (γενικά το δεύτερο χαρακτηρίστηκε ως δυσκολότερο πρόβλημα). Τέλος, ένα κριτήριο ήταν το αν απαιτούνταν ή όχι η εύρεση κάποιου μοτίβου προκειμένου να διευκολυνθεί η επίλυση (και στα δυο το να αντιληφθεί ο λύτης ότι στη διαδικασία εξέλιξης της προβληματικής κατάστασης υπάρχει ένα μοτίβο, τον διευκολύνει στο να αντιμετωπίσει συνολικά το πρόβλημα αντί να παρακολουθεί λεπτομερώς την εξέλιξη κάθε ημέρα).

Επίλυση	**Έννοιες**	**Αριθμοί**	**Κείμενο**
• Απαιτούμενες πράξεις • Σειρά πράξεων • Ίδια λογική • Βαθμός δυσκολίας • Εύρεση μοτίβου	• Όγκος/απόσταση • Ενότητα βιβλίου	• Είδος εμπλεκόμενων αριθμών • Πόσο εύκολοι είναι για υπολογισμούς	• Ίδιο/διαφορετικό σενάριο • Καταστάσεις καθημερινότητας • Κοινά γλωσσικά στοιχεία στην εκφώνηση • Είδος οντοτήτων που παίρνουν μέρος

Πίνακας 2. Ταξινόμηση κριτηρίων σύγκρισης των προβλημάτων

Στην κατηγορία «Έννοιες» αυτό που λαμβάνεται υπόψη είναι οι μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται στα προβλήματα (το ένα ασχολείται με όγκο και το άλλο με απόσταση (μήκος). Ταυτόχρονα ένα πρόσθετο κριτήριο στη σύγκριση ήταν το κατά πόσο το περιεχόμενο των προβλημάτων σχετίζεται με το αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία των μαθηματικών ή εναλλακτικά το κατά πόσο σχετίζεται με συγκεκριμένες ενότητες στο σχολικό βιβλίο.

Στην κατηγορία «Αριθμοί» τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν δύο: α) το είδος των εμπλεκόμενων αριθμών- στο πρώτο πρόβλημα οι αριθμοί που απαιτούνται για τους διάφορους υπολογισμούς είναι φυσικοί ενώ στο δεύτερο κλάσματα, και β) το κατά πόσο οι πράξεις που έκαναν χρήση των αριθμών αυτών ήταν εύκολες ή δύσκολες. Γενικά, το δεύτερο πρόβλημα χαρακτηρίστηκε ως δυσκολότερο επειδή ενέπλεκε πράξεις μεταξύ κλασμάτων.

Τέλος, στην κατηγορία «Κείμενο» περιλήφθηκαν μια σειρά από κριτήρια που έδιναν έμφαση κυρίως στην εκφώνηση των προβλημάτων. Έτσι, κάποιοι έδωσαν έμφαση στο ότι ένα διαφορετικό σενάριο εκφράζει την ίδια μαθηματική κατάσταση. Άλλοι έδωσαν έμφαση στο κατά πόσο το κείμενο εκφράζει καταστάσεις που θα μπορούσαν να συνδεθούν με την καθημερινή ζωή ή με τις πραγματικές εμπειρίες που έχουν βιώσει οι μαθητές. Για μερικούς η σύγκριση είχε καθαρά γλωσσικό χαρακτήρα. Για παράδειγμα, χρησιμοποίησαν ως κριτήριο ομοιότητας το γεγονός ότι και τα δυο προβλήματα κάνουν χρήση της ίδιας μετοχής (νυσταγμένος άντρας, νυσταγμένο σαλιγκάρι). Τέλος, κάποιοι σύγκριναν τα προβλήματα βασισμένοι στους «πρωταγωνιστές» των προβλημάτων (τα προβλήματα διαφέρουν γιατί στο ένα μιλάει για ένα ρεζερβουάρ ενώ στο άλλο για ένα σαλιγκάρι).

Σύγκριση των προβλημάτων (ερωτήσεις 3.3 και 3.4)

Οι απαντήσεις που δόθηκαν σε κάθε μια από τις ερωτήσεις φαίνονται συνολικά στον Πίνακα 3 (ένας συμμετέχων δεν συμπλήρωσε το φύλλο εργασίας).

	N	O	Δ
Ρεζέρβα	17/43	17/43	8/43
Σαλιγκάρι	15/43	13/43	14/43

Πίνακας 3. Κατανομή απαντήσεων στις ερωτήσεις 3.3 και 3.4

Και στα δύο προβλήματα λιγότεροι από τους μισούς είναι αυτοί που συμφωνούν ότι η κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα δεν μπορεί να συμβεί στην πραγματική ζωή. Είναι κατά συνέπεια ενδιαφέρον το ότι οι περισσότεροι είτε θεωρούν ότι η κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα απαντάται στην καθημερινή ζωή είτε ότι δηλώνουν δυσκολία στο να απαντήσουν.

Στην πρώτη ομάδα (όσων συμφωνούν ότι δεν μπορεί μια τέτοια κατάσταση να απαντηθεί στην πραγματική ζωή) επικαλούνται μια σειρά από λογικά επιχειρήματα, όπως (για να αναφέρουμε κάποια από αυτά):

- Είναι αδύνατο να καταναλώνονται κάθε μέρα τα ίδια λίτρα και με τόση μάλιστα ακρίβεια ώστε να είναι φυσικός αριθμός (θέμα κίνησης, φαναριών,….)
- Κανείς στην καθημερινή του ζωή δεν κινείται με βάση τέτοιους υπολογισμούς
- Δεν γεμίζουμε κάθε μέρα το ρεζερβουάρ.
- Δεν μπορεί το σαλιγκάρι να ανεβαίνει ή να κατεβαίνει το ίδιο.
- Μπορεί να μην διανύει ευθύγραμμα τμήματα
- Δεν μπορούμε να μετρήσουμε την απόσταση που διανύει το σαλιγκάρι με ακρίβεια

Αξίζει να σημειωθεί όμως, ότι υπήρξαν και περιπτώσεις που σχολίασαν το γεγονός ότι και τα δύο προβλήματα αναφέρονται σε απόλυτα ιδανικές συνθήκες και ότι η επιλογή τους σχετίζεται όχι με την πιθανότητα να συμβούν στην πραγματικότητα όσο με το σχεδιασμό μας να διδάξουμε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο (έννοιες, διαδικασίες, δεξιότητες).

Η δεύτερη ομάδα η οποία συμφώνησε ότι μπορεί να απαντηθεί η κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα στην πραγματική ζωή, βάσισε την τεκμηρίωση της κυρίως στο ότι οι οντότητες που εμπλέκονται στο πρόβλημα είναι παρμένες από την πραγματική ζωή: ρεζερβουάρ, διαδρομές, πηγάδι, σαλιγκάρι.

	Ν-Ν	Ο-Ο	Δ-Δ	Ν-Ο	Ο-Ν	Ν-Δ	Ο-Δ	Δ-Ν	Δ-Ο
Αριθμός φοιτητών	9/44	9/44	6/44	4/44	3/44	3/44	5/44	1/44	1/44

Πίνακας 4. Κατανομή φοιτητών ως προς τη συνέπεια στις απαντήσεις

Για την τρίτη ομάδα των αναποφάσιστων το βασικό επιχείρημα ήταν ότι η κατάσταση που περιγράφεται είναι εν δυνάμει ρεαλιστική αλλά ιδιαίτερα δύσκολο να υλοποιηθεί και έτσι αυτό τους εμπόδισε στο να καταλήξουν σε μια απόφαση.

Δεδομένου ότι η μαθηματική δομή και των δύο προβλημάτων είναι ανάλογη, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η συνέπεια στις απαντήσεις των συμμετεχόντων σε σχέση με το κατά πόσο περιγράφουν τα προβλήματα αυτά πραγματικές καταστάσεις. Η δυνατότητα να δει (ή να μην δει) κανείς τα δομικά στοιχεία στο ένα πρόβλημα πρέπει να αποτυπώνεται και στην απάντησή του στο άλλο. Αν κάποιος δεν θεωρεί ότι το πρώτο μπορεί να περιγράφει μια πραγματική κατάσταση αναμένεται ότι δεν θα το θεωρεί δυνατόν και στο δεύτερο πρόβλημα (και αντίστροφα). Παραπάνω, στον Πίνακα 4, παρουσιάζονται αριθμητικά δεδομένα που περιγράφουν το βαθμό συνέπειας στις απαντήσεις των φοιτητών. Γίνεται φανερό ότι συνεπείς ως προς τις απαντήσεις τους ήταν λίγο περισσότεροι από τους μισούς. Μόνο εννιά συμφώνησαν ότι και τα δύο προβλήματα δεν περιγράφουν καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Άλλοι εννιά αντίθετα δέχτηκαν ότι το περιεχόμενο των προβλημάτων είναι συμβατό με την πραγματική ζωή. Και υπήρχαν 6 που ούτε στο ένα ούτε στο άλλο μπορούσαν να καταλήξουν σε μια συγκεκριμένη απάντηση για το θέμα αυτό.

Οι 24 απαντήσεις που δείχνουν συνέπεια μπορούν να ερμηνευθούν στο μεγαλύτερο μέρος τους με βάση την τεκμηρίωση των ίδιων φοιτητών. Η πρώτη ομάδα ρητά δηλώνει ότι τέτοιες καταστάσεις δεν απαντώνται στην πραγματική ζωή, όμως πολλοί από αυτούς προσθέτουν ότι η χρήση τους σε αυτήν την ιδανική κατάσταση αποτελεί ένα είδος διδακτικού συμβολαίου για σκοπούς καθαρά διδακτικούς. Η άποψη αυτή φαίνεται να εναρμονίζεται με αυτήν του Polya (1981) ότι αυτού του είδους τα προβλήματα περιέχουν τέτοιες αδικαιολόγητες απλουστευτικές παραδοχές που απαιτούν από τον λύτη κάποια εκ προοιμίου ερμηνεία ή/και αφαίρεση. Η δεύτερη ομάδα κάνει αποδεκτά τα προβλήματα με κυριότερο επιχείρημα ότι αντλούν τη θεματολογία τους από την πραγματική ζωή (οι οντότητες που συμμετέχουν συνδέονται με την πραγματική ζωή). Έτσι η προσοχή εστιάζεται στα αντικείμενα και όχι στην κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα. Η τρίτη ομάδα, με συνέπεια δηλώνει αναποφάσιστη και στα δύο προβλήματα με την επιχειρηματολογία της να αποτελεί συνδυασμό των δύο άλλων ομάδων. Από τη μια αντιλαμβάνονται την αδυναμία να συναντήσουν αυτές τις ιδανικές καταστάσεις στην καθημερινή ζωή τις οποίες όμως εν δυνάμει θεωρούν επιτεύξιμες (έστω και με πολύ μικρές πιθανότητες).

Συμπεράσματα

Ο μαθηματικός στόχος και στα δύο προβλήματα είναι η επιλογή ενός πρόσφορου και συστηματικού τρόπου οργάνωσης των δεδομένων, η εξέτασή τους και η αναζήτηση πιθανού μοτίβου, και η περιγραφή και επεξήγηση των ευρημάτων. Αυτά τα διαπραγματεύεται ο λύτης μέσα από την προσπάθεια να αντιληφθεί την ουσία του προβλήματος, να μοντελοποιήσει ίσως τη μαθηματική κατάσταση και να επιχειρηματολογήσει. Ταυτόχρονα, αυτά αποτελούν και τη βάση αξιολόγησης και σύγκρισής τους από τη μεριά του εκπαιδευτικού. Στις ερωτήσεις που αφορούσαν τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών αυτά που θεωρήθηκαν ως δομικά στοιχεία από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς και άρα βάση σύγκρισης ήταν παράμετροι σχετικές με τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων, τις διαπραγματευόμενες μαθηματικές έννοιες, το είδος των εμπλεκομένων αριθμών και σε μεγάλο βαθμό το κείμενο της εκφώνησης. Ειδικά σε σχέση με το τελευταίο, φαίνεται ότι αν και αποτελεί μέχρι έναν βαθμό επιφανειακό χαρακτηριστικό των προβλημάτων, επηρεάζει άμεσα το πώς αξιολογούν το πρόβλημα οι φοιτητές (βλέπε ανάλογα αποτελέσματα στη δουλειά των Osana et. al., 2006). Στις ερωτήσεις 3.3 και 3.4 η στάση των φοιτητών κυρίως εστιάστηκε στο δίπολο αυθεντικότητα-διδακτικές παραδοχές. Δηλαδή, στο γεγονός ότι τα προβλήματα δεν αποτελούν αυθεντικά προβλήματα της πραγματικής ζωής αλλά μάλλον μιμούνται καταστάσεις εμπνευσμένες από τον πραγματικό κόσμο κάτι που τα καθιστά τεχνητό κατασκεύασμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arbaugh, F., & Brown, C. (2006). Analyzing mathematical tasks: a catalyst for change? *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(6), 499-536.

Boston, M. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers' knowledge to their experiences in a professional development workshop. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 7-31.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101.

Chapman (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA:Authors

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B., & Desposiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers’ appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 347-380.

Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York: Wiley.

Sullivan, P., & Mousley, J. (2001). Thinking teaching: Seeing mathematics teachers as active decision makers. In F. L. Lin, T.J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 147-163). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κωνσταντίνος Στουραΐτης, Δέσποινα Πόταρη
ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών
kstouraitis@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιούμε την έννοια της διαλεκτικής αντίθεσης για να ταξινομήσουμε τις αντιθέσεις που αναδύθηκαν κατά τις συζητήσεις σε ομάδες εκπαιδευτικών που εφάρμοζαν πιλοτικά ένα νέο πρόγραμμα σπουδών. Έτσι, αναδεικνύονται επιστημολογικές πλευρές των μαθηματικών και της διδασκαλίας τους να κυριαρχούν ανάμεσα στα θέματα που απασχολούν τους εκπαιδευτικούς. Συγχρόνως, η διαλεκτική φύση των αντιθέσεων επιτρέπει την σύνθεση τους και όταν αυτή η σύνθεση υιοθετείται από τους εκπαιδευτικούς οδηγεί σε μετασχηματισμό της διδασκαλίας τους και σε δυνατότητες επαγγελματικής μάθησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τη σχολική χρονιά 2012–13 ένα νέο πρόγραμμα σπουδών (ΠΣ) για τα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης εφαρμόστηκε πιλοτικά σε έναν αριθμό σχολείων. Κατά τη διερεύνηση των διδακτικών επιλογών των εκπαιδευτικών και των παραγόντων που τις επηρεάζουν φάνηκε ότι συνήθως κάποιες αντιθέσεις προκαλούσαν την προσοχή και τη δράση των εκπαιδευτικών. Για τη μελέτη αυτών των αντιθέσεων στραφήκαμε στη Θεωρία Δραστηριότητας (ΘΔ) ως μια θεωρητική οπτική που φέρνει στο επίκεντρο τις αντιθέσεις "ως πηγές αλλαγής και ανάπτυξης" του εκπαιδευτικού (Engeström, 2001, p. 137).

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών έχει μελετηθεί σε περιβάλλοντα σχεδιασμένων παρεμβάσεων στο πλαίσιο εκπαίδευσης και επιμόρφωσης. Ωστόσο, λίγες είναι οι μελέτες που αναφέρονται στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και της διδασκαλίας τους σε περιβάλλον όπου η μάθηση δεν παρέχεται από κάποιον ειδικό. Κάποιες από αυτές αναφέρονται στην ανάπτυξη των εκπαιδευτικών μέσα από τον αναστοχασμό τους κυρίως σε συνεργατικά πλαίσια (Potari, Sakonidis, Chatzigoula & Manaridis, 2010). Η επαγγελματική μάθηση σε ένα τέτοιο περιβάλλον είναι μια περίπλοκη και μακρά διαδικασία που επηρεάζεται από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες και συνθήκες. Η μελέτη μας επιχειρεί να συμβάλλει στην κατανόηση αυτών των φαινομένων χρησιμοποιώντας τις αντιθέσεις ως εργαλείο. Στη συγκεκριμένη εργασία αναφερόμαστε στις αντιθέσεις που αναδύθηκαν στις συζητήσεις μεταξύ εκπαιδευτικών και μελετούμε το επιστημολογικό υπόβαθρο της διδασκαλίας των μαθηματικών ως απαραίτητο στοιχείο για την κατανόηση των αντιθέσεων ως πηγή μετατοπίσεων και αλλαγών. Για το σκοπό αυτό προτείνουμε τον όρο «διαλεκτική αντίθεση» για να περιγράψουμε τη διαλεκτική φύση των αντιθέσεων (Stouraitis, Potari & Skott, 2015) συνδυάζοντας το πλαίσιο της διαλεκτικής λογικής και τη ΘΔ.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών βλέπει τον εκπαιδευτικό ως συνδιαμορφωτή του ΠΣ κατά την υλοποίηση του στη σχολική τάξη. Αυτός ο ρόλος δημιουργεί νέες προκλήσεις και συγκρούσεις. Μέσα από αυτή την οπτική οι εκπαιδευτικοί δεν θεωρούνται ως ιμάντας μεταβίβασης του ΠΣ που κάποιοι ειδικοί ανέπτυξαν έξω από την τάξη, αλλά ως ενεργοί παράγοντες διαμόρφωσης και σχεδιασμού. Οι διδακτικές επιλογές των εκπαιδευτικών επηρεάζονται από τα υλικά του ΠΣ αλλά και από την αλληλεπίδραση με τους μαθητές τους στην τάξη (Remillard, 2005).

Η ΘΔ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί η πολυπλοκότητα της διδασκαλίας και μάθησης συμπεριλαμβάνοντας το ατομικό και το συλλογικό και εστιάζοντας στη δραστηριότητα του υποκειμένου (Leont'ev, 1978, Engeström, 2001). Στη μελέτη μας θεωρούμε ως δραστηριότητα τη διδασκαλία των μαθηματικών κατά την εισαγωγή του νέου ΠΣ. Ο εκπαιδευτικός (υποκείμενο) κατευθύνει τη δραστηριότητά του προς τη μάθηση των μαθητών (αντικείμενο) και για την επίτευξη των στόχων του χρησιμοποιεί μέσα και εργαλεία όπως τα υλικά του ΠΣ, τα σχολικά βιβλία και άλλο διδακτικό υλικό, σχέδια μαθήματος και ευρύτερους σχεδιασμούς. Η δραστηριότητα των εκπαιδευτικών επηρεάζεται από κοινωνικές ομάδες, περιγράφεται από κανόνες και υποχρεώσεις και περιορίζεται από τον καταμερισμό εργασίας (Stouraitis, Potari & Skott, 2015).

Οι αντιθέσεις αποτελούν θεμελιώδες χαρακτηριστικό κάθε συστήματος δραστηριότητας. Αν και ο όρος "αντίθεση" συχνά εκλαμβάνεται ως δηλωτικός μιας λογικής αντίφασης, η χρήση του στο πλαίσιο της ΘΔ δεν έχει καθόλου αυτό το περιεχόμενο. Σύμφωνα με τον Engeström (2001), "οι αντιθέσεις είναι ιστορικά συσσωρευμένες δομικές εντάσεις μέσα και μεταξύ συστημάτων δραστηριότητας" (p. 137). Δημιουργούν ευκαιρίες μάθησης για το υποκείμενο και μπορεί να διευρύνουν τους ορίζοντες δυνατοτήτων της δραστηριότητας (Engeström, 2001). Η αντίθεση γίνεται κατανοητή ως έλλειψη ισορροπίας στο σύστημα δραστηριότητας, η οποία μπορεί να προκαλέσει ατομικές προσπάθειες υπέρβασής της. Αυτή η "δημιουργική εξωτερίκευση … με τη μορφή ατομικών παραβιάσεων και καινοτομιών" (Cole & Engeström, 1993, p. 40) μπορεί να υιοθετηθεί και να γενικευθεί από το συλλογικό υποκείμενο της δραστηριότητας και να αποτελέσει αντικείμενο εσωτερίκευσης στα υπόλοιπα άτομα δημιουργώντας τον κύκλο της επεκτεταμένης μάθησης. Στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών η ΘΔ χρησιμοποιείται για να εντοπιστούν και να ερμηνευθούν αντιθέσεις που εμφανίζονται κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση (για παράδειγμα, Barab et al., 2002; Jaworski & Potari, 2009) και στο πλαίσιο επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών (Sakonidis & Potari, 2014). Σε αυτές τις μελέτες, οι αντιθέσεις αναφέρονται κυρίως σε παιδαγωγικά θέματα, συνήθως παραμερίζοντας πτυχές που αναφέρονται στα μαθηματικά και την επιστημολογία τους.

Προσπαθώντας από τη μια μεριά να κατανοήσουμε τις συνθήκες που κάποιες αντιθέσεις οδηγούν τον εκπαιδευτικό σε δημιουργικές, καινοτομικές επιλογές και από την άλλη να συμπεριλάβουμε τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών, χρησιμοποιούμε την έννοια της *διαλεκτικής αντίθεσης* (ΔΑ). Οι ΔΑ χρησιμοποιούνται ως κατηγορίες για την ταξινόμηση των αντιθέσεων και συγχρόνως αποτελούν το λογικό – φιλοσοφικό υπόβαθρο που ενοποιεί αντιθέσεις. Η έννοια της ΔΑ περιγράφει τη συνύπαρξη διαφορετικών, αντιθετικών όψεων οι οποίες όμως είναι συμπληρωματικές σε μια έννοια. Γενικά, "η αντίθεση σαν συγκεκριμένη ενότητα αλληλοαποκλειόμενων αντιθέτων αποτελεί τον πυρήνα της διαλεκτικής, την κεντρική της κατηγορία" (Ιλιένκοφ, 1983, σελ. 237). Οι Roth και Radford (2011) χρησιμοποιούν τον όρο εσωτερικές αντιθέσεις για να εκφράσουν τις συχνά αλληλοαποκλειόμενες πλευρές του ίδιου φαινομένου που συνυπάρχουν διαλεκτικά και δεν μπορούν να διαχωριστούν.

Η έρευνα στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών έχει παράξει αποτελέσματα σχετικά με αρκετές από τις ΔΑ που εμείς αναγνωρίσαμε μέσα στα δεδομένα μας, έστω κι αν δεν χρησιμοποιείται ο όρος ΔΑ. Η Sfard (1991) μιλάει για τη διπλή φύση των μαθηματικών εννοιών ως διαδικασίες και ως αντικείμενα. Η σχέση διαίσθησης και λογικής (Fischbein, 1987), η σχέση των συμβόλων με τη σημασία (σημαίνον – σημαινόμενο) (Presmeg, 1992) είναι μερικές από τις διαλεκτικές αντιθέσεις που έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της πιλοτικής εφαρμογής του νέου ΠΣ σε τρία Γυμνάσια. Το νέο ΠΣ δίνει έμφαση στη μαθηματική δραστηριότητα των ίδιων των μαθητών με στόχο την εμπλοκή τους στις διεργασίες του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, της δημιουργίας συνδέσεων εντός και εκτός των μαθηματικών, της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων και της μεταγνωστικής ενημερότητας (Πρόγραμμα Σπουδών, σελ. 8–9). Συγχρόνως, υιοθετεί και προϋποθέτει τον κεντρικό ρόλο του εκπαιδευτικού για το σχεδιασμό της διδασκαλίας. Οι καθηγητές μαθηματικών στο κάθε σχολείο συνεργάστηκαν μεταξύ τους για την υλοποίηση του ΠΣ με την υποστήριξη του πρώτου συγγραφέα που ήταν μέλος της ομάδας σύνταξης του ΠΣ. Η συνεργασία πήρε τη μορφή συζητήσεων για το σχεδιασμό και την αποτίμηση της διδασκαλίας κάποιων ενοτήτων του ΠΣ που οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί επέλεγαν, χωρίς να επιδιώκεται η παραγωγή αυστηρά δομημένων σχεδίων μαθήματος ή η διενέργεια από όλους κάποιων κοινά σχεδιασμένων μαθημάτων.

Τα δεδομένα αποτελούνται από τις μαγνητοφωνημένες συζητήσεις στην ομάδα συνεργασία σε κάθε σχολείο, τα γραπτά τεκμήρια (φύλλα εργασίας), τις σημειώσεις του ερευνητή και συνεντεύξεις στην αρχή και το τέλος του χρόνου. Για αυτή τη μελέτη τα δεδομένα αποτελούνται από τα δεδομένα των συναντήσεων σε δύο σχολεία (Α και Β). Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί στο σχολείο Α είναι 5 ενώ στο σχολείο Β είναι 2 και όλοι έχουν μεγάλη διδακτική εμπειρία. Ειδικότερα στο σχολείο Α (που είναι πειραματικό) κάποιοι από τους εκπαιδευτικούς έχουν μεταπτυχιακές σπουδές και η εμπειρία τους περιλαμβάνει σχεδιασμό και υλοποίηση καινοτομιών.

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με μεθόδους θεμελιωμένης θεωρίας (Charmaz, 2006). Η αρχική ανάλυση οδήγησε στη διατύπωση των θεματικών ενοτήτων που απασχόλησαν κάθε συνάντηση και στη διαμόρφωση μικρών αφηγήσεων για καθεμιά. Σε κάθε θεματική ενότητα αναζητήθηκαν οι επιλογές των εκπαιδευτικών όπως διατυπώθηκαν από τους ίδιους και οι αντιθέσεις που τροφοδοτούσαν τη συζήτηση. Κάθε αντίθεση που αναγνωρίστηκε, διατυπώθηκε με τη μορφή δίπολου (π.χ. «έργα με στόχο την εννοιολογική κατανόηση της διαιρετότητας ή με στόχο τη διαδικαστική ευχέρεια στον υπολογισμό του ΕΚΠ»). Κατόπιν οι αντιθέσεις κωδικοποιήθηκαν, ταξινομήθηκαν και αναζητήθηκαν πιθανές επιδράσεις τους στη διδασκαλία.

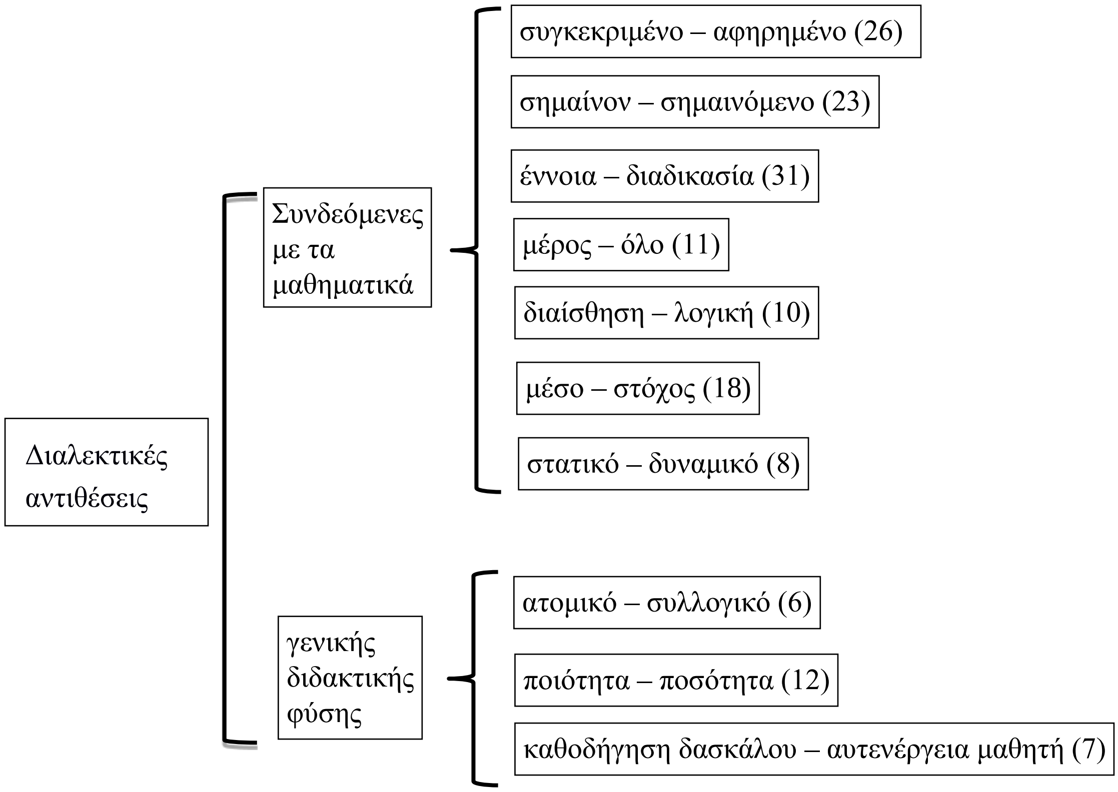
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων αναγνωρίστηκαν 171 αντιθέσεις (141 από αυτές χαρακτηρίστηκαν ως διαλεκτικές). Πρόκειται για αντιθέσεις που αφορούν στη διδασκαλία, μπορεί να αναγνωρίζονται από τους εκπαιδευτικούς ή όχι, αλλά σε κάθε περίπτωση είναι αντιθέσεις που τροφοδοτούν τις συζητήσεις στην εκάστοτε ομάδα των εκπαιδευτικών.

Ταξινόμηση των αντιθέσεων

Η κατηγοριοποίηση των διπόλων που αναγνωρίστηκαν οδήγησαν στη διαμόρφωση κατηγοριών και υποκατηγοριών ΔΑ. Οι κατηγορίες των ΔΑ φαίνονται στο σχήμα 1. Κατ' αρχήν διακρίνουμε δύο ομάδες ΔΑ: α) αντιθέσεις που αφορούν το μαθηματικό περιεχόμενο της διδασκαλίας και τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά του και β) αντιθέσεις που έχουν περιεχόμενο που συνδέεται γενικά με τα φαινόμενα της διδασκαλίας και της μάθησης, είτε αφορούν τα μαθηματικά είτε άλλο αντικείμενο

Στην πρώτη ομάδα οι ΔΑ είναι ισχυρά συσχετισμένες με τα μαθηματικά, όπως η *έννοια – διαδικασία* και η *διαίσθηση – λογική*, ή τα μαθηματικά τους δίνουν περιεχόμενο και μορφή, όπως η *μέρος – όλο* ή η *μέσο – στόχος*. Στη δεύτερη ομάδα οι ΔΑ είναι η *καθοδήγηση δασκάλου – αυτενέργεια μαθητή*, η *ατομικό – συλλογικό* και η *ποιότητα – ποσότητα*.



Σχήμα 1. Ταξινόμηση των διαλεκτικών αντιθέσεων (σε παρένθεση η συχνότητα εμφάνισής τους)

Παρακάτω περιγράφουμε συνοπτικά τις ΔΑ που εμφανίζονται συχνότερα, δίνοντας κάποια παραδείγματα από τα δεδομένα μας για να διασαφηνίσουμε το περιεχόμενό τους.

ΔΑ συγκεκριμένο – αφηρημένο: σχετίζεται άμεσα με τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Εκφράζεται με τους παρακάτω τρόπους:

α) Αντίθεση ανάμεσα στην πραγματικότητα και τα μαθηματικά μοντέλα που δημιουργούμε για να την περιγράψουμε. Π.χ., ο Μανώλης λέει για τη χρήση προβλημάτων στις συναρτήσεις "θέλω να 'ναι κάτι πιο χειροπιαστό. … κάτι πιο πρακτικό … γιατί όταν τους λες ψ=3χ, ψ=3χ–6 κλπ τους φαίνονται τελείως αόριστα αυτά, αυθαίρετα. Γιατί τα κάνω αυτά;" (Β7, 146,160)

β) Αντίθεση ανάμεσα στο τοπικό (συγκεκριμένο) και το καθολικό (γενικό, αφηρημένο). Για παράδειγμα, η χρήση μόνο γραμμικών συναρτήσεων για εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης συμβάλλει στην παρανόηση ότι όλες οι συναρτήσεις εκφράζουν ανάλογα ποσά.

ΔΑ σημαίνον – σημαινόμενο: εμφανίζεται συχνά, κάτι που σχετίζεται με το ρόλο που έχουν τα σύμβολα και τα αναπαραστασιακά συστήματα στα μαθηματικά και τη μάθησή τους. Εμφανίζεται με τις παρακάτω μορφές:

α) Ένα σημαίνον – πολλά σημαινόμενα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του συμβόλου "–" (μείον ή πλην) το οποίο μπορεί να υποδηλώνει πρόσημο ή τον αντίθετο ή την πράξη της αφαίρεσης. Π.χ., η Μαρίνα λέει για τις διαφορετικές σημασίες του "–" : "γι' αυτό ρωτάς τι πρόσημο έχει το –χ. Για να μην το ταυτίσει έτσι [το –χ με το αρνητικό πρόσημο]" (Α4, 86).

β) Πολλά σημαίνοντα – ένα σημαινόμενο, όπως για παράδειγμα η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη μελέτη μιας συνάρτησης.

γ) Σημαίνον από το χώρο της γεωμετρίας – σημαινόμενο από την άλγεβρα, όπως για παράδειγμα στη χρήση του εμβαδού τετραγώνου πλευράς α+β κατά τη διδασκαλία της αλγεβρικής ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

δ) Ο μαθηματικός φορμαλισμός και η ορολογία (σημαίνον) μπορεί να αποτελεί εμπόδιο στην απόδοση νοήματος (σημαινόμενο) όπως συμβαίνει με την απομνημόνευση κανόνων χωρίς νόημα ή με τη χρήση λέξεων που το μαθηματικό τους νόημα δεν συμβαδίζει την καθημερινή χρήση τους.

ΔΑ έννοια – διαδικασία: εκφράζεται στη διπλή φύση των μαθηματικών αντικειμένων (Sfard, 1991). Στα δεδομένα της έρευνάς μας ανιχνεύεται στις παρακάτω μορφές:

α) έννοιες, σχέσεις και ιδιότητες – εκτέλεση πράξεων ή αλγορίθμων. Π.χ., ο Πέτρος λέει για τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές με την έννοια της εξίσωσης αλλά όχι με τον αλγόριθμο επίλυσής της: " Μαθαίνει παπαγαλία μια διαδικασία, σου κάνει τέρατα και σημεία, … αλλά δεν σου απαντάει … τι σημαίνει να λύσουμε την εξίσωση" (Β3, 152).

β) δομή – διαδικασία, με κύρια έκφραση ανάμεσα στη αναγνώριση της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης ως άθροισμα ή γινόμενο και τη διαδικασία μετασχηματισμού της.

γ) εννοιολογική κατανόηση – διαδικαστική ευχέρεια. Η επίτευξη σταθερών μαθησιακών αποτελεσμάτων στα μαθηματικά απαιτεί την εννοιολογική κατανόηση αλλά και τη διαδικαστική ευχέρεια. Η μονόπλευρη ενασχόληση με τις διαδικασίες οδηγεί σε επιφανειακή και παροδική γνώση, ενώ η υποβάθμισή τους αφαιρεί το λειτουργικό χαρακτήρα των εννοιών.

ΔΑ μέσο – στόχος: εκφράζει τη διάκριση μεταξύ των γενικών ή ειδικών σκοπών της διδασκαλίας και των μέσων που χρησιμοποιούνται για την επίτευξή τους. Στα δεδομένα μας εμφανίζεται με τις παρακάτω μορφές:

α) Τα εργαλεία, όπως τα ψηφιακά, το χαρτί και το μολύβι, τα γεωμετρικά όργανα, αλλά και τα έργα που επιλέγονται για διαπραγμάτευση στην τάξη (μέσο) εμπεριέχουν συγκεκριμένες πτυχές της γνώσης και προσφέρουν συγκεκριμένες δυνατότητες μάθησης (στόχοι), ενώ αποκλείουν άλλες.

β) Τα μοντέλα και οι μεταφορές (μέσο) μπορεί να βοηθούν στην κατανόηση εννοιών και στην απόδοση νοήματος (στόχος), ωστόσο μπορεί να απαιτούν χρόνο και ενέργεια για να γίνουν λειτουργικά για τους μαθητές. Π.χ., η Μαρίνα λέει για τη χρήση μοντέλων στις πράξεις ακεραίων: "πιστεύω ότι για κάποια παιδιά είναι πάρα πολύ δύσκολο να καταλάβουν το μοντέλο. Οπότε είναι … εμπόδιο για να δουν την έννοια που θες …" (Α4, 25–27)

γ) το είδος της δράσης (μέσο) στο οποίο μπορεί να καλούνται οι μαθητές να συμμετέχουν παρέχει δυνατότητες και έχει περιορισμούς που επηρεάζουν τα προσδοκώμενα αποτελέσματα (στόχος).

Διαλεκτικές αντιθέσεις και μετατόπιση της διδακτικής δραστηριότητας

Οι ΔΑ όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι αποτέλεσμα της ανάλυσης των ερευνητών και αποτελούν εργαλείο ερμηνείας των επιλογών των εκπαιδευτικών. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που κάποιοι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζοντας οι ίδιοι την αντίθεση επιχειρούσαν την υπέρβασή της. Όπως έχουμε ισχυριστεί και αλλού (Stouraitis, Potari, Skott 2015), η ύπαρξη αντίθεσης διαλεκτικού χαρακτήρα, φαίνεται να αποτελεί το έδαφος που κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί να οδηγήσει σε μετασχηματισμό της διδασκαλίας και σε επαγγελματική μάθηση του εκπαιδευτικού. Στην περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός προκύπτει από τη διαλεκτική σύνθεση των αντιθέτων, αναζητώντας μια νέα ισορροπία σε ένα υψηλότερο επίπεδο. Παρακάτω δίνουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα ΔΑ που από τα δεδομένα μας φαίνεται να συνδέεται με μετασχηματισμό της διδασκαλίας.

Στην τρίτη συνάντηση ο Πέτρος περιέγραφε την εισαγωγή στις αλγεβρικές παραστάσεις της Γ γυμνασίου χωρίς αναφορά σε εξωμαθηματικές καταστάσεις. "Εγώ ξεκινάω με τα θέματα των ορισμών, δηλαδή ξεκινάω, κάνω την εισαγωγή, προχωράμε λίγο και μετά μπαίνουμε στο πού τα χρησιμοποιούμε" (Β3, 61). Με αφορμή ερώτηση μαθητή σχετικά με το "πού χρησιμοποιούνται αυτά", στη συζήτηση με το Μανώλη και τον ερευνητή προτάθηκε η μοντελοποίηση για τη νοηματοδότηση των παραστάσεων. Ο Πέτρος αναγνώρισε την ανάγκη συνδέσεων και είπε ότι του αρέσει η ιδέα της μοντελοποίησης γιατί "δείχνει αυτό που κάνουμε ξεκάθαρα … μετατρέπουμε μία κατάσταση … σε κάτι μαθηματικό" (Β3, 105).

Σε συνάντηση τέσσερεις μήνες μετά, ο Πέτρος λέει ότι χρησιμοποίησε το πλαίσιο της φυσικής ως εφαρμογή των εξισώσεων δευτέρου βαθμού: "προσπαθώ να τους κάνω μια ενοποίηση στην έννοια της εξίσωσης. Εν τω μεταξύ τους έκανα μια σύνδεση με τη φυσική" (Β6, 7). Στην επόμενη συνάντηση περιγράφει πώς χρησιμοποίησε φυσικά μεγέθη και σχέσεις της φυσικής (εμβαδό τετραγώνου – πλευρά, διάστημα – χρόνος) για την εισαγωγή στις συναρτήσεις στη Γ γυμνασίου.

> "Γιατί πιστεύω ότι αυτό είναι το βασικό. Να συνδυάσουνε ότι η συνάρτηση δείχνει σχέση ανάμεσα σε δύο πράγματα που αλληλεξαρτώνται. Και μετά να καταλάβουνε ότι όλα αυτά για τα οποία συζητάμε, στην ουσία είναι δυνάμει συναρτήσεις. Όλοι οι τύποι των μαθηματικών, της φυσικής κλπ." (Β7, 21γ)

Οι τοποθετήσεις του Πέτρου στις δύο συζητήσεις δείχνουν μια μετατόπιση από τη μη χρήση εξωμαθηματικών συνδέσεων στην ενσωμάτωση φυσικών μεγεθών και σχέσεων για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Στις τελευταίες συναντήσεις ο Πέτρος φαίνεται να αναγνωρίζει τη ΔΑ *συγκεκριμένο – αφηρημένο* και ειδικότερα τη μορφή *έννοιες της φυσικής – μαθηματικά αντικείμενα* και επιχειρεί τη σύνθεσή της συνδέοντας τις συναρτήσεις με φυσικά μεγέθη και σχέσεις.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Μεταξύ των αντιθέσεων που αναγνωρίστηκαν στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης κυριαρχούν εκείνες που είναι στενά συνδεδεμένες με επιστημολογικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών και της διδασκαλίας τους. Ειδικότερα, στις κατηγορίες *συγκεκριμένο – αφηρημένο, σημαίνον – σημαινόμενο, έννοια – διαδικασία, μέσο – στόχος,* εντάσσονται περισσότερες από τις μισές αντιθέσεις. Αυτή η διαπίστωση αποτελεί μία ένδειξη για τα θέματα που απασχόλησαν τους συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς εκείνη τη χρονιά. Σε αυτό, σημαντικός είναι ο ρόλος του νέου προγράμματος σπουδών που σχετίζεται με τις καινοτομίες που εισήγαγε (π.χ. οι εξωμαθηματικές συνδέσεις) και με τη συζήτηση που προκλήθηκε κατά την εφαρμογή του.

Η ΘΔ αντιμετωπίζει τις αντιθέσεις ως αναπόσπαστο χαρακτηριστικό της ανθρώπινης δραστηριότητας και ως βάση για τον μετασχηματισμό της. Ο Engeström (2001) και άλλοι ερευνητές, έχουν χρησιμοποιήσει τις αντιθέσεις για να κινητοποιήσουν διαδικασίες μετασχηματισμού της δραστηριότητας και να προωθήσουν την επαγγελματική μάθηση. Οι Barab κ.α. (2001, σελ. 104) ισχυρίζονται ότι όταν συστημικές αντιθέσεις έρχονται σε μια υγιή ισορροπία "μπορούν να διευκολύνουν μια σημαντική αλληλεπίδραση που εμπλουτίζει και προσθέτει δυναμισμό στη διαδικασία μάθησης".

Στη μελέτη μας χρησιμοποιούμε τις αντιθέσεις για να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε πλευρές της διδασκαλίας. Προσπαθούμε να εστιάσουμε περισσότερο σε επιστημολογικά χαρακτηριστικά του μαθηματικού περιεχομένου και της διδασκαλίας του, αντί για γενικά διδακτικά ή παιδαγωγικά θέματα. Για το σκοπό αυτό δανειζόμαστε την έννοια των ΔΑ που όχι μόνο είναι συμβατή, αλλά έχει κοινές φιλοσοφικές βάσεις με τη ΘΔ: τη διαλεκτική λογική. Ο Daniels (2008, σελ. 32) αναφέρει ως πρόθεση του Vygotsky τη μελέτη "τη σύνθεσης και του ποιοτικού μετασχηματισμού αντιθετικών ή με κάποιον τρόπο αντιφατικών στοιχείων σε νέες συνεκτικές ολότητες". Η διαλεκτική φύση των αντιθέσεων, που αναγνωρίστηκαν στη μελέτη μας, αποτελεί το έδαφος που μπορεί να αναπτυχθούν δημιουργικές μετατοπίσεις στις διδακτικές επιλογές των εκπαιδευτικών μέσα από την επιδίωξη της σύνθεσης των αντιθέτων. Οι κοινωνικοί και ατομικοί παράγοντες που ευνοούν ή εμποδίζουν την ανάπτυξη μετατοπίσεων στις επιλογές των εκπαιδευτικών χρειάζονται περαιτέρω μελέτη.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Barab, S. A., Barnett, M., Yamagata-Lynch, L., Squire, K., & Keating, T. (2002). Using activity theory to understand the systemic tensions characterizing a technology-rich introductory astronomy course. *Mind, Culture, and Activity*, 9(2), 76-107.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory. A practical guide through qualitative analysis*. London: Sage.

Cole, M. & Engeström, Y. (1993). A cultural historical approach to distributed cognition. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 1-46). Cambridge: Cambridge University Press.

Daniels, H. (2008).*Vygotsky and research*. London: Routledge

Engeström, Y. (2001) Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Jaworski, B. & Potari, D. (2009). Bridging the micro- and the macro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 219–236.

Leont'ev, A.N. (1978). *Activity, Consciousness and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Potari, D., Sakonidis, H., Chatzigoula, R., & Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analyzing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 473–485.

Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610

Remillard, J. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246

Roth, W.-M. & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers

Sakonidis, C., & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM*, 46(2), 293-304.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Stouraitis, K., Potari, D., Skott, J. (2015) Contradictions and shifts in teaching with a new curriculum: the role of mathematics. Paper presented in CERME9, 2015, Prague.

Ιλιένκοφ, Ε., Β. (1983) *Διαλεκτική λογική*. *Δοκίμια Ιστορίας και Θεωρίας*. Αθήνα: Gutenberg.

Πρόγραμμα Σπουδών μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση. digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Μαριάννα Τζεκάκη, Ζωή Κολιπέτρη
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΉΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΊΚΗΣ

tzekaki@auth.gr και zetakoli@gmail.com

Περίληψη

Το θέμα που απασχολεί τη συγκεκριμένη έρευνα είναι η δυνατότητα βελτίωσης της Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου σχετικά με τη μέτρηση επιφανειών σε εκπαιδευτικούς προσχολικής ηλικίας. 11 εκπαιδευτικοί εξετάστηκαν ως προς τη μαθηματική γνώση περιεχομένου στο θέμα των μετρήσεων και στη συνέχεια απετέλεσαν μια ομάδα η οποία πήρε μέρος σε ειδικά σχεδιασμένη επιμορφωτική παρέμβαση. Τα αποτελέσματα παρουσιάζουν τη Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου των εκπαιδευτικών σχετικά με τις μετρήσεις επιφανειών και τη συγκρίνουν με τις αλλαγές και πιθανές βελτιώσεις που παρουσίασε μετά την επιμορφωτική παρέμβαση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τι τελευταίες δεκαετίες σημαντικός αριθμός προγραμμάτων σπουδών για τη μαθηματική εκπαίδευση έχουν εισαχθεί στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Τα περισσότερα από αυτά στηρίζονται σε ευρήματα και ερευνητικές εφαρμογές που πραγματοποιούνται επί σειρά ετών με επίκεντρο τα μικρά παιδιά. Ωστόσο η έρευνα καταδεικνύει ότι στην πράξη λίγες ουσιαστικές αλλαγές έχουν πραγματοποιηθεί στη σχολική τάξη. Ήδη από πολύ νωρίς καταγράφονται γενικότερα σημαντικές υστερήσεις που συνδέονται με πολλούς παράγοντες ανάμεσα στους οποίους κεντρική θέση κατέχουν οι διδακτικές πρακτικές (Ginsburg et als., 1997; 2008).

Η σημασία του ρόλου του εκπαιδευτικού στη μαθηματική εκπαίδευση δύσκολα μπορεί να αμφισβητηθεί, ιδιαίτερα μάλιστα η γνώση του σχετικά με το ‘τι’ και το ‘πώς’ στη διδασκαλία. Ο όρος ‘Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου’ (Subject Matter Knowledge, SMK) εισήχθη αρχικά από τον Shulman (1986) και μεταγενέστερα εξειδικεύτηκε στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης από την Ball και τους συνεργάτες της (Ball, Thames & Phelps, 2008) ως ‘Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου’ (ΜΓΠ και με τον αγγλικό όρο Mathematical Content Knowledge, MCK) που αφορά τόσο τη γνώση του μαθηματικού αντικείμενου όσο και αυτή της διδασκαλίας του.

Γενικότερα στην προσέγγιση αυτή γίνεται αποδεκτό ότι η ανάπτυξη οποιασδήποτε αποτελεσματικής διδασκαλίας απαιτεί όχι μόνο μια γενική παιδαγωγική γνώση ή γνώση των μαθητών και των χαρακτηριστικών τους, αλλά και μια συγκεκριμένη γνώση του μαθηματικού περιεχομένου όπως και της σύνδεση της με την ιδιαίτερη γνώση για τη διδασκαλία του (με αρκετές άλλες εξειδικεύσεις που δεν θα απασχολήσουν τη συγκριμένη μελέτη).

Ένας σημαντικός αριθμός ερευνών έχουν επικεντρωθεί στην ποιότητα της γνώσης αυτής και την αναζήτηση των ιδιαιτεροτήτων της για κάθε διδασκαλία. Αναφορικά με την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία εντοπίζονται λιγότερα σχετικά ευρήματα αν και η βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στις μικρές ηλικίες συνδέεται στενά με τη βελτίωση της συγκεκριμένης κάθε φορά μαθηματικής γνώσης περιεχομένου (Julian, et al., 2010).

Το πρόβλημα που απασχολεί τη συγκεκριμένη έρευνα είναι η δυνατότητα βελτίωσης της Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου σε εκπαιδευτικούς προσχολικής ηλικίας. Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης έρευνας στην οποία μελετάται όχι μόνο η βελτίωση αυτής της γνώσης αλλά και η σύνδεση της με την ποιότητα των διδακτικών πρακτικών στην τάξη. Ως μέρος αυτής της έρευνας η συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθεί με τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι η Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου εκπαιδευτικών προσχολικής ηλικίας αναφορικά με τη μέτρηση επιφάνειας;
2. Ποια βελτίωση μπορεί να παρουσιάσει η γνώση αυτή με την κατάλληλη επιμορφωτική παρέμβαση;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μαθηματική γνώση που απαιτείται από τους εκπαιδευτικούς για τη διδασκαλία είναι ένα ζήτημα που απασχολεί συστηματικά την επιστημονική κοινότητα. Οι αποφάσεις που παίρνουν οι εκπαιδευτικοί και οι ενέργειες που αναλαμβάνουν για να υποστηρίξουν τη μαθησιακή διαδικασία των μαθητών σε σχέση με διάφορες μαθηματικές έννοιες αποδεικνύεται ένα ιδιαίτερα περίπλοκο ζήτημα (Davis, & Simmt, 2006).

Το θεωρητικό μοντέλο της ‘Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου’, δηλαδή ουσιαστικά η προσέγγιση που συνδέει τη μαθηματική γνώση του αντικειμένου της διδασκαλίας με την πρακτική της εφαρμογή, βοήθησε σημαντικά την προσέγγιση του προβληματισμού αυτού (Ball, et al., 2009). Η *μαθηματική γνώση* αντιμετωπίζεται ως η γενική γνώση που έχει ο εκπαιδευτικός για το μαθηματικό αντικείμενο που επιδιώκει να διδάξει (με αναλύσεις ως προς την εξειδίκευση που απαιτεί η γνώση αυτή, βλ. σχετικά, Ball et al, ό.π.) και η *πρακτική εφαρμογής* σχετίζεται με διαστάσεις όπως η γνώση για τους μαθητές, για τη διδασκαλία του αντικειμένου και το πρόγραμμα που αφορά. Όλα τα παραπάνω στοιχεία συνδέονται με το κατά περίπτωση συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο.

Ειδικά για τους εκπαιδευτικούς της προσχολικής ηλικίας καταγράφονται ελλείψεις τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο όσον αφορά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Οι ελλείψεις αυτές συνδέονται με τις μαθηματικές γνώσεις των εκπαιδευτικών, τις γνώσεις τους για τις ιδιαιτερότητες των μαθηματικών δραστηριοτήτων, τις ιδιαιτερότητες των μικρών παιδιών όπως και τις πεποιθήσεις για τη μαθηματική ανάπτυξη στην ηλικία αυτή (Platas, 2008). Απαντώντας στο ερώτημα ‘*τι χρειάζεται να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός για διδάξει μαθηματικά στην προσχολική ηλικία’* οι ερευνητές απαντούν ότι πρέπει να γνωρίζει το περιεχόμενο των μαθηματικών εννοιών που προσεγγίζει (Ma, 1999), να κατανοεί τη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών της ηλικίας αυτής (Clements, 2001) όπως και να έχει την άνεση να διαχειριστεί διδακτικά με κατάλληλες στρατηγικές και πρακτικές το συγκεκριμένο περιεχόμενο (Seo & Ginsburg, 2004).

Με βάση τα στοιχεία αυτά η διερεύνηση της μαθηματικής γνώσης στην παρούσα έρευνα καταγράφει τις γνώσεις των εκπαιδευτικών στο εννοιολογικό επίπεδο ως προς τη μέτρηση της επιφάνειας (γνώση του ‘τι’), τις γνώσεις για τις δυνατότητες των παιδιών (γνώση του ‘ποιος’) όπως και τη γνώση για διδακτικές πρακτικές (γνώση του ‘πως’).

Το ειδικό θέμα των εννοιών μέτρησης μεγεθών και ιδιαίτερα η μέτρηση επιφανειών, έχει απασχολήσει την έρευνα αλλά κυρίως σε μεγαλύτερες ηλικίες. Γενικά, έχει εντοπιστεί ότι η προσέγγιση της έννοιας και της διαδικασίας της μέτρησης αφορά τη σύνδεση των συνεχών χαρακτηριστικών των αντικειμένων, όπως το μήκος τους ή η επιφάνεια τους, με διακριτά τυπικά μεγέθη (μονάδες) που η επανάληψη τους οδηγεί σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια, η μέτρηση ενός μεγέθους διδακτικά περνά από την άμεση σύγκριση των μεγεθών, συχνά στη μεταφορά του μεγέθους σε ένα ενδιάμεσο, που οδηγεί στην επικάλυψη του μεγέθους με άτυπες ή τυπικές μονάδες μέτρησης και τέλος τη σύνδεση αυτής της επικάλυψης (ή της επανάληψης μονάδων) με ένα αριθμό (Sarama & Clements, 2009; Τζεκάκη, 2010).

Οι δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της μέτρησης της επιφάνειας επιβεβαιώνεται από μεγάλο αριθμό ερευνών κυρίως σε μεγαλύτερα παιδιά, αλλά και σε εκπαιδευτικούς (Clements & Ellerton, 1995). Ειδικά για τους τελευταίους τα ευρήματα καταδεικνύουν ότι πολλοί από αυτούς χρησιμοποιούν τα εργαλεία μέτρησης χωρίς να κατανοούν ούτε το εμπλεκόμενο μέγεθος, ούτε τη σχετική διαδικασία (O'Keefe & Bobis, 2008).

Σύμφωνα με τα προηγούμενα μια επιμορφωτική παρέμβαση στο ζήτημα της μέτρησης των επιφανειών καλείται να αναδείξει στους εκπαιδευτικούς εννοιολογικά το εμπλεκόμενο μέγεθος και διδακτικά την ανάγκη συγκρίσεων με τη χρήση ενδιάμεσου, τη δόμηση του χώρου, την επικάλυψη με μονάδες και τη σύνδεση της με το αριθμητικό αποτέλεσμα, αλλά και τις σχετικές δραστηριότητες που μπορούν να βοηθήσουν τα μικρά παιδιά να προσεγγίσουν τα στοιχεία αυτά (Κολιπέτρη, 2015).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η μελέτη που θα παρουσιασθεί αφορά μέρος μιας ευρύτερης έρευνας με 22 εκπαιδευτικούς που διερευνούσε τη σύνδεση της Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου με τις διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζουν στην τάξη. Συγκεκριμένα, για τους εκπαιδευτικούς αυτούς καταγράφηκαν η ΜΓΠ στο θέμα των μετρήσεων και αντιστοιχήθηκε με τις σχετικές πρακτικές που εφάρμοζαν στη διδασκαλία του αντικειμένου. Από το σύνολο αυτό, 11 εκπαιδευτικοί αποτέλεσαν μια πειραματική ομάδα η οποία πήρε μέρος σε επιμορφωτική παρέμβαση, με περιεχόμενο που παρουσιάστηκε προηγούμενα. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί εξετάσθηκαν σχετικά με τη ΜΓΠ που ανάπτυξαν στο θέμα των μετρήσεων και τις αλλαγές που παρουσίασαν στις διδακτικές τους πρακτικές.

Από το σύνολο αυτό στην παρούσα μελέτη παρουσιάζεται μόνο η εξέλιξη της Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου των 11 εκπαιδευτικών της πειραματικής ομάδας πριν και μετά την επιμορφωτική παρέμβαση. Η συμμετοχή τους ήταν εθελοντική και τα χαρακτηριστικά της ομάδας ήταν τα ακόλουθα:

Προϋπηρεσία και σπουδές δείγματος				
Προύπηρεσία	6-10	11-20	21-30	
	1	3	7	
Επιπεδο σπουδών	Εξομοίωση	ΑΕΙ	Διδασκαλείο	Μεταπτυχιακό
	3	2	5	1

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά δείγματος

Για την μέτρηση της Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου η οποία, όπως ορίστηκε προηγούμενα, αφορά τη γνώση του περιεχομένου, γνώση για τους μαθητές και γνώση της διδακτικής σε σχέση με τις μετρήσεις, προετοιμάστηκαν δύο ερωτηματολόγια με την μορφή τριών διδακτικών σεναρίων, ώστε να προσφέρουν ένα οικείο πλαίσιο στους εκπαιδευτικούς. Τα διδακτικά σενάρια παρουσίαζαν τρεις διδασκαλίες που διαδραματίζονται μέσα στην τάξη όπου τα παιδιά συμμετέχοντας σε παιγνιώδεις δράσεις αντιμετωπίζουν καταστάσεις-προβλήματα που αφορούν συγκρίσεις επιφανειών: στο 1ο σενάριο με αυθόρμητες στρατηγικές και άμεσες συγκρίσεις, στο 2ο με έμμεσες συγκρίσεις και χρήση ενδιάμεσου και στο 3ο μετρήσεις επιφανειών με επικαλύψεις. Στα σενάρια γίνεται φανερή η μαθηματική δράση και η σκέψη των παιδιών με την αποτύπωση των διαλόγων μεταξύ τους. Τα ερωτηματολόγια, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση κινήθηκαν στους ίδιους άξονες με διαφορετική όμως πλοκή και σχήματα. Τα σενάρια ακολουθούν ερωτήσεις προς τους εκπαιδευτικούς στις τρεις διαστάσεις της Μαθηματικής Γνώσης Περιεχομένου αναφορικά με τις μετρήσεις.

Πιο αναλυτικά αναφορικά με το ‘τι’ οι ερωτήσεις διερευνούν την αναγνώριση των μαθηματικών δράσεων και ιδεών/εννοιών, τη γνώση χαρακτηριστικών επιφάνειας (διαστάσεων και μετασχηματισμών), τη γνώση άμεσων και έμμεσων συγκρίσεων επιφανειών, τη γνώση τετραγωνικών μονάδων, επανάληψης και σύνδεσης με αριθμό (Lehrer, 2003; Outhred, et al., 003). Για λόγους έκτασης της παρούσας εργασίας παραλείπεται η διερεύνηση του ‘ποιος’ (που παρουσίασε και τις λιγώτερες αλλαγές) και ακολουθεί η διερεύνηση του ‘πώς’ σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το περιεχόμενο του αναλυτικού προγράμματος και οι απόψεις τους για τις χρησιμοποιούμενες διδακτικές πρακτικές. Συγκεκριμένα διερευνούν το εκπαιδευτικό σχήμα οργάνωσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας και λειτουργίας των μαθητών, επιλογή περιεχόμενου για την εκπαιδευτική δράση, το ρόλο του εκπαιδευτικού στην αλληλεπίδραση των μαθητών, τη διαχείριση των λαθών, την ενθάρρυνση της λεκτικής επικοινωνίας και της εξαγωγής συμπερασμάτων και την αξιολόγηση.

Η επιμορφωτική παρέμβαση διήρκεσε 2,5 μήνες και επίτρεψε τους εκπαιδευτικούς να λειτουργήσουν με τα χαρακτηριστικά μιας αναστοχαστικής κοινότητας μάθησης, με σχετικές δρραστηριότητες και υλικό. Τα βασικά δομικά στοιχεία του περιεχομένου της παρέμβασης καθορίστηκαν από τις τρεις βασικές γνωστικές συνιστώσες της ΜΓΠ (τι, ποιός, πώς) για τις μετρήσεις επιφανειών και από την καταγραφή των απόψεων των εκπαιδευτικών στο πρώτο ερωτηματολόγιο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα από τα ερωτηματολόγια συγκριτικά πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση αναφορικά με την ΜΓΠ συνοψίζεται στους πίνακες που ακολουθούν. Αρχικά, καταγράφονται οι γνώσεις των εκπαιδευτικών με την παρουσίαση του % που έλαβαν σχετικά με τη μέγιστη δυνατή βαθμολογία κατά μέσο όρο και στη συνέχεια εφαρμόζεται το Wilcoxon test για τη σύγκριση αυτών των μέσων όρων και καταγραφή του Effect Size %.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ του ‘τι’	Πριν	Μετά	*P*
1. Αναγνώριση Μαθηματικών Δράσεων	79%	88%	0,077
2. Αναγνώριση Μαθηματικών Ιδεών/Εννοιών	83%	94%	0,039
3. Γνώση των Διαστάσεων της Επιφάνειας	20%	80%	0,007
4. Αντίληψη των Μετασχηματισμών	45%	72,5%	0,067
5. Αναγνώριση των Αυθαίρετων Μονάδων	75%	100%	0,063

Μέτρησης			
6. Γνώση Διαδικασίας Άμεσων Συγκρίσεων	64%	80%	0,026
7. Γνώση Διαδικασίας Έμμεσων Συγκρίσεων	50%	75%	0,039
8. Γνώση Διαδικασίας Επανάληψης των Μονάδων και Σύνδεση του Αποτελέσματος με Αριθμό	85%	100%	0,128
9. Αντίληψη κάλυψης με Τετραγωνικές Μονάδες	76,7%	100%	0,016

Πίνακας 2. Γνώση του 'Τι;' πριν και μετά την παρέμβαση

Εξετάζοντας τις γνώσεις των εκπαιδευτικών πριν από την παρέμβαση σε ένα γενικά οικείο γνωστικό αντικείμενο όπως η μέτρηση της επιφάνειας, παρατηρούμε σχετικά καλά αποτελέσματα σε σχέση με τη σύνδεση τους με τα Μαθηματικά (1 και 2) όπως και τη επανάληψη των τετραγωνικών μονάδων (8, 9), αλλά μικρότερη κατανόηση στη χρήση των μονάδων και των συγκρίσεων (5, 6 και 7) και ακόμα χαμηλότερη στην αντίληψη των διαστάσεων της επιφάνειας και τη διατήρηση σε μετασχηματισμούς (3 και 4). Οι γνώσεις αυτές βελτιώνονται με στατιστικά σημαντική διαφορά μετά την επιμορφωτική παρέμβαση, όπως δείχνει το σχετικό τεστ, κατά ποσοστά από 25% ως 33% για τις ερωτήσεις 5, 6 και 7 και 61% και 300% για τις ερωτήσεις 3 και 4. Το σύνολο του ΜΟ της βαθμολογίας στην ενότητα αυτή εξελίσσεται από το 29,8 στο 35,9 (από το Max 42) και ο στατιστικός έλεγχος Wilcoxon (P=0,011) έδειξε ότι υπήρχε στατιστικά σημαντική βελτίωση στη βαθμολογία (effect size) που αγγίζει το 20,5%.

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τη σύγκριση των αποτελεσμάτων σχετικά με το 'πώς' που αφορά τη γνώση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος για τις διδακτικές πρακτικές στις μετρήσεις, σύμφωνα με τις ερευνητικές διαστάσεις που παρουσιάστηκαν προηγούμενα. Ο πίνακας των ΜΟ των βαθμολογιών που έλαβαν οι εκπαιδευτικοί εξετάστηκαν όμοια με το Wilcoxon test για τη σύγκριση των μέσων όρων.

Δείκτες	Πριν	Μετά	*P*	*ES* (%)
Min*	4,0	8,0		
ΔΤ	8,0	9,0		
Max	9,0	9,0		
ΜΟ	8,0	8,7	0,276	8,7%
ΤΑ	1,4	0,5		
SE	0,4	0,1		

*ΔΤ: Διάμεση Τιμή, ΜΟ: Μέσος Όρος, ΤΑ: Τυπική Απόκλιση, SE: Τυπικό Σφάλμα μέσου όρου, ES: Effect Size (Μέγεθος επίδρασης), μέγιστη βαθμολογία 9

Πίνακας 4: Σύγκριση ως προς την γνώση του 'πως', πριν και μετά την παρέμβαση

Το αποτέλεσμα αυτό δεν οδηγεί σε στατιστικά σημαντική διαφορά σε ότι αφορά στη γνώση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος για τις διδακτικές πρακτικές στις μετρήσεις πριν και μετά την παρέμβαση. Ωστόσο σημειώθηκε μια σχετική βελτίωση της τάξης του 8,7% πριν και μετά την παρέμβαση.

Μια ερμηνεία για το εύρημα αυτό σε σχέση με – όπως αναφέραμε – εκπαιδευτικούς με αρκετή εμπειρία και σπουδές, είναι ότι *η γνώση του αναλυτικού προγράμματος είναι μια ασφαλής γνώση, υποστηρικτική της εκπαιδευτικής διαδικασίας, την οποία επιδιώκουν οι εκπαιδευτικοί καθώς δεν επιδέχεται αμφισβητήσεις ειδικότερα σε τομείς, όπως η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών που εμπεριέχει εννοιολογικές δυσκολίες. Επισημαίνεται απλά ότι οι σημαντικές διαφορές των εκπαιδευτικών μετά τη παρέμβαση είναι δύσκολο να αναδειχθούν από τα στοιχεία αυτά που αφορούν απαντήσεις σε ένα ερωτηματολόγιο, όμως εντοπίζονται κυρίως από την παρατήρηση των διδακτικών πρακτικών στην τάξη.*

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου, ιδιαίτερα όσον αφορά το ‘τι’ και ‘πως’ δεν είναι ενιαία στους εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα οι εκπαιδευτικοί έχουν στοιχεία γνώσης περισσότερο πρακτικές και σε σύνδεση με την οικεία διαδικασία της μέτρησης και τη χρήση των τετραγωνικών μονάδων αλλά πιο περιορισμένη σχετικά τις συγκρίσεις που οδηγούν σε επικαλύψεις – επαναλήψεις και μετρήσεις που σχετίζονται πιο ουσιαστικά με το νόημα της μέτρησης επιφανειών. Το στοιχείο αυτό ενισχύεται από την περιορισμένη αντίληψη των διαστάσεων και των μετασχηματισμών που αφορούν την εννοιολογική αντίληψή της.

Αντίστοιχα αναφορικά με τον τρόπο διδασκαλίας, οι εκπαιδευτικοί που εξετάζονται καταγράφουν γνώσεις που συνδέονται με γενικότερα παιδαγωγικά θέματα ή συνδέονται με το πρόγραμμα σπουδών, αλλά πιο περιορισμένα ως προς τις κατάλληλες διδακτικές επιλογές και ανάδειξη εννοιών με κατάλληλες μαθηματικές δραστηριότητες. Το στοιχείο αυτό επιβεβαιώνεται κι από άλλες σχετικές έρευνες (Outhred, & McPhail, 2000).

Η επιμορφωτική παρέμβαση βοηθάει γενικά τους εκπαιδευτικούς να ενισχύσουν στις περιοχές που υστερούν στην Μαθηματική Γνώση Περιεχομένου, ειδικά ως προς το τι και το πώς. Ανάλογα ευρήματα υποστηρίζονται και από άλλες έρευνες, όπου η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχόμενου, γενικότερα, και όχι μόνο στα Μαθηματικά, ισχυροποιείται και αναδύεται, κυρίως όμως στο εμπειρικό πλαίσιο, όπου οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα της ανατροφοδότησης για τον τρόπο που τα διαφορετικά γνωστικά πεδία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και μετασχηματίζονται σε διδακτικό αποτέλεσμα (McCray, 2008). Είναι γενικότερο δεκτό, ότι τέτοιες μορφής παρεμβάσεις ενισχύουν τα διαφορετικά είδη γνώσεων που συνδέονται με την ΜΓΠ, ωστόσο υπάρχει η ανάγκη συστηματικής μελέτης και κατά συνέπεια βελτίωσης των εκπαιδευτικών της προσχολικής εκπαίδευσης ώστε να καταγραφούν θετικά αποτελέσματα στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5): 389–407.

Ball, D. L., Charalambous, C. Y., Thames, M., & Lewis, J. M., (2009). Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis, (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of IGPME, Vol. 1, p.121-125.

Clements, D., (2001). Mathematics in the preschool. Teaching Children Mathematics, 7(4): 270-275.

Clements, M.A. & Ellerton, N. (1995). Assessing the effectiveness of paper-and- pencil tests for school Mathematics. In B. Atwed & S. Flavel (eds.), Proceedings of 18th Annual Conference of Mathematics Education Group of Austalasia. Vol. 1, pp. 184 - 188. Darwin, NT:M. E. G. of Austalasia.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. Educational Studies in Mathematics, 61: 293- 319.

Ginsburg, H. P., Choy, Y. E., Lopez, L. S., Netley, R., & Chao-Yuan, C. (1997). Happy birthday to you: Early mathematical thinking of Asian, South American, and US children. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective, pp. 163- 208. East Sussex, UK: Psychology Press Ltd., Publishers.

Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S., (2008). Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. In L. Sherrod (Ed.), Social Policy Report (Vol. XXII): Society for Research in Child Development, Volume XXII, Number I, pp. 3-22.

Jullian L., Grieshaber, Susan J., & Diezmann, Carmel M. (2010) Early childhood teachers' mathematical content knowledge. In Chandra, V., Hudson, P., & Lee, K-T. (Eds.), STEM in Education Conference: Science, Technology, Engineering and Mathematics in Education Conference, Queensland University of Technology, Brisbane, Qld.

Κολιπέτρη, Ζ. (2015). Μαθηματική Παιδαγωγική Γνώση και διδακτικές πρακτικές στην προσχολική εκπαίδευση. Η περίπτωση μέτρησης της επιφάνειας. Διδακτορική Διατριβή (αδημοσίευτη). Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

Lehrer, R., (2003). Developing understanding of measurement. Στο J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifer (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics, pp. 179-192. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L., (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

McCray,J. (2008). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Relationships to teaching practices and child outcomes. Unpublished dissertation, Erikson Institute, Loyola University Chicago.

O'Keefe, M.,& Bobis, J.,(2008). Primary Teachers' Perceptions of Their knowledge and Understanding of Measurement. Στο M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 391-397.

Outhred, L., Mitchelmore, M., McPhail, D., & Gould, P. (2003). Count me into measurement: A program for the early elementary school. In D.H. Clements & G. Bright (Eds.), Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook, pp. 81-99. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Outhred, L., & McPhail, D., (2000). A framework for teaching early measurement. Στο J. Bana & A. Chapman (Eds.), *Mathematics education beyond 2000*. Proceedings of the 23rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol 2, σ.σ. 487-494. Sydney: MERGA.

Platas, L., M., (2008). Measuring Teachers’ Knowledge of Early Mathematical Development and Their Beliefs about Mathematics Teaching and Learning in the Preschool Classroom. Unpublished dissertation. University of California, Berkeley.

Samara, J. & Clements, D. H. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children. Routledge.I

Seo, K., & Ginsburg, H., (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. In Douglas H., Clements,, D. & Sarama J. (Eds.), Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education, p. 91-104

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2): 4–14.

Τζεκάκη, Μ. (2010). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-4: ΠΟΛΥΜΟΡΦΙΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΑΙΝΟΝΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΣΧΟΛΙΚΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΚΤΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΡΟΜΑ ΜΑΘΗΤΕΣ

Ανδρονικίδου Παρασκευή, Δατσογιάννη Αναστασία, Μελίδου Αναστασία
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΤΟΥ ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

Η μελέτη εστιάζει στα κοινωνικό – πολιτισμικά και εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά της συμμετοχής πέντε μαθητών από τη μειονότητα της Θράκης σε τάξεις μαθηματικών στο δημόσιο σχολειό αλλά και στο πλαίσιο ενισχυτικών μαθημάτων εκτός σχολειού. τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων υποδηλώνουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση των μαθηματικών ιδεών, την πριμοδότηση της διαδικαστικής και της αναπαραγωγικής σκέψης αλλά και την ελάχιστα προκλητική διδακτική αντιμετώπιση των συγκεκριμένων μαθητών στην ταξη των μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι τρόποι με τους οποίους τα παιδιά γλωσσικών μειονοτήτων κατορθώνουν να συμμετέχουν στη σχολική τάξη των μαθηματικών (Moschkovich, 2002) είναι εξαιρετικά περιορισμένοι. Κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μας σπουδών στην Αλεξανδρούπολη, μια περιοχή με σημαντικό αριθμό μαθητών της μειονότητας, προέκυψε η παρατήρηση ότι «αυτά τα παιδιά» στο σχολείο και ειδικά στην τάξη των μαθηματικών δεν έχουν χώρο να εκφραστούν, με τους δασκάλους τους να ισχυρίζονται ότι "δεν μπορούν". Η διαπίστωση αυτή, δημιούργησε τον κοινό προβληματισμό αν πράγματι αυτά τα παιδιά «δεν μπορούν» ή αν τελικά η μαθηματική αποτυχία τους κατασκευάζεται. Βασική επιδίωξη μας μέσω της παρούσας μελέτης είναι να σκιαγραφήσουμε την μαθησιακή πραγματικότητα των μαθητών αναφορικά με τα Μαθηματικά και την μάθηση τους, σε δυο διαφορετικά πλαίσια μάθησης (σχολείο –κοινωνία).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ

Ο Bishop (1998) υποστήριξε ότι η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί αναπόφευκτα μια διαδικασία «εξωτερικού πολιτισμικού συγχρονισμού», συνοδευόμενη από συναισθηματικές φορτίσεις και πολιτισμικές συγκρούσεις, οι οποίες είναι απαραίτητο να γίνουν αποδεκτές. Ωστόσο, μεγάλο ποσοστό εκπαιδευτικών φαίνεται να υιοθετεί την άποψη ότι τα

μαθηματικά είναι ένα σύνολο γνώσεων απαλλαγμένων από πολιτισμικές αξίες (Αγγελόπουλος & Μέντζα, 2001).
Συγκεκριμένα, σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες σε τεστ υπολογισμών και σε λεκτικά προβλήματα μαθηματικών τα σκορ των μαθητών με μητρική την εξεταζόμενη γλώσσα είναι πολύ υψηλότερα από εκεινα των παιδιών που μαθαίνουν την εξεταζόμενη γλώσσα ως δεύτερη (Acosta, 2003). Ειδικότερα, συχνά οι μαθητές στην τάξη των μαθηματικών καλούνται να ακολουθήσουν την «οπτική» του εκπαιδευτικού, για να απαντήσουν σε ερωτήσεις κλειστού τύπου (Ainley, 1989), ενώ ταυτόχρονα οι ανοιχτές ερωτήσεις χρησιμοποιούνται λιγότερο γιατί είναι δυσκολότερα διαχειρίσιμες στο πλαίσιο της τάξης (Χατζηγούλα, 2006). Σε ένα τέτοιο παραδοσιακό περιβάλλον ακόμα, το λάθος αποτελεί ατομικό πρόβλημα του μαθητή, ενώ δεν εξετάζονται οι βαθύτερες αιτίες του (Παντελέων, 2004). Ακόμα, το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί συχνά κάνουν υποθέσεις για τη μαθηματική ικανότητα ενός μαθητή με βάση το κοινωνικό-οικονομικό του προφίλ (Strutchens et al., 1997), σε συνδυασμό με πεποιθήσεις που κυριαρχούν στο σχολικό περιβάλλον, όπως ότι «μόνο οι ευφυείς μπορούν να ασχοληθούν με τα μαθηματικά» κ.α., επιδρά καθοριστικά στην πραγματική του απόδοση.
Τέλος, έρευνα η οποία διερεύνησε τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη σχολική επίδοση των μεταναστών μαθητών κατέληξε στο ότι οι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως οι μετανάστες μαθητές «ίσως» έχουν τις ίδιες εκπαιδευτικές ικανότητες με τους ντόπιους μαθητές και «ίσως» συμμετέχουν στην εκπαιδευτική διαδικασία, ενώ συγκεκριμένα στην Αλεξανδρούπολη οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι μάλλον δεν υπάρχουν ίσες ευκαιρίες μάθησης για όλο το μαθητικό πληθυσμό (Κούφου, Σκεντερίδου κα, 2007). Τα σύγχρονα λοιπόν επιστημονικά δεδομένα υποδεικνύουν την ανάγκη εκπαίδευσης και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών με όρους διαπολιτισμικούς (Φραγκουδάκη & Δραγώνα, 1997). Είναι χαρακτηριστική σε αυτήν την κατεύθυνση η θέση της Boaler (2008) ότι “η διαφορετικότητα, αντί να προκαλεί περιορισμό των ευκαιριών, μπορεί να αποτελέσει πηγή μάθησης”.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το *ερευνητικό πρόβλημα* της παρούσας εργασίας επιχειρεί να αποτυπώσει τα κοινωνικο-πολιτισμικά και εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά που καθορίζουν τον τρόπο εμπλοκής και συμμετοχής στα δρώμενα της τάξης των μαθηματικών ομάδας μειονοτικών Ρομά μαθητών σε δυο διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης: του δημόσιου σχολείου και ενός που λειτουργεί ενισχυτικά στα όρια της κοινότητας Ρομά. Τα μαθήματα στο εξωσχολικό περιβάλλον πραγματοποιούνταν σε Κέντρο Στήριξης του Προγράμματος Εκπαίδευσης των Μουσουλμανοπαίδων (ΚΕΣΠΕΜ), το οποίο δραστηριοποιείται στη Θράκη τα τελευταία δεκαπέντε περίπου χρόνια και στοχεύει, μέσα από δράσεις εντός και εκτός σχολείου, στη βελτίωση της ελληνομάθειας και της σχολικής επίδοσης των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, το ερευνητικό πρόβλημα εξειδικεύτηκε στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

α) Ποια η μαθηματική σκέψη που αξιοποιείται από τους μαθητές στο περιβάλλον του σχολείου και του ΚΕΣΠΕΜ; Είδη και παράγοντες.

β) Ποιες οι νοηματοδότησεις/ αντιλήψεις για το μειονοτικό μαθητή, καθώς και η διδακτική διαχείρισή του από τον εκπαιδευτικό στην τάξη των μαθηματικών;

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν πέντε μειονοτικοί (μουσουλμάνοι) μαθητές της Δ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου, κάτοικοι της περιοχής του Άβαντα στο νομό Έβρου. Οι μαθητές επιλέχθηκαν με μοναδικό κριτήριο τη σταθερότητα παρακολούθησης των μαθημάτων στα ΚΕΣΠΕΜ. Παρατηρήθηκαν συνολικά περίπου 115 ώρες (Ιανουάριος – Απρίλιος 2013), οι οποίες αναλώθηκαν σε εργασία πεδίου αφενός στο ΚΕΣΠΕΜ (55 ώρες) και αφετέρου στα τρία δημόσια σχολεία που φοιτούσαν οι συγκεκριμένοι πέντε μαθητές (60 ώρες).

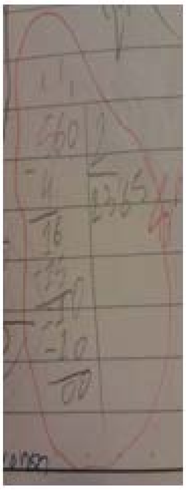
Για την πραγματοποίηση της έρευνας συνδυάστηκε η παρατήρηση μαθητών με συνεντεύξεις άτυπης μορφής με τους /τις εκπαιδευτικούς τους στα δύο περιβάλλοντα. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων ο ρόλος των ερευνητριών στο πλαίσιο του ΚΕΣΠΕΜ ήταν κυρίαρχα συμμετοχικός, καθώς ανέλαβαν το ρόλο βοηθών της εκπαιδευτικού, ενώ στο σχολείο απουσίαζε η εμπλοκή τους κατά την παρατήρηση. Πραγματοποιήθηκαν, επιπλέον, άτυπες συνεντεύξεις με τη μορφή συζήτησης (Patton, 1980) με τους εμπλεκόμενους εκπαιδευτικούς που αφορούσαν τις αντιλήψεις τους για το μειονοτικό μαθητή. Τα ερωτήματα διατυπώνονταν κατά τη φυσική ροή της συζήτησης, καθώς δεν υπήρχαν προκαθορισμένες ερωτήσεις ή ζητήματα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Καθένα από τα 85 συμβάντα που αναγνωρίστηκαν, μελετήθηκε και αναλύθηκε βάσει της διαδικασίας μάθησης που αναδείκνυε, καθώς και των διδακτικών πρακτικών που εντοπίστηκαν σε αυτό. Για αυτό το σκοπό αξιοποιήθηκε η τεχνική της ανάλυσης περιεχομένου, στο πλαίσιο της οποίας πραγματοποιήθηκαν πολλαπλές αναγνώσεις των καταγραφών κάθε ερευνήτριας ξεχωριστά, με σκοπό τη θεματική κατηγοριοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, το περιβάλλον *μάθησης* χαρακτηρίστηκε ανάλογα με τον αν πριμοδοτούσε την εννοιολογική ή τη διαδικαστική σκέψη (Van De Walle, 2005), ενώ αναφορικά με τη *διδασκαλία* επιλέχτηκε η εστίαση στη *διαχείριση των ερωτήσεων* και των *λαθών* εκ μέρους των εκπαιδευτικών, καθώς και στο είδος των *διδακτικών* τους *παρεμβάσεων*. Παρακάτω, η εμπλοκή των τριών ερευνητριών υποδεικνύεται με τα σύμβολα ΕΕα, ΕΕβ και ΕΕγ, ενώ η διδακτική παρέμβαση συμβολίζεται με «Δ».

Μαθηματική σκέψη και μάθηση των μαθηματικών (ΕΕ1)

Στα 70 από τα 84 συμβάντα η σκέψη ήταν διαδικαστικού τύπου (πρόκειται για γνώση των κανόνων και των πράξεων που χρησιμοποιεί κάποιος, όταν εκτελεί τις συνηθισμένες μαθηματικές ασκήσεις). Οι μαθητές φάνηκε να εμπλέκονται κυρίως σε διαδικασίες αλγοριθμικού χαρακτήρα και εξατομικευμένης εξάσκησης. Σχεδόν τα μισά επεισόδια που εντάσσονται στο διαδικαστικό είδος σκέψης των μαθητών αφορούν σε στείρα αναπαραγωγική διαδικασία, όπου η νέα γνώση είχε ελάχιστη σχέση με τις προηγούμενες εμπειρίες των παιδιών. Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ενδεικτικό:



ΕΕβ: Για κοίταξε λίγο το αποτέλεσμα Μεχμέτ. Σου φαίνεται σωστό;

Μεχμέτ: Ναι κυρία.

ΕΕβ: Για πες μου λίγο ποιους αριθμούς έχουμε να διαιρέσουμε;

Μεχμέτ: Το 560 με το 2.

ΕΕβ: Και τι σημαίνει διαιρώ; για θύμισέ μου λίγο…

Μεχμέτ: Να τα χωρίσω κυρία.

ΕΕβ: Ωραία. Δηλαδή σύμφωνα με αυτά που μου είπες αν χωρίσω το 560 σε 2 μέρη το κάθε μέρος θα έχει 2.365; γιατί αυτό το αποτέλεσμα έβγαλες στη διαίρεση.

Μεχμέτ: ………… [Επεισόδιο 14Βα, 3/04/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

Σε γενικές γραμμές φάνηκε να μη δόθηκαν οι ευκαιρίες για διάδραση σε καταστάσεις, οι οποίες συνεπάγονται συλλογιστική ανώτερου βαθμού. Ωστόσο, στο ακόλουθο επεισόδιο φαίνεται ο μαθητής να είναι άτυπα εξοικειωμένος με τις ιδιότητες των πράξεων και να αντιλαμβάνεται πως ο συνδυασμός διαφορετικών κάθε φορά προσθετέων μπορεί να έχει το ίδιο άθροισμα. Λίγο πριν λήξει το μάθημα στο ΚΕΣΠΕΜ, βρίσκονταν ο Βαχίντ, ο Ιμπραήμ και η Χαλιλέ στο ίδιο τραπέζι. Ενώ λοιπόν σε ένα σχετικό παράδειγμα λεκτικά ή γραπτά δεν μπορούσαν να αποτυπώσουν τους πιθανούς προσθετέους του αριθμού 15, στην επαφή τους με τα τραπουλόχαρτα, ο Βαχίντ αποτύπωσε το 15 με περίπου 11 δυνατούς συνδυασμούς, αναζητώντας τον κατάλληλο αριθμό κάθε φορά από την τράπουλα (στη φωτογραφία φαίνονται περίπου 4 συνδυασμοί).

[Επεισόδιο 22Βα , 30/01/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

Ο παράγοντας «γλώσσα» στη μάθηση των μαθηματικών (ΕΕ1)

Στα 24 από τα 84 συμβάντα που κυριαρχεί ως μοναδικό σύστημα αναπαράστασης η γλώσσα, γίνεται φανερό πως οι μαθητές δυσκολεύονται να επικοινωνήσουν μόνο προφορικά. Ενδεικτικά είναι τα ακόλουθα επεισόδια:

Δ: Γράψε τον αριθμό οκτακόσια πέντε

Βαχίντ: 8.005

Δ: Λοιπόν Βαχίντ τι σημαίνει τριψήφιος;

Βαχίντ: (κουνάει το κεφάλι) Δεν ξέρω..

[Επεισόδιο 69Βα, 2/03/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

Σε 60/84 συμβάντα αυτής της φάσης φαίνεται να υπάρχει συνδυασμός γλωσσικού αναπαραστατικού συστήματος και άλλων (όπως γραπτά σύμβολα, χρήση και παραγωγή εικόνων, διαγράμματα, αναγνώριση-επέκταση μοτίβου και χρήση χειραπτικού υλικού), οι μαθητές φαίνεται να εμπλέκονται ενεργά.

Διδακτικές πρακτικές (ΕΕ2)

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με βάση την κατηγορία διαχείρισης ερωτήσεων, διαχείρισης λαθών και διδακτικών παρεμβάσεων. Ειδικότερα:

(i) *Διαχείριση ερωτήσεων*: Εντοπίστηκαν 27/84 σχετικά συμβάντα. Παρατηρήθηκε ότι όλες οι ερωτήσεις προέρχονταν αποκλειστικά από το δάσκαλο και απευθύνονταν στους μαθητές και όχι το αντίστροφο. Αναγνωρίστηκαν τρεις κατηγορίες ερωτήσεων: Ανάκλησης λέξεων ή ορισμών (9), Εκτέλεσης πράξεων και αλγορίθμων (17) και οι Καθοδηγητικές (1). Ενδεικτικά, καταγράφηκαν ερωτήσεις όπως (*«Τι είναι το εμβαδόν;».. «Τι σημαίνει τριψήφιος;»..)*, όπου οι εκπαιδευτικοί ρωτούν αναμένοντας την ανάκληση του «κανόνα». Οι περισσότερες από τις ερωτήσεις που στόχευαν στην εκτέλεση αλγορίθμων επιζητούσαν μηχανικές ή αναπαραγόμενες απαντήσεις. Σχετικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

«100.000-1 πόσο κάνει;»... «Έλα στον πίνακα να κάνεις την κάθετη πρόσθεση 18.500 + 250.»… «Μεχμέτ, πόσο κάνει 4 φορές το 1,25;»…. «199.998 +1 = ;»

Σχετικά με ερωτήσεις καθοδήγησης ενδεικτικό παράδειγμα είναι το ακόλουθο στο οποίο η υψηλή καθοδήγηση επισκιάζει το «βαθύτερο» μαθηματικό περιεχόμενο και στόχο: Δ: «Θα διαβάσεις τον αριθμό;(20.000)».. Δ: «Βαχίντ, θα γράψεις έναν αριθμό τριψήφιο».

Ωστόσο, εντοπίστηκαν ορισμένες ερωτήσεις, αποκλειστικά στα μαθήματα του ΚΕΣΠΕΜ, οι οποίες ήταν ανοιχτές και ζητούσαν από τους μαθητές ανάλυση σύνθεση αιτιολόγηση και εκτίμηση. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

«Μπορεί δηλαδή 79.000 και 1 να κάνει 79.100;»…. «Έχει κάποιο παιδί καμία ιδέα για το πώς μπορούμε να σχηματίσουμε το 8»..; «Βλέπεις που και στην μια και στην άλλη έχουμε11; Είναι τα ίδια τα 8,3 και τα 11;»

(ii) *Διαχείριση λαθών*: Αναγνωρίστηκαν 18/84 περιπτώσεις διδακτικής της διαχείρισης των λαθών από τους εκπαιδευτικούς, η πλειοψηφία των οποίων συνάδουν με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί είτε αγνοούν εντελώς το λάθος του μαθητή, είτε παρεμβαίνουν δίνοντας απευθείας οι ίδιοι τη σωστή απάντηση. Ενδεικτικά παραδείγματα αποτελούν τα ακόλουθα:

Δ: Πάμε λίγο να δούμε πόσο κάνει; 8:2=4; 80:20 = ;

Αχμέτ: 40

Δ: Συνεχίζει: «8:4=2», «80:40=2», «800:400=2» … Αλλά, όταν έχω 80.000:4= πόσο;

Βαχίντ: Το 1 θα γράψω.

Δ: Γιατί; Το 1 αυτό σημαίνει 1 εκατοντάδα και θα την πάω δίπλα στις εκατοντάδες. Άρα θα γράψω το 6. [Επεισόδιο 54Βα, 16/03/2013, Σχολείο]

Σε ελάχιστα συμβάντα υπήρξε μία διαφορετική προσέγγιση διαχείρισης του λάθους. Τα συμβάντα καταγράφηκαν μόνο στο ΚΕΣΠΕΜ και σε αυτά παρατηρούμε ενεργό διάλογο μεταξύ μαθητή και δασκάλου, ώθηση του μαθητή για παραγωγή εικονικής αναπαράστασης και χρήση αντιπαραδειγμάτων από τον δάσκαλο.

(iii) *Διδακτικές παρεμβάσεις*: Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που προτείνει ο Σακονίδης (2003), προκύπτουν τρεις διακριτές ομάδες επεμβάσεων: η επαναδιατύπωση του προβλήματος, η παροχή ενδείξεων και βοήθειας για τη λύση και η επιβολή της λύσης. Στην παρούσα έρευνα εντοπίστηκε κυρίως η παροχή βοήθειας και η επιβολή λύσης, με τη δεύτερη να υπερισχύει. Στο παρακάτω επεισόδιο διαφαίνεται η παρέμβαση με την μορφή της επιβολής της λύσης .

Δ: Λέγε την πρόσθεση! Δείχνει ένα-ένα τα ψηφία και λέει σχεδόν μόνος του: 9+9 Πόσο;[…] προς την ΕΕα: Βλέπετε; Δάχτυλα! Ο καθηγητής σας στο πανεπιστήμιο σας αφήνει να μετράν τα παιδιά με τα δάχτυλα στην Δ΄ τάξη, ε;

Χαλιλέ: 9+9=18

Δ: Μάλιστα. Και τι γράφω;

Χαλιλέ: 18

Δ: 8! Και ένα το κρατούμενο..Παρακάτω! 9+9 πόσο;

Χαλιλέ: 18!

Δ: Ναι, και ένα το κρατούμενο

Χαλιλέ: 18…19…

Δ: Ωραία...(γράφει το 9) 9+9;

Χαλιλέ: 18

Δ: Και ένα;

Χαλιλέ: 19

Δ: Μάλιστα…Το υπόλοιπο το γράφει μόνος του…

[Επεισόδιο 59Βα, 11/04/2013, Σχολείο]

Ακόμα, δεν παρατηρήθηκαν σημεία όπου ο μαθητής ενθαρρύνεται να αναπτύξει το συλλογισμό του χωρίς να διακόπτεται από το δάσκαλο.

Δηλώσεις εκπαιδευτικών (ΕΕ2)

Οι δηλώσεις των εκπαιδευτικών μελετήθηκαν ως προς το περιεχόμενο τους σχετικά με τη μάθηση του μειονοτικού μαθητή, τη γνώση, τη διδασκαλία και την ομάδα των μαθητών της μειονότητας, γενικά. Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με τις δηλώσεις, φαίνεται η μάθηση του μαθητή να αποπλαισιώνεται από ατομικές ευθύνες του εκπαιδευτικών, καθώς τείνουν να αναζητούν αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ της χαμηλής επίδοσης, της ανίσχυρης εμπλοκής και άλλων εξωτερικών παραγόντων όπως η δύσκολη φύση των μαθηματικών ή η σχολική διαρροή των μαθητών μη συνυπολογίζοντας την μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

Δ: «Τα παιδιά αυτά δεν καταλαβαίνουν πολλά ,το επίπεδο τους είναι Α΄ Δημοτικού». [Επεισόδιο 4ΒΒ, 26/3/2013, Σχολείο]

«Η Χαλιλέ, όπως και οι άλλοι τέτοιοι μαθητές, δεν συμμετέχουν. Όπως και άλλα παιδιά χριστιανοί δεν συμμετέχουν. Δεν θα δείτε τίποτα.»

[Επεισόδιο 2ΒΒ, 11/4/2013, Σχολείο]

Αναφορικά με τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική γνώση που κατακτά ο μειονοτικός μαθητής, το ακόλουθο απόσπασμα είναι χαρακτηριστικό:

«Δεν γίνεται να ξεπεράσουν οι μαθητές αυτοί ένα εφικτό επίπεδο, στο οποίο, κατά την άποψη μου, έχουν καταφθάσει και δεν μπορούν να συμμετάσχουν, τους έχω 4 χρόνια αυτούς τους 2 μαθητές και χάρις εμένα έφθασαν εδώ που έφτασαν» [Επεισόδιο 5ΒΒ, 26/3/2013, Σχολείο]

Γεγονός είναι ότι μόνο μια δήλωση έχει καταγραφεί σχετικά με προσωπικούς στόχους ενός εκπαιδευτικού απέναντι στη γνώση / μάθηση του μαθητή [Επεισόδιο 8ΒΒ]:

Δ: «Αυτό που με ενδιαφέρει είναι τα παιδιά αυτά να μην μείνουν αναλφάβητα, φεύγοντας από το σχολείο, να μπορεί για παράδειγμα ο Α, ως μεγάλος να διαβάζει και να κατανοεί μια αίτηση που πρέπει να συμπληρώσει και, γενικά, να μην είναι αναλφάβητος» [Επεισόδιο 8ΒΒ, 29/3/2013, Σχολείο]

Για τη διδασκαλία των μαθηματικών, φαίνεται οι εκπαιδευτικοί να έχουν πολύ χαμηλές προσδοκίες για τη σχολική επίδοση των παιδιών του δείγματος. Χαρακτηριστική δήλωση είναι η εξής : «Είδες πόσο δύσκολο είναι να εμπλέξω παιδιά όπως η Χαλιλέ στο μάθημα; Βλέπεις προσπαθώ αλλά… δεν σηκώνει χέρι…».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αναφορικά με το *πρώτο ερευνητικό ερώτημα*, το μαθησιακό περιβάλλον της τάξης φάνηκε να προωθεί τη **διαδικαστική** σκέψη στα μαθηματικά, με τη νέα γνώση να συνδέεται ελάχιστα με την προηγούμενη (Van de Walle, 2005), ενώ μονοπωλεί το «μοντέλο μετάδοσης γνώσης», απο τον εκπαιδευτικό (Bishop, 1988).Οι στιγμές που δίνεται έμφαση στην **εννοιολογική κατανόηση**, ήταν ελάχιστες (κυρίαρχα στο ΚΕΣΠΕΜ) και εμφανίστηκαν κυρίως, όταν επιτεύχθηκε η μεταφορά των εννοιών σε διαφορετικά είδη αναπαράστασης. Ακόμα, ιδιαίτερη έμφαση στην γλώσσα που μάλλον αποκλείει τα παιδιά «αυτά» από την ουσιαστική πρόσβαση τους σε μαθηματικά νοήματα. Διακρίνεται ωστόσο η τάση των μαθητών να εμπλέκονται ενεργά σε περιβάλλοντα που δεν είναι αποκλειστικά γλωσσικά καθώς σύμφωνα με την Κολέζα (2009), όταν διευρύνονται τα συστήματα αναπαράστασης, οι μαθητές δείχνουν συχνά μια παραγωγική νοηματοδότηση.

Σχετικά με το *δεύτερο ερευνητικό ερώτημα*, και συγκεκριμένα τη ***διαχείριση ερωτήσεων*** παρατηρήθηκε πως όλες οι ερωτήσεις διατυπώνονται μονόδρομα μόνο από το/την δάσκαλο/α προς τους μαθητές. Πρόκειται για ερωτήσεις *κλειστού τύπου* (Ainley, 1989) που δεν έχουν «βαθύτερο» μαθηματικό περιεχόμενο και στόχο. Αντιθέτως, λίγες ήταν οι στιγμές, κατά τη διάρκεια των οποίων σημειώθηκαν ερωτήσεις ανοιχτές ή γνήσιες (Smith,1986). Αναφορικά με τη διδακτική πρακτική της ***διαχείρισης των λαθών,*** τα ευρήματα συνάδουν με την παραδοσιακή προσέγγιση του λάθους όπως αναφέρει η Τζεκάκη (2008). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε μια τάση από τους εκπαιδευτικούς να μην αποδέχονται το λάθος του μαθητή και να το ενοχοποιούν. Αξίζει, ωστόσο να επισημανθούν οι ελάχιστες στιγμές κατά τη διάρκεια της έρευνας (κυρίως στο ΚΕΣΠΕΜ), όπου το λάθος φάνηκε να προσεγγίζεται με εποικοδομητικό τρόπο. Σχετικά με τις ***παρεμβάσεις*** ως διδακτική πρακτική, αυτές φάνηκαν να κινούνται μόνο μεταξύ της παροχής βοήθειας και της επιβολής της λύσης (Σακονίδης κ.ά., 2003), με τη δεύτερη να υπερισχύει ακυρώνοντας τις πρωτοβουλίες των μαθητών.

Όσον αφορά τις ***απόψεις των εκπαιδευτικών περί μάθησης του μειονοτικού μαθητή***, αυτές έρχονται σε συμφωνία με προηγούμενη ερευνα η οποία καταλήγει στο γεγονός ότι στην Αλεξανδρούπολη οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι μάλλον δεν υπάρχουν ίσες ευκαιρίες μάθησης για όλο το μαθητικό πληθυσμό (Κούφου, Σκεντερίδου κα., 2007). Στην παρούσα έρευνα ωστόσο, διακρίνεται συγκεκριμένα η μάθηση του μαθητή να αποπλαισιώνεται από ατομικές ευθύνες των εκπαιδευτικών. Οι τελευταίοι, αποδίδουν την «έλλειψη γνώσεων» στον ίδιο τον μαθητή, λόγω της ανίσχυρης εμπλοκής του, ή της σχολικής διαρροής ή ακόμα και στη δυσκολία της φύσης των μαθηματικών ενώ φαίνεται να απουσιάζει ο αναστοχασμός επί της διδασκαλίας.

Καταλήγοντας, αναφορικά με τη μαθηματική σκέψη που ενθαρρύνεται στα δυο περιβάλλοντα, παρατηρείται η πριμοδότηση της διαδικαστικής. Ακόμα, εντοπίζεται η δυσκολία των μαθητών να διαπραγματευτούν μαθηματικές έννοιες, όταν η ελληνική γλώσσα αποτελεί το αποκλειστικό μέσο αναπαράστασης. Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές, συνάδουν με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί τείνουν να αποδίδουν τις αποτυχίες αυτών των μαθητών σε ατομικά τους χαρακτηριστικά και σε εξωτερικούς παράγοντες, παρακάμπτοντας την ενδεχόμενη προσωπική συμβολή τους σε αυτήν. Τέλος, οι προσδοκίες τους για την ομάδα εστίασης παρουσιάζονται ιδιαίτερα χαμηλές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Acosta, B., (2015). Answering the Question....:How Can I Teach Mathematics to Students Who Have Cognitive and Behavioral Disabilities and Who Come from Diverse Cultural and Language Backgrounds? Ανακτήθηκε στις 10/10/2013, από http://www.emstac.org/resources/cladmath.doc

Αγγελόπουλος, Η., & Μέντζα, Α. (2001). Διδάσκοντας Μαθηματικά σε μια πολυπολιτισμική σχολική τάξη της Α/θμιας εκπ/σης. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας* (18), 99-107.

Ainley, J. (1989). *Telling Questions*. *Mathematics Teaching*, 118,24-26.

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation: A Cultural Perspective on mathematics education.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. (1998). *Mathematics education in its cultural context.* Educational. Studies in Mathematics, 19, 179-191.

Boaler, J. (2008a). *Promoting "relational equity" and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach.* British Educational ResearchJournal, 34(2), 167-194.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Κοφού, Ε. Σκεντερίδου, Χ. &Σωτηρίου, Μ. (2007). Απόψεις εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης , για τη σχέση σχολικής επίδοσης και σχολικής προσαρμογής, μαθητών διάφορων εθνικών ομάδων στις πόλεις Ηρακλείου

και Αλεξανδρούπολης. (Πτυχιακή εργασία) Ανώτατο Τεχνολογικό Ίδρυμα Κρήτης, Ηράκλειο.
Moschkovich, J. (2002). *A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners*. Mathematical Thinking and Learning (Special issue: Diversity, equity, and mathematical learning), 4(2-3), 189-212.
Νικολάου, Γ. (2000). Ένταξη *και Εκπαίδευση των Αλλοδαπών Μαθητών στο Δημοτικό Σχολείο*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
Παντελέων, Γ. Χ. (2004). *Η σημασία του λάθους στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης και στη διδακτική.* Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών-Κύπρου.
Patton, M. Q., (1980). *Qualitative Evaluation Methods*. Beverly Hills: Sage Publications.

Σακονίδης, Χ. (2003). Μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών από το μαθητή στις κοινότητες πρακτικής στην τάξη. Στο: Α. Φραγκουδάκη και Θ. Δραγώνα (Επιμ.), *Ομοιότητες και Διαφορές: Αναζητώντας νέους δρόμους στην εκπαίδευση,* Αθήνα: ΥΠΕΠ-ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ.

Smith, J. (1986). *Questioning Questioning*. Mathematics Teaching, 118, 47.
Schommer-Aikins, M. (2002). An evolving theoretical framework for an epistemological belief system. In B.K. Hofer & P.R. Pintrich (Eds.), *Personal Epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp.103-118). Mahwah, NJ: Erlbaum.
Strutchens, M., Thomas, D. & Perkins, F. D. (1997). Mathematically empowering urban African American students through family improvement. In J. Trentacosta, & M. J. Kenney, (Eds.), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom: NCTM 1997 Yearbook* (pp.230-235). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Van De Walle J. A. (2005). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία. Αθήνα: Τυπωθήτω– Γ. Δαρδανός.
Φραγκουδάκη, Α, & Δραγώνα, Θ. (1997). *Τι είν' η πατρίδα μας; Εθνοκεντρισμός στην Εκπαίδευση.* Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Χατζηγούλα, Α. (2006). *Ο διάλογος μέσα από την αλληλουχία ερώτηση-απάντηση ως μορφή επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών.* Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών- Κύπρου.

ΜΑΘΗΤΕΣ ΡΟΜΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΟΥΝ ΧΑΡΤΗ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Βαλαή Φανή, Γκανά Ελένη, Σταθοπούλου Χαρούλα, Γκόβαρης Χρήστος
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
fvalai@ece.uth.gr, egana@uth.gr, hastath@uth.gr, govaris@uth.gr

Στην έρευνα που παρουσιάζεται εδώ, και η οποία αποτελεί μέρος έρευνας δράσης, μια μικρή σχολική κοινότητα με μαθητές Ρομά προσχολικής ηλικίας εμπλέκεται σε διαδικασίες προσδιορισμού στο χώρο—χωρικές αναπαραστάσεις—με το χάρτη να αποτελεί λειτουργικό μέσο σύνδεσης αλλά και μετασχηματισμού των βιωματικών τους εμπειριών. Κεντρικό ερώτημα αποτελεί η ανάπτυξη της χωρικής σκέψης στα νήπια Ρομά.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια έχει αναγνωρισθεί διεθνώς αλλά και στην Ελλάδα, όπως αποτυπώνεται και στα νέα αναλυτικά προγράμματα, ο καθοριστικός ρόλος της προσχολικής εκπαίδευσης για τη μετέπειτα εκπαιδευτική πορεία των παιδιών, ιδιαίτερα των μειονοτικών και περιθωριοποιημένων ομάδων. Η προσχολική εκπαίδευση εμφανίζεται να αναιρεί πολλούς από τους κοινωνιο-γνωστικούς περιορισμούς που αναδύονται κατά τη σχολική φοίτηση των μαθητών αυτών, συμβάλλοντας έτσι, μεταξύ άλλων, στη διασφάλιση ίσων εκπαιδευτικών ευκαιριών για όλους (Magnuson, Meyers, Ruhm & Waldfogel, 2004). Σύμφωνα με τους Becker και Biedinger (2006) και τους Tietze, Lee και Mierau, (2008) το εκπαιδευτικό όφελος συναρτάται άμεσα με το διάστημα φοίτησης στο Νηπιαγωγείο, καθώς και την ποιότητα των παιδαγωγικών πρακτικών, οι οποίες αναφέρονται σε χαρακτηριστικά της παιδαγωγικής σχέσης και διδασκαλίας, όπως εύρος και συχνότητα των μαθησιακών ερεθισμάτων που βιώνουν οι μαθητές στο Νηπιαγωγείο, είδος των παιδαγωγικών αλληλεπιδράσεων, εκπαιδευτικές διαδικασίες που επιτρέπουν και στηρίζουν πολύπλευρες μορφές μάθησης.

Η πολιτισμικά ανταποκρινόμενη διδασκαλία (cultural responsive teaching) εμφανίζεται τα τελευταία χρόνια στη βιβλιογραφία ως πρόταση η οποία απαντά και συνθέτει τα παραπάνω αιτήματα[4] (Gay, 2010). Με βασικό χαρακτηριστικό την επικύρωση των πολιτισμικών εμπειριών που φέρουν οι μαθητές συμβάλλει στην ενδυνάμωσή τους στο ρόλο του μαθητή: ουσιαστική συμμετοχή στις σχολικές πρακτικές, αυτο-αποτελεσματικότητα και λήψη πρωτοβουλιών. Δημιουργεί, επίσης, τις κατάλληλες προϋποθέσεις, ώστε η σχολική γνώση και οι δεξιότητες τις οποίες καλλιεργεί να συνδεθούν

[4] Η προσαρμοσμένη παιδαγωγικής/διδασκαλία στις ανάγκες των πολιτισμικά διαφορετικών μαθητών αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως: πολιτισμικά ανταποκρινόμενη, πολιτισμικά κατάλληλη, πολιτισμικά συμβατή, πολυπολιτισμική κλπ (Irvin & Armento, 2001:4)

με την εμπειρία των μαθητών και τα πλαίσια αναφοράς τους, παρέχοντάς τους έτσι ένα προσωπικό νόημα για το πεδίο διδασκαλίας (Ladson-Billings, 1995; Gay, 2002). Η διδασκαλία μετασχηματίζεται σε ένα «υβριδικό μαθησιακό χώρο» (Gutiérrez, Baquedano-López & Tejeda, 1999; Moje, Ciechanowski, Kramer, Ellis, Carrillo & Collazo, 2004; Barton, Calabrese & Tan, 2009) που επιτρέπει στους μαθητές με μειονοτική καταγωγή να εμπλακούν στη μαθησιακή διαδικασία για να διαπραγματευτούν και να κατανοήσουν τα σχολικά περιεχόμενα, δημιουργώντας έτσι προϋποθέσεις ως προς την ένταξή τους στο εκπαιδευτικό πλαίσιο και δυναμικές ως προς τη σχολική τους επίδοση.

Η παρούσα έρευνα, ακολουθεί τις αρχές της πολιτισμικά ανταποκρινόμενης παιδαγωγικής και αποτελεί μέρος ενός προγράμματος για την εκπαίδευση Ρομά μαθητών[5]. Η εμπλοκή με το ρόλο της εκπαιδευτικού της πρώτης συγγραφέως και με το ρόλο των υποστηρικτών της διαδικασίας (διδασκαλία μαθηματικών και γλώσσας) των άλλων μελών αφορά σε μια έρευνα-δράση που υλοποιήθηκε σε νηπιαγωγείο της ευρύτερης περιοχής της Λάρισας, στο οποίο φοιτούσαν Ρομά μαθητές, στο πλαίσιο εκπαιδευτικού προγράμματος. Η έρευνα δράσης υποστηρίχτηκε από τους συμμετέχοντες στο πρόγραμμα—εκπαιδευτικούς και ακαδημαϊκούς— μέσω μιας κοινότητας πρακτικής (Γκανά, Σταθοπούλου & Γκόβαρης, 2013), εστιασμένη στην ουσιαστική αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μέλη—συνέργεια στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων και ανατροφοδότηση στην υλοποίησή της. Καθοριστική συνιστώσα ως προς το σχεδιασμό της διδασκαλίας αποτέλεσε επίσης η επιτόπια διερεύνηση βιωματικών περιστάσεων και η αναγνώριση γνωσιακών πόρων που έφεραν τα νήπια από το πολιτισμικό τους περιβάλλον.
Το πραγματολογικό υλικό που παρουσιάζεται και αφορά στη διδασκαλία των μαθηματικών εντάσσεται σε σειρά επάλληλων κύκλων σχεδιασμού, υλοποίησης και αναστοχασμού της διδασκαλίας, όπως προβλέπει η μεθοδολογία της έρευνας δράσης. Η εστίαση στον προσανατολισμό στο χώρο που επιχειρεί η παρούσα εργασία αποτελεί επίσης μέρος ενός ευρύτερου κύκλου διδασκαλιών που πραγματεύονταν τις τρεις (αρίθμηση, μέτρηση, προσδιορισμός στο χώρο) από τις έξι παγκόσμιες μαθηματικές δραστηριότητες του Bishop (1988). Σε επίπεδο αναλυτικού προγράμματος

[5] Η εργασία στηρίζεται σε δεδομένα του έργου «Εκπαίδευση των παιδιών Ρομά στις περιφέρειες Ηπείρου, Ιονίων Νήσων, Θεσσαλίας και Δυτικής Ελλάδας», 2010-2015 (Κ.Π. 304263).

για το νηπιαγωγείο, εντάσσεται στην ενότητα «χώρος και γεωμετρία» (Οδηγός Νηπιαγωγού, 2011).

Για την προσέγγιση εννοιών χώρου (locating) αξιοποιήθηκε η αφήγηση ενός παραμυθιού και ο χάρτης ως διαμεσολαβητικά εργαλεία και ενσωματώθηκαν οι διαισθητικές γνώσεις και νοητικές αναπαραστάσεις που οι μικροί μαθητές έφεραν από την καθημερινότητά τους. Το κεντρικό ερώτημα αφορούσε στη διερεύνηση της κατανόησης μαθηματικών εννοιών σχετικών με το προσδιορισμό στο χώρο και τη δυνατότητα διερεύνησης του συμβολικού τους ρεπερτορίου.

2. ΧΑΡΤΗΣ ΚΑΙ ΧΩΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η χωρική σκέψη αποτελεί μια σημαντική ανθρώπινη νοητική ικανότητα που συμβάλλει, από την προσχολική ακόμα ηλικία, στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και κυρίως της γεωμετρικής (Καλμπουρτζής, Τζεκάκη & Βρύσης, 2014, σ. 681). Όπως, επίσης, σημειώνεται στο National Council of Teachers of Mathematics (1989:48) η γεωμετρία και η χωρική σκέψη:

> βοηθούν στην κατανόηση του χώρου, στον οποίο το παιδί ζει, αναπνέει και κινείται και τον οποίο πρέπει να μάθει να γνωρίζει, να εξερευνά, να κατακτά προκειμένου να ζει, να αναπνέει και να κινείται καλύτερα σε αυτόν.

Η χωρική σκέψη περιλαμβάνει δύο βασικά στοιχεία: το χωρικό προσανατολισμό και τη δημιουργία αναπαραστάσεων γύρω από αυτόν (Καλμπουρτζής κ. ά. 2014). Σύμφωνα με τους Clements & Sarama (όπως αναφέρεται στο Καλμπουρτζής κ. ά., 2014) ο χωρικός προσανατολισμός είναι η ικανότητα εντοπισμού μιας θέσης και πλοήγησης στο χώρο, δηλαδή η ικανότητα κατανόησης και ανταπόκρισης στις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών θέσεων στο χώρο αναφορικά με τη δική μας θέση. Τα μικρά παιδιά μαθαίνουν πρακτικές πλοήγησης από πολύ μικρή ηλικία και συχνά χρησιμοποιούν γεωμετρικές πληροφορίες για τον περιβάλλοντα χώρο και για την επίλυση ζητημάτων προσδιορισμού σ’αυτόν (Gelman & Williams, 1997). Σε ό,τι αφορά στη δημιουργία οπτικών αναπαραστάσεων, φαίνεται ότι, οι άνθρωποι ακολουθούν συγκεκριμένες διεργασίες. Αρχικά, δημιουργούν μια εικόνα, και έπειτα, την εξερευνούν ενώ στη συνέχεια, διατηρούν εικόνες για χρήση σε άλλη διεργασία και, τέλος, τις μετασχηματίζουν (Clements & Sarama, 2009). Σύμφωνα με τους Kaput, Noss and Hoyles (2002:16):

> Αυτό το είδος γνώσης —η χωρική γνώση— είναι εξαιρετικά σημαντική, γιατί ξεκλειδώνει δυναμικά τα μαθηματικά που υπάρχουν αόρατα μέσα στα συστήματα και τα οποία εμείς χρησιμοποιούμε, αλλά μέχρι στιγμής κατανοούμε πολύ λίγο.

Ερευνητές με ενδιαφέρον στην εκπαίδευση των μαθηματικών και της γεωγραφίας έχουν δώσει έμφαση στη σημασία της κατανόησης του χάρτη ως εργαλείο που συμβάλλει στη χωρική και γεωγραφική κατανόηση (Walker, 1980). Σύμφωνα με τον Uttal (2000) η σχέση μεταξύ χαρτών και ανάπτυξης της χωρικής αντίληψης είναι εγγενώς αμοιβαία. Μάλιστα, καθώς τα παιδιά αποκτούν νέους πιο εξελιγμένους τρόπους νοητικής αναπαράστασης και χρήσης χωρικών πληροφοριών, η κατανόηση των χαρτών βελτιώνεται (Ioannidou & Dimitracopoulou, 2004), ενώ έχει αναδειχθεί και η διττή φύση του χάρτη ως μέσου αναπαράστασης και ως τρόπου ενσωμάτωσης χωρικών αντιλήψεων (Liben & Yekel, 1996). Σ' αυτό το πλαίσιο, η κατασκευή του χάρτη παρέχει εν δυνάμει ένα περιβάλλον δημιουργίας και κατανόησης αναπαραστάσεων που αφορούν σε χωρικές αντιλήψεις επιτρέποντας παράλληλα τη διαπραγμάτευσή τους (Kynigos & Yiannoutsou, 2002).

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.α. Έρευνα δράσης

Η έρευνα δράσης δίνει δυνατότητα συνδυασμού θεωρίας και πράξης και προσφέρεται για τη βελτίωση των διδακτικών πρακτικών μέσα από αναστοχαστικές διαδικασίες του εκπαιδευτικού-ερευνητή και την αλληλεπίδρασή του είτε με μέλη της κοινότητας είτε με κριτικούς φίλους. Σύμφωνα με τους Carr και Kemmis (1986: 162):

> Είναι μια μορφή αυτό-στοχαστικής διερεύνησης που πραγματοποιείται από τους συμμετέχοντες σε κοινωνικές καταστάσεις με σκοπό να βελτιώσουν τη λογική και τη δικαιοσύνη των δικών τους πρακτικών, την κατανόησή γι' αυτές και τις καταστάσεις όπου αυτές εφαρμόζονται.

Η έρευνα δράσης αναπτύσσεται μέσα από μια αλυσίδα επάλληλων κύκλων σχεδιασμού, εφαρμογής, παρατήρησης και στοχασμού, με βασικό στόχο τη συνεχή βελτίωση της παιδαγωγικής πρακτικής. Βασικό χαρακτηριστικό της αποτελεί ο αναστοχαστικός της χαρακτήρας που επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς-ερευνητές να στοχάζονται πάνω στην εκπαιδευτική πράξη και στα αποτελέσματά της. Με την έρευνα δράσης δίνεται η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να συμμετέχουν ισότιμα σε όλες τις ερευνητικές διαδικασίες. Μέσα σε ένα δημοκρατικό και συνεργατικό πνεύμα επεξεργάζονται τα αποτελέσματα της εκπαιδευτικής διαδικασίας στοχεύοντας στην αλλαγή των εκπαιδευτικών τους πρακτικών προς όφελος των μαθητών τους.

3.β. Το πλαίσιο της έρευνας: χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες

Το μέρος της έρευνας δράσης που παρουσιάζεται εδώ υλοποιήθηκε στο νηπιαγωγείο του Τυρνάβου, μέσα στον οικισμό Ρομά. Στο τμήμα φοιτούσαν 10 Ρομά μαθητές τεσσάρων έως πέντε ετών. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, στο πλαίσιο της έρευνας δράσης υλοποιήθηκαν διάφοροι κύκλοι διδασκαλίας με διαφορετικές θεματικές, και τα αποτελέσματα του κάθε κύκλου πληροφορούσαν τον επόμενο. Η παρούσα εργασία αναφέρεται σε μέρος του κύκλου που πραγματεύεται την ανάπτυξη της χωρικής σκέψης των μικρών μαθητών μας και υλοποιήθηκε σε 10 διδακτικές ώρες. Ειδικότερα τα ερωτήματα που απασχόλησαν ήταν: α) ποια η κατανόηση των μαθητών μας για θεμελιακές μαθηματικές έννοιες που συνδέονται με την πλοήγηση στο χώρο (σύγκριση μεγεθών, αντίληψη της κλίμακας, εντοπισμός και περιγραφή διαδρομών και θέσεων) ; β) με ποιόν τρόπο η διδασκαλία θα προωθούσε τη διεύρυνση του συμβολικού τους ρεπερτορίου και το μετασχηματισμό των αναπαραστάσεων χώρου;

Μετά από πληροφορημένη συναίνεση των γονέων, οι διάλογοι και οι δραστηριότητες των μαθητών ηχογραφήθηκαν και βιντεοσκοπήθηκαν. Επισημαίνεται επίσης, ότι η πρώτη γλώσσα των μαθητών ήταν η Ρομανί και ότι η επικοινωνιακή στρατηγική της δια-γλωσσικότητας (translanguging) είχε την επικύρωση του σχολικού πλαισίου.

4. Η ΕΡΕΥΝΑ: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων στηρίχτηκε στη λογική που εισηγείται η παιδαγωγική προσέγγιση των πολυγραμματισμών και ειδικότερα «η μάθηση μέσω σχεδιασμού» (Kalantzis & Cope, 2013). Στο πλαίσιό της ο σχεδιασμός του μαθησιακού περιβάλλοντος, ως διδασκαλία και πλαίσιο αξιολόγησής της, ανατρέχει σε ποικίλους διαύλους και μορφές αναπαραστατικών πραγματώσεων (πολυτροπικότητα) και στοχεύει στους διαφορετικούς τρόπους (γνωστικές διαδικασίες) με τους οποίους οι μαθητές μπορεί να οικειοποιηθούν τη γνώση. Το μεθοδολογικό πλαίσιο προβλέπει την ενσωμάτωση της πολιτισμικά αποκτηθείσας γνώσης των μαθητών (Guttierez & Dixon-Román, 2011) και η αλληλουχία των μαθησιακών δραστηριοτήτων οικοδομείται ώστε να αντανακλά τις ακόλουθες «διαδικασίες μάθησης» (Knowledge Processes): βιωματική θεώρηση, εννοιολογική κατανόηση, λειτουργική ή/και κριτική κατανόηση μιας πληροφορίας και τέλος την παροχή πλαισίων εφαρμογής της γνώσης και αξιολόγησης του γνωσιακού μετασχηματισμού που εισηγήθηκε η διδασκαλία. Επισημαίνεται ότι σύμφωνα με την προσέγγιση της «μάθησης μέσω σχεδιασμού», οι γνωστικές αυτές διεργασίες δε γίνονται αντιληπτές σε σειριακή ακολουθία αλλά ως όψεις ενός πολυπρισματικού πλέγματος με αναδρομικές συσχετίσεις και δυνατότητες ένταξης νέων κάθε φορά πτυχών.

Σε επίπεδο υλοποίησης, σε πρώτη φάση, οι μαθητές εισήχθησαν στη θεματική της πλοήγησης στο χώρο μέσω της ανάγνωσης ενός παραμυθιού που πραγματεύονταν την περιπλάνηση ενός λιονταριού σε μια περιοχή. Ο χάρτης της περιοχής στην οποία περιπλανήθηκε ο ήρωας αποτελούσε

οργανικό συστατικό του κειμένου, ήταν διαθέσιμος στους μαθητές και η χρηστικότητά του ως πρακτική αναπαράστασης αξιοποιήθηκε στη διάρκεια των διαλογικών ανταλλαγών που πλαισίωσαν την ανάγνωση του αφηγήματος. Οι μαθητές ενεπλάκησαν ενεργά σε μια δραστηριότητα που είχε νόημα γι' αυτούς: ο χάρτης αποτέλεσε ένα πολυτροπικό ελκυστικό κείμενο ενταγμένο στην αφήγηση και ταυτόχρονα κατανοητό με βάση τα βιώματά τους για τους διαφορετικούς γεωγραφικούς τόπους. Μολονότι δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση του, η εμπειρία μετακίνησης που διέθεταν τα νήπια ακολουθώντας τους γονείς τους στις επαγγελματικές τους υποχρεώσεις συνέβαλε καθοριστικά στη κατανόηση της λειτουργικότητας του χάρτη ως εργαλείο αναπαράστασης του χώρου.

Η εννοιολόγηση του χάρτη υπαγόρευε την ανακάλυψη της εσωτερικής του δομής. Η οπτική εικονικότητα ορισμένων συμβόλων αποτελεί τη βάση για τη δημιουργία υποθέσεων σχετικά με το χώρο αναφοράς επιτρέποντας έτσι διεργασίες χωρικού προσδιορισμού (locating) μέσω των συμβολικών—οπτικών—αναπαραστάσεων.

Εκπαιδευτικός: Αυτές τις ομπρέλες γιατί τις έχει εδώ;

Μαθητής: Μην α δώσει μπισί (=βροχή).

Εκπαιδευτικός: Για να μη βρέξει;

Μαθητής: Όχι, για τον ήλιο! Τη θάλασσα.. Εδώ μπάνιο τη θάλασσα.

Σε επόμενη φάση, μέσω των συμβολικών μηχανισμών του χάρτη αναπλαισιώνεται η κοινωνική πρακτική των μαθητών αναφορικά με τον χώρο. Βιωμένες εμπειρίες θέσεων και διαδρομών εντοπίζονται και περιγράφονται συμβολικά διευρύνοντας την εννοιολογική και λειτουργική κατανόηση του χάρτη και αποκαλύπτοντας ταυτόχρονα τις δεξιότητες διαισθητικής αντίληψης κλίμακας και μετασχηματισμού που διαθέτουν οι μαθητές μας. Η τάξη δημιουργεί τον χάρτη Λάρισας-Τρικάλων με σκοπό να βοηθήσει το λιοντάρι να πάει στα Τρίκαλα.

Εκπαιδευτικός: Πώς θα κάνουμε το δρόμο για τα αυτοκίνητα;

Μαθητής: Έτσι και έτσι (Σχεδιάζει μια τεθλασμένη γραμμή με μπλε χρώμα)

Εκπαιδευτικός: Ο δρόμος για τα τρένα, πού θα είναι;

Μαθητής: Κόκκινο (σχεδιάζουν παράλληλα με τον αυτοκινητόδρομο).

Εκπαιδευτικός: Το σταθμό των τρένων, πώς θα τον δείξουμε;

Μαθητής: (σχεδιάζει ένα πράσινο ορθογώνιο δίπλα στη γραμμή)

i. Η τάξη δημιουργεί το χάρτη του οικισμού ώστε να βοηθήσει το λιοντάρι του παραμυθιού να εντοπίσει τα σπίτια των μαθητών, όταν έρθει στον Τύρναβο και χρειαστεί φιλοξενία. Η δραστηριότητα αυτή παράλληλα με τις διεργασίες προσδιορισμού στο χώρο, επιτρέπει τη σύγκριση μεγεθών (αποστάσεων/μηκών) και την ενίσχυση των διεργασιών μετασχηματισμού που απαιτεί η συμβολική αναπαράσταση. Σε παιδαγωγικό επίπεδο επιτρέπει την αξιολόγηση των αναπαραστατικών δεξιοτήτων στις οποίες επικεντρώθηκαν οι προηγούμενες δραστηριότητες και την καθοδηγητική διδασκαλία μαθηματικού λεξιλογίου.

ii. Εκπαιδευτικός: Τα σπίτια σας πώς να τα κάνουμε;

Μαθητής: Έτσι..(κάνουν έναν κύκλο)

Μαθητής: Εντώ είναι η Ταξιαρχούλα. Εντώ η Τουμαή και η Μαγδαληνή (σχεδιάζουν κύκλους σε προσέγγιση)

Εκπαιδευτικός: Και ποιος άλλος μένει κοντά στη Θωμαή;

Μαθητής: Η Άννα!

Εκπαιδευτικός: Ο Χρυσοβαλάντης; Πού είναι το σπίτι σου;

Μαθητής: Εντώ, απάνω το βουνό (ένας απομακρυσμένος κύκλος)

Εκπαιδευτικός: Πώς είπαμε κάνουμε τα σπίτια σας;

Μαθητής: Κύκλος!

Εκπαιδευτικός: Ποιο σπίτι είναι πιο κοντά στο σχολείο μας, της Παρασκευούλας ή του Χρυσοβαλάντη;

Μαθητής: Εεε..

Εκπαιδευτικός: Σε ποιο από τα δύο μπορούμε να πάμε πιο γρήγορα;

Μαθητής: Την Παρασκευούλα.

Εκπαιδευτικός: Ναι, στην Παρασκευούλα. Και ποιο σπίτι είναι πιο μακριά από το σχολείο μας, της Άννας ή του Αναστάση;

Μαθητής: Την Άννα.

Εκπαιδευτικός: Ναι της Άννας. Αν το λιοντάρι έρθει από το δρόμο αυτό, από πού θα περάσει πρώτα;

Μαθητής: Από το μαγαζί.

Εκπαιδευτικός: Και ποιο σπίτι είναι πιο κοντά για να ξεκουραστεί;

Μαθητής: Στον Αναστάση.

Εκπαιδευτικός: Και μετά, προς τα που θα πάει αν θέλει να κάνει κούνια;

Μαθητής: Θα κάνει έτσι μπροστά και μιτά θα πάει το ντρόμο εντώ (δείχνει στο χάρτη) και θα πάει στις κούνιες.

Εκπαιδευτικός: Άρα, θα στρίψει δεξιά και θα προχωρήσει ευθεία.

Μαθητής: Ναι, δεξιά, ευθεία.

Από τον παραπάνω διάλογο επιβεβαιώνεται, επίσης, ότι οι μαθητές αφενός συνειδητοποιούν τη δυνατότητα να αναπαραστήσουν με σύμβολα τα διάφορα φυσικά αντικείμενα—εδώ κτήρια—και αφετέρου να περιηγηθούν με τη φαντασία τους στις διαδρομές που υποδηλώνονται στο χάρτη.

Κατανοούν δηλαδή ότι στο χάρτη αποτυπώνονται θέσεις και διαδρομές που αντανακλούν εν δυνάμει τρόπους μετάβασης από ένα χώρο σε έναν άλλο. Επιπλέον, άλλες έννοιες που συνδέονται με τον προσδιορισμό στο χώρο όπως της απόστασης, της σύγκρισης μεγεθών (μήκους), της κατεύθυνσης, της ευθείας—και γενικότερα της γραμμής—χρησιμοποιούνται με επιτυχία σ' αυτό το πλαίσιο, ενώ βιωματικά κατανοούν το ρόλο του υπομνήματος και κατά συνέπεια και τις συμβολικές αναπαραστάσεις, καθώς και προσεγγίζουν διαισθητικά την έννοια της κλίμακας.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Το βασικό ερώτημα που απασχόλησε την εργασία αφορούσε στην κατανόηση που έχουν οι μαθητές Ρομά της προσχολικής ηλικίας σχετικά με θεμελιακές έννοιες προσδιορισμού στο χώρο. Αξιοποιώντας την πολιτισμικά ανταποκρινόμενη διδασκαλία και τη μεθοδολογία της έρευνας δράσης μέσα από την αφήγηση παραμυθιού και τη χρήση χάρτη διερευνήσαμε πώς ενσωματώνονται πηγές καθημερινής γνώσης, με ποιους τρόπους οι μαθητές ανταποκρίνονται στις οπτικές πληροφορίες των χαρτών, αλλά και πώς αποτυπώνουν αυτές στο χάρτη, αλλά και ποιες έννοιες χώρου αναδύονται. Το μαθησιακό περιβάλλον έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να πραγματευτούν χωρικές αντιλήψεις κατά τη διάρκεια της κατασκευής του χάρτη και να αναπτύξουν μηχανισμούς που ενισχύουν τη μάθηση που αφορά στη χωρική σκέψη και γνώση. Έννοιες όπως της απόστασης, της σύγκρισης, της κατεύθυνσης, αλλά και κατασκευή επιπέδων σχημάτων και διαδρομών αναδύθηκαν με ένα φυσικό τρόπο, όπως επίσης και η ανάγκη του υπομνήματος, ως μια έκφραση συμβολικής αναπαράστασης. Επίσης, οι μαθητές μέσω της χρήσης του χάρτη προσέγγισαν διαισθητικά την έννοια της κλίμακας (έννοια της αναλογίας), ενισχύοντας έτσι την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης που προετοιμάζει για την περαιτέρω ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών.

Βιβλιογραφία

Barton, D., Calabrese, A. C. & Tan, E. (2009). Funds of knowledge and Discourses and Hybrid Space. Journal of research in Science Teaching, 46(1), 50-73.

Biedinger, N. & Becker, B. (2006) Der Einfluss des Vorschulbesuchs auf die Entwicklung und den langfristigen Bildungserfolg von Kindern. Mannheimer Zentrum für Europäische Sozialforschung.

Γκανά, Ε., Σταθοπούλου, Χ., Γκόβαρης, Χ. (2013). Προσχολική Εκπαίδευση και Ρομά μαθητές: διαμορφώνοντας πολιτισμικά σχετική διδασκαλία. Στο *Επιστήμες Αγωγής*, Θεματικό Τεύχος (επιμέλεια Π. Καλογιαννάκη-Κ. Καρράς), Φθινόπωρο 2013, σσ. 159-174.

Carr, W. & Kemmis, S. (1986). *Becoming critical: Education, knowledge and action research*. London: Falmer Press.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Buffalo, NY: Routledge

Gelman, R. & Williams, E. (1997). Enabling constraints on cognitive development . In D. Kuhn & R. S. Siegler (Eds), Cognition, perception and language. Vol. 2. *Handbook of child development.* (5th ed.) (pp 575-630). (W. Damon, Ed.) New York: Wiley

Gutiérrez, K. D., Baquedano-López, P. & Tejeda, C. (1999). Rethinking diversity: Hybridity and hybrid language practices in the third space. *Mind, culture, and activity*, *6*(4), 286-303.

Gutiérrez, R. & Dixon-Román, E. (2011). Beyond Gap Gazing: How Can Thinking About Education Comprehensively Help Us (Re) envision Mathematics Education?. In Mapping equity and quality in mathematics education (pp. 21-34). Springer Netherlands.

Elliott, J. (1991). Action Research for Educational Change. Milton Keynes: Open University Press

Ioannidou, I. & Dimitracopoulou, A. (2004). Mechanisms of Spatial Awareness in Groups Interactions of Pre-school Children during Cognitively Distributed Learning Activities. Workshop on spatial awareness in collaboration and group interaction, CSCL Symposium, Lausanne, 2004.

Καλμπουρτζής, Γ., Τζεκάκη, Μ. & Βρύσης, Λ. (2014). *Η αναζήτηση του δασοκούνελου: η επίδραση ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού με σύγχρονα περιβάλλοντα διεπαφής στη διδακτική της χωρικής σκέψης στην προσχολική ηλικία,* Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή, Αναστοχασμοί για την Παιδική Ηλικία, Θεσσαλονίκη, 31/10-1/11, 2014.

Kaput, J., Noss, R., Hoyles, C. (2001). Developing new notations for a learnable mathematics in computational era. In L. D. English (Ed.), The Handbook of International Research in Mathematics. London: Kluwer.

Kalantzis, M, & B. Cope (2013). *Νέα μάθηση. Βασικές αρχές για την επιστήμη της εκπαίδευσης*. Αθήνα: Κριτική.

Kynigos, C. & Yiannoutsou, N. (2002). Seven Year Olds Negotiating Spatial Concepts and Representations to Construct a Map. *Proceedings of the 26th PME Conference* (3, 177-184), University of East Anglia, Norwitch, UK.

Liben, L. S. & Yekel, C. A. (1996). Preschoolers' Understanding of plan and oblique maps: The role of Geometric and Representational Correspondence, Child Development, 67, 2780-2796.

Magnuson, K. A., Meyers, M. K., Ruhm, C. J. & Waldfogel, J. (2004). Inequality in preschool education and school readiness. *American educational research journal*, *41*(1), 115-157.

Moje, E. B., Ciechanowski, K. M., Kramer, K., Ellis, L., Carrillo, R., & Collazo, T. (2004). Working toward third space in content area literacy: An examination of everyday funds of knowledge and discourse. Reading Research Quarterly, 39, 38–72.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Tietze, W., Lee H. L. & Mierau, S. (2008) Zum Zusammenhang von pädagogischer Qualität in Kindergarteneinrichtungen und Familien und dem Sprachstand von Kindern. Ministerium von Bildung Jugend und Sport des Landes Brandenburg.

Uttal, D. (2000). Seeing the big picture: map use and the development of spatial cognition. *Developmental Science*, 3, (3), pp 247-286.

Walker, R. J. (1980). Map using abilities of 5 to 9 year old children. *Geographical Education*, 3, pp. 545-554.

ΙΔΙΟΙ Ή ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ; ΟΙ ΑΦΗΓΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΥΣΟΥΛΜΑΝΙΚΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΖΩΗ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βόντα Βασιλική, Ζησιμοπούλου Αποστολία-Μαρία, Χούτου Χρυσούλα
ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών

vassia_vonta@live.com, tolia_z@hotmail.com, chry_chou@hotmail.com

Η εργασία αυτή ερευνά τη μαθητική και μαθηματική ταυτότητα δύο φοιτητών της μουσουλμανικής μειονότητας της Θράκης. Η ταυτότητα ενός ατόμου έχει δυναμικό χαρακτήρα, καθώς εξαρτάται από ποικίλους παράγοντες, κυρίως κοινωνικοπολιτισμικούς και εκπαιδευτικούς. Μέσω της αφηγηματικής μεθόδου δίνεται η δυνατότητα σκιαγράφησης των παραγόντων που επηρέασαν την εξέλιξη της ταυτότητας των ατόμων. Συγκεκριμένα, εδώ, παρουσιάζονται οι αφηγήσεις των Rüstü και Berkin, μέσω των οποίων αναδεικνύεται ο ρόλος της εθνικότητας ως κεντρικός στη διαμόρφωση των δύο αυτών ταυτοτήτων τους, καθώς και η αρχική τους στάση απέναντι στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

«Από κοινωνιολογική άποψη ο όρος «μειονότητα» δεν δηλώνει τόσο το μέγεθος ή τα εθνοπολιτισμικά χαρακτηριστικά μιας πληθυσμιακής ομάδας. Παραπέμπει κυρίως στις σχέσεις εξουσίας που καθορίζουν την ιεραρχημένη κοινωνική της θέσης και την περιορισμένη πρόσβαση που διαθέτει στις διαφορετικές κατηγορίες αγαθών» (Ασκούνη, 2006). Έρευνες έχουν δείξει ότι η μαθησιακή εξέλιξη των μειονοτήτων μπλοκάρεται από πολλούς παράγοντες κοινωνικοπολιτισμικής προέλευσης, όπως για παράδειγμα η έλλειψη καθοδήγησης ή θετικών προτύπων από το κοινωνικό περιβάλλον (Brown, 2004; Stevens, 1993).

Σύμφωνα, με τις Sfard και Prusak (2005) ο καλύτερος τρόπος να μελετηθεί το πώς η μάθηση επηρεάζεται από το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο είναι μέσω της μελέτης των ταυτοτήτων. Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη της ταυτότητας δυο φοιτητών που προέρχονται από τη μουσουλμανική μειονότητα της Θράκης, μέσω των προσωπικών τους αφηγήσεων. Σύμφωνα με τον Kaasila (2007), οι αφηγήσεις αποτελούν τον κατάλληλο τρόπο μελέτης της ταυτότητας ενός ατόμου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μουσουλμανική μειονότητα της Θράκης είναι η μόνη επίσημα αναγνωρισμένη μειονότητα στην Ελλάδα, σύμφωνα με τη Συνθήκη της Λοζάνης (1923). Σήμερα, το μεγαλύτερο μέρος των παιδιών της μειονότητας συνεχίζουν να παρακολουθούν το μειονοτικό δημοτικό σχολείο, όπου μόνο τα μαθηματικά και η τουρκική γλώσσα γίνονται στα τουρκικά. Οι μαθητές, στη συνέχεια, μπορούν να επιλέξουν μεταξύ του δημόσιου ελληνόφωνου ή δίγλωσσου μειονοτικού γυμνασίου. Σύμφωνα με την Ασκούνη (2006), τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια στροφή προς το δημόσιο ελληνικό γυμνάσιο. Ωστόσο, ο μαθητής εκεί αντιμετωπίζει αρκετά εκπαιδευτικά εμπόδια, τα οποία πιθανόν να οφείλονται στη διαφορετική του ταυτότητα.

Έρευνες έχουν δείξει ότι παράλληλα με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μειονότητες, υπάρχουν διαφοροποιήσεις στις επιτυχίες των μελών της (Martin, 2003). Οι Sfard και Prusak (2005) τονίζουν τη σημασία της ταυτότητας των μαθητών στην κατανόηση των επιτευγμάτων τους. Επιπροσθέτως, ισχυρίζονται ότι η μάθηση επιτυγχάνεται μέσω της γεφύρωσης του «ποιος» είναι τώρα το άτομο και του τι προορίζει το ίδιο για τον εαυτό του να γίνει.

Σε κάθε άτομο αντιστοιχούν περισσότερες από μία κοινωνικές ταυτότητες. Η κοινωνική ταυτότητα κάθε ατόμου εκδηλώνεται, όταν συμπεριφέρεται σύμφωνα με τα πρότυπα της εκάστοτε κοινωνικής ομάδας της οποίας είναι μέλος (Steele, 1997, στο Mulat & Arcavi, 2009, σελ. 80). Μια διάσταση της κοινωνικής ταυτότητας είναι η *μαθητική ταυτότητα* των ατόμων η οποία αναδεικνύεται όντες μέλη μαθητικής κοινότητας. Συνεχίζοντας, σημαντική πτυχή της κοινωνικής ταυτότητας και κατ' επέκταση της μαθητικής, θεωρείται η εθνική ταυτότητα του ατόμου. Ως τέτοια ορίζεται η σαφής κατανόηση της εθνικότητας του ίδιου, καθώς και η αξία που προσδίδει στην εθνικότητα του (Phinney, 1990). Αυτή μπορεί να λειτουργήσει ως ανάχωμα στα αρνητικά στερεότυπα και τη κοινωνική διάκριση που μπορεί να δεχτεί. Αποτελεί, επίσης, ένα οικοδόμημα που παίζει σημαντικό ρόλο στο πως διαμορφώνονται οι σχέσεις μέσα σε μία τάξη (Civil, Planas & Quintos, 2005). Οι συμπεριφορές που φέρουν τα παιδιά από το σπίτι τους θεωρούνται «ξένες» στο πλαίσιο της τάξης, με αποτέλεσμα να βρίσκονται στο περιθώριο δύο διαφορετικών κουλτούρων (Suarez – Orosco, 2001 στο Civil, Planas & Quintos, 2005, σελ. 81) . Η κουλτούρα που μεταφέρεται από τους γονείς στα παιδιά επηρεάζει την αξία που αυτά δίνουν στη μάθηση, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν σε διάφορες μαθησιακές δυσκολίες. Η κουλτούρα αυτή επηρεάζει, επίσης, τα κίνητρα, τους στόχους και τις συμπεριφορές των παιδιών (Furrer & Skinner, 2003). Συνεπώς, η ταυτότητα ενός ατόμου επηρεάζεται άμεσα από το οικογενειακό του περιβάλλον.

Επιπλέον, η μαθητική ταυτότητα καθορίζεται, τόσο από τις στρατηγικές μάθησης που ακολουθούνται μέσα σε μια τάξη, όσο κι από τις στρατηγικές με τις οποίες ρυθμίζει το πρόγραμμά του ο μαθητής για την επίτευξη των επιθυμητών του στόχων. Αυτό, κατά τον Zimmermann (1989), αποτελεί την αυτορρύθμιση, η οποία περιλαμβάνει τις σχεδιασμένες δράσεις που εκτελεί ένα άτομο σύμφωνα με τους προκαθορισμένους του στόχους, την αυτο-παρακολούθηση της προόδου του και τον έλεγχο και την ρύθμιση των γνωστικών του δράσεων. Μια σχετιζόμενη έννοια είναι αυτή της αυτο-αποτελεσματικότητας, που αποτελεί την αντίληψη κάποιου γύρω από την ικανότητά του να ανταπεξέλθει σε συγκεκριμένες καταστάσεις και να επιτύχει προκαθορισμένους στόχους. Στην ουσία, είναι «το αποτέλεσμα μιας δυναμικής κατασκευής των ατόμων επηρεασμένη από το κοινωνικό τους περιβάλλον» (Mulat & Arcavi, 2009).

Η *μαθηματική ταυτότητα* ενός ατόμου έχει έντονη κοινωνική διάσταση, καθώς στο σχηματισμό της συμβάλλουν οι αλληλεπιδράσεις με το κοινωνικό περιβάλλον (καθηγητές, συμμαθητές, οικογένεια). Αυτές καθορίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό από το πλαίσιο στο οποίο βρίσκονται, αφού οι μαθητές κουβαλούν τις εμπειρίες τους από διάφορες άλλες κοινότητες στις οποίες ανήκουν (Op ‘t Eynde, 2004, στο Kaasila, 2007, σελ. 206). Υπάρχουν πολλοί ορισμοί της μαθηματικής ταυτότητας. Σύμφωνα με τον Martin (2003) ως μαθηματική ταυτότητα ορίζονται τα πιστεύω κάποιου γύρω από την μαθηματική του ικανότητα, την ικανότητά του να αποδίδει σε μαθηματικά πλαίσια, τα κίνητρά του για επιδίωξη μαθηματικής γνώσης και την «οργανική» σημασία των μαθηματικών. Από την άλλη, ο Bikner-Ashbahs (2003) ορίζει τη μαθηματική ταυτότητα ως μία κατασκευή που περιγράφει τη σχέση ενός ατόμου με τα μαθηματικά.

Όσον αφορά στους μαθητές των μειονοτήτων η συμμετοχή τους ή μη, καθώς και το αίσθημα του «ανήκειν» στην τάξη των μαθηματικών έχουν κυρίαρχο ρόλο στον τρόπο που βλέπουν τα μαθηματικά (Allexsaht–Shnider & Hart, 2001, στο Mulat & Arcavi, 2009, σελ. 79). Επιπλέον, στη διαμόρφωση της γενικότερης στάσης τους απέναντι στα μαθηματικά, ένα βασικό συστατικό είναι η αυτοπεποίθηση˙ ένα στοιχείο για το πως βλέπουν οι ίδιοι τον εαυτό τους. Καθοριστικός είναι και ο ρόλος του καθηγητή στη διαμόρφωση των μαθηματικών ταυτοτήτων των μαθητών, καθώς συμβάλλει στο να διαμορφώσουν οι μαθητές το ποιοι είναι, το τι κάνουν και το πώς να κατανοούν τι κάνουν (Ewing, 2004).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το ερευνητικό πρόβλημα που μελετά η παρούσα εργασία είναι η μαθητική και η μαθηματική ταυτότητα δυο Μουσουλμάνων φοιτητών. Ως μαθηματική ταυτότητα ορίζεται το πώς αντιλαμβάνονται οι συμμετέχοντες τον εαυτό τους ως μαθητή των μαθηματικών, ενώ ως μαθητική το πώς αντιλαμβάνονται τον εαυτό τους ως μαθητή γενικότερα. Στα ερευνητικά ερωτήματα περιλαμβάνονται: Ποια είναι η μαθητική τους ταυτότητα ως Μουσουλμάνοι της Θράκης; Ποια η μαθηματική τους ταυτότητα ως Μουσουλμάνοι της Θράκης;

Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης και πραγματοποιήθηκε την περίοδο Απριλίου - Ιουλίου 2014, με συμμετέχοντες δυο φοιτητές, τον Rüstü και τον Berkin (ψευδώνυμα), από την μουσουλμανική μειονότητας της Θράκης. Και οι δύο συμμετέχοντες φοίτησαν σε Μειονοτικό Δημοτικό και Γενικό Γυμνάσιο-Λύκειο, ενώ τώρα φοιτούν στο Ε.Μ.Π.. Ο Rüstü μεγάλωσε σε χωριό, ενώ 12 ετών μετακόμισε στη Ξάνθη σε μαθητική εστία. Οι γονείς του είναι απόφοιτοι Μειονοτικού Δημοτικού. Παράλληλα, ο Berkin μέχρι και τα 18 του έτη έζησε στην Κομοτηνή. Ο πατέρας του είναι δάσκαλος σε Μειονοτικό Δημοτικό, ενώ η μητέρα του απόφοιτη Μειονοτικού Δημοτικού. Τα αδέρφια και των δύο συμμετεχόντων έχουν σπουδάσει στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Οι δύο συμμετέχοντες επιλέχθηκαν με βάση τα εξής: Αρχικά, η αφηγηματική μέθοδος ως κατάθεση ψυχής επιτάσσει την οικειότητα μεταξύ συμμετεχόντων και ερευνητών. Επιπλέον, τα διαφορετικά κοινωνικά πλαίσια και βιώματα των συμμετεχόντων ίσως οδηγήσουν στην ανάδειξη διαφορετικών πτυχών μιας μαθητικής και μαθηματικής ταυτότητας.

Συλλογή δεδομένων

Μετά την συγκατάθεση των συμμετεχόντων, έγινε μια πρώτη συζήτηση με τον καθένα ξεχωριστά σχετικά με τα βιώματά τους τα σχολικά χρόνια. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα σε άτομο μεταναστευτικής κοινότητας, η οποία συνέβαλε στην επιλογή των τελικών ερωτήσεων. Ακολούθησε ημιδομημένη συνέντευξη στους συμμετέχοντες διάρκειας 50 λεπτών, η οποία μαγνητοφωνήθηκε. Οι ερωτήσεις αφορούσαν στα χρόνια του δημοτικού, γυμνασίου και λυκείου, καθώς και στη μετάβαση μεταξύ αυτών. Μας ενδιέφερε οι συμμετέχοντες να μοιραστούν μαζί μας τις καλές και κακές εμπειρίες που βίωσαν στο σχολείο γενικά και στη μαθηματική τάξη ειδικότερα (καθηγητές, φίλοι, οικογένεια κ.α.). Στο τέλος, τους ζητήθηκε να περιγράψουν το πώς βλέπουν αποστασιοποιημένοι πλέον τον εαυτό τους ως μαθητή των μαθηματικών κατά τα σχολικά χρόνια.

Ανάλυση δεδομένων

Την απομαγνητοφώνηση κατά γράμμα, ακολούθησε η συγγραφή των αφηγήσεων κατά χρονολογική σειρά με βάση γεγονότα που θεωρήθηκαν κρίσιμα. Σύμφωνα με τον Kaasila (2007), οι αφηγήσεις ενός ατόμου συνδέονται άμεσα με την ταυτότητά του, καθώς είναι το ίδιο το άτομο που επιλέγει τον τρόπο που θα αφηγηθεί τα γεγονότα. Έτσι, ως τρόπος ανάλυσης των δεδομένων επιλέχθηκε η αφηγηματική μέθοδος με κατηγορική προσέγγιση (Kaasila, 2007), θέλοντας να αναδείξουμε κοινά χαρακτηριστικά ανάμεσα σε ένα πλήθος ατόμων, εστιάζοντας ταυτόχρονα στο περιεχόμενό τους (content analysis). Οι κατηγορίες προέκυψαν από το θεωρητικό πλαίσιο. Οι συμμετέχοντες έλεγξαν την κάθε αντίστοιχη αφήγηση για να σημειωθούν οποιεσδήποτε διαφωνίες και επισημάνσεις. Τέλος, ακολούθησε ερμηνεία και σύγκριση των δύο αφηγήσεων.

Τρόπος ανάλυσης των απαντήσεων

Η κατηγοριοποίηση των δεδομένων στηρίχθηκε σε δύο άξονες, την μαθητική ταυτότητα και την μαθηματική ταυτότητα. Στην μαθητική ταυτότητα, αναδείχτηκαν μέσω του θεωρητικού πλαισίου οι εξής κατηγορίες: *Αλληλεπίδραση με το άμεσο περιβάλλον:* ως τέτοιο θεωρούμε την οικογένεια, το πλαίσιο του σχολείου και το ευρύτερο πλαίσιο της κοινωνίας. *Στρατηγικές μάθησης:* εστιάζουν στις σωστές ή μη στρατηγικές των εκάστοτε καθηγητών και στο πως αυτές επηρέασαν τον καθένα. *Αυτοθεώρηση:* σχετίζεται με το πώς κατανοεί και χαρακτηρίζει κάποιος τον εαυτό του, τόσο ως μαθητή όσο κι ως μέλος της κοινωνίας μέσα στην οποία υπάρχει και δρα. Σημαντική πτυχή της θεωρούμε την αυτό-αποτελεσματικότητα. *Στόχοι-κίνητρα:* περιλαμβάνουν τα κίνητρα που μπορεί ή όχι να έχει κάποιος, καθώς και τον τρόπο και το βαθμό που αυτά επηρεάζουν τη μάθηση και την εξέλιξή του. *Αυτορρύθμιση:* αφορά στις ενέργειες και το πρόγραμμα που θέτει το άτομο στον εαυτό του, ώστε να επιτύχει τους προκαθορισμένους του στόχους. *Εθνική ταυτότητα:* συνδέεται με τη συνειδητοποίηση εκ μέρους του ατόμου των εθνικών χαρακτηριστικών που το διέπουν, όπως επίσης και την αξία που προσδίδει στο ότι ανήκει στην εθνικότητα αυτή.

Οι κατηγορίες που δημιουργήθηκαν για την μαθηματική ταυτότητα είναι: *Μαθηματική αυτοθεώρηση:* έχει να κάνει με το πώς το άτομο ορίζει τον εαυτό του ως μαθητή των μαθηματικών. Η θεώρηση αυτή επηρεάζεται από την αυτοπεποίθησή του. *Κίνητρα:* αναφερόμαστε στην ύπαρξη ή έλλειψη κινήτρων, τα οποία το ωθούν ή αντίστοιχα εμποδίζουν στο να βελτιώνεται ως μαθητής των μαθηματικών. *Στρατηγικές:* εννοούνται οι ορθές ή μη στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν στη διδασκαλία των μαθηματικών, είτε από τους εκάστοτε καθηγητές, είτε από το ίδιο. *Ιδανικός τρόπος διδασκαλίας:* αφορά στην οπτική του γύρω από το πώς πρέπει να μαθαίνονται και να διδάσκονται τα μαθηματικά. *Σημασία και χρησιμότητα των μαθηματικών:* κεντρικό σημείο εδώ είναι το τι είναι για αυτούς τα μαθηματικά, τι ρόλο έχουν διαδραματίσει ή διαδραματίζουν στη ζωή τους και κατά πόσο τα θεωρεί χρήσιμα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι απομαγνητοφωνήσεις διαμορφώθηκαν, αρχικά, σε αφηγήσεις με βάση την χρονολογική σειρά των λεγομένων των δυο συμμετεχόντων. Στη συνέχεια εντοπίστηκαν κατηγορίες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Στη συγκεκριμένη ενότητα εστιάζουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων όπως προκύπτουν από την ανάλυση των αφηγήσεων για τον καθένα ξεχωριστά, εστιάζοντας στις εμφανιζόμενες κατηγορίες.

Rüstü *«Ήμουν πολύ διαφορετικός πια. Δεν είχα κανένα πρόβλημα»*

Με βάση την αφήγηση του Rüstü, κύριο ρόλο στη διαμόρφωση της μαθητικής του ταυτότητας παίζει η *εθνική του ταυτότητα*. Ο ίδιος περιγράφει την κατάσταση που επικρατούσε στο Μειονοτικό Δημοτικό υιοθετώντας τα λόγια των παλαιοτέρων: «ήταν πολιτικό το θέμα. Υπήρχε η τακτική να μην μαθαίνουν γράμματα στη μουσουλμανική κοινότητα της Θράκης, για να μην εξελιχθεί». Ο Rüstü κατακρίνει τις *στρατηγικές μάθησης* που ακολουθούσαν οι δάσκαλοι του στο Δημοτικό, καθώς δίνονταν παραδείγματα μέσα στην τάξη και εργασία για το σπίτι. Συγκεκριμένα αναφέρει: «Άμα εσύ απλά και μου μιλάς… και φεύγεις…, εγώ πως θα μάθω μετά; Μόνο από το σπίτι…; Αλλά επειδή όταν μαθαίνεις πολλές γλώσσες μαζί… είναι δύσκολο να μάθεις όλες μαζί…». Στο συγκεκριμένο απόσπασμα αναδεικνύονται, επίσης, οι δυσκολίες που αντιμετώπιζε ο Rüstü με την ελληνική γλώσσα. Σε όλη του την πορεία η ύπαρξη ή μη *κινήτρου* να τη μάθει έπαιξε καθοριστικό ρόλο. Η θέλησή του να σπουδάσει στην Ελλάδα, καθώς και να ενταχτεί στην τάξη του Γενικού Γυμνασίου, τον οδήγησαν στο να γραφτεί σε φροντιστήριο και να καταφύγει σε τρίτους για βοήθεια (*αυτορρύθμιση*). Οι προσπάθειές του ευοδώθηκαν και στο Λύκειο πια νιώθει: «Ήμουν εντελώς διαφορετικός πια… Δεν είχα κανένα πρόβλημα» (*αυτοθεώρηση*). Συμπαραστάτης του σ' όλη του την προσπάθεια ήταν ο μεγάλος του αδερφός (*άμεσο περιβάλλον*), του οποίου απόφαση ήταν ο Rüstü να συνεχίσει σε Γενικό Σχολείο.

Όσον αφορά στη μαθηματική του ταυτότητα, ο Rüstü σε όλη τη διάρκεια των μαθητικών του χρόνων αντιμετωπίζει τα μαθηματικά θετικά. «Πάντα μου άρεσαν τα μαθηματικά… Και όταν δεν καταλάβαινα, μου την έδινε». Για το λόγο αυτό, τα *κίνητρα* του στα μαθηματικά είναι έντονα και αποδυναμώνονται μόνο στο Λύκειο λόγω των ευνοημένων εισαγωγικών εξετάσεων. «Όταν ξέρεις ότι κάπου θα περάσεις, […] λες άει σιγά έτσι κι αλλιώς θα περάσω κάπου… δεν το διαβάζω». *Θεωρεί τον εαυτό του* ως καλό μαθητή των μαθηματικών και αναφέρει ένα περιστατικό με έναν αυστηρό καθηγητή που τον σήκωσε στον πίνακα: «Επειδή με εκείνο το άγχος τα κατάφερα… ένιωσα πολύ χαρούμενος», ανταπεξήλθε σε μια αγχωτική κατάσταση (*αυτοθεώρηση*). Ως *ιδανικό τρόπο διδασκαλίας* των μαθηματικών, θεωρεί ότι πρέπει να υπάρχει επεξήγηση από τους καθηγητές και επίλυση αρκετών παραδειγμάτων. Ο συγκεκριμένος τρόπος έρχεται σε αντίθεση με τις *στρατηγικές* των καθηγητών του, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζει δυσκολίες, κυρίως, στην επίλυση προβλημάτων. «…Σε αφήνει εσύ να τα κάνεις και συ ψάχνεις μετά κόσμο… πρέπει κάποιος να στα εξηγήσει, να στα πει […] Πήγαινα σε κανέναν συγγενή, κάποιον που ήξερε, δηλαδή… Και αν κάποιος είχε σπουδάσει πήγαινα σ' αυτόν…» (*αυτορρύθμιση*). Τελικά, προσδίδει ιδιαίτερη *σημασία και χρησιμότητα* σε αυτά. «Τα μαθηματικά σε κάνουν πιο έξυπνο. Όποιος ξέρει μαθηματικά μπορεί να κάνει τα πάντα».

Berkin *«Γέφυρα μεταξύ δύο κρατών»*

Σύμφωνα με την αφήγηση του Berkin η *μαθητική* του *ταυτότητα* χαρακτηρίζεται από έντονη κατανόηση της *εθνικότητάς* του. Ο ίδιος σε όλη τη μαθητική του πορεία προσπαθούσε, ενάντια στις αντιδράσεις κάποιων συμμαθητών του, να μην υπάρξει διαχωρισμός των μαθητών σε δύο ομάδες, σεβόμενος ωστόσο την καταγωγή του. Παραδείγματος χάριν, θεωρεί σωστή την επιλογή να πάει στο Μειονοτικό Δημοτικό καθώς αναφέρει: «Απλά θεωρώ απαράδεκτο να ‘χεις μια άλλη μητρική γλώσσα και να μην τη μαθαίνεις ... Τί να κρυφτείς από την ίδια τη γλώσσα που σε μεγάλωσαν οι γονείς σου; Για μένα προσωπικά είναι απαράδεκτο». Για τον λόγο αυτό, προσπαθούσε να κάνει παρέα με παιδιά τόσο εντός όσο και εκτός μειονότητας, *θεωρώντας* έτσι *τον εαυτό του* ως «γέφυρα μεταξύ των δύο κρατών». Οι *στρατηγικές μάθησης* που ξεχωρίζει ο ίδιος έχουν έντονο το χαρακτηριστικό της ισότητας των μαθητών μέσα στην τάξη. Χαρακτηριστικά, περιγράφει έναν καθηγητή, που ήταν αυστηρός εξίσου με όλα τα παιδιά. «Αυστηρός και το ίδιο αυστηρός με όλους. Ανεξαρτήτως πως σε λένε, ίσα ίσα ήταν από τα άτομα που βοηθούσαν πιο πολύ, από οποιονδήποτε άλλο καθηγητή. Το σκεφτόταν λίγο πολύ όπως το σκεφτόμαστε εμείς. Αυτός είναι από τη μειονότητα, χρειάζεται λίγο πιο πολύ βοήθεια, λίγο πιο πολύ ενδιαφέρον, να του δείξω πέντε πράγματα παραπάνω, να πάω να τον κράξω κιόλας γιατί πήρε αυτόν τον βαθμό**»**. Επιπλέον, κατακρίνει στρατηγικές που ενίσχυαν το φόβο και όχι το σεβασμό ως προς τον καθηγητή.

Ήδη από το Δημοτικό ο Berkin ξεχωρίζει τον εαυτό του (*αυτοθεώρηση*) καθώς από πολύ μικρή ηλικία το *άμεσο οικογενειακό του περιβάλλον* τον ώθησε στο να μάθει να μιλάει ελληνικά. Επιπλέον, η οικογένειά του, του έδωσε *κίνητρο* να βελτιώσει τη σχολική του επίδοση, αφού η αδερφή του είχε θέσει ψηλά τον πήχη. «Με ψιλοπροκαλούσε αυτό. Γιατί να είναι μόνο αυτή καλή; Κι εγώ μπορώ να δώσω την ίδια εικόνα στους γονείς μου. Γιατί να μην τη δώσω;». Συνεπώς, *αυτορρυθμιζόταν* όντας συνεπής στις σχολικές του υποχρεώσεις. Επιπλέον *κίνητρο* για να ασχοληθεί συστηματικά με ένα μάθημα ήταν το κατά πόσο αυτόν το γοήτευε.

Ως προς τη μαθηματική, λοιπόν, ταυτότητα του Berkin, ο ίδιος θεωρεί τα Μαθηματικά ως εργαλείο της Φυσικής, την οποία και λατρεύει (*χρήση και χρησιμότητα των μαθηματικών*). Με αποτέλεσμα, να *θεωρεί τον εαυτό του* «μαθητή του μέσου όρου». «…δεν ασχολούμαι, δε μου αρέσουν … Ίσως να μη μου κόβει τόσο πολύ στα μαθηματικά, δεν ξέρω. Δεν έχω κάνει και καμιά ιδιαίτερη προσπάθεια …». Παρά τις προσπάθειες του περιβάλλοντος του, αυστηρού μαθηματικού και πατέρα, δεν κινητοποιούταν για να διαβάσει πιο πολύ. «Εδώ, ούτε ο πατέρας μου δεν το κατάφερε … Θυμάμαι στιγμές που είχα δυσκολευτεί πάρα πολύ, δεν είχα ποτέ το κουράγιο να κάτσω να ασχοληθώ. Δεν με ενδιαφέρει, δεν μ’ αρέσει» (*αυτορρύθμιση*).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η σκιαγράφηση της μαθητικής και μαθηματικής ταυτότητας των δυο συμμετεχόντων, μέσω της κατανόησης των διαφόρων πτυχών τους.

Οι αφηγήσεις τους ανέδειξαν σημαντική την εθνική τους ταυτότητα στη διαμόρφωση της μαθητικής τους. Ο Berkin κατανοώντας την εθνικότητα του, λειτουργεί ως «γέφυρα μεταξύ των κρατών» προφυλάσσοντας έτσι τον εαυτό του από πιθανές κοινωνικές διακρίσεις. (Phinney, 1990). Αντιθέτως, ο Rüstü νιώθει ότι η εθνικότητα του λειτουργεί ως τροχοπέδη στην μαθητική του εξέλιξη, καθώς θεωρεί ότι οι στρατηγικές μάθησης των καθηγητών επηρεάζονται από τα κοινωνικά στερεότυπα. Και στις δύο περιπτώσεις, το άμεσο οικογενειακό τους περιβάλλον λειτουργεί βοηθητικά, επηρεάζοντας τόσο τα κίνητρα, όσο και τους στόχους και τις συμπεριφορές των παιδιών. Η κουλτούρα του πατέρα του Berkin και η άποψη του περί μάθησης της ελληνικής γλώσσας από μικρή ηλικία τον οδήγησαν στο να δίνει ιδιαίτερη αξία σε αυτή καθώς και στη μητρική του. Από την άλλη, ο μεγάλος αδερφός του Rüstü, του μεταδίδει τη θέληση να σπουδάσει στην Ελλάδα και να ενσωματωθεί στην ελληνική κοινωνία, ενώ, παράλληλα τον υποστηρίζει στις μαθησιακές δυσκολίες που αντιμετώπισε (Furrer & Skinner, 2003).

Η μαθηματική ταυτότητα ορίζεται ως μία κατασκευή που περιγράφει τη σχέση ενός ατόμου με τα μαθηματικά (Bikner-Ashbahs, 2003). Οι πτυχές της μαθηματικής ταυτότητας που αναδείχθηκαν έντονα μέσω των αφηγήσεων είναι η χρησιμότητα των μαθηματικών, τα κίνητρα και το αν θεωρούν τον εαυτό τους ικανό σε αυτά. Εξάλλου, η αυτοπεποίθησή του Rüstü ενισχύεται όταν αντεπεξέρχεται σε αγχωτικές μαθηματικές καταστάσεις. Τα μαθηματικά του αρέσουν και αυτό καθορίζει πλήρως την μαθηματική του ταυτότητα. Ως αποτέλεσμα, αποδίδει σε αυτά ιδιαίτερη χρησιμότητα, καθώς «κανείς δε μπορεί να κάνει τίποτα χωρίς αυτά». Αντιθέτως, η μαθηματική ταυτότητα του Berkin διαμορφώνεται από τα πιστεύω του γύρω από αυτά. Τα «μαθηματικά είναι εργαλείο της φυσικής». Το γεγονός ότι τα συναισθήματά του προς αυτά δεν ήταν ιδιαίτερα θετικά, δεν τον κινητοποιούσε να γίνει καλύτερος. (Kaasila; Hannula; Laine, & Pehkonen , 2008)

Συμπερασματικά, η μαθητική ταυτότητα των δύο συμμετεχόντων φαίνεται να επηρεάζεται κυρίως από την εθνικότητά τους και τον τρόπο που την αντιλαμβάνεται ο καθένας. Οι κοινωνικοί παράγοντες δε φαίνεται να επηρεάζουν τη μαθηματική ταυτότητα των συμμετεχόντων, καθώς κύριος παράγοντας στη διαμόρφωση της είναι η αρχική τους στάση απέναντι στα μαθηματικά και κατά επέκταση η αξία και η χρησιμότητα που προσδίδουν σε αυτά.

Καθώς, η ταυτότητα ενός ατόμου επηρεάζεται άμεσα από το οικογενειακό του περιβάλλον (Furrer & Skinner, 2003), θα ήταν χρήσιμη η συλλογή αφηγήσεων από μέλη της οικογένειάς τους, καθώς και η συλλογή περαιτέρω αφηγήσεων από άλλα άτομα της μειονότητας. Στην παρούσα έρευνα, για την ανάλυση των αφηγήσεων εφαρμόσαμε ανάλυση περιεχομένου (content analysis) (Kaasila, 2007). Ενδιαφέρον θα έχει επίσης μία ανάλυση η οποία θα εστιάσει στη μορφή των αφηγήσεων (form analysis), με βασικά στοιχεία την τυπολογία της αφήγησης, το πως οι άνθρωποι δημιουργούν συνοχή στις αφηγήσεις τους, τα γλωσσικά χαρακτηριστικά και τα ρητορικά τεχνάσματα (Kaasila, 2007).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bikner-Ashbahs, A. (2003). A social extension of a psychological interest theory. In: Proceedings of PME27. Ανάκτηση από http://www.onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/RR_bikner-ashbahs.pdf

Brown, R. (2004). *Changes in Advanced Placement test taking in California 1998-2003*. (Draft to UC All Campus Consortium On Research for Diversity). Los Angeles: University of California, UC ACCORD.

Civil, M., Planas, N., & Quintos, B. (2005). Immigrant Parent's Perspective on their Children's Mathematics Education.

Ewing, B. (2004). Teacher communication, student identity and classroom participation. In E. McWilliam, S. Danby, & J. Knight (Eds.), Performing educational research: Theories, methods and practices (pp. 137– 150). Flaxton, Australia: Post Pressed.

Furrer, C., & Skinner, E. (2003). Sense of relatedness as a factor in children's academic engagement an performance. *Journal of Educaional Pshycology*, *95*, σσ. 148-162. doi:10.1037/0022-0663.95.1.148

Kaasila, R. (2007). Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM Mathematics Education*(39), σσ. 205-213.

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A., & Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educ Stud Math*, *67*, σσ. 111–123.

Martin, D. B. (2003). Hidden assumptions and unaddressed questions in mathematics for all rhetoric. *The Mathematics Educator*, *13*(2).

Mulat, T., & Arcavi, A. (2009). Success in mathematics within a challenged minority: the case of students of Ethiopian origin in Israel (SEO). *Educational Studies of Mathematics*(72), σσ. 77-92.

Phinney, J. (1990). Ethnic identity in adolescents and adults: A review of research. *Psycological Bulletin*, *108*, σσ. 499-514.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, *34*(4), σσ. 14-22.

Stevens, F. I., & Grymes, J. (1993). Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students. Washington, DC: National Center for Educational Statistics.

Zimmermann, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology*, *81*, σσ. 329–339.

Ασκούνη, Ν. (2006). *Η εκπαίδευση της μειονότητας στη Θράκη*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΤΥΠΙΚΩΝ-ΑΤΥΠΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Κασάρη Γεωργία, Τσάπουρνα Μαριάννα
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΡΑΚΗΣ

gioulika.duth@gmail.com

mariannatsap@hotmail.com

Είναι γενικά αποδεκτό στο χώρο της επιστημονικής κοινότητας της Διδακτικής των Μαθηματικών πως τα παιδιά, πριν ακόμη την είσοδό τους στο σχολείο, είναι κάτοχοι πλήθους μαθηματικών γνώσεων. Η διερεύνηση της σχέσης της άτυπης μαθηματικής γνώσης των μαθητών και της τυπικής-σχολικής μαθηματικής τους γνώσης επιχειρείται μέσω της παρούσας ερευνητικής εργασίας. Για τους σκοπούς της τελευταίας 35 μαθητές ενός Δημοτικού Σχολείου αστικής περιοχής της Θράκης ενεπλάκησαν σε μαθηματικά έργα με ρεαλιστικό και τυπικό-σχολικό σενάριο αντιστοίχως. Ο φορμαλιστικός τρόπος σκέψης και δράσης των μαθητών του δείγματος που παρατηρήθηκε, παρά τη ρεαλιστική φύση των έργων, φανερώνει την καταλυτική κυριαρχία των τυπικών-σχολικών μαθηματικών και την ανάγκη στροφής της μαθηματικής εκπαίδευσης προς κατευθύνσεις που επενδύουν στο «άτυπο μαθηματικό κεφάλαιο» που αναπτύσσεται μέσα από τις κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές της καθημερινής ζωής των μαθητών.

Η συμμετοχή των μαθητών σε πρακτικές της καθημερινής ζωής συνδέεται άμεσα με τη μάθηση των Μαθηματικών σε διαφορετικά κοινωνικο-πολιτισμικά πλαίσια, όπως το σχολείο, η οικογένεια και η ευρύτερη κοινωνία, εφόσον τα μαθηματικά αποτελούν κοινωνικό και επιστημονικό προϊόν που γεννήθηκε από την ανάγκη επίλυσης καθημερινών ζητημάτων (Τουμάσης, 2002). Σύμφωνα με τον Χασάπη (2005), «όλο και περισσότερο αναγνωρίζεται το γεγονός, ότι ο μεγαλύτερος όγκος της μάθησης στα περισσότερα κοινωνικά πλαίσια είναι μία κοινωνική δραστηριότητα, μία συμμετοχή σε μία κοινή κουλτούρα». Άλλωστε, όπως κάθε επιστημονική γνώση, έτσι και η μαθηματική αποτελεί παράγωγο κοινωνικής πρακτικής και όχι ένα κλειστό σύστημα προτάσεων με ζητούμενο την τεκμηρίωση της αλήθειας τους.

Κατά τον τρόπο αυτό, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η ανάπτυξη και η διάδοση των κοινωνικών πρακτικών τελείται άλλοτε σε θεσμοθετημένα, τυπικά πλαίσια εκπαίδευσης και άλλοτε σε άτυπα. Ο επιμερισμός της γνώσης σε τυπική και άτυπη διεγείρει πλήθος ερωτημάτων στους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης ως προς το αν τα σχολικά μαθηματικά, όπως είναι διαμορφωμένα, επιτρέπουν τη μεταφορά της γνώσης σε διαφορετικά πλαίσια, πέρα από τα σχολικά, καθώς και ως προς τη διαφορά της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη από αυτήν που αναπτύσσεται στο ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον (Κιουγκελέ, Σοφιανίδου, & Τσέγκου, 2012).

Πολλές από τις **άτυπες** διαδικασίες όπως μαθαίνονται σε εξωσχολικά πλαίσια κρίνονται εξαιρετικά αποτελεσματικές συγκριτικά με τις αντίστοιχες σχολικές. Δεν αμφισβητείται σε καμία περίπτωση το γεγονός ότι οι στρατηγικές που προκύπτουν από τη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολικό πλαίσιο προσφέρουν πλουσιότερες και ισχυρότερες εναλλακτικές λύσεις στις μαθηματικές διαδικασίες που αναδύονται σε μη σχολικές συνθήκες. Έτσι, τα παιδιά μπορεί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τις διαδικασίες που μαθαίνουν στο σχολείο, αλλά να μπορούν με άλλους πιο αποτελεσματικούς τρόπους να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα με διαδικασίες οι οποίες έχουν επινοηθεί από τους ίδιους (Βοσνιάδου 1998).

Μία τέτοια προσέγγιση στο ρόλο της παιδαγωγικής θα μπορούσε να αποτελεί την αφετηρία για την αναζήτηση τρόπων εισαγωγής και εφαρμογής των τυπικών σχολικών συστημάτων σε καταστάσεις που επιτρέπουν την υποστήριξή τους από την ανθρώπινη καθημερινή λογική (Βοσνιάδου 1998). Εξάλλου, το παιδί εισέρχεται στην επίσημη εκπαίδευση έχοντας γνώσεις και αντιλήψεις για τον μαθηματικό κόσμο. Με την εισαγωγή του στην προσχολική αλλά και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, οι ήδη αποκτημένες νοητικές δεξιότητες είναι σε θέση να διευρυνθούν με τέτοιο τρόπο, ώστε μέσω της διαχείρισης των εκπαιδευτικών υλικών να παρέχονται πλούσιες εμπειρίες στο μαθητικό κοινό, συνάμα με την συστηματική εκπαίδευση αυτού (Κιουγκελέ, Σοφιανίδου, & Τσέγκου, 2012).

Τον παραπάνω τρόπο αντίληψης και ερμηνείας των μαθηματικών προσπάθησαν να αναδείξουν τα **«Ρεαλιστικά Μαθηματικά»**, που εμφανίστηκαν κατά την δεκαετία του 1970. Η καινοτομία αυτή στη διδακτική των μαθηματικών αφορά σε περισσότερο ρεαλιστικές εφαρμογές και αίτημα για σύνδεση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή και εμπειρία των μαθητών. Στην περίοδο αυτή, τα προγράμματα σπουδών κατευθύνουν τους εκπαιδευτικούς, παρέχοντάς τους διδακτικές οδηγίες, προτεινόμενο υλικό και άξονες αξιολόγησης (Τζεκάκη, 2007).

Από την άλλη πλευρά, η **«τυπική μαθηματική γνώση»** αναφέρεται στη σχολική ύλη των μαθηματικών καθώς και στο περιεχόμενο των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών εγχειριδίων. Σε αυτό το πλαίσιο, τα μαθηματικά αποκτούν συγκεκριμένη μορφή, καθορισμένα χαρακτηριστικά, αυστηρή οργάνωση και δομή, όπως ακριβώς τα αναγνωρίζει η επιστημονική κοινότητα, με συμπυκνωμένη και ακατανόητη για τους περισσότερους γλώσσα, χωρίς ρεαλιστικά παραδείγματα και εφαρμογές. Σύμφωνα με τον Σακονίδη (1998), η μαθηματική ορολογία και τα νοήματα είναι σημαντικά για την κατανόηση των πολύπλοκων μαθηματικών σχέσεων, ωστόσο φαίνεται να αποτελούν ισχυρό εμπόδιο στην επεξεργασία των μαθηματικών ιδεών (Παπαδοπούλου & Γρηγορίου, 2005).

Στο σημείο αυτό επιχειρείται η παράθεση της εμπειρικής διερεύνησης της παρούσας έρευνας μέσω της σύντομης παρουσίασης της μεθοδολογίας και της ανάλυσης των δεδομένων που ολοκληρώνεται με τη συζήτηση των αποτελεσμάτων και τα συμπεράσματα. Το ερευνητικό μέρος της εργασίας αφορά στην ανάπτυξη τεσσάρων μαθηματικών δραστηριοτήτων με ρεαλιστικό σενάριο και την υλοποίησή τους σε μη τυπικό πλαίσιο μάθησης, καθώς και την επιλογή και τη διδακτική αξιοποίηση τεσσάρων σχολικού τύπου-τυπικών μαθηματικών δραστηριοτήτων, με αντίστοιχο περιεχόμενο ως προς τις υπό διερεύνηση μαθηματικές ιδέες. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με μαθητές δύο τμημάτων της Δ’ και της Ε’ τάξης Δημοτικού Δημόσιου Σχολείου αστικής περιοχής της Θράκης, λόγω ευκολίας πρόσβασης στο δείγμα.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αφορούσαν κυρίως τους τρόπους με τους οποίους εργάστηκαν οι μαθητές στις δυο συνθήκες και αναλύθηκαν προκειμένου να μελετηθούν οι τρόποι ενεργοποίησης της σχέσης μεταξύ τυπικών και άτυπων μαθηματικών, η οποία αποτελεί τον βασικό άξονα της παρούσας έρευνας. Έτσι, το Ερευνητικό Πρόβλημα της μελέτης διαμορφώνεται ως ακολούθως:

Ποια είναι η σχέση που αναπτύσσεται μεταξύ τυπικών και άτυπων μαθηματικών νοημάτων με βάση το κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο εργάζονται μαθητές του Δημοτικού Σχολείου, όπως αυτό διαμορφώνεται μέσα από τις δραστηριότητες που καλούνται να διεκπεραιώσουν;

Τα Ερευνητικά Ερωτήματα στα οποία διαρθρώνεται η υπό μελέτη εργασία διατυπώνονται ως εξής:

Ερευνητικό Ερώτημα 1 (ΕΕ1): Ποιο είδος μαθηματικής γνώσης, τυπικό ή άτυπο, επιλέγουν οι μαθητές συμμετέχοντας σε έργα της καθημερινής ζωής και πώς το αξιοποιούν για την ολοκλήρωσή τους;

Ερευνητικό Ερώτημα 2 (ΕΕ2): Σε ποιο βαθμό οι μαθητές αναγνωρίζουν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και τα συνδέουν με τα σχολικά μαθηματικά;

Ερευνητικό Ερώτημα 3 (ΕΕ3): Πώς επηρεάζει η δραστηριοποίηση των μαθητών σε καθημερινές καταστάσεις που επιβάλλουν τη χρήση άτυπης μαθηματικής γνώσης την απόδοσή τους στα τυπικά σχολικά μαθηματικά;

Τα παραπάνω ερωτήματα διερευνήθηκαν μέσα από τα τέσσερα έργα, κάθε ένα από τα οποία είχε οργανωμένο σενάριο, δομή, αλλά και συγκεκριμένο ρόλο των ερευνητριών.

Το *πρώτο έργο* ονομάστηκε «Τα παιχνιδίσματα της τύχης» και περιελάμβανε τη διεξαγωγή ενός παιχνιδιού με μαθητές της Δ’ τάξης. Νικητής του παιχνιδιού είναι αυτός που πρώτος σχηματίζει τον αριθμό που του δίνεται, μέσα από κλήρωση, χρησιμοποιώντας και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις που απεικονίζονται σχηματικά στο έδαφος και ακολουθώντας ταυτόχρονα τους κανόνες του παιχνιδιού. Για τη μελέτη του τρόπου ανταπόκρισης των μαθητών σε σχολικά μαθηματικά προβλήματα έπειτα από την επαφή τους με αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες ενσωματωμένες σε δραστηριότητες της καθημερινής ζωής, δίνονται σε αυτούς προβλήματα τα οποία μπορούν να δεχθούν πολλαπλούς τρόπους επίλυσης, στοχεύοντας στην εξοικείωσή τους όχι μόνο με τις πράξεις και τις μεταξύ τους σχέσεις αλλά και με την εύρεση εναλλακτικών στρατηγικών.

Το *δεύτερο έργο* απευθύνεται και αυτό στη Δ’ τάξη και αναφέρεται στη συμμετοχή των μαθητών σε διαγωνισμό μαγειρικής. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με δοσμένα υλικά και συνεργάζονται μεταξύ τους για τη διεκπεραίωση μιας συνταγής. Η μαγειρική ξεκινά έπειτα από τη συζήτηση-παρουσίαση του έργου από την συντονίστρια στους μαθητές. Κατά τη διάρκεια του ψησίματος γίνεται καθαρισμός κάθε θρανίου-πάγκου και ζητείται από τα παιδιά να περιγράψουν, παρουσία κριτικής επιτροπής δασκάλων, τον τρόπο με τον οποίο εκτέλεσαν τη συνταγή, αφού προηγουμένως απομακρυνθεί η κάρτα με τις οδηγίες. Ακολουθούν η παρουσίαση του πιάτου της κάθε ομάδας, η δοκιμή-αξιολόγηση από τα μέλη της κριτικής επιτροπής, η ανακοίνωση των αποτελεσμάτων και η βράβευση. Στην τελική φάση του δεύτερου έργου δίνονται στους μαθητές τα υλικά μιας συνταγής ως δεδομένα με μαθηματική μορφή, με ζητούμενο την εκτέλεση πράξεων για τον υπολογισμό μεγαλύτερης ποσότητας της ίδιας συνταγής.

Το *τρίτο έργο* στοχεύει στην προσέγγιση των ερευνητικών ερωτημάτων μέσω της μελέτης των πελατειακών σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ των μαθητών της Ε’ τάξης. Πιο συγκεκριμένα, οι τελευταίοι καλούνται μέσω του ρόλου του πελάτη και του περιπτερά να αναλογιστούν, να επιλέξουν και να εφαρμόσουν διάφορες στρατηγικές που σχετίζονται με τις χρηματικές συναλλαγές. Ο πελάτης καλείται να επιλέξει κάποια προϊόντα του περιπτέρου με βάση τη δική του βούληση και οδηγείται στο ταμείο. Ο ιδιοκτήτης υπολογίζει με το νου το συνολικό ποσό και ενημερώνει τον πελάτη ώστε να το καταβάλλει και να πάρει ρέστα, αν χρειαστεί. Έπειτα γίνεται η εναλλαγή ρόλων για κάθε ομάδα.

Το *τέταρτο έργο* απευθύνεται στην Ε’ τάξη και αφορά στη μελέτη του τρόπου κατασκευής χαρταετού με τους μαθητές. Στόχος της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν όλοι οι μαθητές πως για να βρεθεί το συνολικό εμβαδόν του χαρταετού (πολύγωνο) πρέπει πρώτα να βρεθεί το εμβαδόν των επιμέρους σχημάτων από τα οποία αποτελείται και να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα του εμβαδού των σχημάτων αυτών ισούται με το εμβαδόν του χαρταετού. Στην τελική φάση του έργου δίνεται στους μαθητές φυλλάδιο με δύο προβλήματα γεωμετρικής φύσεως.

Ο τρόπος διερεύνησης του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος (ΕΕ1) που εμπλέκει τους μαθητές σε έργα της καθημερινής ζωής δίνει τη δυνατότητα διάκρισής τους σε δύο κατηγορίες ως προς τη σχολική τάξη φοίτησης. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Δ’ Δημοτικού έτειναν να επιλέγουν περισσότερο άτυπες στρατηγικές ενασχόλησης και συλλογισμού πάνω στα έργα (π.χ. ο χωρισμός του αλευριού σε μέρη κατά τον μαγειρικό διαγωνισμό, η φράση ενός μαθητή στο άτυπο μέρος του πρώτου έργου «Μπορούμε και να σκεφτόμαστε;»). Αντίθετα, οι μαθητές της Ε’ Δημοτικού στην πλειονότητά τους κατέληγαν στην εφαρμογή τυπικών-κανονιστικών τρόπων αναστοχασμού (π.χ. «Έτσι μας το είπε ο δάσκαλος») και ολοκλήρωσης των έργων (π.χ. η απομνημόνευση του κανόνα μετατροπής κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό αλλά η αδυναμία εφαρμογής του).

Η ευκολία πρόσβασης στο συγκεκριμένο σχολείο αλλά και η προηγούμενη προσωπική επαφή και συνεργασία με εκπαιδευτικούς των τάξεων του δείγματος κατά τη διάρκεια της Πρακτικής Άσκησης των ερευνητριών επιτρέπουν την διαμόρφωση υποθέσεων ως προς το διδακτικό προφίλ τους, το οποίο φαίνεται να επηρεάζει τη μύηση του μαθητικού πληθυσμού σε καθορισμένους τρόπους και τύπους σκέψης. Η διαφοροποίηση των εκπαιδευτικών ως προς το στυλ διδασκαλίας (ελευθεριάζον vs. αυταρχικό) αλλά και ως προς το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών (μέτριο vs. δυνατό) μεταξύ των τμημάτων της Ε’ φαίνεται να επηρεάζει την εμπλοκή των μαθητών σε έργα πέραν των σχολικών ορίων. Μία ακόμη βάσιμη υπόθεση για τη διάκριση του δείγματος θεωρείται η περισσότερο παιγνιώδης μορφή-φύση των έργων της Δ’, σε σχέση με αυτά της Ε’, στα οποία χρησιμοποιήθηκαν εκ μέρους των μαθητών λέξεις-κλειδιά, όπως ποσοστά, μέτρηση, εμβαδόν, μήκος κ.ά., που παρέπεμπαν στα σχολικά μαθηματικά.

Την προαναφερθείσα θέση ενισχύει η κριτική οπτική της Γκλιάου-Χριστοδούλου (χ.χ.), η οποία εξαίρει τη συμβολή του εκπαιδευτικού στη διαμόρφωση ενός περιβάλλοντος ευνοϊκού για την ανάπτυξη δεξιοτήτων και στρατηγικών προσέγγισης της γνώσης. Σύμφωνα με την ίδια, ο θεσμός του σχολείου ως πάροχος της γνώσης, αρκετές φορές εγκλωβίζεται σε παραδοσιακά πρότυπα, αποκομμένα από τα καθημερινά βιώματα του μαθητικού πληθυσμού, δυσχεραίνοντας τη σύνδεση γνώσης-εμπειρίας. Συμπληρωματικά, η Κολέζα (2009) υποστηρίζει ότι η διδασκαλία των μαθηματικών στις μικρές τάξεις στηρίζεται σε καθημερινά έργα και προβλήματα, σε αντίθεση με τις μεγαλύτερες τάξεις όπου προάγεται η αποδοχή των μαθηματικών ως ένα τυπικό παραγωγικό σύστημα που δυσχεραίνει την κατανόησή τους και την απόκτηση «μαθηματικής συμπεριφοράς».

Όσον αφορά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, χαρακτηριστικό εύρημα αποτελεί η διαπίστωση ότι οι μαθητές κατά την παρουσίαση των έργων θεωρούσαν ότι θα ασχοληθούν με παιχνίδια, μη σχολικής φύσεως, στάση όμως, η οποία απορρίπτονταν μετά την εκφώνηση των οδηγιών των έργων και την ατομική ανάγνωση των κανόνων ή μετά το πέρας του άτυπου μέρους των έργων. Μερικές από τις μαθητικές αντιδράσεις αναγνώρισης της χρήσης μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, μέσα από την εμπλοκή τους σε βιωματικά έργα, αποτελούν οι εξής: «Μαθηματικά θα κάνουμε πάλι;», «Βρήκα πολλά μαθηματικά στον χαρταετό και δεν το περίμενα», «Νόμιζα ότι χρησιμοποιώ μαθηματικά μόνο στο σπίτι για ασκήσεις, αλλά τελικά χρησιμοποιώ κι εδώ», «Είχαμε ξαναμαγειρέψει στο σχολείο, αλλά τώρα κατάλαβα επειδή τα έκανα πιο πολύ μόνος μου ότι χρειάστηκα μαθηματικά». Στο ίδιο χρονικό σημείο των έργων εκφράστηκε από δύο μαθητές η μετα-ιδέα της σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινότητα, αναφέροντας ότι: «Χρησιμοποιώ μαθηματικά από το πρωί που θα ξυπνήσω μέχρι το βράδυ που θα κοιμηθώ, γιατί είμαι στο σχολείο, μετά μπορεί να πάω κάπου να αγοράσω κάτι…», «Και τα δύο (μαθηματικά-μαγειρική) ξεκινούν από Μα» καθώς και «Θα ήταν πιο ωραία να κάνουμε μαθηματικά μαγειρεύοντας στο σχολείο!».

Η αιφνίδια αλλαγή της στάσης των μαθητών, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, πιθανολογείται πως οφείλεται στην ίδια τη φύση των έργων, η οποία, ως παιγνιώδης και ρεαλιστική, έρχεται σε αντίθεση με τον τρόπο εργασίας τους στο πλαίσιο της σχολικής τάξης τους (βλ. Ε.Ε.1). Το εύρημα αυτό συνάδει με αντίστοιχα της βιβλιογραφίας τα οποία υπογραμμίζουν την ασυμφωνία των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών στο πλαίσιο της κοινότητας με τα τυπικά σχολικά μαθηματικά (Καφούση & Χαβιάρης, 2013)

Ως προς το ΕΕ3, η απόδοση των μαθητών στις γραπτές δοκιμασίες φάνηκε να παρέμεινε ανεπηρέαστη από την άτυπη δραστηριοποίηση και ενασχόλησή τους με όμοιες μαθηματικές ιδέες. Αυτό παρατηρήθηκε από την αδυναμία των μαθητών να ανταποκριθούν στα σχολικά προβλήματα, τα οποία βάσει των ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ αντιστοιχούν στο γνωστικό-νοητικό επίπεδο των μαθητών κάθε τάξης. Ενδεικτικά, παρατηρήθηκε αδυναμία επιτυχούς ολοκλήρωσης των προβλημάτων του πρώτου έργου, ακόμα και αυτών που περιελάμβαναν αριθμούς με τους οποίους οι μαθητές στην προηγούμενη φάση φάνηκαν να είναι εξοικειωμένοι, χαρακτηρίζοντάς τους «καλούς» και «εύκολους». Μοναδική εξαίρεση στην παραπάνω διαπίστωση αποτέλεσε η χρήση της ιδέας της στρογγυλοποίησης από το 1/3 του δείγματος στο τυπικό μέρος του τρίτου έργου, χωρίς ωστόσο να αποτελεί ζητούμενο της συγκεκριμένης δοκιμασίας. Μάλιστα, όταν ρωτήθηκαν για ποιο λόγο εφάρμοσαν την παραπάνω μέθοδο, υποστήριξαν ότι «Το έκανα έτσι πριν και είδα ότι με βοήθησε ενώ στην αρχή μου είχε φανεί δύσκολο» και «Με βοηθάει να βρω πόσο θα είναι περίπου το αποτέλεσμα και μετά να το ελέγξω αφού το βρω ακριβώς».

Τα παραπάνω αποτελέσματα έρχονται σε αντίθεση με την πλειονότητα των βιβλιογραφικών πηγών, στις οποίες υποστηρίζεται ότι η ενεργή εμπλοκή των παιδιών σε ρεαλιστικές δραστηριότητες επηρεάζει θετικά την απόδοσή τους στα σχολικά μαθηματικά. Ένας πιθανός λόγος στον οποίο οφείλεται το εύρημα αυτό είναι ο τρόπος εργασίας των μαθητών στο υπό μελέτη σχολικό περιβάλλον, ο οποίος χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένη δομή, μορφή, αυστηρή οργάνωση, κανονιστικά μοντέλα και καθορισμένα χαρακτηριστικά. Ειδικότερα, με τα χαρακτηριστικά αυτά εννοείται η απαρέγκλιτη χρήση του σχολικού εγχειριδίου, η πιστή ακολουθία του Αναλυτικού Προγράμματος, η ανάγκη κάλυψης της διδακτέας ύλης, παρά τα γνωστικά κωλύματα των μαθητών και, τέλος, η διδασκαλία τύπων και κανόνων χωρίς τη σύνδεσή τους με πρότερες γνώσεις. Η θέση αυτή αιτιολογείται από τη βιβλιογραφία, η οποία επιτονίζει το γεγονός ότι η προσκόλληση στη θεωρία και τους κανόνες έρχεται σε αντιδιαστολή με τη φύση των μαθηματικών, που είναι διερευνητική και συμβολιστική. Η παραπάνω διαπίστωση φαίνεται να έχει ως απόρροια την απομάκρυνση των εκπαιδευόμενων από την ουσία των μαθηματικών (Παπαδοπούλου & Γρηγορίου, 2005).

Συμπερασματικά, ο μαθητικός πληθυσμός εισάγεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση με πλήθος άτυπων μαθηματικών γνώσεων και στρατηγικών, στοιχεία που όπως φαίνεται κατά τη διάρκεια φοίτησής του στις σχολικές μονάδες αγνοούνται τόσο από το εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας όσο και από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό. Ο τελευταίος, σε αντίθεση με τη βιβλιογραφία φαίνεται να μη λαμβάνει υπόψη τις πραγματικές αριθμητικές ικανότητες με τις οποίες καταφθάνουν οι μαθητές στο Δημοτικό Σχολείο, αποβλέποντας στην επίτευξη συνοχής μεταξύ της πρότερης και της νέας γνώσης. Έτσι, ως προς το ΕΕ1, παρατηρήθηκε ότι το δείγμα φαίνεται να περιορίζεται σε έναν οριοθετημένο τρόπο σκέψης και δράσης καθρεφτίζοντας την κανονιστική μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο. Αναφορικά με το ΕΕ2, οι μαθητές κατά την παρουσίαση των έργων φαίνεται να αναγνωρίζουν παιγνιώδη και όχι μαθηματική φύση σε αυτά, στην πορεία όμως η στάση αυτή διαφοροποιείται όταν το δείγμα καλείται να αναπτύξει συλλογισμούς και να εφαρμόσει στρατηγικές συνδέοντας το περιεχόμενο των έργων με το αντίστοιχο των σχολικών μαθηματικών. Τέλος, ως προς το ΕΕ3, συμπεραίνεται ότι η πρότερη εμπλοκή της πλειονότητας των συμμετεχόντων σε έργα ρεαλιστικής φύσης δε φάνηκε να επηρεάζει την απόδοση των μαθητών σε αντίστοιχα έργα τυπικής-σχολικής φύσης.

Η κατανόηση των μαθηματικών ως φαινόμενο παγκόσμιο φέρνει στο προσκήνιο την αναγνώριση της ανάγκης ενσωμάτωσης των μαθηματικών πρακτικών της καθημερινής ζωής στη σχολική μαθηματική πραγματικότητα, ως την νέα τάση στην σύγχρονη παιδαγωγική που θα επιφέρει αλλαγές στην κατεύθυνση των παραδοσιακών Αναλυτικών Προγραμμάτων και θα επιδιώξει τη σύνδεση των μαθηματικών με το κοινωνικό και πολιτισμικό προφίλ του κάθε μαθητή. Από τα παραπάνω ευρήματα δημιουργούνται σκέψεις αναφορικά με τον ενταξιακό προσανατολισμό του εκπαιδευτικού συστήματος του οποίου η δομή φαίνεται να εθελοτυφλεί στην ύπαρξη του διαφορετικού κοινωνικο-πολιτισμικού υπόβαθρου του μαθητικού δυναμικού.

Βιβλιογραφία

Βοσνιάδου, Σ. (1998). *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

Γκλιάου-Χριστοδούλου, Ν. (χ.χ.). *Μεθοδολογικές προσεγγίσεις που συμβάλλουν στην ανάπτυξη επικοινωνιακών και κοινωνικών δεξιοτήτων για αποτελεσματική συμμετοχή των παιδιών στη μαθησιακή διαδικασία.* Ανακτήθηκε 9 Ιουνίου, 2014 από http://www.pi-schools.gr/content/index.php?lesson_id=300&ep=371.

Καφούση, Σ., Χαβιάρης, Π. (2013). *Σχολική τάξη, οικογένεια, κοινωνία και μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα: Πατάκης

Κιουγκελέ, Β., Σοφιανίδου, Μ., & Τσέγκου, Χ. (2012). *Οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης αναφορικά με εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά που αξιοποιούν στοιχεία του ανθρώπινου πολιτισμού*. Πτυχιακή εργασία. Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Αλεξανδρούπολη.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (4η έκδοση). Αθήνα: Τόπος.

Παπαδοπούλου, Α. & Γρηγορίου, Ε. (2005). *Η αξιοποίηση εναλλακτικών μαθηματικών δραστηριοτήτων στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου*. Πτυχιακή εργασία. Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Αλεξανδρούπολη.

Σακονίδης, Χ. (1998), «Ειδικά Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών», Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Αλεξανδρούπολη.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα – Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία*. Αθήνα: Gutenberg.

Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Χασάπης, Δ. (2005). Κοινωνικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης: όψεις και ζητήματα. Στο Δ. Χασάπης (επιμ.) *Πρακτικά 4ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Θεσσαλονίκη.

ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: «ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ» ΑΝΑΠΛΑΙΣΙΩΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ

Α. Κλώθου[1] & Χ. Σακονίδης[2]

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

[1]aklothou@eled.duth.gr, [2]xsakonid@eled.duth.gr

ABSTRACT

Οι αναπλαισιώσεις που πραγματοποιούνται κατά την πορεία εφαρμογής ενός νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΠΣ) προσδιορίζονται μέσω των διαφορετικών λόγων (discourses) από τους οποίους αντλούν στοιχεία οι εκπαιδευτικοί για να αποδώσουν νόημα στις μαθηματικές διεργασίες που προτάσσονται. Στην εργασία μελετώνται οι λόγοι δεκατριών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στη διάρκεια ημι-δομημένης συνέντευξης που πραγματοποιήθηκε μετά από την ολοκλήρωση της πιλοτικής εφαρμογής ενός νέου ΠΣ για τα Μαθηματικά στο σχολείο τους. Η ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε αντιφάσεις στον λόγο των εκπαιδευτικών που μπορεί να αποδοθούν στις διαδικασίες αναπλαισίωσης που ενεργοποιήθηκαν στην προσπάθεια εξοικείωσης με και εφαρμογής του νέου ΠΣ από αυτούς και υποδεικνύουν ασυνέπειες εντός ή μεταξύ των ποικίλων λόγων που έχουν στη διάθεσή τους.

ΤΟ ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΝΑΠΛΑΙΣΙΩΣΗΣ

Η ανάπτυξη και η πιλοτική εφαρμογή ενός νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) των Μαθηματικών που επιχειρήθηκε την τριετία 2011 – 2013 αποτέλεσε μια πολύπλοκη διαδικασία, κυρίως ως προς το σκέλος της νοηματοδότησής του από τους εκπαιδευτικούς κατά τη συνθήκη της πιλοτικής εφαρμογής του (ΙΕΠ 2014). Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας και σε μια προσπάθεια ερμηνείας και κατανόησης της πολυπλοκότητας αυτής, αξιοποιήθηκαν οι έννοιες της αναπλαισίωσης και των πεδίων αναπλαισίωσης του Bernstein (2000), δηλαδή, της μεταγωγής της γνώσης από τα περιβάλλοντα διανοητικής δραστηριότητας όπου παράγεται σε άλλα[6] (όπως αυτό της εκπαίδευσης). Τα πεδία διακρίνονται σε δύο επιμέρους πεδία, το Πεδίο της Επίσημης Αναπλαισίωσης, που διαμορφώνεται από την επίσημη πολιτεία με στόχο τη διαφύλαξη του πολιτειακού παιδαγωγικού λόγου, και το Πεδίο της (επίσημης) Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης, το οποίο διαμορφώνεται από ανεξάρτητους σε έναν βαθμό από την πολιτεία φορείς-αντιπροσώπους (agents).

[6] Πρόκειται για τις επιλογές και τις αλλαγές ή αλλοιώσεις που υφίσταται η γνώση κατά τη μεταφορά από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο πλαίσιο, ανάλογα με το ποιος/-α τη μεταφέρει και σε ποιον/ -αν απευθύνεται.

Για την αποσαφήνιση του όρου *Λόγος* (discourse) μπορεί να αναφερθεί ότι συνιστά πηγή «κοινωνικά οριοθετημένων νοημάτων και συνδέεται με συγκεκριμένους κοινωνικούς θεσμούς, καθένας από τους οποίους προσδιορίζει και προσδιορίζεται από τις πρακτικές, τις αξίες και τις έννοιες που συγκροτούν τον λόγο του» (Μητσικοπούλου 2006). Ο κάθε λόγος είναι μια συστηματικά οργανωμένη ομάδα δυνάμει δηλώσεων μέσω των οποίων λεκτικοποιούνται τα νοήματα ενός θεσμού (Kress 1989). Ο λόγος αποτελεί μια κοινωνική κατασκευή που οικειοποιείται επιλεκτικά νέους παιδαγωγικούς λόγους με στόχο να συγκροτήσει την κοινωνική ιεράρχηση του ατόμου (Κουλαϊδής & Τσατσαρώνη 2010).

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, το πεδίο αναπλαισίωσης μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τρία επιμέρους πεδία, τα οποία λειτουργούν παράλληλα: (α) *το Πεδίο της Επίσημης Αναπλαισίωσης*-το ίδιο το Πρόγραμμα Σπουδών και οι αρχές του, καθώς και τα σχολικά βιβλία συγκροτούνται από φορείς του Υπουργείου Παιδείας, (β) *το Πεδίο της Επίσημης Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης*-το περιεχόμενο των ΠΣ και των σχολικών βιβλίων προσδιορίζεται από την ακαδημαϊκή κοινότητα, ωστόσο η συγγραφή τους ελέγχεται και νομιμοποιείται από το Υπουργείο Παιδείας, (γ) *το πεδίο της Τοπικής Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης*-η εφαρμογή σε επίπεδο σχολείου ερμηνεύεται από τους εκπαιδευτικούς μέσω των συμπληρωματικών πόρων (resources) που υφίστανται σε τοπικό επίπεδο. Παρά το γεγονός ότι τόσο το Πεδίο Επίσημης Αναπλαισίωσης όσο και το πεδίο Τοπικής Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης διαθέτουν κάποια αυτονομία, αυτή είναι αρκετά περιορισμένη, καθώς η νομιμοποίησή της πραγματοποιείται μόνο σε εθνικό επίπεδο.

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και των εκπαιδευτικών συστημάτων των περισσότερων δυτικών χωρών είναι ότι στην Ελλάδα δεν είναι εύκολα διακριτό ένα πεδίο παιδαγωγικής αναπλαισίωσης ανεξάρτητο από τη ρύθμιση και την εποπτεία του κράτους, που να ασκεί επιρροή στη νοηματοδότηση και την υιοθέτηση διδακτικών πρακτικών. Γενικά, η διοίκηση και ο καθορισμός των γενικών εκπαιδευτικών στόχων, της εκπαιδευτικής πολιτικής και του περιεχομένου των Προγραμμάτων Σπουδών, η παραγωγή εκπαιδευτικών υλικών για την υποστήριξη της διδασκαλίας και της μάθησης, η επίβλεψη της εφαρμογής νέων Προγραμμάτων Σπουδών, η επιμόρφωση, η πιστοποίηση και η αξιολόγηση των εκπαιδευτικών ελέγχονται σε κεντρικό επίπεδο (Υπουργείο Παιδείας).

Ωστόσο, ακόμη και όταν η Πολιτεία αποθαρρύνει την ανεξάρτητη ανάπτυξη λόγων που αφορούν το Πρόγραμμα Σπουδών, υπάρχουν διαφοροποιήσεις ανάμεσα στα επιμέρους πεδία που συγκροτούν το πεδίο της αναπλαισίωσης και στους λόγους που παράγουν αντιστοίχως, οι οποίες (διαφοροποιήσεις) λειτουργούν για τους εκπαιδευτικούς ως πηγές από τις οποίες μπορούν να αντλούν στοιχεία για να “ερμηνεύσουν” το Πρόγραμμα Σπουδών στο πεδίο της αναπαραγωγής. Το πεδίο της αναπαραγωγής είναι ένα από τα τρία πεδία στα οποία λειτουργεί ο παιδαγωγικός λόγος[7] (τα άλλα δύο είναι το πεδίο της παραγωγής και το πεδίο της αναπλαισίωσης της γνώσης). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί μπορεί να αντλήσουν στοιχεία από προηγούμενους λόγους, όπως στην περίπτωση των Μαθηματικών, από τους λόγους που έγιναν διαθέσιμοι στο πλαίσιο της δικής τους μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς και από καθημερινούς λόγους που παράγονται σε τοπικό επίπεδο, στο σχολείο και στην ευρύτερη κοινότητα (εκπαιδευτική ή/ και οικογενειακή). Τα πεδία και οι λόγοι που συγκροτούνται στο ελληνικό πλαίσιο συνοψίζονται στον Πίνακα 1.

Πεδίο	**Επιμέρους πεδία**	**Λόγος που παράγεται**
Πεδίο αναπλαισίωσης	Πεδίο Επίσημης Αναπλαισίωσης	Επίσημος λόγος
	Πεδίο Επίσημης Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης	Επαγγελματικός επίσημος λόγος
	Πεδίο Τοπικής Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης	Τοπικός επίσημος λόγος Συμβατικός λόγος[8]
Πεδίο αναπαραγωγής		Τοπικός λόγος

Πίνακας 1: Πεδία, επιμέρους πεδία και λόγοι στην ελληνική υποχρεωτική εκπαίδευση

Η αναπλαισίωση που λαμβάνει χώρα κατά την πορεία διάχυσης της γνώσης συνδέεται μεταξύ άλλων και με τα επίπεδα ανάπτυξης (δομή) του διοικητικού ελέγχου που ασκείται στην εκπαίδευση από την Πολιτεία και επιτρέπει τον προσδιορισμό τους (Morgan & Xu 2011). Οι διάφοροι φορείς καταλαμβάνουν διαφορετικές θέσεις στο εσωτερικό αυτής της δομής και εμπλέκονται στις διαδρομές αναπλαισίωσης του λόγου του Προγράμματος Σπουδών, έχοντας διαφορετικά ενδιαφέροντα και διαφορετικές σχέσεις με σχολεία και εκπαιδευτικούς.

Στην περίπτωση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, η περίπλοκη σχέση που το διέπει δημιουργεί διαφοροποιήσεις μεταξύ των λόγων που παράγονται στα διαφορετικά επίπεδα πεδίων αναπλαισίωσης. Κατά συνέπεια, υπάρχουν διαφορές μεταξύ των παιδαγωγικών κειμένων που συγκροτούνται,

[7] Ο παιδαγωγικός λόγος αφορά σε ένα σύνολο κανόνων ή διαδικασιών για την παραγωγή και διάχυση της γνώσης στο πλαίσιο των παιδαγωγικών αλληλεπιδράσεων (Bernstein, 2000).

[8] Συμβατικός λόγος: οι εκπαιδευτικοί, στην καθημερινή τους διδασκαλία αλλά και στις καθημερινές τους αλληλεπιδράσεις, αντλούν στοιχεία από έναν εναλλακτικό λόγο, ο οποίος ορίζεται ως «Συμβατικός λόγος» (Conventional Discourse), και προέρχεται από τη δική τους εκπαίδευση (για παράδειγμα, στα Μαθηματικά) και από την εμπειρία τους με το προηγούμενο αντίστοιχο Πρόγραμμα Σπουδών (Morgan & Xu 2011).

μεταξύ των πρακτικών που υιοθετούνται με βάση αυτούς τους διαφορετικούς λόγους και μεταξύ των τρόπων με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί μπορεί να νομιμοποιήσουν τις αντίστοιχες πρακτικές τους. Η Morgan (2010) υποστηρίζει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων αναπλαισίωσης και των ερμηνειών που προκύπτουν από την παραγωγή διαφορετικών λόγων παρέχει χώρο στους εκπαιδευτικούς να τοποθετούν (ή όχι) τους εαυτούς τους στη θέση του «καλού εκπαιδευτικού», νομιμοποιώντας μια σειρά από διαφορετικές πρακτικές στην τάξη. Οι Brown et al (2000) υποστηρίζουν ότι οι ασάφειες που εντόπισαν σε επίσημα κείμενα για την εκπαίδευση επιτρέπουν εναλλακτικές ερμηνείες της παιδαγωγικής που προτείνουν, ενώ οι McNamara & Corbin (2001) διαπίστωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ποικίλους, ενίοτε αντιφατικούς λόγους για να αιτιολογήσουν τις πρακτικές τους.

Η ποικιλία των πεδίων αναπλαισίωσης που βρίσκονται εν δράσει και η πολυπολυπλοκότητα των τρόπων με τους οποίους αλληλεπιδρούν κατά την ερμηνεία και τη διαμόρφωση της πρακτικής παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση των Μαθηματικών, εξαιτίας της βαρύνουσας θέσης που κατέχει το αντίστοιχο μάθημα στο Πρόγραμμα Σπουδών, αλλά και της αναγνωρισμένης αξίας του για τη σχολική και την επαγγελματική επιτυχία κάθε μαθητή. Έτσι, στο εμπειρικό μέρος της παρούσας μελέτης επιχειρείται μια πρώτη διερεύνηση των διαδικασιών αναπλαισίωσης που δρουν σε μια ιδιαίτερη συνθήκη, κατά την εισαγωγή ενός νέου Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Το ερευνητικό πρόβλημα της παρούσας μελέτης αποτελεί η διερεύνηση των τρόπων με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που συμμετείχαν στην πιλοτική εφαρμογή ενός νέου Προγράμματος Σπουδών για ένα σχολικό έτος αναπλαισίωσαν τις καινοτομίες του ΠΣ στην τάξη, και ειδικότερα τις μαθηματικές διεργασίες που κατεξοχήν πριμοδοτεί[9], όπως αυτές παρατηρήθηκαν κατά τη διδασκαλία και ανιχνεύτηκαν στον παιδαγωγικό λόγο των εκπαιδευτικών. Το δείγμα αποτέλεσαν 13 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε σχολεία πιλοτικής εφαρμογής στη Θράκη (10 απόφοιτοι Παιδαγωγικής Ακαδημίας που παρακολούθησαν το Πρόγραμμα Εξομοίωσης, 2 απόφοιτοι Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης και 1 απόφοιτος Μαθηματικού και

[9] Κεντρικός προσανατολισμός του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών είναι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που ενισχύουν διεργασίες όπως α) ο μαθηματικός συλλογισμός και η επιχειρηματολογία, β) η δημιουργία συνδέσεων/ δεσμών μεταξύ των εννοιών, γ) η επικοινωνία μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων και δ) η μεταγνωστική ενημερότητα, «όπου ο μαθητής σκέφτεται πάνω στις δράσεις του και ελέγχει την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών του» (Οδηγός Εκπαιδευτικού, 2014).

Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης). Όλοι είχαν αξιόλογη διδακτική εμπειρία (10-25 έτη) και ενεργή εμπλοκή σε δράσεις επαγγελματικής ανάπτυξης. Κατά την περίοδο διεξαγωγής της μελέτης οι πέντε εκπαιδευτικοί δίδασκαν σε μεγάλες τάξεις (Ε, ΣΤ), οι τέσσερις σε μεσαίες τάξεις (Γ,Δ) και οι τέσσερις σε μικρές τάξεις (Α, Β).

Η έρευνα αναπτύχθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση υπήρξε μη συμμετοχική παρατήρηση των εκπαιδευτικών σε δύο δίωρες καθημερινές διδασκαλίες τους στα Μαθηματικά με βάση το νέο Πρόγραμμα Σπουδών. Στη δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε ημιδομημένη συνέντευξη με καθέναν από τους εκπαιδευτικούς, με στόχο τη μελέτη του παιδαγωγικού λόγου που ανέπτυσσαν για τη συλλογή στοιχείων αναφορικά με τις διαδικασίες αναπλαισίωσης που έλαβαν χώρα στα συγκεκριμένα μαθήματα και αφορούσαν τις διεργασίες του νέου ΠΣ των Μαθηματικών. Κάθε εκπαιδευτικός απασχολήθηκε σταδιακά για τέσσερις ώρες συνολικά (εκτός σχολικού ωραρίου). Για την κατανόηση και την περιγραφή των διαδικασιών αναπλαισίωσης των μαθηματικών διεργασιών που έλαβαν χώρα, υιοθετήθηκε η μεθοδολογία της μελέτης περίπτωσης, ενώ για την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν αξιοποιήθηκαν συνδυαστικά και κατά περίπτωση τεχνικές της Θεμελιωμένης Θεωρίας (Grounded Theory) και της Ανάλυσης Περιεχομένου (Content Analysis). Ειδικότερα, εντοπίστηκαν φράσεις των εκπαιδευτικών που σχετίζονταν με τα πεδία αναπλαισίωσης, οι οποίες κωδικοποιήθηκαν, ομαδοποιήθηκαν και εντάχθηκαν σε κάθε πεδίο, αποδίδοντας νόημα στο περιεχόμενο και στη δομή του.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί ερμήνευσαν τον ***μαθηματικό συλλογισμό και την επιχειρηματολογία*** κατά τρόπο που είναι σύμφωνος με τον επίσημο λόγο, ενώ παρατηρήθηκε συνοχή μεταξύ της δράσης αναπλαισίωσης στο Πεδίο Επίσημης Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης και στο Πεδίο Τοπικής Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης. Συγκεκριμένα, αν και οι εκπαιδευτικοί ευθυγραμμίστηκαν με τον επίσημο λόγο, θεωρώντας ότι ο μαθηματικός συλλογισμός και η επιχειρηματολογία συνιστούν επιθυμητούς δρόμους προσέγγισης της μαθηματικής έννοιας, χαρακτήρισαν αυτή τη διεργασία μάλλον δύσκολη για να εφαρμοστεί στην πράξη.

> «Αναφερόμαστε στην πρώτη διεργασία του ΠΣ που είναι πραγματικά πολύ σημαντική για τους μαθητές. Εγώ πιστεύω σε αυτό, τα παιδιά πρέπει να τα αφήνουμε να λένε τη σκέψη τους, σε κάθε τι που κάνουμε στο σχολείο και πόσο μάλλον στα Μαθηματικά…..αλλά πρέπει να έχουμε χρόνο και υποστήριξη από το σχολείο, εννοώ από τους συναδέλφους ή περισσότερο από τον διευθυντή και τον σχολικό σύμβουλο, να μην είναι εναντίον και βλέπουν μόνο αν τελείωσες την ύλη…» [17 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, ΣΤ τάξη].

Οι "αντιρρήσεις" που προβλήθηκαν, αντλήθηκαν κυρίαρχα από τον τοπικό λόγο και αφορούσαν κυρίως τον αριθμό των μαθητών στην τάξη, την πίεση του χρόνου και τις απαιτήσεις των γονέων. Οι εκπαιδευτικοί άντλησαν, επίσης, στοιχεία από τον συμβατικό λόγο που αντιμετωπίζει τα Μαθηματικά ως μια "πειθαρχία" (discipline), η οποία, λόγω της απόλυτης φύσης της, δεν προσφέρεται πάντα για συζήτηση.

> «Εντάξει, όταν υπολογίζουν δεν συζητάμε για τον υπολογισμό. Μαθηματικά είναι. Τους ζητώ να μου πουν αν είναι σωστό ή λάθος. Στην περίπτωση που είναι λάθος, συζητάμε πού και πώς πήγε λάθος. Αν είναι σωστό, θα πρέπει το παιδί να εξηγήσει το σκεπτικό (19 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, εξομοίωση, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, Γ τάξη).

Αναφορικά με τη διεργασία που αφορά στη ***δημιουργία συνδέσεων/ δεσμών μεταξύ των μαθηματικών εννοιών***, οι εκπαιδευτικοί του δείγματος ευθυγραμμίστηκαν καταρχήν με τον επίσημο λόγο, χωρίς να του αποδίδουν ωστόσο ιδιαίτερη αξία. Αποκλίσεις από τον επίσημο λόγο εντοπίστηκαν κατά την αναφορά στις δυνατότητες αξιοποίησης της διεργασίας στην τάξη. Σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρήθηκε αναπλαισίωση που συχνότερα αντλούσε από ανεπίσημους, τοπικούς λόγους (π.χ. η σημασία της εξάσκησης και της επανάληψης στα Μαθηματικά, η σπειροειδής διάταξη της ύλης, η συνεχής ενασχόληση με τις μαθηματικές έννοιες) και καθόλου από επίσημους λόγους (π.χ. επιμορφώσεις σε θέματα διδακτικής των Μαθηματικών).

> Ναι, συμφωνώ ότι το να κάνω συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών είναι κάτι που πρέπει να γίνεται. Αυτό βοηθάει το παιδί να καταλάβει. Όμως υπάρχουν και άλλοι τρόποι, δηλαδή μπορείς να δεις τι κάνει ένας μαθητής, αν έχει καταλάβει π.χ. τα κλάσματα από τη συμπεριφορά που έχει μέσα στην τάξη. Τι εννοώ; Τον βλέπεις ότι λύνει αμέσως αυτό που θα του δώσεις, ακούει αυτά που του λες και εφαρμόζει με επιτυχία, κάνει υπολογισμούς με επιτυχία και αμέσως. Βέβαια, δεν μπορούμε να τα δούμε όλα μέσα στην τάξη. Υπάρχει και η μαθηματική σκέψη στην οποία αναφέρεται και το ΠΣ, ότι είναι απαραίτητο να την καλλιεργήσουμε στα παιδιά και αυτό το λένε όλοι όσοι σχετίζονται με την εκπαίδευση, οι δάσκαλοι στο σχολείο, για όλους τους δασκάλους είναι σημαντικό αυτό [21 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, εξομοίωση, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, ΣΤ τάξη]

Οι εκπαιδευτικοί, αρθρώνοντας παιδαγωγικό λόγο για την ***επικοινωνία*** που επιτυγχάνεται στην τάξη των Μαθηματικών ***με την αξιοποίηση διαφορετικής μορφής εργαλείων***, αναφέρθηκαν κυρίως στη σημασία που έχουν οι εργασίες όπου απαιτείται η χρήση χειραπτικού υλικού, μέσω των οποίων οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούν τα χέρια τους για να χειρίζονται υλικά (για παράδειγμα, να κόβουν ένα κομμάτι χαρτί, να παίρνουν πούλια από ένα σακουλάκι κ.ά.). Εστιάστηκαν ιδιαίτερα στην πρακτική εργασία, αντλώντας κυρίαρχα από τον τοπικό λόγο του σχολείου, υποστηρίζοντας ότι μπορεί να εμπλέξει ενεργά τους μαθητές και προσδιορίζοντάς την συχνά ως ‘παιχνίδι’.

Γενικά, τόσο τα χειραπτικά υλικά όσο και τα ψηφιακά υλικά, τα οποία φάνηκε συχνά να αντιμετωπίζονται ως ένα τρόπος «να γλυκάνει το πικρό χάπι των Μαθηματικών”, αποτελέσαν θετικά σημεία αναφοράς στον λόγο των εκπαιδευτικών. Ωστόσο, ήταν φανερή μια καχυποψία για τη δυνατότητά τους να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν μαθηματικά (ιδιαίτερα στους εκπαιδευτικούς των μεγάλων τάξεων). Κατά τη σχετική επιχειρηματολογία αναφέρθηκαν δύο βασικοί λόγοι: α) το αποτέλεσμα στο οποίο φτάνουν οι μαθητές μέσω της ενασχόλησης με τα χειραπτικά υλικά δεν μπορεί να χαρακτηριστεί μαθηματικά “ακριβές” και δεν μπορεί να θεωρηθεί αυστηρά μαθηματικό και β) το αποτέλεσμα που προκύπτει από μια φυσική δραστηριότητα στην οποία εμπλέκονται οι μαθητές έχει πρόσκαιρο χαρακτήρα και δεν είναι εύκολο να οδηγήσει τη μαθησιακή διαδικασία προς τη γενίκευση, η οποία είναι επιστημολογικό χαρακτηριστικό του πεδίου των Μαθηματικών. Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι είναι ιδιαίτερα ανήσυχοι όταν οι μαθητές τους ασχολούνται με δραστηριότητες που απαιτούν χειραπτικό υλικό γιατί θεωρούν ότι υπάρχει ο “κίνδυνος” να θεωρήσουν αληθές ό,τι έχουν «δει» ή έχουν «μαντέψει», ανάγοντάς το σε μια γενικευμένη μαθηματική αλήθεια ή σε έναν κανόνα.

> Εμείς που είμαστε και μικρή τάξη δουλεύουμε πολύ με χειραπτικά υλικά. Κάθε μέρα σχεδόν τα παιδιά κάτι κάνουν. Δοκιμάζουν τα υλικά για να καταλάβουν τα Μαθηματικά που κάνουμε. Δεν ξέρω όμως αν αυτό πρέπει να είναι έτσι. Δηλαδή, αν κάνουν συνέχεια Μαθηματικά με αυτόν τον τρόπο, βιωματικά, με τα χέρια τους, πότε θα καταλάβουν ότι στα Μαθηματικά δεν παίζουμε, θέλουμε ακρίβεια, δεν είναι όπως άλλα μαθήματα. Πρέπει να είμαστε ακριβείς. [21 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, εξομοίωση, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, Β τάξη]

Γενικά, στον παιδαγωγικό λόγο που άρθρωσαν οι εκπαιδευτικοί για τη διεργασία της επικοινωνίας, υπήρξαν ενδείξεις ότι άντλησαν στοιχεία από έναν εναλλακτικό λόγο, προσδιορίζοντας τα Μαθηματικά ως ένα αυστηρό και αφηρημένο πεδίο, που στην παρούσα εργασία προσδιορίζεται ως “συμβατικός λόγος”. Ο λόγος τους αντλεί στοιχεία από τη δική τους μαθηματική εκπαίδευση, καθώς και από την εμπειρία που απέκτησαν από το Πρόγραμμα Σπουδών που υπηρέτησαν τα προηγούμενα χρόνια (και συνεχίζουν να υπηρετούν). Αυτή η μείξη της “συμμόρφωσης” με τον επίσημο λόγο και ταυτόχρονα της αντίθεσης σε αυτόν εκφράστηκε έμμεσα από τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι αντιστέκονται στους επίσημους λόγους (με εξαίρεση μία εκπαιδευτικό), αν και φαίνεται να τάσσονται υπέρ του επίσημου λόγου σε πρώτο επίπεδο.

Ως προς τη ***μεταγνωστική ενημερότητα***, οι εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι συνιστά μια σημαντική διεργασία και εξέφρασαν την “ευχή” να μπορούσαν να ενισχύσουν περισσότερο τις συνιστώσες της στα μαθήματά τους. Ωστόσο, η επιχειρηματολογία που ανέπτυξαν έδειξε ότι για ορισμένους δεν ήταν σαφές το τι συγκεκριμένα περιλαμβάνει η διεργασία αυτή.

> Δεν είμαι σίγουρη πώς μπορώ να δουλέψω στην τάξη μου και να στοχεύω στο να καλλιεργήσω τη μεταγνώση στους μαθητές μου. Γιατί καταλαβαίνω ότι αυτό είναι κάτι που καλλιεργείται. Στα μαθήματα που κάνω με ενδιαφέρει ο μαθητής να διερευνήσει καλά τα Μαθηματικά γι' αυτό και δίνω ασκήσεις που είναι πιο ανοικτές, για να του επιτρέψω να σκεφτεί. Αυτό δημιουργεί ένα ευχάριστο κλίμα στην τάξη, τα παιδιά δεν στρεσάρονται, έχουν χρόνο και έχουν υλικό για να καταλάβουν τα Μαθηματικά, δεν χρειάζεται να αγχωθούν για να μάθουν μηχανικά κάτι που δεν καταλαβαίνουν [19 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, εξομοίωση, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, Γ τάξη].

Πολλοί εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι στο πλαίσιο της συγκεκριμένης διεργασίας ελέγχεται από τους ίδιους τους μαθητές η ισχύς και το εύρος που έχουν οι λύσεις που προτείνουν με στόχο να αναθεωρήσουν, αν χρειαστεί, και γίνονται κατάλληλες ερωτήσεις που υποστηρίζουν την αναστοχαστική διαδικασία. Οι εκπαιδευτικοί συμφώνησαν γενικά για τη σημασία που έχουν τα παραπάνω, δεν μπορούσαν ωστόσο να εξειδικεύσουν περαιτέρω. Δηλαδή, να αναφερθούν στις συνιστώσες της διεργασίας αυτής, όπως οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών και των σχέσεων, η μοντελοποίηση, η ερμηνεία πραγματικών καταστάσεων που θα αξιοποιηθούν για τη μεταγνωστική ανάπτυξη των μαθητών, η ικανότητα μετάβασης από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, η κατανόηση και η ικανότητα "μεταφοράς" της γνώσης σε μη οικείες καταστάσεις. Ειδικότερα, σε σχέση με τη σημασία της διερεύνησης σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο, η οποία συνιστά βασική υποστηρικτική δομή της συγκεκριμένης διεργασίας, οι εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ένθερμα την ιδέα ότι είναι μια σημαντική στρατηγική μάθησης και ότι υποστηρίζει τη μεταγνωστική ενημερότητα. Αν και συντάσσονταν με τον επίσημο λόγο, διαφοροποιήθηκαν ως προς την έκταση που μπορεί να λάβει η διερεύνηση και πόσο ανεξάρτητη θα μπορούσε να είναι. Ειδικότερα, αντιτέθηκαν στην ιδέα που υποστηρίζεται από τον επίσημο λόγο ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι κύριοι της μάθησής τους.

> …ακόμη και τώρα όμως είμαι πεπεισμένη ότι ακόμη κι όταν οι μαθητές διερευνούν, χρειάζεται ο δάσκαλος για να συντονίζει. Δεν μπορούν οι μαθητές να είναι "κύριοι" της μάθησής τους [17 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, ΣΤ τάξη].

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι οι εκπαιδευτικοί άντλησαν κυρίως από τους επίσημους ή τους επαγγελματικούς επίσημους λόγους, όταν αναφέρθηκαν στις τέσσερις μαθηματικές διεργασίες και ευθυγραμμίστηκαν με αυτούς τους λόγους, αλλά απέκλιναν από τους επίσημους λόγους στο σημείο που ερμήνευαν αυτές τις έννοιες σε σχέση με τις δικές τους τάξεις. Η αντίθεση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί στη βάση δύο συνθηκών: σύμφωνα με την πρώτη, καταγράφεται μια ανησυχία στους εκπαιδευτικούς «να μην μείνουν πίσω» από τους συναδέλφους τους και, γενικότερα, να μην φανούν «διαφορετικοί» από αυτούς. Αυτή η ανησυχία τροφοδοτείται από τον τοπικό λόγο που διαμορφώνεται στο σχολείο και συνιστά μια πηγή, με βάση την οποία οι εκπαιδευτικοί μπορούν να θεωρηθούν επιτυχημένοι "στα μάτια των συναδέλφων τους, στη διοίκηση του σχολείου, στους γονείς, αλλά και στους ίδιους τους μαθητές". Φυσικά, αυτός ο τοπικός λόγος είναι στενά συνδεδεμένος με λόγους που αρθρώνονται στο πεδίο της εκπαίδευσης, με βάση τις τρέχουσες συνθήκες, και στην ευρύτερη κοινωνία. Η δεύτερη συνθήκη πυροδοτεί αποκλίσεις στον λόγο των εκπαιδευτικών από τον επίσημο στον συμβατικό λόγο, ο οποίος συνιστά μια ισχυρή εναλλακτική λύση απέναντι σε αυτόν (αν και είναι εναρμονισμένος με ορισμένες πτυχές του επίσημου λόγου που παράγεται από τους θεσμικούς φορείς).

Στο πεδίο της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση οι διαφορές που προκύπτουν μεταξύ του τι προβλέπεται από το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (επίσημος λόγος) και πώς νοηματοδοτείται και αξιοποιείται τελικά από τους εκπαιδευτικούς στην πράξη (συμβατικός λόγος) ερμηνεύονται ως αποτέλεσμα των ενεργειών αναπλαισίωσης που πραγματοποιούνται από τους αντιπροσώπους – φορείς (agents) που λειτουργούν στα διάφορα πεδία και έχουν διαφορετικά ενδιαφέροντα και σχέσεις με τους εκπαιδευτικούς. Οι αντιφάσεις ή οι αντιθέσεις-εντάσεις που παρατηρούνται στο εσωτερικό του λόγου των εκπαιδευτικών μπορούν να ερμηνευτούν ως ασυνέπειες στο εσωτερικό ή μεταξύ των ποικίλων λόγων που είναι διαθέσιμοι σε αυτούς. Η πρόκληση βρίσκεται στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ αυτών των λόγων και στον εντοπισμό των αιτίων για τα οποία ορισμένοι λόγοι αποδεικνύονται πιο ισχυροί σε σχέση με άλλους λόγους και υιοθετούνται από τους εκπαιδευτικούς. Ειδικότερα στην περίπτωση των Μαθηματικών, τα αίτια της ισχυροποίησης του Τοπικού Πεδίου Αναπλαισίωσης θα πρέπει να αναζητηθούν επιπλέον στη συνειδητοποίηση εκ μέρους των εκπαιδευτικών αφενός του καθοριστικού ρόλου τους στην επιτυχία των παιδιών σε ένα μάθημα που αναγνωρίζεται ως «φύλακας» (gatekeeper) της ακαδημαϊκής και επαγγελματικής τους ανέλιξης και αφετέρου της προσωπικής τους, συχνά «άβολης» σχέσης με το αντικείμενο των Μαθηματικών και της διδασκαλίας τους. Στην ίδια κατεύθυνση θα πρέπει να ανιχνευτούν και οι αντιφάσεις εντός αλλά και μεταξύ των πεδίων αναπλαισίωσης που καταγράφονται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity. Theory, research, critique*, αναθεωρημένη έκδοση, New York, Rowman & Littlefield Publishers.

Brown, M., Millett, A., Bibby, T. & Johnson, D. C. (2000). *Turning our attention from the what to the how: the National Numeracy Strategy*, British Educational Research Journal, 26(4), 457-472.

ΙΕΠ (2014). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. *Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. Αθήνα: ΙΕΠ/ ΕΣΠΑ 2007-13\ Ε.Π. Ε& ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) –Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη».

Kress, G. (1989). *Linguistic processes in sociocultural practice*. Oxford: Oxford University Press

Κουλαϊδής, Β. & Τσατσαρώνη, Α. (2010). (επιμ.) *Παιδαγωγικές Πρακτικές: Έρευνα και εκπαιδευτική πολιτική*, Αθήνα: Μεταίχμιο.

McNamara, O. & Corbin, B. (2001). *Warranting practices: Teachers embedding the National Numeracy Strategy*. British Journal of Educational Studies, 49(3), 260-284.

Μητσικοπούλου, Β. (2006). *Θεωρία και Ιστορία της ελληνικής γλώσσας*, Κέντρο Ελληνικής Γλώσσας,

http://www.greek-language.gr/greekLang/studies/discourse/1_1/

Ανακτήθηκε 10 Σεπτεμβρίου 2015

Morgan, C. (2010). Making sense of curriculum innovation and mathematics teacher identity. In C. Kanes (Ed.), *Elaborating Professionalism: Studies in Practice and Theory* (pp. 107-122). Dordrecht: Springer.

Morgan, C. and Xu, G. R. (2011). *Reconceptualising 'obstacles' to teacher implementation of curriculum reform: beyond beliefs*. In: UNSPECIFIED.

‘ΔΡΑΜΑΤΙΚΗ ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ’ ΚΑΙ ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Παναγιώτα Κοταρίνου, Χαρούλα Σταθοπούλου, Ελένη Γκανά
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ
pkotarinou@uth.gr, hastath@uth.gr, egana@uth.gr

Η εισήγηση αντλεί από την εμπλοκή μιας ομάδας μαθητών Β΄ Λυκείου σε ένα διαθεματικό project που αφορούσε στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας, Υπερβολικής και Ελλειπτικής γεωμετρίας και το οποίο υλοποιήθηκε μέσω τεχνικών «Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση» Θεωρούμε ότι μέσω του πολυτροπικού αυτού ‘κειμένου’ της ΔΤΕ, δημιουργήθηκε ένας υβριδικός/ διευρημένος χώρος όπου νέες πρακτικές, νέοι λόγοι (Discourse) και εργαλεία αναδείχθηκαν και ο οποίος χώρος επέτρεψε στους μαθητές να προσεγγίσουν τις μαθηματικές έννοιες βιωματικά, σε διαλογικότητα με τις ποικίλες ταυτότητές τους, και να επαναδιαπραγματευτούν την αντίληψή τους για τη φύση των μαθηματικών και ειδικότερα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά την τεκμηριωμένη αναγκαιότητα διδασκαλίας της Γεωμετρίας, ως εργαλείο για την κατανόηση, περιγραφή και αλληλεπίδραση με το χώρο στον οποίο ζούμε, για την καλλιέργεια δεξιοτήτων οπτικοποίησης, κριτικής σκέψης, μαθηματικής διαίσθησης και δημιουργικότητας καθώς και ως παράδειγμα αξιωματικής θεωρίας με μια πρώτη προσέγγιση στον παραγωγικό συλλογισμό (ICMI, 95; Duval, 1999; Jones, 2002), η διδασκαλία και μάθησή της παρουσιάζει πολλά προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά αποδίδονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, στα θέματα διδασκαλίας, καθώς και στις μεθόδους με τις οποίες αυτά διδάσκονται, με τον παραγωγικό τρόπο παρουσίασης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Freudenthal, 1971) να αποτελεί ένα από τα βασικά προβλήματα για τους μαθητές.

Η συνειδητοποίηση ότι η Γεωμετρία εμφανίζεται ως ένα δύσκολο και με προβλήματα για τους μαθητές σχολικό αντικείμενο (Clements & Battista, 1992) υπαγορεύει, μεταξύ άλλων, την αναθεώρηση της διδασκαλίας ώστε να ενισχύσει το ενδιαφέρον των μαθητών και την ενεργό συμμετοχή τους στην τάξη. Τα τελευταία χρόνια, οι εναλλακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία της γεωμετρίας έχουν διερευνηθεί. Η χρήση των νέων τεχνολογιών (Laborde et al, 2006; Jones, 2011), η μελέτη των εφαρμογών της Γεωμετρίας σε διάφορους κλάδους (Fletcher, 1971), η χρήση εφαρμογών από την Ιστορία της Γεωμετρίας με κατάλληλο υλικό από τις ιστορικές πηγές (Gulikers και Blom, 2001), ή από τα Εθνομαθηματικά

(Gerdes, 1988), καθώς και η χρήση των τεχνών, έχουν δημιουργήσει νέες εκπαιδευτικές καταστάσεις που εμπλέκουν τους μαθητές ενεργά στη διαδικασία της διδασκαλίας / μάθησης.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα διαθεματικό project εστιασμένο στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας και μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, το οποίο υλοποιήθηκε σε μια σχολική τάξη Β΄ Λυκείου με την αξιοποίηση «Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση» (ΔΤΕ). Η ΔΤΕ αποτελεί μια επιτελεστική τέχνη και ταυτόχρονα μια δομημένη παιδαγωγική διαδικασία η οποία, μέσα από τη δημιουργία ενός φαντασιακού κόσμου, μας παρέχει το πλαίσιο για τη διδασκαλία μιας έννοιας, μιας ιδέας ή ενός γεγονότος, τη λύση προβλήματος καθώς και τη δυνατότητα καλλιέργειας προσωπικών και κοινωνικών δεξιοτήτων. Η ΔΤΕ αποτελεί ταυτόχρονα ένα πλαίσιο που συνδέεται κατ'εξοχή με την πολυτροπικότητα ως δυνατότητα νοηματοδότησης και επικοινωνίας, με την έννοια ότι η απόδοση νοήματος σε ιδέες, γεγονότα και διαδικασίες οικοδομείται στη βάση της συνύπαρξης και της συνέργειας ποικίλων διαφορετικών σημειωτικών πόρων, όπως είναι η γλώσσα και τα παραγλωσσικά της συστήματα (ένταση φωνής, επιτονισμός κτλ), η κίνηση του σώματος, η έκφραση του προσώπου, ο προσανατολισμός και η ένταση του βλέμματος κτλ.

Στόχος της εργασίας μας αυτής είναι να διερευνήσουμε τις διδακτικές πρακτικές με χρήση ΔΤΕ υπό το πρίσμα του υβριδικού ή τρίτου χώρου.

2. ΥΒΡΙΔΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ, ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Σύμφωνα με τον Homi Bhabha (1994), θεωρητικό των μεταποικιακών σπουδών, τα σύνορα ή η οριακή περιοχή μεταξύ των δύο τομέων –δύο χώρων— είναι συχνά μια περιοχή επικάλυψης ή ένας υβριδισμός, δηλαδή, ένας «τρίτος χώρος» που περιλαμβάνει έναν απρόβλεπτο και μεταβαλλόμενο συνδυασμό των χαρακτηριστικών που διαθέτει ο καθένας από τους δύο συνοριακούς χώρους. Η θεωρία της υβριδικότητας υποστηρίζει ότι οι άνθρωποι νοηματοδοτούν τον κόσμο τους μέσα από την ενσωμάτωση και την αλληλεπίδραση των πολλαπλών γνωσιακών πόρων που διαθέτουν και εξετάζει το κατά πόσο η ιδιότητα του «ενδιάμεσου» μπορεί να παίξει ταυτόχρονα περιοριστικό αλλά και παραγωγικό ρόλο στην ανάπτυξη της ταυτότητας ενός ατόμου. Η κατασκευή του υβριδικού χώρου δίνει έμφαση στον ενδιάμεσο (in-between) χώρο που συγκεντρώνει γνώσεις και λόγους (discourses) από φυσικά πρόσωπα και ποικίλα κοινωνικά περιβάλλοντα στα οποία συμμετέχουν σήμερα οι άνθρωποι και οι οποίοι (λόγοι) μπορεί να είναι αντιφατικοί και ανταγωνιστικοί μεταξύ τους.

Η Moje και οι συνεργάτες της (2004) αντλώντας από τη θεωρία της υβριδικότητας εισηγούνται τη δυναμική μάθηση η οποία μπορεί να αναδυθεί από το μετασχηματισμό των τυπικών σχολικών πρακτικών σε «τρίτο χώρο» (third space). Ο «τρίτος χώρος», σύμφωνα με τους εισηγητές κατασκευάζεται μέσα από την ενεργητική ενσωμάτωση στο σχολικό πλαίσιο των ποικίλων πόρων γνώσης και διαλογικών πρακτικών (Discourses) που συνδέονται με την εκτός σχολείου εμπειρία των μαθητών. Τους τρόπους δηλαδή με τους οποίους μαθαίνουν, μιλούν, ενεργούν, γράφουν, διαβάζουν, αποτιμούν, αλληλεπιδρούν, αναπαριστούν τον εαυτό τους στο πλαίσιο των διαφόρων κοινωνικών και πολιτισμικών κοινοτήτων στις οποίες συμμετέχουν (Gee 1996). Με την έννοια αυτή, η λειτουργία του παιδαγωγικού χώρου ως «τρίτου χώρου» κατασκευάζεται από την οργανική ένταξη πόρων και διαδικασιών που συνδέονται με το περιβάλλον του σπιτιού, της κοινότητας και των συνομιλήκων (πρώτος χώρος) στους πόρους και τις πρακτικές που χρησιμοποιεί το σχολείο (δεύτερος χώρος), δημιουργώντας έτσι ένα διαλογικό πλαίσιο που επιτρέπει την οικειοποίηση νέων γνώσεων, Λόγων και μορφών γραμματισμού (Moje, 2004).

Μια σειρά από μελέτες έχουν εξετάσει τη δημιουργία τρίτου χώρου στη μάθηση των Φυσικών επιστημών στο σχολείο με την συγχώνευση διαλογικών πρακτικών και γνώσεων της επιστημονικής αυτής περιοχής με την εμπειρία που έφεραν οι μαθητές για το φυσικό κόσμο από την εκτός σχολείου πρακτική τους (Barton & Tan, 2009; Barton & Tan, 2008; Moje 2004). Αντίστοιχες μελέτες εξετάζουν τη λειτουργία του τρίτου χώρου στη βελτίωση της διδασκαλίας/μάθησης των μαθηματικών (Razfar, 2012; Flessner, 2009; Thornton, 2006; Cribbs, & Linder, 2013). Σε κάθε περίπτωση οι σχετικές έρευνες αναδεικνύουν τα μαθησιακά οφέλη που προκύπτουν όταν οι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνουν να γεφυρώσουν τα όρια μεταξύ των δύο «κόσμων», δηλαδή της ζωής των μαθητών εκτός σχολείου και εντός της σχολικής τάξης, με τη μάθηση που προκύπτει να περιγράφεται ως ουσιαστική και διαρκής.

Τα τελευταία επίσης χρόνια ένας ολοένα και αυξανόμενος αριθμός ερευνητών της διδακτικής των Μαθηματικών επιλέγει την έννοια της ‘ταυτότητας’ (identity) για να ερμηνεύσει διάφορα φαινόμενα και προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η έννοια της ταυτότητας είναι πολυδιάστατη, παραπέμποντας στο άτομο, την ομάδα και την κοινωνία και αναφέρεται στο σύνολο των αντιλήψεων, πεποιθήσεων συναισθημάτων που αφορούν στον εαυτό μας (Δραγώνα, 2003). Η ‘*ατομικότητα’* (individuality) αποτελείται από τη μοναδική για κάθε άτομο συλλογή από πολλαπλές υποκειμενικότητες (subjectivities), οι οποίες συγκροτούνται μέσα από τις ξεχωριστές και επικαλυπτόμενες ταυτότητες του φύλου, της εθνικότητας, της κοινωνικής τάξης, της ηλικίας αλλά και από άγνωστα στοιχεία του υποσυνείδητου. Η Boaler και οι συνεργάτες της (2000a; 2000b) έδειξαν ότι οι ταυτότητες που αναπτύσσουν οι νέοι αποτελούν ένα σημαντικό και παραγνωρισμένο παράγοντα για την επιτυχία τους στα Μαθηματικά, με τους μαθητές να βιώνουν μια σύγκρουση ανάμεσα στην ‘ταυτότητά’ τους και τις παιδαγωγικές πρακτικές του σχολικού χώρου, όπως επίσης ανάμεσα στην 'ταυτότητά' τους και των πρακτικών που υπαγορεύει ο ρόλος του μαθητή των Μαθηματικών.

Εμείς με την παρούσα εισήγηση ισχυριζόμαστε ότι τρόποι έκφρασης των μαθητών που σχετίζονται με τη χρήση τεχνικών Δράματος διευρύνουν τα εργαλεία και τους πόρους διδασκαλίας που χρησιμοποιούνται στις τυπικές σχολικές πρακτικές του Λυκείου και διαμορφώνουν ένα υβριδικό, τρίτο χώρο που επιτρέπει το διάλογο ανάμεσα στη σχολική γνώση και στην εξωσχολική εμπειρία των μαθητών. Στο χώρο αυτό δημιουργούνται συνθήκες και προϋποθέσεις για να εκφράσουν οι μαθητές τις ποικίλες ταυτότητές τους και να βιώσουν τη μαθησιακή διαδικασία μέσα από μια διαφορετική παιδαγωγική διαχείριση, όπως φαίνεται και από την υλοποίηση του project που ακολουθεί.

3. Η ΕΡΕΥΝΑ: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Το πλαίσιο της έρευνας: Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τμήμα 26 μαθητών/τριών Β΄ Λυκείου (16 κορίτσια, 10 αγόρια, 17 θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης και 9 θεωρητικής) στο Πειραματικό Λύκειο Ιλίου το σχολ. έτος 2010-2011 και είχε διάρκεια τεσσάρων μηνών.

Η Μέθοδος της έρευνας: Τα πραγματολογικά δεδομένα της παρούσας εργασίας αποτελούν τα κείμενα με θέματα από τα μαθηματικά που συνέθεσαν μαθητές Λυκείου στο πλαίσιο υλοποίησης τεχνικών ΔΤΕ στο μάθημα των Μαθηματικών καθώς και οι συνεντεύξεις των μαθητών. Ανήκουν δηλαδή σε ευρύτερο σώμα δεδομένων που προέκυψε κατά τη διάρκεια έρευνας για την επίδραση της ΔΤΕ στη μάθηση των Μαθηματικών. Για την παρέμβασή μας στηριχτήκαμε στη λογική του διδακτικού πειράματος. Το διδακτικό πείραμα έφερε τον τίτλο ''Είναι ο κόσμος μας Ευκλείδειος;'' και αφορούσε στη διδασκαλία με χρήση τεχνικών ΔΤΕ της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας, της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας καθώς και της ιστορίας του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη. Πραγματοποιήθηκε σε 25 διδακτικές ώρες, στη διάρκεια 7 εβδομάδων και διέτρεξε τα μαθήματα της Γεωμετρίας, Ιστορίας, Νεοελληνικής Γλώσσας, Λογοτεχνίας και Αρχαίων Ελληνικών. Ερευνητικός στόχος μας στο διδακτικό πείραμα ήταν η δημιουργία ενός υβριδικού χώρου στη διδασκαλία της γεωμετρίας, μέσα από την αξιοποίηση τεχνικών ΔΤΕ και η διερεύνηση της επίδρασής του στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών.

Το διδακτικό πείραμα αναπτύχθηκε σε τρεις άξονες –τις Μαθηματικές έννοιες, το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο αυτές γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν και τα πρόσωπα που συμμετείχαν στη γέννησή τους—και πραγματοποιήθηκε με κύριους στόχους: α) Η ΔΤΕ να αποτελέσει κίνητρο για τους μαθητές ώστε να συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα της γεωμετρίας β) Να κατανοήσουν οι μαθητές πώς θεμελιώνονται τα παραπάνω τρία μοντέλα Γεωμετριών γ) Να αμφισβητήσουν τις στερεοτυπικές εικόνες για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Ενότητες του διδακτικού πειράματος: Το όλο διδακτικό πείραμα χωρίστηκε σε επτά ενότητες, ανάλογα με το θέμα των Μαθηματικών που αναπτύχθηκε σε κάθε ενότητα. Την τελευταία ενότητα αποτέλεσε η δημιουργία της ταινίας. Για κάθε ενότητα, προσδιορίσαμε τους ειδικούς στόχους συνδέοντάς τους με τους σκοπούς που είχαμε θέσει για το διδακτικό πείραμα.

Δομή ενοτήτων: Η δομή των δραστηριοτήτων σε κάθε διδακτική ενότητα ήταν σε γενικές γραμμές η ακόλουθη. Η ερευνήτρια έκανε μια εισαγωγική διάλεξη στο θέμα, με τη βοήθεια μιας ψηφιακής παρουσίασης και ταυτόχρονα ή μετά τη διάλεξη επακολουθούσε σχετική συζήτηση. Σε επόμενες διδακτικές ώρες οι μαθητές σε ομάδες, μελετούσαν σχετική με το θέμα βιβλιογραφία, από μια ποικιλομορφία κειμένων που τους μοίραζε η ερευνήτρια, με στόχο την κατανόηση του διδασκόμενου θέματος. Ορισμένες φορές για πληρέστερη κατανόηση του θέματος γινόταν αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών καθώς και χειραπτικού υλικού και αν κρινόταν απαραίτητο γινόταν μια μικρή ανακεφαλαιωτική συζήτηση ή δραστηριότητα με τους μαθητές. Τέλος οι ομάδες προετοίμαζαν και πραγματοποιούσαν παρουσιάσεις σχετικές με το θέμα, αξιοποιώντας τεχνικές ΔΤΕ. Στο τέλος των παρουσιάσεων, δινόταν χρόνος για να αναστοχαστούν οι μαθητές σχετικά με το θέμα, την παρουσίαση και την προετοιμασία του δρώμενου.

Το διδακτικό πείραμα περιελάμβανε τις παρακάτω ενότητες. **1η ενότητα**: Τα στοιχεία του Ευκλείδη και η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας**.** Σχέση της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη με τη Λογική του Αριστοτέλη και μελέτη από το πρωτότυπο, των ορισμών, των κοινών εννοιών και των αξιωμάτων του Ευκλείδη. Ανακεφαλαιωτική παρουσίαση της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη, με την τεχνική *'Δάσκαλος σε ρόλο'*. Δραστηριότητες των μαθητών με τεχνικές Δράματος όπως : *παιχνίδι ρόλων, ρεπορτάζ* και *Alter-ego*. **2η ενότητα** : Ο Ευκλείδης και το ιστορικό, πολιτισμικό και πολιτικό πλαίσιο της εποχής του. Δραματοποιημένη αφήγηση από τους μαθητές του κεφαλαίου 'Η έπαρση του Ευκλείδη' από το βιβλίο '' Η ράβδος του Ευκλείδη'' του Jean-Pierre Luminet. **3η ενότητα**: *'Η ιστορία στη σκιά'*. Η αμφισβήτηση του 5ου αιτήματος ως τον 18ο αι. Γνωριμία των μαθητών με την ιστορία αμφισβήτησης του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη από τους διαδόχους του και παρουσίαση από τους μαθητές με τεχνικές *''θεάτρου σκιών''* των αποτυχημένων προσπαθειών απόδειξής του από τους Άραβες μαθηματικούς και μαθηματικούς της Αναγέννησης. **4η ενότητα**: Οι θεμελιωτές των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, János Bolyai, Lobachevsky

και Riemann. Μετά από μελέτη των βιογραφιών τους, παρουσίαση του

Lobachevsky, με την τεχνική *'Περίγραμμα ρόλου στον τοίχο'*, του Riemann με την τεχνική *''ένα πορτραίτο ζωντανεύει''*. Γνωριμία με τον János Bolyai μέσα από δραματοποιημένη ανάγνωση της αλληλογραφίας του πατέρα του με τον ίδιο και με τον Gauss και μέσα από τις τεχνικές της ΔΤΕ *'Διάδρομος της συνείδησης' και 'Αντικρουόμενες συμβουλές'*.**5η ενότητα**:*'Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας'*. Η Υπερβολική Γεωμετρία και το μοντέλο Poincaré για την υπερβολική Γεωμετρία. Μελέτη του κεφαλαίου 'Δισκοχώρα' από το βιβλίο 'Flatterland' του Ian Stewart, προβολή έργων του Escher, χρήση νέων τεχνολογιών για την κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης της Υπερβολικής Γεωμετρίας και βασικών εννοιών και προτάσεων της μέσω του μοντέλου Poincaré. Παρουσίασή της με *'Ραδιοφωνικές εκπομπές'*. **6η ενότητα**: Η Σφαιρική Γεωμετρία. Βασικές έννοιες στη σφαίρα και αξιωματική θεμελίωση της Ελλειπτικής Γεωμετρίας με χρήση απτικού υλικού (σφαίρα Lénárt). Δραστηριότητα με παιχνίδι ρόλων για την αξιολόγηση της γνώσης. **7η ενότητα**: Δημιουργία ενός δραματοποιημένου ντοκιμαντέρ με τίτλο *'Η ζωή μας με τον Ευκλείδη'*. Μαθητές σε ρόλους αφηγητών συνδέουν τα βιντεοσκοπημένα δρώμενα.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ερευνητικός στόχος μας στο διδακτικό πείραμα ήταν η δημιουργία ενός υβριδικού χώρου στη διδασκαλία της γεωμετρίας, μέσα από την αξιοποίηση τεχνικών ΔΤΕ και η διερεύνηση της επίδρασής του στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών.

Πράγματι στο διδακτικό μας πείραμα δημιουργήθηκε ένας υβριδικός χώρος, ένας συνδυασμός μαθήματος και ψυχαγωγίας, στον οποίο οι μαθητές μάθαιναν και και ταυτόχρονα 'έπαιζαν'*«Ήταν ένας συνδυασμός μαθήματος και ψυχαγωγίας»*. Ο διευρυμένος αυτός χώρος, καθώς ήταν ανοιχτός για μια συναισθηματική, σωματική και νοητική εμπλοκή των μαθητών, ενέπνευσε μεγαλύτερη συμμετοχή των μαθητών στη μαθηματική σκέψη και έκφραση και οδήγησε σε μια βαθύτερη κατανόηση και εκτίμηση των μαθηματικών [1]. Πράγματι στο διευρυμένο αυτό χώρο οι μαθητές προσέγγισαν τις μαθηματικές έννοιες βιωματικά, εκφράζοντας, επεξηγώντας, συζητώντας, επικρίνοντας και αιτιολογώντας μαθηματικές ιδέες, μέσα από τους ρόλους τους στις τεχνικές του Δράματος «*Το ότι κάναμε τα σκετσάκια, μπήκαμε σε άλλα πρόσωπα, μάθαμε διάφορα άλλα πράγματα, για άλλες εποχές, αυτό λειτούργησε πάρα πολύ ωραία*». Ο Αντώνης το εκφράζει ρητά. Μπαίνοντας στο ρόλο, μιλούσε σα να ήταν ο ίδιος ο Ευκλείδης ή οι άλλοι μαθηματικοί και μέσα από το βίωμα αυτό κατανοούσε καλύτερα τις έννοιες «*Το νοιώσαμε, ότι είμασταν εμείς οι καθηγητές, ότι είμασταν εμείς ο Ευκλείδης, ότι είμασταν εμείς ο Gauss, ο Lobachevsky. Μπήκαμε πολύ πιο μέσα στο θέμα κατανόησης*». Η Αγγελίνα τονίζει το βιωματικό χαρακτήρα του Δράματος στη διατηρησιμοτητα της γνώσης «*Τα μαθαίναμε καλύτερα γιατί βιώνεις εμπειρίες* *και σου μένουνε σα μνήμες στο μυαλό. Δηλ. Τα θυμάσαι καλύτερα. Σου αποτυπώνονται στο μυαλό και δεν τα ξεχνάς ποτέ».*

Ο χώρος αυτός, επέτρεψε να ακουστούν ποικίλοι κοινωνικοί λόγοι, ο μαθηματικός λόγος, ο λογοτεχνικός λόγος, ο εικαστικός λόγος και οι μαθητές οικειοποιήθηκαν τη γνώση μέσω των διαφορετικών διαμεσολαβητικών εργαλείων. Από τον τρόπο που 'μιλάνε' οι μαθητές περιγράφοντας την εμπειρία τους ως προς το όλο παιδαγωγικό εγχείρημα φάνηκε ότι το Δράμα προηγείται στις επιλογές τους. Η χρήση τεχνικών ΔΤΕ ήταν γι' αυτούς η πιο σημαντική δραστηριότητα και αποτέλεσε το κίνητρο για να συμμετέχουν ενεργητικά στο διδακτικό πείραμα *«Μου άρεσε περισσότερο το θέατρο με τα σκετσάκια και ολα αυτά», «Η παρουσίαση, για μένα, ήταν το κλικ του ενδιαφέροντος».* Η πολυτροπικότητα του Δράματος αποτελεί έναν βασικό λόγο που το επιλέγουν οι μαθητές αν και δεν το εκφράζουν ρητά.

Στέφανος: Αφ' ενός γιατί η δραματική τέχνη αρέσει περισσότερο στους μαθητές ειδικότερα σ' αυτήν την ηλικία και τους δίνει τη δυνατότητα να εκφραστούν, το θέατρο δίνει περισότερες ευκαιρίες και για χιούμορ, και για αλλαγή ύφους και για λογοπαίγνια και διάφορα τέτοια τα οποία κερδίζουν περισσότερο το ενδιαφέρον και μεταδίδουν τη γνώση.

Οι τεχνικές ΔΤΕ αποτέλεσαν επίσης μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση προς την αναίρεση τυποποιημένων πρακτικών στη διδασκαλία, όπως αυτή εκφράζεται μέσα από τον κυρίαρχο σχολικό Λόγο, επιτρέποντας να εκδηλωθούν οι ποικίλες ταυτότητες των μαθητών. Ο Χρήστος, μαθητής ο οποίος έντονα αμφισβητούσε το σχολικό θεσμό και τις συνήθεις σχολικές πρακτικές, εννοιωσε την ελευθερία να το εκφράσει, μέσα από τα Δρώμενα *«μας δίνατε κάποια στοιχεία στα οποία θα κινηθούμε, αλλά παρ' όλα αυτά μπορούσαμε να το κάνουμε εμείς όπως θέλουμε, να τα παρουσιάσουμε με όποιον τρόπο θέλουμε».*Το Δράμα του παρείχε την ευκαιρία να πραγματώσει πολυδιάστατες διακειμενικές συσχετίσεις ανάμεσα σε ποικίλους τομείς της σχολικής και εξωσχολικής γλωσσικής εμπειρίας του και να θέσει το μαθηματικό λόγο (discourse) σε δημιουργικό διάλογο με τη λογοτεχνία, τη νεανική λαϊκή κουλτούρα (pop culture) και την καθημερινή του εμπειρία. Η ταυτότητά του εκφράστηκε μέσα από ένα κείμενο αυτόματης γραφής, το οποίο παρουσιάστηκε με θέατρο σκιών.

1η σκιά: Ο Αλ Χαυθάμ ή Αλχάζεν, σαν το παλιό γήπεδο Αλ-Καζάρ της Λάρισας, σαν τον Abou Diaby της Arsenal ή σαν ένα κίτρινο υποβρύχιο της Βιγερεάλ, υποθέτει την ύπαρξη ενός τρισορθογώνιου τετραπλεύρου με τρεις ορθές γωνίες...

2η σκιά: Τελικά είχαν δίκιο οι άλλοι που με έλεγαν γεωμετρικό τόπο.

1η σκιά: Όντως, ναι, παραδέχομαι ότι είμαι ένα σημείο που κινούμαι σαν πολύχρωμο δελφίνι, που να ησυχάσω δε μ' αφήνουν, στο σμαραγδένιο ωκεανό της αγάπης και της αληθινής γεωμετρίας ώστε να ισαπέχω από ευθεία σε ευθεία, από δρόμο σε δρόμο, από ουρανό σε ουρανό, από το μωβ στο κόκκινο και απ' το βατήρα κατ' ευθείαν μες στην πισίνα. Αυτό είναι ισοδύναμο με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη.

Στον υβριδικό αυτό χώρο που δημιουργήθηκε από την ΔΤΕ, δεν εκδηλώθηκαν οι ποικίλες ταυτότητες των μαθητών αλλά εμφανίστηκαν ταυτότητες σε νέες διαπραγματεύσεις. Η Σοφία μαθήτρια με αρνητική στάση με τα Μαθηματικά μέσα από το Δράμα ανακάλυψε, όπως τις αποκαλεί νέες πτυχές του εαυτού της.

Σοφία: Αυτό, με βοήθησε. Δηλ. ανακάλυψα κάποιες πτυχές του εαυτού μου που εγώ μέχρι τώρα δε γνώριζα. π.χ. στο επάγγελμα που θα επιλέξω. Όταν έκανα την καθηγήτρια φερ' ειπείν δεν ήξερα ότι μπορώ να έχω κάποια μεταδοτικότητα. π.χ. μία κοπέλα μου είπε το κατάλαβα πολύ καλύτερα όταν μου τόπες εσύ παρά όταν κάναμε μάθημα. Ή ας πούμε, θέλω να ακολουθήσω τώρα τον κλάδο της δημοσιογραφίας. Μέσα από το σκετσάκι που κάναμε τη ραδιοφωνική εκπομπή είδα ότι λειτουργώ πάρα πολύ καλά και ότι θα μπορούσα να αξιοποιήσω αυτό το κομμάτι. Με βοήθησε αρκετά, και όχι μόνο.

5. ΤΕΛΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Η χρήση του Δράματος στη διδασκαλία των μαθηματικών δημιουργεί έναν υβριδικό χώρο, χώρο διαπραγμάτευσης διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων και διαφορετικών εργαλείων, με πρακτικές και ρόλους μη αποδεκτούς στην παραδοσιακή τάξη. Ο χώρος αυτός μπορεί να παίξει το ρόλο του μεθοριακού χώρου όπου ενώνονται, συνδιαλλέγονται διαφορετικοί λόγοι, παιχνίδι ανάμεσα σε αλήθεια και πραγματικότητα, και όπου επιτρέπονται να εκδηλωθούν οι ποικίλες ταυτότητες των μαθητών αλλά και να εμφανιστούν ταυτότητες σε νέες διαπραγματεύσεις. Στον υβριδικό αυτό χώρο που δημιουργείται από την ΔΤΕ, με τη διαφορετική κουλτούρα και ρόλο του εκπαιδευτικού μαθηματικού στη διδασκαλία/μάθηση, τη διαφορετική διευθέτηση του χώρου, τη διαφορετική χρήση του σώματος απελευθερώνεται η δημιουργικότητα των μαθητών και δημιουργούνται πραγματώσεις νοήματος (κείμενα) που ενσωματώνουν δημιουργικά διάφορους τομείς της σχολικής γνώσης, αλλά και της καθημερινής εμπειρίας. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο οι μαθητές αντιμετωπίζουν την πρόκληση να δουν τα μαθηματικά ως ένα συνεχές φάσμα που διαπερνά διάφορες πτυχές της ζωής τόσο στο παρόν όσο και στο μέλλον, αγγίζοντας τόσο ατομικές όσο και κοινωνικές ανάγκες, έναν στόχο στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. ΒΛ. ΚΟΤΑΡΙΝΟΥ, ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ, 2014, ΓΙΑ ΜΙΑ ΛΕΠΤΟΜΕΡΗ ΚΑΙ ΤΕΚΜΗΡΙΩΜΕΝΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΥΤΩΝ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bhabha, H.K. (1994). *The location of culture*. New York: Routledge.

Barton, Calabrese, A. C. & Tan, E. (2009). Funds of knowledge and Discourses and Hybrid Space. *Journal of research in Science Teaching, 46*(1), 50-73.

Barton, Calabrese A. & Tan, E. (2008). Creating Hybrid Spaces for Engaging School Science Among Urban Middle School Girls. *American Educational Research Journal 45*(1), 68 –103.

Boaler, J. & Greeno, G. J. (2000a). Identity, Agency, and Knowing in Mathematics Worlds. In Jo Boaler (Ed.) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 171-200). London: Ablex Publishing.

Boaler, J., William, D., Zevenberger, R. (2000). The construction of Identity at the International Mathematics Education. In 2nd International M.E.S. Conference. Montechoro, Portugal.

Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws, (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-464). Macmillan Publishing Co, Inc.

Cribbs, D. J. & Linder. M. S. (2013). Teacher Practices and Hybrid Space in a 5th grade Mathematics Classroom.*The Mathematics Educator 22*(2) 55–81.

Δραγώνα, Θ. (2003). Ταυτότητα και Εκπαίδευση. Στη σειρά *'Κλειδιά και Αντικλείδια' Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων.* ΥΠΕΠΘ, Παν. Αθηνών.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana and V. Villani (Eds.) *Perspectives on the learning of Geometry for the 21th century. An ICMI Study*. Kluwer Academic

Flessner, R. (2009). Working toward a third space in the teaching of elementary mathematics. *Educational Action Research*, *17*(3), 425-446.

Fletcher, T. J. (1971). The teaching of Geometry. Present problems and future aims. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 395-412.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Gee, J.P. (1996). *Social linguistics and literacies: Ideology in discourses* (2nd ed.). London: Falmer.

Gerdes, P. (1988). On culture, Geometrical thinking and Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 137-172.

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 223–258.

I.C.M.I. (1995). Προοπτικές για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας τον 21ο αιώνα. *Διάσταση 3-4*, 52-64.

Jones, K. (2011). The value of learning geometry with ICT: lessons from innovative educational research. In A. Oldknow and C. Knights (Eds.) *Mathematics Education with Digital Technology*, (pp.39-45). London, GB: Continuum, (Education and Digital Technology).

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Κοταρίνου, Π., Σταθοπούλου, Χ., (2014) Η ιστορία του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη και οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες : Ένα διδακτικό πείραμα σε μαθητές Β΄Λυκείου. Στα πρακτικά του *Συνεδρίου για Μαθηματικά στα Π.Π. Σ.* 11 Απριλίου 2014. Αθήνα.

http://mathlab.mysch.gr/synedrio2014/praktika/pdf/C3_Kotarinou_Stathopoulou.pdf

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Guitiérrez and P. Boero (Eds.) *Handbook of research on the psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Sense Publishers.

Moje, E. B., Ciechanowski, K. M., Kramer, K., Ellis, L., Carrillo, R., & Collazo, T. (2004). Working toward third space in content area literacy: An examination of everyday funds of knowledge and discourse. *Reading Research Quarterly, 39*, 38–72.

Razfar, Aria (2012). Vamos a Jugar Counters! Learning, Mathematics Through Funds of Knowledge, Play, and the Third Space. *Bilingual Research Journal: The Journal of the National Association for Bilingual Education*, *35*(1), 53-75.

Thornton, S. (2006). Moving into Third Space — High School Students' Funds of Knowledge in the Mathematics Classroom. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen and M. Chinnappan (Eds.) *29th annual conference of MERGA, (pp.504-511)*. Camberra Adelaide.

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΓΛΩΣΣΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΠΟΙΚΙΛΟΜΟΡΦΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ: ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΕΝΟΣ ΚΥΠΡΙΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Κωνσταντίνος Ξενοφώντος* και Ελένη Παπαγεωργίου**

*Πανεπιστήμιο Λευκωσίας, **Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

xenofontos.c@unic.ac.cy , papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy

Το μάθημα των μαθηματικών σε γλωσσικά και πολιτισμικά ποικιλόμορφα περιβάλλοντα πλαισιώνεται από δύο βασικούς παράγοντες, τη γλώσσα και την κουλτούρα, που, ανάλογα με το πώς αξιοποιούνται, δυσχεραίνουν ή υποβοηθούν τη μάθηση. Στο άρθρο αυτό εξετάζουμε τις πεποιθήσεις του Αντρέα, ενός Κύπριου δασκάλου, για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πολυπολιτισμικές τάξεις και τους παράγοντες που θεωρεί ότι επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών στους αλλόγλωσσους/αλλοδαπούς μαθητές του. Ο Αντρέας κάνει εμφανείς αναφορές στον παράγοντα «γλώσσα», ενώ για τον παράγοντα «κουλτούρα» αναφέρεται μεμονωμένα, έμμεσα και υποσυνείδητα και τονίζει την ανάγκη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στα θέματα αυτά, λόγω της νέας σύστασης της κυπριακής κοινωνίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για πολλές χώρες της δυτικής Ευρώπης, το φαινόμενο της μετανάστευσης είναι σχετικά νέο (César & Favilli, 2005). Η κυπριακή κοινωνία δεν αποτελεί εξαίρεση. Η μαζική έλευση μεταναστών στο ελεύθερο τμήμα του νησιού προκάλεσε μεγάλες δημογραφικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια στη σύσταση της κοινωνίας γενικά και στην εκπαίδευση ειδικότερα (Panayiotopoulos & Nicolaidou, 2007). Στις κυπριακές σχολικές τάξεις συχνά συναντά κανείς μαθητές από διάφορες χώρες, όπως κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης, χώρες της πρώην Σοβιετικής Ένωσης, τον αραβικό κόσμο, αλλά και από την τουρκοκυπριακή κοινότητα. Οι αλλαγές που παρατηρούνται στη δημογραφία των σχολείων απαιτούν κατάλληλους χειρισμούς, τόσο από τους εκπαιδευτικούς όσο και από την Πολιτεία, ώστε η διδασκαλία και η μάθηση να συντελούνται πιο αποτελεσματικά. Συνιστώσα, επίσης, σε μια αποτελεσματική μάθηση των μαθηματικών σε γλωσσικά και πολιτισμικά ποικιλόμορφα περιβάλλοντα (ΓΠΠ) αποτελούν οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, οι οποίες έχουν λάβει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω της επίδρασής τους στους τρόπους με τους οποίους πραγματώνεται η διδασκαλία του μαθήματος (Chapman, 2002). Στην εργασία αυτή συζητούμε τις πεποιθήσεις ενός Κύπριου δασκάλου σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε αλλόγλωσσους/αλλοδαπούς μαθητές και τις εκπαιδευτικές του ανάγκες, όπως αναδεικνύονται μέσα από τη διδακτική του εμπειρία σε σχολεία με αυξημένο ποσοστό αλλοδαπών μαθητών.

ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΓΠΠ ΠΕΡΙΒΑΛΟΝΤΑ

Η διδασκαλία των μαθηματικών σε ΓΠΠ τάξεις είναι δραστηριότητα πολυσύνθετη, κυρίως επειδή στα περιβάλλοντα αυτά, το μαθηματικό περιεχόμενο αναμειγνύεται με ζητήματα γλώσσας και κουλτούρας (Anhalt & Rodríguez-Pérez, 2013· Clarkson, 2009· Ξενοφώντος, 2014· Xenofontos, 2015). Πιο κάτω, οι δύο αυτοί παράγοντες παρουσιάζονται συνοπτικά.

Ο παράγοντας «γλώσσα»

Κατά τους Slavit και Ernst-Slavit (2007), στις τάξεις των μαθηματικών αλληλεπιδρούν και εναλλάσσονται διαφορετικοί τύποι λεξιλογίου. Μερικοί από αυτούς χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα (π.χ. ρολόι, πορτοκάλι), ορισμένοι παρουσιάζονται σε γενικά ακαδημαϊκά πλαίσια (π.χ. συγκρίνω, διαδοχικά), και κάποιοι άλλοι αφορούν εξειδικευμένη και τεχνική μαθηματική ορολογία (π.χ. γωνία, πρώτοι αριθμοί). Οι μη-φυσικοί ομιλητές παρουσιάζουν δυσκολίες κατανόησης των εναλλακτικών χρήσεων μιας λέξης, που σε συγκεκριμένα πλαίσια εκτός της τάξης έχουν διαφορετική σημασία (π.χ. ο *πίνακας* της τάξης, ο *πίνακας* για την παρουσίαση αριθμητικών δεδομένων, και ο *πίνακας* ως έργο τέχνης), ενώ το περιορισμένο τους λεξιλόγιο δεν επιτρέπει την ενεργό συμμετοχή τους σε μαθηματικές δραστηριότητες (Elbers & deHaan, 2005). Απεναντίας, διάφορες έρευνες καταδεικνύουν πως, όταν οι αλλόγλωσσοι μαθητές είναι επαρκείς στη γλώσσα διδασκαλίας και στην καθομιλουμένη, αποδίδουν καλύτερα στα μαθηματικά σε σχέση με άλλους μαθητές (Clarkson, 2009).

Ο παράγοντας «κουλτούρα»

Η άποψη ότι η μαθηματική εκπαίδευση σε κάθε χώρα σχετίζεται άμεσα με την εθνική κουλτούρα υποστηρίζεται από τα ευρήματα ποικίλων συγκριτικών ερευνών, που εξετάζουν τις πεποιθήσεις (Andrews & Hatch, 2000) και τις πρακτικές (Andrews, 2007) των εκπαιδευτικών, τις πεποιθήσεις και τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων των μαθητών (Anghileri, Beishuizen, & VanPutten, 2002), και τα αναλυτικά προγράμματα (Campbell & Kyriakides, 2000) σε διάφορες χώρες. Οι συγκριτικές αυτές έρευνες αντικρούουν το επιχείρημα για την ύπαρξη μιας παγκόσμιας προσέγγισης για τα σχολικά μαθηματικά. Οι μετανάστες μαθητές κουβαλούν μαζί τους στην τάξη τις μαθηματικές αξίες και προσδοκίες της εθν(οτ)ικής τους κουλτούρας οι οποίες, εντούτοις, δεν είναι πάντοτε αναγνωρίσιμες ή ευπρόσδεκτες από τους εκπαιδευτικούς (Stathopoulou & Kalabasis, 2007). Πολύ συχνά, οι μαθητές αυτοί καλούνται να παραμερίσουν γνώσεις, τεχνικές και αλγορίθμους που έμαθαν στη χώρα προέλευσής τους και να μάθουν από την αρχή γνώσεις, τεχνικές και αλγορίθμους που εφαρμόζονται στη χώρα υποδοχής (Gorgorio, 2006).

Παρά το διεθνές ενδιαφέρον και την εκτενή βιβλιογραφία που εξετάζει τη σχέση των δύο προαναφερθέντων παραγόντων με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών (π.χ. Moschkovich, 2002, στις ΗΠΑ με ισπανόφωνους μαθητές), στον κυπριακό χώρο η σχετική έρευνα βρίσκεται σε πρωταρχικά στάδια. Όπως διαφάνηκε από πρόσφατη έρευνα στο περιβάλλον της Κύπρου (Xenofontos, 2015), εκπαιδευτικοί που εργάζονταν σε δημοτικά σχολεία με αυξημένα ποσοστά αλλοδαπών μαθητών αναγνώριζαν εμφανώς τη «γλώσσα» ως τον κύριο παράγοντα που δυσχεραίνει τη μάθηση των μαθηματικών. Ταυτόχρονα, ορισμένοι από τους συμμετέχοντες έκαναν έμμεσες αναφορές στον παράγοντα «κουλτούρα», χωρίς όμως να τον αναγνωρίζουν εμφανώς, ενώ η πλειοψηφία δεν φαινόταν να αντιλαμβάνεται τις επιδράσεις του πολιτισμικού υποβάθρου των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών.

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΑΝΤΡΕΑ

Ακολουθώντας τη μεθοδολογική προσέγγιση της μελέτης περίπτωσης (Yin, 2009), το παρόν άρθρο εξετάζει τις πεποιθήσεις ενός Κύπριου εκπαιδευτικού αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε αλλοδαπούς/αλλόγλωσσους μαθητές. Ο Αντρέας (ψευδώνυμο) είναι δάσκαλος με 15 χρόνια διδακτικής εμπειρίας σε δημοτικά σχολεία της Κύπρου. Στα έξι από τα 15 χρόνια ο Αντρέας εργάστηκε σε σχολεία που ανήκουν σε Ζώνη Εκπαιδευτικής Προτεραιότητας (ΖΕΠ), δηλαδή σχολεία με αυξημένο ποσοστό αλλοδαπών μαθητών. Οι εμπειρίες του στα περιβάλλοντα σχολείων ΖΕΠ σε συνδυασμό με το ιδιαίτερο ενδιαφέρον του για τη διδασκαλία των μαθηματικών, αποτέλεσαν κίνητρο για αναζήτηση των παραγόντων που πιθανόν να επηρεάζουν την μάθηση των μαθηματικών στους δικούς του αλλόγλωσσους/αλλοδαπούς μαθητές.

Η συλλογή δεδομένων περιλάμβανε δύο φάσεις, οι οποίες είχαν διεξαχθεί σε δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους, κατά την ίδια σχολική χρονιά. Αρχικά, ο Αντρέας συμμετείχε σε ατομική ημιδομημένη συνέντευξη κατά την οποία συζητήθηκαν οι πεποιθήσεις και οι εμπειρίες του σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε αλλοδαπούς μαθητές. Σε επόμενη συνάντηση, του δόθηκαν τρία σενάρια που περιέγραφαν σύντομες ιστορίες με αλλοδαπούς μαθητές και τους δασκάλους τους στο μάθημα των μαθηματικών. Μετά τη μελέτη των τριών σεναρίων, ο Αντρέας κλήθηκε να σχολιάσει τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί των σεναρίων είχαν χειριστεί τους αλλοδαπούς μαθητές τους και να περιγράψει πώς ο ίδιος θα χειριζόταν τους μαθητές αυτούς, αν ήταν στη δική του τάξη. Το πρώτο σενάριο αναφερόταν στην ιστορία του Νταβίδ, ενός 11χρονου μαθητή από το Εκουαδόρ, ο οποίος μετανάστευσε με την οικογένειά του στη Βαρκελώνη (πραγματικό σενάριο, από τη Gorgorio, 2006). Το δεύτερο σενάριο περιέγραφε την ιστορία του Νιγηριανού Τζην, ενός 11χρονου μαθητή που μετανάστευσε με την οικογένειά του στην Κύπρο, χωρίς να μιλά καθόλου ελληνικά (πραγματικό ανέκδοτο σενάριο). Το τρίτο σενάριο περιείχε τους προβληματισμούς της Μονίφα, μιας 10χρονης μαθήτριας Νιγηριανής καταγωγής, η οποία γεννήθηκε, μεγάλωσε, και πήγαινε σχολείο στην Αγγλία (πραγματικό σενάριο, από τον O'Toole, 2004). Και στα τρία σενάρια, τα παιδιά αντιμετώπιζαν εσωτερικές και εξωτερικές συγκρούσεις στο μάθημα των μαθηματικών, οι οποίες μπορούσαν να αποδοθούν σε ζητήματα γλώσσας, κουλτούρας ή συνδυασμό των δύο.

Με στόχο να επιτευχθεί ειλικρίνεια και εμπιστοσύνη ανάμεσα στους ερευνητές και στον Αντρέα, οι συζητήσεις μας κατά τις συναντήσεις μαζί του περιλάμβαναν στοιχεία της αφηγηματικής έρευνας (Lichtman 2013), όπως για παράδειγμα, η ενθάρρυνση του συμμετέχοντα να μοιραστεί ιστορίες από την εμπειρία του ως δάσκαλος. Για την ανάλυση των δεδομένων, αλλά και την παρουσίαση των ευρημάτων μας, δανειζόμαστε στοιχεία από το μοντέλο των Ball, Thames, και Phelps (2008), το οποίο περιγράφει το είδος των μαθηματικών γνώσεων που χρειάζονται οι εκπαιδευτικοί για να είναι αποτελεσματικοί στη διδασκαλία τους. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η 'παιδαγωγική γνώση περιεχομένου' (pedagogical content knowledge) που χρειάζεται να έχει ένας εκπαιδευτικός για τη διδασκαλία του αντικειμένου (γνώσεις, δηλαδή, σχετικά με τον μετασχηματισμό της μαθηματικής γνώσης μέσα από παραδείγματα, αναπαραστάσεις, επεξηγήσεις, καθώς επίσης και κατανόηση των παραγόντων που διευκολύνουν ή δυσχεραίνουν τη μάθηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών από τα παιδιά), αναλύεται περαιτέρω στη 'γνώση περιεχομένου και μαθητών', τη 'γνώση περιεχομένου και διδασκαλίας' και τη 'γνώση περιεχομένου και αναλυτικού προγράμματος'. Στην εργασία μας προσπαθούμε να εντοπίσουμε συστατικά των τριών αυτών συνιστωσών στις πεποιθήσεις του Αντρέα.

ΕΥΡΗΜΑΤΑ

Πεποιθήσεις για τους αλλοδαπούς μαθητές στα μαθηματικά

Για τον Αντρέα, το βασικό πρόβλημα των αλλοδαπών μαθητών του στα μαθηματικά είναι το ζήτημα της γλώσσας/επικοινωνίας, κάτι που θεωρεί ότι τους δυσκολεύει, κυρίως «σε περιπτώσεις επίλυσης λεκτικών προβλημάτων». Όπως αναφέρει,

> [Πρέπει πρώτα] να καταφέρουμε να επικοινωνήσουμε, το οποίο παίρνει δύο με τρεις μήνες το λιγότερο. Και όταν εγκαθίσταται η επικοινωνία πιο εύκολη πρέπει, ειδικά στα μαθηματικά, να μάθουν τη γλώσσα των μαθηματικών.

Πιστεύει πως, όταν το ζήτημα της βασικής επικοινωνίας ξεπεραστεί, δεν υπάρχει «με κανένα μαθητή ιδιαίτερο πρόβλημα. Δηλαδή, πολύ εύκολα μπαίνουν στο νόημα. Είναι θέμα χρόνου». Κατά τη συζήτησή μας στη δεύτερη συνάντηση, ο Αντρέας προβληματίστηκε ιδιαίτερα στο πρώτο και στο τρίτο σενάριο, στα οποία οι μαθητές δεν φαίνονταν να έχουν πρόβλημα στη γλώσσα/επικοινωνία, σε αντίθεση με το δεύτερο σενάριο, όπου η γλώσσα αποτελούσε το εμφανές πρόβλημα του μαθητή στη μάθηση των μαθηματικών. Το ακόλουθο απόσπασμα αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της έλλειψης επίγνωσης του Αντρέα για τις επιδράσεις της κουλτούρας των αλλοδαπών μαθητών στις επιδόσεις τους στα μαθηματικά:

Αντρέας: Να σου δώσω να καταλάβεις. Έχω ένα μαθητή από τη Μολδαβία, τον Όλεκ, που ήρθε πέρσυ στην Κύπρο, στα 11 του. Αφότου έμαθε να επικοινωνεί στα ελληνικά, δεν αντιμετωπίζει κανένα πρόβλημα στα μαθηματικά. Μάλιστα, έχει πάντα δικούς του τρόπους για να λύνει τις ασκήσεις. Πολλές φορές τον φέρνω στον πίνακα και λέω «παιδιά, για δείτε τον τρόπο του Όλεκ».

Ερευνητής: Σκέφτηκες ποτέ ότι μπορεί να είναι κάτι πιο βαθύ; Μπορεί «ο τρόπος του Όλεκ» να μην είναι απλά αυτό. Μπορεί να είναι «ο τρόπος της Μολδαβίας». Να είναι ο τρόπος που του έμαθαν οι δάσκαλοί του στη χώρα του.

Αντρέας: (με έκπληξη) Δεν το σκέφτηκα ποτέ αυτό! Ποτέ δεν φαντάστηκα ότι στη Μολδαβία μπορεί να κάνουν μαθηματικά με διαφορετικό τρόπο! Ειλικρινά, με προβλημάτισες πολύ τώρα.

Οι διδακτικές στρατηγικές και πρακτικές του Αντρέα

Ο Αντρέας εφαρμόζει διάφορες στρατηγικές και πρακτικές για να βοηθήσει τους αλλόγλωσσους μαθητές του στα μαθηματικά. Με βάση την περιγραφή του Αντρέα, μπορεί κανείς να αντιληφθεί ότι οι πρακτικές του επικεντρώνονται συνήθως μόνο στο γλωσσικό κομμάτι. Για παράδειγμα, την της ώρα που προσφέρει εξατομικευμένη βοήθεια στους μαθητές του τους βοηθά «να μάθουν τη γλώσσα των μαθηματικών, για να μπορούν και στη λύση προβλήματος και σε ό,τι καινούριο μπει να καταλαβαίνουν περί τίνος πρόκειται». Για να επιτύχει τον συγκεκριμένο σκοπό του, ο Αντρέας χρησιμοποιεί το «μαθηματικό λεξικό», δηλαδή ένα τετράδιο όπου

> [γ]ράφουμε μέσα έννοιες, βάζουμε σύμβολα, κυρίως για να τα ταυτίζουν τα πράγματα. (...) Για παράδειγμα, στη λέξη ‘πρόσθεση’, ποιο είναι το σύμβολό της, ποιο είναι το αποτέλεσμά της. Βασικές έννοιες των μαθηματικών.

Κατά την ώρα της διδασκαλίας στο πλαίσιο της τάξης, ο Αντρέας δηλώνει πως «[χ]ρειάζεται γερή εποπτικοποίηση», ούτως ώστε να μειώνονται τα γλωσσικά στοιχεία. Σχετικά με το ζήτημα της διαφοροποίησης της διδασκαλίας του, αναφέρει ότι «[η] εύκολη λύση είναι να εντάξεις τους αλλόγλωσσους μαθητές στους αδύνατους (…) Είναι πολύ δύσκολο να κάνεις κάτι διαφορετικό στη διδασκαλία για εκείνους συγκεκριμένα».

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί το σχόλιο του Αντρέα πως στα πρώτα χρόνια που εργάστηκε με αλλοδαπούς μαθητές «[δ]εν ένιωθ[ε] έτοιμος, γιατί δεν είχ[ε] ούτε την εμπειρία ούτε την καθοδήγηση. Βασικά μόνος σου πρέπει να τα βγάλεις πέρα». Θεωρεί ότι κατά τις προπτυχιακές του σπουδές «δεν [τους] προετοίμασαν κατάλληλα για να διδάξου[ν] σε τάξεις με αλλοδαπούς μαθητές», αλλά και στο πλαίσιο της ενδοϋπηρεσιακής επιμόρφωσης δεν προσφέρονται από μέρους του Υπουργείου Παιδείας σχετικά σεμινάρια.

Ο Αντρέας στέκεται με ιδιαίτερα κριτικό ύφος στον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί στα τρία σενάρια είχαν χειριστεί τους μαθητές τους. «Πραγματικά, νομίζω αυτοί οι άνθρωποι δεν θα έπρεπε να είναι στην εκπαίδευση», δηλώνει, καθώς επίσης προσθέτει πως «[ο]ι αλλοδαποί μαθητές έχουν, πιο πολύ απ’ όλα, ανάγκη για συναισθηματική στήριξη». Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο Αντρέας δείχνει ιδιαίτερα προβληματισμένος για το θέμα των πολιτισμικών διαφορών στις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών. Στο ακόλουθο απόσπασμα του διαλόγου μας διαφαίνεται η άγνοια του Αντρέα σχετικά με την πολυπολιτισμική διάσταση των μαθηματικών και τους τρόπους αξιοποίησής της:

Ερευνητής: Προσπαθείς, με κάποιο τρόπο, να εντάξεις στο μάθημά σου στοιχεία από τις κουλτούρες των μαθητών σου;

Αντρέας: Ντρέπομαι που το παραδέχομαι, αλλά η αλήθεια είναι πως όχι. Δεν είχα σκεφτεί ποτέ πως, π.χ. ο κατακόρυφος αλγόριθμος της διαίρεσης γίνεται διαφορετικά σε κάθε χώρα. Οι μαθητές μας χρειάζονται να βλέπουν διαφορετικούς τρόπους και μεθόδους επίλυσης, κάτι που το κάνω έτσι κι αλλιώς. Απλώς δεν σκέφτηκα να ψάξω να βρω πώς γίνεται ο αλγόριθμος αυτός στις άλλες χώρες.

Ερευνητής: Πιστεύεις πως αυτό θα είχε κάποιο όφελος;

Αντρέας: Μα φυσικά! Εκτός του ότι τα παιδιά βλέπουν διαφορετικούς τρόπους, είναι ένας τρόπος για να κάνεις τους αλλοδαπούς μαθητές να νιώσουν πιο οικεία και πως, ως εκπαιδευτικός, σέβεσαι τον πολιτισμό τους.

Πεποιθήσεις για το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών

Ο Αντρέας θεωρεί ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών δεν βοηθούν καθόλου τους αλλόγλωσσους/αλλοδαπούς μαθητές. Κατά τα λεγόμενά του,

> [ε]δώ δεν βοηθούν τους δικούς μας! Δηλαδή, χάνονται τα παιδιά μέσα στις πληροφορίες. Η γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι πολύ δύσκολη για τα παιδιά. Πρέπει να τους τα κάνεις ‘κουκιά καθαρισμένα’. Αν δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις οδηγίες οι ελληνόφωνοι, πόσο μάλλον οι αλλόγλωσσοι μαθητές…

Επισημαίνει την ανάγκη ανάπτυξης εξειδικευμένου υλικού για τους αλλόγλωσσους/αλλοδαπούς μαθητές και βοηθήματα με πρακτικές, τα οποία να απευθύνονται προς τους εκπαιδευτικούς. Ο ίδιος νιώθει «αβοήθητος από το εκπαιδευτικό σύστημα», το οποίο, «εκτός του να κατανέμει ώρες στους άμεσα ενδιαφερόμενους δασκάλους δεν κάνει κάτι άλλο. Μόνος σου πρέπει να βρεις τους τρόπους και τα μέσα για να βοηθήσεις τους μαθητές σου όσο καλύτερα γίνεται».

Σε ερώτηση κατά πόσον στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών αξιοποιούνται στοιχεία από διάφορους πολιτισμούς, ο Αντρέας αναφέρει πως

Αντρέας: Στα παλιά βιβλία, υπήρχαν κάποια στοιχεία, όπως η μέθοδος πολλαπλασιασμού των Αρχαίων Αιγυπτίων ή των Ρώσων χωρικών ή τα αριθμητικά συστήματα διάφορων πολιτισμών, ιερογλυφικά Αιγυπτίων, Μάγια, μαγικά τετράγωνα και τα λοιπά. Στα νέα βιβλία δεν έχω δει κάτι αντίστοιχο.

Ερευνητής: Πώς βλέπεις την ενσωμάτωση των στοιχείων αυτών στα βιβλία;

Αντρέας: Κοίτα, μετά από τη συζήτησή μας προβληματίστηκα πολύ. Είναι καλό να αξιοποιούνται στοιχεία από άλλους πολιτισμούς. Γιατί και τα στοιχεία που υπήρχαν στα παλιά βιβλία δεν νομίζω να αξιοποιούνταν όπως θα έπρεπε. Είναι σημαντικό στα μαθηματικά να αξιοποιήσουμε στοιχεία τουλάχιστον από τους πολιτισμούς των αλλοδαπών μαθητών που έχουμε στα σχολεία μας. Το Υπουργείο Παιδείας θα πρέπει να μεριμνήσει άμεσα γι' αυτό, για να βελτιωθούν και τα επίπεδα των μαθητών μας στα μαθηματικά.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Δεν προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη το γεγονός ότι ο Αντρέας ονομάζει εμφανώς τη «γλώσσα» ως παράγοντα που επηρεάζει τη μάθηση των μαθηματικών, ειδικά σε ΓΠΠ περιβάλλοντα. Ενδιαφέρον, όμως, αποτελεί το ότι, ενώ αρχικά, δεν μπορούσε να διακρίνει συνειδητά τον παράγοντα «κουλτούρα» ως συστατικό της διάστασης 'γνώση περιεχομένου και μαθητών' (Ball et al., 2008), κατά τη δεύτερή μας συνάντηση, μέσα από τη συζήτηση μαζί του και το σχολιασμό των σεναρίων που του είχαν δοθεί, ο Αντρέας φαίνεται να αντιλαμβάνεται τη σημαντικότητα του παράγοντα αυτού στη μάθηση των μαθηματικών. Ο ίδιος, μάλιστα, τονίζει την ανάγκη επιμόρφωσής του και μελέτης τρόπων αξιοποίησης πολιτισμικών στοιχείων των μαθητών του, για να καταφέρει να τους διδάξει μαθηματικά με πιο αποτελεσματικό τρόπο.

Επιπρόσθετα, μέσα από τη συζήτηση με τον Αντρέα, έχουν αναδειχθεί στοιχεία-πτυχές επιμόρφωσης, για τις οποίες η Πολιτεία θα πρέπει να μεριμνήσει για αποτελεσματικότερη μάθηση των αλλόγλωσσων/αλλοδαπών μαθητών στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, ο Αντρέας έχει επισημάνει τα ακόλουθα: Πρώτον, τα πρώτα χρόνια επαφής του με αλλοδαπούς μαθητές ένιωθε ανέτοιμος να διδάξει μαθηματικά, λόγω της μη κατάλληλης προετοιμασίας από τις προπτυχιακές του σπουδές. Δεύτερον, ο Αντρέας επισημαίνει πως στην Κύπρο δεν προσφέρονται σχετικά σεμινάρια επιμόρφωσης για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε ΓΓΠ περιβάλλοντα. Τρίτον, πιστεύει πως τα κυπριακά σχολικά εγχειρίδια δεν περιλαμβάνουν πολυπολιτισμικά στοιχεία, που να σχετίζονται με τις κουλτούρες των μαθητών μας, ώστε τα μαθηματικά να γίνουν πιο ενδιαφέροντα για αυτούς. Επιπρόσθετα, η γλώσσα που χρησιμοποιείται και η σύνταξη των οδηγιών στα βιβλία δυσκολεύουν ακόμα και τους ελληνόφωνους μαθητές.

Πράγματι, η απουσία πολυπολιτισμικών μαθηματικών στοιχείων εντοπίζεται σε πολλά προγράμματα προετοιμασίας εκπαιδευτικών σε διάφορες χώρες και τα κυπριακά προγράμματα δεν αποτελούν εξαίρεση (Ξενοφώντος, 2014). Οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται να καλλιεργήσουν πολιτισμική ενημερότητα για τα μαθηματικά (Gay, 2002) μέσα από κατάλληλα επιστημονικά προγράμματα, αλλιώς υπάρχει ο κίνδυνος οι διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν από μόνοι τους να φέρουν ανεπιθύμητα αποτελέσματα στη μάθηση των μαθηματικών στους αλλόγλωσσους μαθητές τους (Moschkovich, 2002). Συνεπώς, η διοργάνωση σχετικών προγραμμάτων επιμόρφωσης και η παραγωγή ενισχυτικού-υποστηρικτικού υλικού για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο αυξανόμενα πολυπολιτισμικό περιβάλλον της Κύπρου θα πρέπει να αποτελέσουν βασικό μέλημα των εμπλεκόμενων ερευνητών και φορέων εκπαιδευτικής πολιτικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Andrews, P. (2007). Mathematics teacher typologies or nationally located patterns of behaviour? *International Journal of Educational Research*, *46*, 306–318.

Andrews, P., & Hatch, G. (2000). A comparison of Hungarian and English teachers’ conceptions of mathematics and its teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 31–64.

Anghileri, J., Beishuizen, M., & Van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 149-170.

Anhalt, C. O., & Rodríguez-Pérez, M. E.(2013). K-8 Teachers’ Concerns about Teaching Latino/a Students. *Journal of Urban Mathematics Education*, *6*(2), 42-61.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 389-407.

Campbell, R. J., & Kyriakides, L. (2000). The National Curriculum and standards in primary schools: a comparative perspective. *Comparative Education*, *36*, 383-395.

César, M., & Favilli, F. (2005). Diversity seen through teachers' eyes: Discourses about multicultural classes. In M. Bosch (ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 1153-1164). Sant Féliu de Gixols.

Chapman, O. (2002). Belief structure and in-service high school mathematics teacher growth. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 177–193). Springer.

Clarkson, P. C. (2009). Potential Lessons for Teaching in Multilingual Mathematics Classrooms in Australia and Southeast Asia. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *32*(1), 1-17.

Elbers, E., & de Haan, M., (2005). The construction of word meaning in a multicultural classroom. Mediational tools in peer collaboration during mathematics lessons. *European Journal of Psychology of Education, 20*, 45-59.

Gay, G. (2002). Preparing for Culturally Responsive Teaching. *Journal of Teacher Education*, *53*, 106-116.

Gorgorio, N. (2006). *Multicultural mathematics classrooms: When the difference challenges well established ideas.* Paper presented at the CIEAEM 58, Srni, Czech Republic.

Lichtman, M. (2013). *Qualitative research in education: A user's guide*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Moschkovich, J. N. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematics Thinking and Learning, 4*, 189-212.

Ξενοφώντος, Κ. (2014). Γλώσσα, κουλτούρα, και μετανάστες μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών. Στο Χ. Χατζησωτηρίου & Κ. Ξενοφώντος (Επ.), *Διαπολιτισμική Εκπαίδευση: προκλήσεις, παιδαγωγικές θεωρήσεις και εισηγήσεις* (σσ. 219-242). Καβάλα: Εκδόσεις Σαΐτα.

O'Toole, S. (2004). *Understanding the Educational World of the Child: exploring the ways in which parents' and teachers' representations medicate the child's mathematical learning in multicultural contexts.* Unpublished doctoral dissertation, University of Luton, UK.

Panayiotopoulos, C., & Nicolaidou, M. (2007). At a crossroads of civilizations: multicultural education provision in Cyprus through the lens of a case study. *Intercultural Education, 18*, 65-79.

Slavit, D., & Ernst-Slavit, G. (2007). Two for one: Teaching mathematics and English to English language learners. *Middle School Journal, 39(2),* 4-11.

Stathopoulou, C., & Kalabasis, F. (2007). Language and culture in mathematics education: Reflections on observing a Romany class in a Greek school. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 231-238.

Xenofontos, C. (2015). Immigrant pupils in elementary classrooms of Cyprus: How teachers view them as learners of mathematics. *Cambridge Journal of Education.* Advance Online Publication, DOI: 10.1080/0305764X.2014.987643

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΙΑΣ ΚΕΡΑΜΙΣΤΡΙΑΣ

Χούτου Χρυσούλα
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
chry_chou@hotmail.com

Η παρούσα έρευνα ασχολείται με τη διερεύνηση των μαθηματικών πρακτικών στον χώρο της Κεραμικής Τέχνης. Πρόκειται για τη μελέτη περίπτωσης μίας κεραμίστριας. Εξετάζονται οι μαθηματικές πρακτικές που εμφανίζονται στον χώρο, ο τρόπος με τον οποίο τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία τις διαμεσολαβούν και η αναγνώριση αυτών από την ίδια τη συμμετέχουσα. Στο συστημικό δίκτυο που αναδύεται, εμφανίζονται μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, καθώς και η άμεση ή έμμεση χρήση αυτών λόγω της παρουσίας μαθηματικών και μη εργαλείων, με διαφανή ή μη ρόλο. Παράλληλα, η αναγνώριση της χρήσης αυτής εκ μέρους της συμμετέχουσας ποικίλει από μη αντίληψη, σε μερική, μέχρι και πλήρη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι ευρέως γνωστά. Η αφηρημένη φύση των μαθηματικών, σε συνδυασμό με την απουσία νοημάτων και την υπάρχουσα αποπλαισιοποίηση της μαθηματικής γνώσης προστίθενται στο κενό που υπάρχει ανάμεσα στον σύγχρονο και τον σχολικό μαθηματικό κόσμο. Οι μαθητές αδυνατούν να βρουν κάποια σύνδεση των μαθηματικών με άλλα θέματα ή πλαίσια και οδηγούνται λογικά στην ερώτηση «Γιατί να κάνουμε μαθηματικά;». Αντιμετωπίζουμε, έτσι, την πρόκληση να κάνουμε τα μαθηματικά ουσιαστικά, προκλητικά και ελκυστικά (Nicol, 2002).

Σχετικές προσπάθειες έχουν επιχειρηθεί μέσα από τη σύνδεση των μαθηματικών με τους τομείς του πολιτισμού, της τέχνης και του χώρου εργασίας. Οι συνδέσεις αυτές προσφέρουν στους μαθητές αυθεντικές εμπειρίες μέσα από την εμπλαισιοποίηση των μαθηματικών, καθώς και κίνητρα για μάθηση, αλλά και μία αίσθηση οικειότητας όσον αφορά στα ίδια τα μαθηματικά. Στην κατεύθυνση αυτή, επιλέγουμε τον παραδοσιακό και καλλιτεχνικό χώρο εργασίας της Κεραμικής Τέχνης, με σκοπό τη διερεύνηση των μαθηματικών πρακτικών που αναδεικνύονται σε αυτόν.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μαθηματικά και Πολιτισμός

Τα μαθηματικά, ως ένα απόλυτο και ανεξάρτητο σώμα γνώσης συχνά παρουσιάζονται ως η γλώσσα της αλήθειας. Αντίθετα, όμως, με τα επιχειρήματα περί καθολικότητας των μαθηματικών εννοιών, ο Bishop (1988) τονίζει ότι τα μαθηματικά είναι ένα παν-πολιτισμικό, παν-ανθρώπινο φαινόμενο το οποίο έχει αναπτυχθεί ως αποτέλεσμα έξι καθολικών δραστηριοτήτων, απαραίτητων για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Οι παγκόσμιες αυτές δραστηριότητες είναι η *αρίθμηση*, η *τοποθέτηση*, η *μέτρηση*, ο *σχεδιασμός*, το *παιχνίδι* και η *επεξήγηση* (Bishop, 1988). Σχετικός, επίσης, είναι ο όρος εθνομαθηματικά. Με αυτόν αναφερόμαστε στα μαθηματικά που ασκούνται μεταξύ των αναγνωρίσιμων πολιτιστικών ομάδων, τα οποία δεν χαρακτηρίζονται από την αυστηρότητα και τον φορμαλισμό των ακαδημαϊκών μαθηματικών. Κάθε πολιτισμική ομάδα έχει τη δική της γλώσσα, τα δικά της σύμβολα, ακόμα και τους δικούς της τρόπους αιτιολόγησης και εξαγωγής συμπερασμάτων (D'Ambrosio, 1985).

Μαθηματικά και Τέχνη

Ένα μεγάλο κομμάτι του πολιτισμού αποτελεί η τέχνη. Οι συνδέσεις μεταξύ αυτής και των μαθηματικών είναι πολλές και περιλαμβάνουν συνήθως κανόνες, συμμετρίες, μοτίβα και δομές (Cucker, 2013). Η αλγοριθμική σκέψη και η μοντελοποίηση της μορφής είναι μόνο δυο από τις ποικίλλουσες κοινές δομές μεταξύ της γεωμετρίας και των οπτικών τεχνών (Bickley-Green, 1995). Επίσης, πολλοί κεραμίστες, γλύπτες και ζωγράφοι φαίνεται να μοιράζονται με τους μαθηματικούς της γεωμετρίας τη χρήση παρόμοιων διαδικασιών, με συνηθέστερες την ανασύνθεση και την επικόλληση (Bruter, 2012). Επιπλέον, σημαντική θέση στη σύνδεση αυτή εμφανίζεται να έχουν τα διάφορα πολιτισμικά τεχνουργήματα που έχουν δημιουργηθεί ανά τους αιώνες, όπως αγγεία, καλάθια ή μωσαϊκά. Σε αυτά έντονες εμφανίζονται οι μαθηματικές έννοιες της διάταξης, των μοτίβων και της συμμετρίας (Mukhopadhyay, 2009), με βασικές τάσεις τις σπείρες και τις πλακοστρώσεις (Bruter, 2012).

Μαθηματικά και χώρος εργασίας

Τα μαθηματικά στον χώρο εργασίας ως ερευνητικό πεδίο έχει δεχθεί αξιόλογη προσοχή τις τελευταίες δεκαετίες, με πολλές ομάδες να έχουν ήδη μελετηθεί ως προς τις μαθηματικές πρακτικές τους. Η ανάδειξη αυτών των μαθηματικών πρακτικών, αλλά και της συνεργασίας τους με τα τυπικά μαθηματικά του σχολείου είναι σημαντική (Triantafillou & Potari, 2010).

Ως μαθηματικές πρακτικές θεωρούνται οι επαναλαμβανόμενες δράσεις στις οποίες οι άνθρωποι εμπλέκονται, αλλά η κυρίως εστίασή τους δεν είναι το να μάθουν, αλλά το να κάνουν μαθηματικά (Boaler, 2002). Τα εργασιακά μαθηματικά είναι συνήθως βασικού επιπέδου, και εμφανίζονται σημαντικά στην ποιότητα και συνεχή βελτίωση, τη μείωση λαθών, τη «διατήρηση των διαδικασιών» και τις «συνήθεις ρουτίνες» (The Australian Association of Mathematics Teachers and the Australian Industry Group, 2014). Συγκεκριμένα, εμφανίζονται μετρήσεις, υπολογισμοί, εκτιμήσεις, ποσοστά και λόγοι, μοτίβα, η κλίμακα, η χωρητικότητα, ο όγκος, και ο σχεδιασμός ενός διαγράμματος (Nicol, 2002). Επίσης, η αξιολόγηση, η κριτική και η μοντελοποίηση με τη χρήση μαθηματικών εννοιών, η αναγνώριση λαθών και η σύγκριση με παρόμοια προβλήματα τα οποία έχουν ήδη λυθεί. Έμφαση δίνεται, επιπλέον, στο σχήμα και την αίσθηση του χώρου, με σημαντικά στοιχεία την οπτικοποίηση, τον χωρικό προσανατολισμό, τη μεταφορά και το σύστημα συντεταγμένων (Millroy, 1992).

Σε κάθε χώρο, το πλαίσιο φαίνεται να επηρεάζει τη διαμόρφωση μοναδικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών πρακτικών (Naresh, 2009). Σημαντικά αναδεικνύονται και τα εργαλεία, τα οποία εμφανίζονται ενσωματωμένα στην εργασιακή δραστηριότητα, και χωρίς να την καθορίζουν πλήρως διατηρούν ταυτόχρονα μια ιδιοσυγκρασιακή φύση (Noss, Hoyles & Pozzi, 2002; Triantafillou & Potari, 2010; Williams & Wake, 2007). Μάλιστα, συχνά μπορεί να λειτουργούν ως μαύρα κουτιά, δηλαδή τεχνολογικά μέσα και εργαλεία που κρύβουν τα μαθηματικά ενσωματωμένα στην κατασκευή και τη λειτουργία τους (Williams & Wake, 2007), καθιστώντας τη φύση των μαθηματικών αόρατη. Κάτι ακόμα το οποίο δυσχεραίνει την αναγνώριση των μαθηματικών είναι ότι πολλές φορές οι ίδιοι οι εργαζόμενοι δεν έχουν μαθηματική κατανόηση των εργασιών τους (Nicol, 2002).

Εκπαιδευτικές συνέπειες

Ποικίλα εμφανίζονται τα εκπαιδευτικά οφέλη που προσφέρουν οι τρεις αυτές συνδέσεις. Αρχικά, φαίνεται σημαντική η παρουσίαση μαθηματικών εννοιών με τρόπο σχετιζόμενο με τον πολιτισμό, μέσα από καταστάσεις ενδιαφέρουσες για τους μαθητές. Οι μαθητές αποκτούν την αντίληψη των μαθηματικών ως μια ανθρώπινη κατασκευή, μέσα στη γνωστική σφαίρα του καθενός (Mukhopadhyay, 2009). Οι συνδέσεις αυτές τους δίνουν κίνητρο αναγνωρίζοντας την παρουσία των μαθηματικών σε μέρη ή πλαίσια που δεν το περιμένουν, ενισχύοντας παράλληλα την ικανότητα κατανόησης εκ μέρους τους. Έτσι, εκτιμούν τη «δύναμη» των μαθηματικών στην ευρεία εφαρμογή της (Hickman & Huckstep, 2003), βλέποντας τα μαθηματικά πιο αυθεντικά, ελκυστικά και προσβάσιμα (Nicol, 2002).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικά ερωτήματα και Μέθοδος έρευνας - Συμμετέχοντες

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι τα εξής: (1) Ποιές είναι οι μαθηματικές πρακτικές που εμφανίζονται στον χώρο της Κεραμικής; (2) Πώς τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία διαμεσολαβούν τις μαθηματικές αυτές πρακτική; (3) Σε ποιο βαθμό επιτυγχάνεται η αναγνώριση των μαθηματικών αυτών πρακτικών από τον καλλιτέχνη;

Η έρευνα αφορά στη μελέτη περίπτωσης μίας καλλιτέχνιδας από τον χώρο της Κεραμικής (Κεραμίστρια), με χρήση στοιχείων από την εθνογραφική ερευνητική μεθοδολογία μειωμένου χρόνου. Η συμμετέχουσα κατέχει ένα καλό εκπαιδευτικό υπόβαθρο (πτυχίο Αρχιτεκτονικής, ακροάτρια στη Σχολή

Καλών Τεχνών, μεταπτυχιακό Κεραμικής). Από τις τεχνικές της Κεραμικής, χρησιμοποιεί τον χειροκίνητο τροχό, το μακαρόνι και το καλούπι.

Συλλογή και Ανάλυση δεδομένων

Πραγματοποιήθηκαν δύο επισκέψεις στο εργαστήριο της Κεραμίστριας, συνολικής διάρκειας 4 ωρών. Αρχικά, έγινε ημιδομημένη συνέντευξη 15 λεπτών, όπου έγινε σκιαγράφηση του γενικότερου υποβάθρου και πλαισίου εργασίας. Ακολούθησε παρατήρηση δράσεων και τεχνουργημάτων διάρκειας 3,5 ωρών, όπου μέσα από ανεπίσημες συζητήσεις η Κεραμίστρια μας περιέγραψε τις τεχνικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιεί, τις συνήθεις δράσεις της, καθώς και ήδη κατασκευασμένα αντικείμενα και τον τρόπο κατασκευής τους. Στο τέλος, πραγματοποιήθηκε ημιδομημένη συνέντευξη 15 λεπτών, η οποία αφορούσε στην αναγνώριση μαθηματικών πρακτικών εκ μέρους της συμμετέχουσας. Όλες οι συζητήσεις μαγνητοφωνήθηκαν και κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου, ενώ συλλέχθηκαν φωτογραφίες και βίντεο.

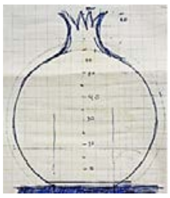
Ως μέθοδος ανάλυσης δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η Θεμελιωμένη Θεωρία (Strauss & Corbin, 1998). Την απομαγνητοφώνηση του ακουστικού και μαγνητοσκοπημένου υλικού ακολούθησε η ανοιχτή κωδικοποίηση αυτού. Η ανάλυση έγινε με βάση την επιλογή κρίσιμων συμβάντων, ενώ η κατηγοριοποίηση των δεδομένων βασίστηκε σε τρεις βασικούς άξονες: την μαθηματική πρακτική της συμμετέχουσας, τη διαφάνεια αυτής της μαθηματικής πρακτικής, και την αναγνώριση ή μη αυτής εκ μέρους της. Θα δούμε τις προκύπτουσες κατηγορίες μέσα από την περιγραφή των αποτελεσμάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κομμάτι των αποτελεσμάτων, αρχικά θα περιγράψουμε ενδεικτικά ορισμένα παραδείγματα από την πρακτική της Κεραμίστριας και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε το συστημικό δίκτυο (Bliss et all, 1983) που αναδύεται και τη μαθηματική πρακτική που εμφανίζεται.

Παραδείγματα από την πρακτική της Κεραμίστριας

Η Κεραμίστρια μας λέει ότι της ζητήθηκε να κατασκευάσει ένα τεράστιο ρόδι περίπου 60 πόντων. Για να δει λίγο το σχήμα του και να εκτιμήσει τις τελικές του διαστάσεις, έχει ζωγραφίσει σε ένα μιλιμετρέ χαρτί ένα προσχέδιο του ροδιού υπό κλίμακα (Εικόνα 1, Αριστερά). Κάνει έτσι άμεση χρήση του προσχεδίου, καθώς το μαθηματικό εργαλείο αυτό τη βοηθάει - και όχι αναγκάζει - να «κάνει μαθηματικά». Η αντίληψή της είναι μερική, καθώς γνωρίζει ότι πρόκειται για προσχέδιο αλλά δεν το αναγνωρίζει ως κάτι το μαθηματικό. Επίσης, κάνει άμεση χρήση της κλίμακας μέσω του μιλιμετρέ. Καθώς όταν τη ρωτήσαμε για το συγκεκριμένο προσχέδιο, αναφώνησε γελώντας: «Α επειδή έχει (μιλιμετρέ)!», φαίνεται να έχει πλήρη αντίληψη της μαθηματικής του φύσης, ενώ αιτιολόγησε την επιλογή της λέγοντας: «Έχει τέλεια τις υποδιαιρέσεις. Κάθε τετραγωνάκι…βγάζει…10 πόντους». Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί την κλίμακα 1:5.



Εικόνα 1: Αριστερά: Το υπό κλίμακα προσχέδιο του ροδιού σε μιλιμετρέ χαρτί. Δεξιά: Η φυλλιέρα

Έπειτα, για την κυρίως κατασκευή, ξεκινάει φτιάχνοντας τη βάση του επίπεδη. Αυτό το καταφέρνει χρησιμοποιώντας το εργαλείο «φυλλιέρα» (Εικόνα 1, Δεξιά), το οποίο ουσιαστικά ανοίγει φύλλα πηλού: η Κεραμίστρια τοποθετεί μία μάζα πηλού πάνω στο τραπέζι αυτό, και κυλάει τον κύλινδρο μπρος – πίσω ώστε να προκύψει το ζητούμενο φύλλο. Ως εκ τούτου, κάνει έμμεση χρήση του επίπεδου, καθώς η φυλλιέρα επιβάλλει αναγκαστικά την έννοια αυτού, ενώ η αντίστοιχη αντίληψή της είναι μερική. Αφού κατασκευάσει τη βάση, αρχίζει να χτίζει το αντικείμενο προς τα επάνω, τοποθετώντας περιφερειακά της βάσης του επάλληλες λωρίδες πηλού «σαν τομές αξονικού τομογράφου», τις οποίες ονομάζει μακαρόνια. Έτσι, χρησιμοποιεί άμεσα την παραλληλία, έχοντας μερική αντίληψη αυτής. Για να υπολογίσει, μάλιστα, το πόσο θα ανοίξει την περιφέρεια σε κάθε μακαρόνι που προσθέτει, μας λέει ότι λόγω του μιλιμετρέ ξέρει ότι «σε τόσο ύψος έχει γίνει τόση η διάμετρος». Ουσιαστικά, χρησιμοποιεί τη μέτρηση της διαμέτρου του κάθε επάλληλου κύκλου που φτιάχνει, για να καθορίσει αλλά και να επαληθεύσει το αντίστοιχο ύψος. Ως εκ τούτου, κάνει άμεση χρήση της μέτρησης, της επαλήθευσης, του κύκλου και της διαμέτρου, έχοντας μερική αντίληψη επί αυτών.

Μας τονίζει ότι αν στην παραγγελία αυτή είχε αυστηρές προδιαγραφές, θα χρησιμοποιούσε πιο αυστηρή κλίμακα, υπονοώντας την 1:10, φτιάχνοντας, μετά το προσχέδιο του αντικειμένου, ένα πρόπλασμα. Μάλιστα, λέει: «Κι όντως. Δηλαδή εντάξει όταν κάνεις πρόπλασμα και χρησιμοποιείς μεγάλη κλίμακα, χρησιμοποιείς μαθηματικά οπωσδήποτε εκεί. Κάνεις μια μεταφορά κλίμακας». Ως εκ τούτου, εμφανίζει πλήρη αντίληψη επί της άμεσης χρήσης της κλίμακας. Επιπλέον κάνει άμεση χρήση της μοντελοποίησης ως στρατηγική επίλυσης, μέσω του προπλάσματος, έχοντας μερική αντίληψη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ένα κοχύλι με το «μωρό» του, όπου γίνεται άμεση χρήση της χρυσής τομής, με πλήρη αντίληψη εκ μέρους της.

Εικόνα 2: Αριστερά: Το προσχέδιο και το πρόπλασμα του κοχυλιού. Δεξιά: Η ανάλυση σε επιμέρους

Επίσης, μοιράστηκε μαζί μας τις συμβουλές που δίνει στους μαθητές της για την αντιγραφή ενός αντικειμένου. Αυτό που τους προτρέπει πάντα είναι να αναλύουν το υπάρχον σχήμα σε επιμέρους μορφές. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας την οπτικοποίησή της λέει ότι αν κρύψουμε τη μύτη του αγγείου, αυτό που μένει είναι ένα μπολ, δηλαδή ένα ημισφαίριο. Μάλιστα, αναφέρει ότι από μια νοητή γραμμή και πάνω (Εικόνα 2, Δεξιά) «ο κύκλος αρχίζει να ξεχειλώνει και το σχήμα γίνεται πιο ελλειπτικό», ενώ αντίστοιχα η μύτη που προηγουμένως κρύψαμε έχει σχήμα κυλίνδρου ή κώνου. Κάνει έτσι άμεση χρήση της οπτικοποίησης, της ανάλυσης σε επιμέρους και των γεωμετρικών αυτών σχημάτων και στερεών, με μερική αντίληψη επί αυτών.

Η μαθηματική πρακτική της Κεραμίστριας

Η μαθηματική πρακτική που εντοπίστηκε στον χώρο της Κεραμίστριας αναλύθηκε σε σχέση με τα μαθηματικά που αναδείχθηκαν, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν και το κατά πόσο αυτά τα μαθηματικά αναγνωρίστηκαν από την ίδια. Στην Εικόνα 3 εμφανίζεται το αναδυόμενο συστημικό δίκτυο.

Ως προς τα μαθηματικά που αναδείχθηκαν διακρίνουμε έννοιες και διαδικασίες. Στις *μαθηματικές έννοιες* εμφανίστηκαν οι *γεωμετρικές έννοιες* των επίπεδων και στερεών σχημάτων, του εμβαδού, του όγκου, του επίπεδου, της επιφάνειας, του ορθογώνιου συστήματος αξόνων και έννοιες και μοντέλα υπερβολικής γεωμετρίας. Επίσης, οι *μαθηματικές σχέσεις* της ισότητας, της παραλληλίας, της συμμετρίας, της αναλογίας, της ομοιότητας, της κλίμακας, της συσχέτισης διαστάσεων-όγκου/εμβαδού, η σχέση κυρτό-κοίλο, του μοτίβου και της χρυσής τομής. Ακόμα, εμφανίστηκαν οι *μετασχηματισμοί* της οριζόντιας/κατακόρυφης μετατόπισης και της περιστροφής. Ως προς τις *μαθηματικές διαδικασίες* αναδεικνύεται η *επίλυση προβλήματος*, με την οπτικοποίηση (παρουσία της ανασύνθεσης και της επικόλλησης) και οι στρατηγικές επίλυσης (εξαγωγή αλγορίθμου, ανάλυση σε επιμέρους, μοντελοποίηση, δοκιμές και πλάνες, επαλήθευση και γενίκευση). Επιπλέον, εμφανίστηκε η μέτρηση με άτυπες μονάδες (ξυλάκια, καλούπια, κομπάσο και φυλλιέρα) και με τυπικές (χάρακας). Ακόμα, η σύγκριση και η εκτίμηση, οι υπολογισμοί/πράξεις και η χρήση αλγορίθμου.

Εικόνα 3: Το συστημικό δίκτυο

Όσον αφορά στα εργαλεία, αυτά κατηγοριοποιήθηκαν ως προς το είδος και ως προς τον ρόλο. Ως προς το είδος χωρίστηκαν σε *μαθηματικά* εργαλεία, όπου ανήκουν το μιλιμετρέ, τα προσχέδια και τα προπλάσματα και σε *μη μαθηματικά*, όπου ανήκουν τα τροχάκια, η φυλλιέρα, το καλούπι, τα ξυλάκια, ο χάρακας και ο πλάστης. Ως προς τον ρόλο, εμφανίστηκε ο *μη διαφανής ρόλος* κάποιων εργαλείων καθιστώντας *έμμεση* τη *χρήση μαθηματικών*. Συγκεκριμένα, στα τροχάκια εμφανίστηκε η συμμετρία, η περιστροφή και η σπείρα, στο καλούπι η σφαίρα και στη φυλλιέρα η μέτρηση και το επίπεδο. Τα υπόλοιπα εργαλεία εμφανίζονται με *διαφανή ρόλο* επιτρέποντας *άμεση χρήση μαθηματικών* (μέτρηση, στερεά και επίπεδα σχήματα, παραλληλία κ.α.), η οποία εμφανίζεται και χωρίς την παρουσία κάποιου εργαλείου (οπτικοποίηση, ορθογώνιο σύστημα αξόνων κ.α.).

Σχετικά με την αναγνώριση των μαθηματικών εκ μέρους της, η Κεραμίστρια παρουσιάζει *μη αντίληψη* όσον αφορά στις έννοιες/μοντέλα της υπερβολικής γεωμετρίας, την άμεση μέτρηση με καλούπι και την έννοια της επιφάνειας. *Μερική αντίληψη* παρουσιάζει σχετικά με τις γεωμετρικές έννοιες (επίπεδα και στερεά σχήματα), τις σχέσεις όπως η συμμετρία, η μεγέθυνση, η σχέση κυρτό-κοίλο, η παραλληλία και η ομοιότητα, αλλά και σχετικά με τις διαδικασίες της οπτικοποίησης, της σύνθεσης – επικόλλησης, των στρατηγικών επίλυσης, της μέτρησης με το μιλιμετρέ, το κομπάσο και τη φυλλιέρα, και της σύγκρισης. Τέλος, *πλήρη αντίληψη* εμφανίζει στη χρυσή τομή, τη μεταφορά μήκους και την κλίμακα (μαζί με το μιλιμετρέ χαρτί).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Φαίνεται ότι το κάθε τελικό αντικείμενο αποτελεί την προσπάθεια της Κεραμίστριας για τη βέλτιστη δυνατή λύση στο σχεδιαστικό - κατασκευαστικό πρόβλημά της (Gerdes, 1988; Wake, 2014). Ο χαρακτηρισμός βέλτιστη έχει νόημα καθώς, επειδή στον τρόπο που θα «χτίσει» τα αντικείμενα έχει τον περιορισμό «να ντύσει το κενό», η ίδια προστρέχει στα μαθηματικά ώστε επιτύχει την ορθότητα, ακρίβεια και ομορφιά του τελικού αντικειμένου, επιβεβαιώνοντας έτσι τις Bickley-Green (1995) και Naresh (2009). Επιπλέον, ο χώρος είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τη Γεωμετρία, καθώς πρόκειται για σύνθεση όγκων τρισδιάστατων αντικειμένων, με έντονη εμφάνιση γεωμετρικών εννοιών. Όλη η επίλυση του προβλήματος βασίζεται στην οπτικοποίηση (Nicol, 2002; Millroy, 1992), καθώς η Κεραμίστρια πρέπει συνεχώς να κάνει νοητικές εικόνες των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν από τις δράσεις της. Βασική είναι η χρήση αλγορίθμων (Bickley-Green, 1995) στη συνολική διαδικασία κατασκευής, αλλά και η εξαγωγή αλγορίθμου σε επιμέρους σημεία της διαδικασίας, όπως κατά την μοντελοποίηση με χρήση κλίμακας (προσχέδια – πρόπλασμα – τελικό αντικείμενο). Επίσης, σημαντικές είναι οι δοκιμές και πλάνες, και μέσω αυτών η γενίκευση. Εμφανίστηκαν, ακόμα, οι έξι δραστηριότητες του Bishop (1988).

Ουσιαστικά, κατά το μεγαλύτερο μέρος, χρησιμοποιεί άμεσα τα μαθηματικά γιατί την βοηθούν να κάνει την τέχνη της. Θέλει το αποτέλεσμα να είναι αισθητικά άρτιο (αναλογία, αρμονία, χρυσή τομή κ.α.). Όταν, λοιπόν, φαντάζεται κάτι και θέλει να το κατασκευάσει, αντί να πάει στην τύχη χρησιμοποιεί τα μαθηματικά (προσχέδια, μιλιμιτρέ, διαστάσεις, αναλογία, συμμετρία κ.α.) για να οργανώσει την πορεία της δουλειάς της και να είναι σίγουρη ότι θα έχει το ποθητό αποτέλεσμα. Όσον αφορά στα εργαλεία, η φυλλιέρα και το καλούπι αποτελούν μαύρα κουτιά (Williams & Wake, 2007). Όλα τα εργαλεία φαίνεται να διατηρούν μία ιδιοσυγκρασιακή φύση, χωρίς να καθορίζουν πλήρως την εργασιακή πρακτική, συμφωνώντας με τους Noss, Hoyles & Pozzi (2002), Triantafillou & Potari, (2010) και Williams & Wake (2007), καθώς η Κεραμίστρια χρησιμοποιεί τα εργαλεία ως μέσο για να επεκτείνει τον μαθηματικό τρόπο σκέψης της. Σημαντικό είναι, επίσης, το γεγονός ότι η ίδια αρχικά πιστεύει ότι δεν χρησιμοποιεί μαθηματικά, ενώ κατά τη διάρκεια μέχρι και το τέλος της έρευνας επιτυγχάνει να αντιληφθεί τη χρήση κάποιων μαθηματικών.

Όσον αφορά στην εκπαιδευτική αξία της έρευνας, η Κεραμίστρια μας λέει ότι σε κάθε μέθοδο η κατασκευή έχει έντονο το στοιχείο της εφεύρεσης, ένα στοιχείο στο οποίο οι μαθητές είναι κρίσιμο να εμπλακούν. Μέσα από το παιχνίδι με τον πηλό, επιτυγχάνεται η αλληλεπίδραση μεταξύ νοητικών εικόνων και εξωτερικών αναπαραστάσεων ενισχύοντας την ανάπτυξη της οπτικοποίησης, καθώς και η καλύτερη κατανόηση και η νοηματοδότηση των εμπλεκόμενων εννοιών, καθιστώντας αυτές απτές αντί αφηρημένες. Το σημαντικότερο όφελος είναι η μάθηση των μαθηματικών μέσα σε ένα πολύ συγκεκριμένο και με νόημα πλαίσιο, καθιστώντας έτσι τα μαθηματικά ελκυστικά και σημαντικά, ενώ τη χρήση τους ουσιώδη και γεμάτη νόημα.

Συνοψίζοντας, εμφανίζεται η άμεση χρήση μαθηματικών εννοιών (πχ. συμμετρία) και διαδικασιών (πχ. μέτρηση) εκ μέρους της Κεραμίστριας, αλλά και η έμμεση χρήση αυτών λόγω αναγκαστικής επιβολής τους από κάποιο εργαλείο με μη διαφανή ρόλο (πχ. φυλλιέρα). Η χρήση αυτή μπορεί να γίνεται εν γνώσει (πλήρης αντίληψη) ή εν αγνοία της (μη αντίληψη). Αυτό, όμως, που έχει ξεχωριστό ενδιαφέρον είναι ότι η ίδια στις περισσότερες περιπτώσεις κατανοεί τι κάνει, αλλά δεν αντιλαμβάνεται ότι αυτό που κάνει είναι μαθηματικά (μερική αντίληψη). Εν τέλει, τα μαθηματικά αναδύονται ως «αναγκαία» συνθήκη όσο και αν νομίζουμε ότι «απλά είμαστε πολύ ταλαντούχοι καλλιτέχνες» και δεν τα χρειαζόμαστε. Υποδεικνύεται, έτσι, ένα δημιουργικό πλαίσιο για να βελτιώσουμε την και γκρίζα αντίληψη των μαθητών για τα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bickley-Green, C. A. (1995). Math and art curriculum integration: A post-modern foundation. *Studies in Art Education*, 6-18.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education* Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Bliss, J. M., Monk, M., & Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research*. London: Croom Helm.

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 3-21.

Bruter, C. P. (2012). *An Introduction to the Construction of Some Mathematical Objects* (σελ. 29-46). Springer Berlin Heidelberg.

Cucker, F. (2013). *Manifold mirrors: the crossing paths of the arts and mathematics*. Cambridge University Press.

D'Ambrosio, U. (1990). The role of mathematics education in building a democratic and just society. For the Learning of Mathematics, 10(3) 20-23.

Gerdes, P. (1986). How to recognize hidden geometrical thinking: A contribution to the development of anthropological mathematics. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 10-12.

Hickman, R., & Huckstep, P. (2003). Art and mathematics in education. *The Journal of Aesthetic Education*, *37*(1), 1-12.

Millroy, W. L. (1991). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Learning and individual differences*, *3*(1), 1-25.

Mukhopadhyay, S. (2009). The decorative impulse: ethnomathematics and Tlingit basketry. *ZDM*, *41*(1-2), 117-130.

Naresh, N. (2009). Interplay between School Mathematics and Work Place Mathematics, Proceedings of epiSTEME 3.

Nicol, C. (2002). Where's the math? Prospective teachers visit the workplace. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 289-309.

Noss, R., Hoyles, C., & Pozzi, S. (2002). Working knowledge: Mathematics in use. In *Education for mathematics in the workplace* (σελ. 17-35). Springer Netherlands.

Strauss, A., και Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks: Sage.

The Australian Association of Mathematics Teachers and the Australian Industry Group (2014). *Identifying and Supporting Quantitative Skills of 21st Century Workers: Final Report.*

Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(3), 275-294.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271-290.

Williams, J., & Wake, G. (2007). Black boxes in workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 317-343.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-5: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΝΤΑΣΣΟΝΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΞΟΝΕΣ

Ο ΑΞΟΝΑΣ ΧΩΡΟΣ-ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ-ΕΜΒΑΔΟΥ

Ματθαίος Αναστασιάδης* & Κώστας Νικολαντωνάκης**
*Δάσκαλος, Κάτοχος Μεταπτυχιακού Διπλώματος ΠΤΔΕ-ΠΔΜ,
**Αναπληρωτής Καθηγητής ΠΤΔΕ-ΠΔΜ,
mat.anastasiadis@gmail.com, knikolantonakis@uowm.gr

Η έρευνα αυτή εστιάζει στον άξονα χώρος-οπτικοποίηση του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας κατά την εξέταση ισοεμβαδικών και ισοπεριμετρικών σχημάτων. Η έρευνα περιελάμβανε διδακτική παρέμβαση σε ένα τμήμα της ΣΤ΄ τάξης με 22 μαθητές και έλεγχο πριν και μετά την παρέμβαση, μέσω συνεντεύξεων με τους μαθητές. Πριν την παρέμβαση οι μαθητές είχαν σχετικά ικανοποιητική βάση όσον αφορά τις μερεολογικές τροποποιήσεις, ενώ μετά από αυτήν παρατηρήθηκε περαιτέρω βελτίωση. Στην ανάπτυξη, ωστόσο, του άξονα χώρος-οπτικοποίηση παρεμβαίνουν τα χαρακτηριστικά της κατάστασης και το διδακτικό συμβόλαιο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, που συνδέει τη διδακτική αξιοποίηση ιστορικών πηγών με τη θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (ΓΧΕ) (Kuzniak, 2006), στο πλαίσιο μιας διδακτικής παρέμβασης με θέμα τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Η παρούσα εργασία εστιάζει στον άξονα χώρος-οπτικοποίηση του ΓΧΕ και ειδικότερα στις μερεολογικές τροποποιήσεις που έκαναν οι μαθητές πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την παρέμβαση, καθώς και στους παράγοντες που επηρέασαν την ανάπτυξη αυτού του άξονα.

Όσον αφορά το εμβαδόν, έχει τονιστεί η ανάγκη οι μαθητές να κατανοούν ότι αποτελεί ιδιότητα και προτείνονται οι μετρήσεις του εμβαδού με δισδιάστατες μονάδες, οι συγκρίσεις σχημάτων, η τοποθέτηση ενός σχήματος πάνω στο άλλο και η αποκοπή-επικόλληση των περίσσιων τμημάτων και, τέλος, η εξέταση των σχέσεων περιμέτρου-εμβαδού (Douady & Perrin-Glorian, 1989· Nunes, Light, & Mason, 1993· Van de Walle & Lovin, 2006).

Τα παραπάνω προσεγγίζονται εδώ υπό το πρίσμα της θεωρίας των ΓΧΕ (Kuzniak, 2006, 2015). Ως ΓΧΕ ορίζεται ο χώρος που έχει οργανωθεί με τρόπο που να καθίσταται εφικτή για το χρήστη του – μαθηματικό, φοιτητή ή μαθητή – η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Διακρίνονται τρία επίπεδα: ο ΓΧΕ αναφοράς, που καθορίζεται από μια κοινότητα μαθηματικών ή από το πρόγραμμα σπουδών, ο κατάλληλος ΓΧΕ, που σχεδιάζεται από τον διδάσκοντα για μια δεδομένη τάξη, και ο προσωπικός ΓΧΕ, που αναπτύσσεται στην πράξη από τον τελικό χρήστη. Διακρίνονται, επίσης, διαφορετικά επιστημολογικά παραδείγματα. Εδώ, μας ενδιαφέρει η Γεωμετρία 1 (GI), όπου κυριαρχεί ο πειραματισμός και επιτρέπονται οι πρακτικές αποδείξεις, οι μετρήσεις, η χρήση αριθμών και οι κατά προσέγγιση απαντήσεις, σε αντίθεση με τη Γεωμετρία 2, που έχει ως αρχέτυπο την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ο ΓΧΕ περιλαμβάνει τρία συστατικά: α) το χώρο με τα σχήματα, β) τα τεχνουργήματα-εργαλεία και γ) το θεωρητικό σύστημα αναφοράς, με τους ορισμούς και τις ιδιότητες. Σε ένα δεύτερο, γνωστικό επίπεδο εντάσσονται τρία είδη διαδικασιών: η οπτικοποίηση, η κατασκευή και η απόδειξη. Η οπτικοποίηση συνδέεται με το χώρο και τα σχήματα δημιουργώντας έναν κοινό άξονα στο πλαίσιο του ΓΧΕ.

Ως προς τα σχήματα, ο Duval (1995) χρησιμοποίησε τη λέξη κατανόηση, για να τονίσει τους διαφορετικούς τρόπους θέασής τους. Η λειτουργική κατανόηση, που μας ενδιαφέρει εδώ, περιλαμβάνει τη μερεολογική τροποποίηση ενός σχήματος, δηλαδή την ανάλυσή του σε διάφορα μέρη και, ενδεχομένως, τη σύνθεση των μερών σε ένα νέο όλο. Ο Duval (2005) επέκτεινε τις έννοιες αυτές, μιλώντας για τον τρόπο θέασης του εφευρέτη-πολυτεχνίτη, που συνίσταται στην ευρετική ανάλυση των σχημάτων με υλικό τρόπο ή με ανα-οργανωτικές γραμμές ή μόνο με το βλέμμα. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται ετερογενής όταν τα επιμέρους σχήματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Σύμφωνα με τον Duval (1998), κάποιες μερεολογικές τροποποιήσεις δεν απαιτούν ιδιαίτερες γεωμετρικές γνώσεις. Επιπλέον, για κάθε σχήμα είναι δυνατές διαφορετικές μερεολογικές τροποποιήσεις και έτσι τίθεται το ερώτημα κατά πόσο είναι ορατή η κατάλληλη τροποποίηση (Duval, 1995). Οι κύριοι παράγοντες δυσκολίας είναι η διπλή χρήση ενός επιμέρους σχήματος και η απουσία στο αρχικό σχήμα των γραμμών που διαχωρίζουν τα επιμέρους σχήματα, ιδίως αν χρειάζονται πολλοί διαχωρισμοί. Επιπλέον, η τροποποίηση θα μπορούσε να είναι λιγότερο ορατή, αν το νέο σχήμα δεν είναι μέσα στο περίγραμμα του αρχικού ή αν τα επιμέρους σχήματα δεν είναι αντιληπτικώς συμπληρωματικά, δηλαδή δε συνδυάζονται για να δώσουν ένα οικείο σχήμα (π.χ. ορθογώνιο).

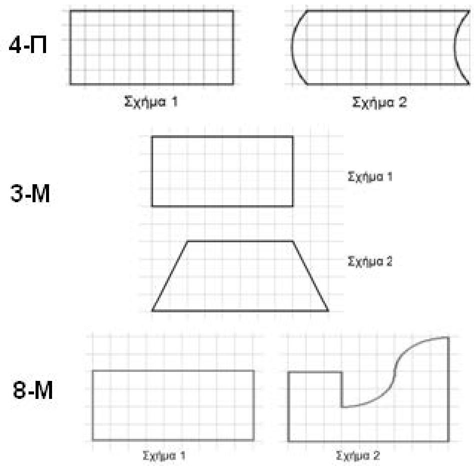
Κατά τον Duval (1995, 1998), η διδασκαλία πρέπει να δώσει ξεχωριστή έμφαση στην ανάπτυξη της λειτουργικής κατανόησης, ώστε να καταστεί αργότερα εφικτή η συνέργεια μεταξύ διαφορετικών μορφών κατανόησης. Ευρύτερα, το ίδιο προτείνεται και για την ανάπτυξη της οπτικοποίησης, ώστε να καταστεί αργότερα εφικτή η συνέργεια των διαφορετικών γνωστικών διαδικασιών που απαιτεί η γεωμετρική εργασία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να απαντήσει στα εξής ερωτήματα:

1) Ποιες είναι οι μερεολογικές τροποποιήσεις στις οποίες προέβησαν οι μαθητές πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την παρέμβαση;
2) Ποιοι παράγοντες επηρέασαν την ανάπτυξη του άξονα χώρος-οπτικοποίηση του ΓΧΕ;

Στην έρευνα συμμετείχε ένα τμήμα της ΣΤ΄ τάξης με 22 μαθητές (15 αγόρια, 7 κορίτσια) από εργατική περιοχή της Θεσσαλονίκης. Η έρευνα περιελάμβανε διδακτική παρέμβαση και ημιδομημένες ατομικές συνεντεύξεις με τους μαθητές δύο εβδομάδες πριν και δύο εβδομάδες μετά την παρέμβαση. Τα δεδομένα προέρχονται από παρατηρήσεις από τη διδασκαλία και από συγκεκριμένες ερωτήσεις των συνεντεύξεων, τις 4-Π (Πριν) και 3-Μ και 8-Μ (Μετά). Μεταξύ των δύο έργων μετά την παρέμβαση μεσολαβούσαν 10 ερωτήσεις και υποερωτήσεις, ώστε να ελαχιστοποιείται η επίδραση του ενός έργου στο άλλο. Το ερώτημα και στα τρία έργα ήταν αν το σχήμα 1 έχει μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο εμβαδόν σε σχέση με το σχήμα 2 και γιατί.



Εικόνα 1: Τα σχήματα των ερωτήσεων 4-Π, 3-Μ και 8-Μ

Η 4-Π έχει χρησιμοποιηθεί από τους Michael-Chrysanthou και Gagatsis (2014) και τον Μιχελαράκη (2012) ως έργο λειτουργικής κατανόησης. Στην παρούσα έρευνα, και στα τρία έργα, η μερεολογική τροποποίηση θα μπορούσε να γίνει με υλικό τρόπο (με ψαλίδι) ή γραφικά (με μολύβι) ή με το βλέμμα (συμπεραίνεται από τη λεκτική περιγραφή). Από εκεί και πέρα, οι μαθητές θα μπορούσαν να πουν ότι ένα επιμέρους τμήμα είναι ίσο με κάποιο άλλο ή να περιγράψουν/κάνουν με σαφή και ρητό τρόπο τη μετατόπιση (και περιστροφή ενδεχομένως) του ενός επιμέρους τμήματος προς την κατάλληλη θέση. Σημειώνεται ότι ενώ τα σχήματα δόθηκαν αποτυπωμένα στο χαρτί, οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν το ψαλίδι, μετατρέποντάς τα σε υλικά μοντέλα στο χώρο.

Ο αναφορικός ΓΧΕ

Δεδομένου ότι στην ΣΤ΄ τάξη, πριν την παρέμβαση, οι μαθητές δεν είχαν ασχοληθεί με ανασυνθέσεις σχημάτων, θα έπρεπε να ενεργοποιήσουν γνώσεις από προηγούμενες τάξεις. Εξετάζοντας, λοιπόν, τον αναφορικό ΓΧΕ, στην Ε΄ τάξη με βάση το πρόγραμμα σπουδών επιδιώκεται οι μαθητές: «Να αναγνωρίζουν σχήματα που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος. Να υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλογράμμου και του ορθογώνιου τριγώνου». Περαιτέρω, με βάση το βιβλίο της Ε΄ τάξης, προβλέπεται η σύνθεση σχημάτων με κομμάτια του τάγκραμ (Κεφ. 29) και η ανασύνθεση χαρταετών για τον σχηματισμό ορθογωνίων (Κεφ. 33). Επιπλέον, προβλέπεται η επισημοποίηση συμπερασμάτων για την ανασύνθεση σχημάτων, ως στρατηγικής για τον υπολογισμό εμβαδών με τύπους. Οι τύποι, από την άλλη, εισάγονται από την Δ΄ τάξη και η χρήση τους διευρύνεται στις επόμενες τάξεις.

Σχεδιασμός του κατάλληλου ΓΧΕ

Η παρέμβαση υλοποιήθηκε στο 3ο τρίμηνο, προτού διδαχθεί η Ενότητα της Γεωμετρίας, ώστε να μην είναι γνωστός ο τύπος εμβαδού του γενικού τριγώνου και του τραπεζίου και για να μην επηρεαστούν οι μαθητές από την έμφαση που δίνει το βιβλίο στους τύπους. Στην παρέμβαση ο κάθε μαθητής συμμετείχε συνολικά για επτά διδακτικές ώρες. Σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών, αξιοποιήθηκαν δύο πρωτογενείς πηγές και ένα ιστορικό σημείωμα. Εδώ, εστιάζουμε στην πρώτη πηγή, που ήταν ένα μεταφρασμένο απόσπασμα από το Ε΄ βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου (Ε΄.1-3, Hultsch ed.). Η ιστορική πηγή αξιοποιήθηκε ως μέσο κινητοποίησης των μαθητών, ως μέσο ενεργοποίησης προϋπαρχουσών γνώσεων-ιδιοτήτων του θεωρητικού συστήματος αναφοράς του ΓΧΕ και ως πηγή ενός μαθηματικού προβλήματος.

Στο πρόβλημα, οι μαθητές συνέκριναν τα εμβαδά ισοπεριμετρικών σχημάτων, ώστε να διαπιστώσουν αν όντως ισχύει ο ισχυρισμός του Πάππου ότι το κελί σε σχήμα κανονικού εξαγώνου χωράει περισσότερο μέλι σε σχέση με άλλα σχήματα που καλύπτουν εντελώς το χώρο. Η επίλυση έγινε από τους μαθητές κατά ομάδες, με διαφορετικές μεθόδους: 1) άμεση σύγκριση με τοποθέτηση του ενός σχήματος πάνω στο άλλο και αποκοπή-επικόλληση των περίσσιων τμημάτων, 2) έμμεση σύγκριση με πλακόστρωση ίσων επιφανειών (αντίστροφη αναλογία), 3) καταμέτρηση τετραγωνιδίων με τετραγωνικό πλέγμα φωτοτυπημένο σε διαφάνεια και 4) υπολογισμός με τύπους.

Τα γεωμετρικά σχήματα ήταν κανονικά πολύγωνα με τρεις, τέσσερις και έξι γωνίες, αλλά και μη κανονικά (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο), και για να διευκολυνθούν οι ανασυνθέσεις δόθηκαν κομμένα σε χαρτόνι και χωρίς αριθμητικές ενδείξεις για τα μήκη των πλευρών. [1]

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι αρχικοί προσωπικοί ΓΧΕ των μαθητών στα έργα οπτικοποίησης

Στην 4-Π, οι 13 μαθητές είχαν τον τρόπο θέασης του εφευρέτη-πολυτεχνίτη, αφού έκαναν μερεολογική τροποποίηση και απάντησαν ότι τα δύο σχήματα έχουν ίσο εμβαδόν. Από αυτούς, οι επτά έκαναν ανάλυση με το βλέμμα (μόνο λεκτική περιγραφή και δείξη) και άλλοι έξι χρησιμοποίησαν το μολύβι (γραφική ανάλυση), ενώ κανείς δε χρησιμοποίησε το ψαλίδι (υλική ανάλυση). Σε κάθε περίπτωση, οι τροποποιήσεις που έκαναν αυτοί οι 13 μαθητές συνοδεύονταν και από απλές λεκτικές περιγραφές και επιχειρήματα. Οι μαθητές στις καλύτερες περιπτώσεις αναφέρονταν συνολικά στο επιμέρους κομμάτι του σχήματος 2, αλλά δεν έλειψαν και αναφορές στα τετραγωνίδια αυτού του κομματιού ή μόνο στη γραμμή. Επιπλέον, σε μερικές περιπτώσεις η περιγραφή συνοδεύτηκε και από μέτρηση των στηλών, ώστε να επιβεβαιωθεί ότι το νέο ορθογώνιο έχει ίσο μήκος με το σχήμα 1.

Ο μαθητής Φ π.χ. είπε: «Είναι ίσα. Άμα κόψουμε αυτό [χαράσσει τις ανα-οργανωτικές γραμμές] και μπει εδώ θα βγει ένα ισοδύναμο τετράγωνο με αυτό». Αυτή είναι μια καλή περίπτωση, όπου αναφέρεται μετατόπιση ολόκληρου του επιμέρους σχήματος, αλλά η αναφορά σε τετράγωνο και όχι σε ορθογώνιο είναι ενδεικτική των αδυναμιών κατά τη λεκτική απόδειξη. Η μαθήτρια Ζ, από την άλλη, αν και δεν έκανε αυτό το σφάλμα, αναφέρθηκε στη γραμμή: «Ίσο. [Μετράει αριθμό στηλών] Γιατί αν αυτή τη γραμμή την πάμε εδώ πέρα, θα γίνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο». Ο μαθητής Λ, τέλος, αναφέρθηκε στα τετραγωνίδια, που ονόμασε πλακάκια, επηρεασμένος από άλλη ερώτηση της συνέντευξης: «Νομίζω είναι το ίδιο. Γιατί εδώ πέρα είναι το μισό πλακάκι, οπότε ό,τι μισά πλακάκια έχουν μείνει και τα φέρουμε από εδώ μας κάνουν ένα».

Υπήρχαν, όμως, και τέσσερις μαθητές που απάντησαν ότι τα δύο σχήματα είναι ίσα, χωρίς να προκύπτει με σαφήνεια από τη λεκτική περιγραφή ότι είχαν ανασυνθέσει το σχήμα 2. Τα επιχειρήματά τους αναφέρονταν σε εξωτερικά χαρακτηριστικά των σχημάτων ή στο μήκος των πλευρών και στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Ο μαθητής Γ π.χ. είπε: «Είναι ίσα. Γιατί αυτό είναι ίσιο και αυτό είναι λίγο στραβό και φαίνεται σαν να είναι ίσα, αλλά αυτό είναι στραβό». Τέλος, πέντε μαθητές απάντησαν ότι το σχήμα 1 είναι μεγαλύτερο. Τα επιχειρήματα των τριών από τους πέντε αναφέρονταν σε εξωτερικά χαρακτηριστικά των σχημάτων, ενώ των υπόλοιπων δύο στην ακεραιότητα των τετραγωνιδίων. Ο μαθητής Δ π.χ. απάντησε:

«Μεγαλύτερο. Γιατί έχει όλα τα πλακάκια μέσα σε σχέση με αυτό που δεν τα έχει όλα. Έχει μισά και μερικά».

Η υλοποίηση του κατάλληλου ΓΧΕ: ανασυνθέσεις σχημάτων

Με τη μέθοδο της αποκοπής-επικόλλησης, οι ανασυνθέσεις έγιναν εύκολα και καθορίζονταν από τα περίσσια τμήματα που κάθε φορά προέκυπταν, ανάλογα με τον τρόπο τοποθέτησης του ενός σχήματος πάνω στο άλλο. Στη μέθοδο της πλακόστρωσης, οι μαθητές ανέλυσαν με υλικό τρόπο κάποια σχήματα κατά την κάλυψη της επιφάνειας και τα συνέθεσαν εκ νέου με το βλέμμα όταν καταμετρούσαν τα σχήματα που κάλυψαν την επιφάνεια. Στη μέθοδο της καταμέτρησης τετραγωνιδίων, οι μαθητές προσπάθησαν να ανασυνθέσουν τα επιμέρους τετραγωνίδια που δεν ήταν πλήρη και, αργότερα, ανασύνθεσαν γραφικά ή υλικά ολόκληρα τα υπό μέτρηση σχήματα, π.χ. το εξάγωνο σε ορθογώνια. Τέλος, στη μέθοδο του υπολογισμού με τύπους, οι μαθητές ανασύνθεσαν υλικά κάποια σχήματα, ώστε να προκύψουν νέα σχήματα για τα οποία ο τύπος εμβαδού να είναι διδαγμένος. [1]

Οι προσωπικοί ΓΧΕ των μαθητών στα έργα οπτικοποίησης μετά την παρέμβαση

Στην 3-Μ, 15 μαθητές έκαναν μερεολογική τροποποίηση και απάντησαν ότι τα σχήματα έχουν ίσο εμβαδόν. Από αυτούς, οι τρεις έκαναν ανάλυση με το βλέμμα (μόνο λεκτική περιγραφή και δείξη), άλλοι 11 χρησιμοποίησαν το μολύβι (γραφική ανάλυση), ενώ μία μαθήτρια χρησιμοποίησε το μολύβι και το ψαλίδι (γραφική και υλική ανάλυση). Κατά τη γραφική ανάλυση, εκτός από τη σχεδίαση των ανα-οργανωτικών γραμμών, χρησιμοποιήθηκαν σε κάποιες περιπτώσεις και δύο τεχνικές που δεν είχαν χρησιμοποιηθεί στην 4-Π: η σκίαση επιμέρους σχημάτων και η σχεδίαση βέλους, που συμβόλιζε τη μετατόπιση. Εκτός από τη μερεολογική τροποποίηση, οι αποδείξεις αυτών των 15 μαθητών συνδύαζαν και λεκτικές περιγραφές και επιχειρήματα: αυτά ήταν επίσης βελτιωμένα, καθώς δεν αναφέρονταν πλέον σε μετακίνηση γραμμής, αλλά συνολικά στο επιμέρους σχήμα. Ωστόσο, σε δύο περιπτώσεις, πριν την απόδειξη με μερεολογική τροποποίηση προηγήθηκε αποτυχημένη προσπάθεια για μέτρηση πλευρών ή τετραγωνιδίων και σε άλλη μία περίπτωση η μερεολογική τροποποίηση συνδυάστηκε με επιτυχημένη μέτρηση τετραγωνιδίων.

Επιπλέον, μία μαθήτρια είπε ότι τα σχήματα έχουν ίσο εμβαδόν μετρώντας τετραγωνίδια, χωρίς ανασύνθεση του σχήματος. Από την άλλη, πέντε μαθητές είπαν ότι το σχήμα 1 είναι μικρότερο, γιατί το σχήμα 2 έχει μεγαλύτερες πλευρές ή χωράει περισσότερα τετραγωνάκια· στη δεύτερη περίπτωση, μία μαθήτρια είχε κάνει τη μέτρηση τετραγωνιδίων, ενώ ένας μαθητής απλώς εκτίμησε οπτικά ότι ισχύει. Ο μαθητής Φ π.χ. είπε: «Γιατί, απ' ό,τι βλέπω, αυτή η γραμμή είναι μεγαλύτερη από αυτή και αυτή μεγαλύτερη από αυτή, οπότε αν πολλαπλασιάσουμε, θα βγάλουν μεγαλύτερο αποτέλεσμα». Τέλος, ένας μαθητής απάντησε «δεν ξέρω».

Στην 8-Μ, 18 μαθητές έκαναν μερεολογική τροποποίηση και απάντησαν ότι τα σχήματα έχουν ίσο εμβαδόν. Από αυτούς, τρεις έκαναν ανάλυση με το βλέμμα, άλλοι 14 χρησιμοποίησαν το μολύβι (γραφική ανάλυση), ενώ μία μαθήτρια χρησιμοποίησε το μολύβι και το ψαλίδι (γραφική και υλική ανάλυση). Κατά τη γραφική ανάλυση, εκτός από τη σχεδίαση των ανα-οργανωτικών γραμμών, χρησιμοποιήθηκε σε κάποιες περιπτώσεις και η τεχνική της σχεδίασης βέλους, που συμβόλιζε τη μετατόπιση. Όσο για τις λεκτικές περιγραφές, ήταν και πάλι βελτιωμένες σε σχέση με την 4-Π, καθώς περιγραφόταν σαφέστερα η μετατόπιση του επιμέρους σχήματος. Είναι, επίσης, ενδιαφέρον ότι η μερεολογική τροποποίηση σε καμία περίπτωση δε συνδυάστηκε με άλλες μορφές πειραματισμού, σε αντίθεση με τα άλλα δύο έργα οπτικοποίησης (4-Π, 3-Μ).

Επίσης, σωστά απάντησαν και δύο μαθήτριες μόνο με καταμέτρηση τετραγωνιδίων, χωρίς ανασύνθεση του σχήματος. Από την άλλη, δύο μαθητές απάντησαν εσφαλμένα: ο ένας απάντησε ότι το σχήμα 1 είναι μεγαλύτερο, εκτιμώντας ότι έχει περισσότερα και ολόκληρα τετραγωνάκια, ενώ ο άλλος είπε ότι το σχήμα 1 είναι μικρότερο, έχοντας κάνει λανθασμένη καταμέτρηση τετραγωνιδίων.

Συγκριτικά, 15 μαθητές απάντησαν σωστά και στα δύο έργα (3-Μ, 8-Μ). Από αυτούς, οι 14 έκαναν μερεολογική τροποποίηση και στα δύο, ενώ μία μαθήτρια δεν έκανε μερεολογική τροποποίηση σε κανένα από τα δύο, αλλά μέτρησε τα τετραγωνάκια. Επιπλέον, ένας απάντησε εσφαλμένα και στα δύο, ενώ οι υπόλοιποι έξι απάντησαν με διαφορετικό τρόπο στο κάθε έργο. Τέλος, στην 8-Μ, όπου το σχήμα 2 είναι μεικτόγραμμο, περισσότεροι απάντησαν σωστά (20 έναντι 16), περισσότεροι έκαναν μερεολογική τροποποίηση (18 έναντι 15) και περισσότεροι έκαναν γραφική ή ακόμα και υλική ανάλυση (15 έναντι 12).

Συγκρίνοντας καθένα από αυτά τα δύο έργα με το αντίστοιχο έργο οπτικοποίησης πριν την παρέμβαση, προκύπτει ότι από τους 13 που είχαν κάνει ανάλυση στην 4-Π, οι 12 έκαναν ανάλυση και στην 3-Μ. Επιπλέον, δύο μαθητές απάντησαν εσφαλμένα και στις δύο, ενώ οι υπόλοιποι οκτώ απάντησαν με διαφορετικό τρόπο. Συγχρόνως, προκύπτει ότι στην 3-Μ λιγότεροι μαθητές απάντησαν σωστά (16 έναντι 17), αλλά περισσότεροι έκαναν μερεολογική τροποποίηση (15 έναντι 13) και περισσότεροι έκαναν γραφική ή και υλική ανάλυση (12 έναντι 6). Όσον αφορά τη σύγκριση με το δεύτερο έργο, προκύπτει ότι από τους 13 μαθητές που είχαν κάνει ανάλυση στην 4-Π, οι 12 έκαναν ανάλυση και στην 8-Μ. Επιπλέον, ένας μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο χωρίς να κάνει ανάλυση και άλλος ένας απάντησε εσφαλμένα και στις δύο, ενώ οι υπόλοιποι οκτώ απάντησαν με διαφορετικό τρόπο. Συγχρόνως, προκύπτει ότι στην 8-Μ περισσότεροι μαθητές απάντησαν σωστά (20 έναντι 17), περισσότεροι έκαναν μερεολογική τροποποίηση (18 έναντι 13) και περισσότεροι έκαναν γραφική ή και υλική ανάλυση (14 έναντι 6). Τέλος, 11 μαθητές έκαναν μερεολογική τροποποίηση και στα τρία έργα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στον άξονα χώρος-οπτικοποίηση, ένα έργο εξέταζε στις αρχικές συνεντεύξεις τη λειτουργική κατανόηση (4-Π). Εδώ, το ποσοστό όσων, με ή χωρίς ανάλυση, απάντησαν σωστά ότι τα σχήματα είναι ίσα έφτασε το 77%, ίδιο με αυτό που βρήκε ο Μιχελαράκης (2012) σε μαθητές Β΄ Λυκείου και ελαφρώς υψηλότερο από όσο βρήκαν οι Michael-Chrysanthou και Gagatsis (2014) σε μαθητές 14-16 ετών. Ωστόσο, στην παρούσα έρευνα το ποσοστό όσων έκαναν ανάλυση ήταν 59%˙ εξ αυτών, λίγοι εφάρμοσαν συγχρόνως και μια άλλη στρατηγική. Το ποσοστό αυτό είναι υψηλότερο από αντίστοιχα προγενέστερων ερευνών: στο δείγμα του Μιχελαράκη (2012), 40% είχαν κάνει μόνο ανάλυση και 4% ανάλυση μαζί με άλλες στρατηγικές, ενώ στο δείγμα των Michael-Chrysanthou και Gagatsis (2014) το ποσοστό ήταν 22-24%, αλλά εκεί υπήρχαν και πολλές αναιτιολόγητες απαντήσεις. Επομένως, οι μαθητές της παρούσας έρευνας πριν ξεκινήσει η παρέμβαση είχαν ήδη αρκετά καλή βάση ως προς τις μερεολογικές τροποποιήσεις, αλλά η ανάλυση γινόταν κυρίως με το βλέμμα και τα πειράματα ήταν κυρίως νοητικά.

Κατά την παρέμβαση, όλες οι ομάδες έκαναν αρκετές ανασυνθέσεις, κυρίως υλικές και με χρήση περισσότερων εργαλείων (GI). Οι παράγοντες που διευκόλυναν τις μερεολογικές τροποποιήσεις και την ανάπτυξη του άξονα χώρος-οπτικοποίηση ήταν η υλική μορφή των σχημάτων και τα εργαλεία (ψαλίδι, κόλλα, κολλητική ταινία, διαφάνεια με τετραγωνικό πλέγμα). Αυτά ακριβώς τα υλικά επέτρεψαν και στους πιο αδύναμους μαθητές να συνεισφέρουν κατά τη διαδικασία επίλυσης˙ π.χ. στην ομάδα που εργάστηκε με τύπους η πιο δύσκολη ανασύνθεση του εξαγώνου έγινε από μαθητή που γενικά υστερούσε στα Μαθηματικά.

Στις τελικές συνεντεύξεις, στο καθένα από τα δύο έργα λειτουργικής κατανόησης, περισσότεροι σε σχέση με πριν την παρέμβαση έκαναν μερεολογική τροποποίηση και πολύ περισσότεροι χρησιμοποίησαν μολύβι ή και ψαλίδι (γραφική ή και υλική ανάλυση). Ωστόσο, η βελτίωση ήταν μικρότερη όταν το σχήμα 2 ήταν ευθύγραμμο (3-Μ) και μεγαλύτερη όταν ήταν μεικτόγραμμο (8-Μ). Υπενθυμίζεται ότι και πριν την παρέμβαση (4-Π) το σχήμα 2 ήταν μεικτόγραμμο. Επιπλέον, στην 3-Μ ο αριθμός των σωστών απαντήσεων με ή χωρίς ανάλυση ήταν μικρότερος κατά έναν μαθητή σε σχέση με την 4-Π, ενώ στην 8-Μ αυξήθηκαν και οι συνολικές σωστές απαντήσεις.

Εδώ, θα πρέπει καταρχάς να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι στην 4-Π κάποιοι αναγνώρισαν την ισότητα των σχημάτων χωρίς ανάλυση, αλλά με εσφαλμένα επιχειρήματα. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι έπαιξαν ρόλο τα χαρακτηριστικά των σχημάτων, σε συνδυασμό με τις πρότερες εμπειρίες των μαθητών, όπου κυρίαρχοι ήταν οι τύποι (σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο), αλλά και με τις εμπειρίες από την παρέμβαση, όπου προβλήθηκε και η καταμέτρηση τετραγωνιδίων (διδακτικό συμβόλαιο παρέμβασης). Ειδικότερα, και στα τρία έργα αναφερόταν η λέξη «εμβαδόν», αλλά οι καμπύλες στην 4-Π και στην 8-Μ δε βοηθούσαν τους μαθητές να σκεφτούν με όρους μήκους πλευρών και πολλαπλασιασμού. Αντίθετα, στην 3-Μ τα ευθύγραμμα τμήματα ενίσχυαν και αυτήν την αντιμετώπιση και, ακόμη περισσότερο, την καταμέτρηση τετραγωνιδίων. Άλλωστε, το τραπέζιο είναι μισό εξάγωνο, οπότε οι μαθητές μπορούσαν εύκολα να το συνδέσουν με τις εμπειρίες της παρέμβασης.

Ως προς τη σύγκριση με τις παραπάνω αναφερθείσες προηγούμενες έρευνες, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι οι συνεντεύξεις διευκόλυναν περισσότερο τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν, σε σχέση με τα γραπτά τεστ των άλλων ερευνών. Είναι, όμως, γεγονός ότι και στα τρία έργα της παρούσας έρευνας η ανάλυση δυσχεραινόταν μεν από το ότι ήταν ετερογενής (Duval, 2005), αλλά διευκολυνόταν από το ότι απαιτούνταν μία μόνο διαίρεση και τα επιμέρους σχήματα ήταν αντιληπτικώς συμπληρωματικά, καθώς συνδυάζονταν για να δώσουν ένα ορθογώνιο (Duval, 1995). Συγχρόνως, η ανάλυση διευκολυνόταν από το ότι και τα τρία έργα δεν προϋποθέτουν ιδιαίτερες γεωμετρικές γνώσεις (Duval, 1998). Από την άλλη, στις μεγαλύτερες τάξεις των προγενέστερων ερευνών είναι πολύ ισχυρότερο το διδακτικό συμβόλαιο που απαιτεί αριθμητικές απαντήσεις και χρήση αλγόριθμων.

Ο άξονας χώρος-οπτικοποίηση συνδέεται και με τις διαδικασίες λεκτικής απόδειξης. Στα παραπάνω έργα, οι ανασυνθέσεις συνοδεύονταν και από λεκτικές περιγραφές: αυτές συχνά είχαν σφάλματα και αδυναμίες πριν την παρέμβαση (π.χ. αναφορά σε μετακίνηση της γραμμής), ενώ μετά την παρέμβαση ήταν γενικά βελτιωμένες.

Συμπερασματικά, μετά την παρέμβαση παρατηρήθηκε κάποια βελτίωση στη λειτουργική κατανόηση του σχήματος. Ωστόσο, στην ανάπτυξη του άξονα χώρος-οπτικοποίηση παρεμβαίνουν τα χαρακτηριστικά της κατάστασης και το διδακτικό συμβόλαιο που σχετίζεται με τα διαφορετικά σχήματα, εργαλεία και μορφές πειραματισμού.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη διδακτική παρέμβαση, αλλά και για φωτογραφίες από την εργασία των μαθητών κατά την παρέμβαση, βλ. στο Αναστασιάδης & Νικολαντωνάκης (2014).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναστασιάδης, Μ., & Νικολαντωνάκης, Κ. (2014). Ισοπεριμετρικά σχήματα στο δημοτικό σχολείο: διδασκαλία με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών. *Επιστήμες αγωγής, Θεματικό τεύχος 2014*, 69-91.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 387-424.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland, & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6*, 167-187.

Kuzniak, A. (2015). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-15). Cham: Springer.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. *Relime, 17*(4-I), 165-179.

Μιχελαράκης, Ι. (2012). *Κατανόηση γεωμετρικού σχήματος από μαθητές Β΄ Λυκείου* (Διπλωματική Εργασία). ΕΚΠΑ-Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction, 3*, 39-54.

Van de Walle, J. A., & Lovin, L.-A., H. (2006). *Teaching student-centered mathematics: Grades 3-5*. Boston: Pearson.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΣΕ ΕΝΗΛΙΚΕΣ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΧΟΛΕΙΟ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ

Ανεστάκης Πέτρος & Λεμονίδης Χαράλαμπος
Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
petrosan@hotmail.gr & xlemon@uowm.gr

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές ενήλικων εκπαιδευόμενων ενός Σχολείου Δεύτερης Ευκαιρίας σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης, πριν και μετά από τη διδασκαλία στρατηγικών εκτίμησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι ενήλικες μπορούν να εκτιμήσουν, με πιο συχνή στρατηγική τη στρογγυλοποίηση. Έγινε διαχωρισμός των συμμετεχόντων σε ομάδες ικανοτήτων για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, αφού παρουσιάστηκαν διαφοροποιήσεις ανάλογα με την προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία. Τέλος, γίνεται συζήτηση σχετικά με τις διαφορές που παρατηρήθηκαν στη μάθηση των υπολογιστικών εκτιμήσεων και προτείνεται η ένταξή τους στα προγράμματα αριθμητισμού ενηλίκων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι υπολογιστικές εκτιμήσεις αποτελούν ένα πεδίο μελέτης που απασχολεί τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών, καθώς η βιβλιογραφία ανανεώνεται συνεχώς με νέα ευρήματα. Αναφορικά με τη συμπεριφορά των μαθητών στην εκτίμηση υπολογισμών, οι Tsao & Pan (2011), σε δείγμα 235 μαθητών και μαθητριών Ε’ τάξης Δημοτικού, διαπίστωσαν μια μέτρια επίδοση στο τεστ υπολογιστικών εκτιμήσεων (58,48% επιτυχία γενικά), με σημαντικότερες δυσκολίες στην εκτίμηση με κλάσματα (επιτυχία μόλις 46,63%). Έπειτα, οι Yang & Wu (2012) διερεύνησαν τη σημασία του πλαισίου στα προβλήματα εκτίμησης δίνοντας δύο τεστ σε 198 μαθητές της Β’ Γυμνασίου, ένα με καθαρά αριθμητικά προβλήματα εκτίμησης και ένα με πλαισιωμένα. Οι συμμετέχοντες παρουσίασαν καλύτερες επιδόσεις στα καθαρά αριθμητικά προβλήματα, αφού φαίνεται πως είναι απαιτητική η ερμηνεία και η μετάφραση του πλαισίου σε αριθμητικές παραστάσεις.

Εκτός από τους μαθητές, και οι εκπαιδευτικοί απασχολούν τους ερευνητές. Από τη μια, οι Δεσλή & Ανεστάκης (2014) σε δείγμα 113 υποψήφιων εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης διαπίστωσαν καλή επίδοση (68% επιτυχία γενικά) στις υπολογιστικές εκτιμήσεις με διαφοροποιήσεις ανάλογα με το είδος προβλήματος. Από την άλλη, ο Tsao (2013) αναφέρει χαμηλή-μέτρια επίδοση (65,8%) υποψήφιων εκπαιδευτικών και μια ουδέτερη στάση για τη χρησιμότητα και την ωφέλεια των υπολογιστικών εκτιμήσεων.

Έπειτα, οι έρευνες στον χώρο των ενηλίκων έδειξαν καλύτερη υπολογιστική ικανότητα σε σχέση με την ικανότητα εκτίμησης, καθώς και την επικράτηση της στρογγυλοποίησης ως κυρίαρχη στρατηγική εκτίμησης (Hanson & Hogan, 2000). Οι Lemaire, Arnaud & Lecacheur (2004) διερεύνησαν την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης ενηλίκων και βρήκαν αφενός ποικιλία στρατηγικών ανάλογα με το πρόβλημα και αφετέρου προσαρμογή των ενηλίκων στις απαιτήσεις ακρίβειας. Οι Imbo & LeFevre (2011), τέλος, σε μια διαπολιτισμική έρευνα με Βέλγους και Κινέζους, διαπίστωσαν ότι οι Ασιάτες, παρόλο που ήταν πιο γρήγοροι και ακριβείς, ήταν λιγότερο ευέλικτοι και προσαρμοστικοί στην επιλογή στρατηγικής σε σχέση με τους Βέλγους λόγω διαφορών στις εκπαιδευτικές εμπειρίες και στις στάσεις (οι Ασιάτες προτιμούν την ακρίβεια).

Έχουν, επίσης, πραγματοποιηθεί και πειράματα με διδακτικές παρεμβάσεις με θέμα τις εκτιμήσεις. Οι Star & Rittle-Johnson (2009), για παράδειγμα, ανέφεραν βελτίωση των διαδικαστικών γνώσεων μαθητών που συμμετείχαν σε διδακτική παρέμβαση σχετικά με υπολογιστικές εκτιμήσεις και διαπίστωσαν ότι η σύγκριση στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερη ευελιξία. Βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στις εκτιμήσεις ύστερα από παρέμβαση βρήκαν και οι Mildenhall & Hackling (2012). Ωστόσο, διαπιστώθηκε ταυτόχρονα η πεποίθηση-αντίσταση των μαθητών ότι στα μαθηματικά υπάρχει μόνο μια σωστή απάντηση. Θετική ήταν, τέλος, η εμπειρία της εκπαιδευτικού που συμμετείχε στη διδακτική παρέμβαση, η οποία διεύρυνε την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου: οι εκτιμήσεις είναι χρήσιμες για την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού, όχι μόνο για έλεγχο τυπικών αλγορίθμων (Mildenhall, Hackling & Swan, 2009).

Παρά την υπάρχουσα ερευνητική εμπειρία στον χώρο των εκτιμήσεων, η παρούσα μελέτη στοχεύει στον εμπλουτισμό του χώρου με νέα δεδομένα από την εκπαίδευση ενηλίκων. Σκοπός είναι η διερεύνηση των αλλαγών στις επιδόσεις και τις στρατηγικές ενηλίκων σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Όλοι οι ενήλικες ωφελήθηκαν εξίσου από τη διδασκαλία ή διαπιστώθηκαν διαφορές στη μάθησή τους;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πείραμα έλαβε χώρα σε ένα Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας (ΣΔΕ) της Κεντρικής Μακεδονίας, όπου το μάθημα του αριθμητισμού δίδασκε μια μαθηματικός με μεταπτυχιακό στα θεωρητικά μαθηματικά και τετραετή εμπειρία ως αναπληρώτρια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Συμμετέχοντες. Συμμετείχαν 15 ενήλικες εκπαιδευόμενοι (10 άντρες, 5 γυναίκες) ηλικίας από 19 έως και 65. Εργάζονταν οι έξι, οι οκτώ ήταν άνεργοι και η μία συνταξιούχος. Όλοι είχαν Απολυτήριο Δημοτικού και φοιτούσαν στον Α’ Κύκλο του ΣΔΕ.

Σχεδιασμός του πειράματος. Αρχικά (φάση Ι), ο ερευνητής παρακολουθούσε για πέντε βδομάδες το μάθημα του αριθμητισμού στο ΣΔΕ για πολλούς λόγους. Πρώτον, για να εξοικειωθεί με τους εκπαιδευόμενους. Δεύτερον, για να παρατηρήσει τις πρακτικές διδασκαλίας της μαθηματικού της τάξης. Τρίτον, για να διαπιστώσει εμπειρικά το επίπεδο των εκπαιδευόμενων στα μαθηματικά. Για αυτό, κράτησε σημειώσεις πεδίου με τις δυσκολίες τους.

Έπειτα (φάση ΙΙ), σχεδιάστηκαν φύλλα εργασίας με προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης για να τα χρησιμοποιήσει η μαθηματικός προκειμένου να στηρίξει την πορεία μάθησης και διδασκαλίας των εκτιμήσεων. Αποκλείστηκαν έννοιες δύσκολες, όπως τα κλάσματα, ενώ τα προβλήματα είχαν πλαίσιο από την καθημερινότητα των συμμετεχόντων. Ακόμη, ο ερευνητής επιμόρφωσε τη μαθηματικό που θα υλοποιούσε την πειραματική διδασκαλία (όχι με επίδειξη αλλά με συζήτηση πάνω στα φύλλα εργασίας) σε συγκεκριμένους άξονες: έννοια και χρησιμότητα των εκτιμήσεων, τροχιά διδασκαλίας-μάθησης των υπολογιστικών εκτιμήσεων, κρίσιμες ιδέες και προτάσεις για τη διδασκαλία και στρατηγικές εκτίμησης.

Τέλος (φάση ΙΙΙ), σχεδιάστηκαν τα εργαλεία μέτρησης που ήταν αναγκαία στις συνεντεύξεις των εκπαιδευόμενων για τη μέτρηση των επιδόσεων και των στρατηγικών τους σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Το εργαλείο μέτρησης περιείχε 9 ρεαλιστικά προβλήματα, τέσσερα με προσθετικές καταστάσεις (*π.χ. Ο Ηλίας έχει 50 € στο πορτοφόλι του. Θέλει να πληρώσει 29,75 € για τα κοινόχρηστα του μήνα και 19,65 € για τον λογαριασμού του νερού. Του φτάνουν τα λεφτά;*) και πέντε με πολλαπλασιαστικές (*π.χ. Το σχολείο μας συγκέντρωσε χρήματα για μια εκδήλωση. Και οι 28 μαζί, μαθητές και καθηγητές, έβαλαν από 3 € ο καθένας. Μάζεψαν περισσότερα ή λιγότερα από 90 €;*). Επειδή πραγματοποιήθηκαν δύο συνεντεύξεις, πριν και μετά την πειραματική διδασκαλία, προκειμένου να είναι συγκρίσιμες οι επιδόσεις των συμμετεχόντων πριν και μετά, τα προβλήματα του εργαλείου είχαν τα ίδια αριθμητικά δεδομένα και στους δυο ελέγχους αλλά διέφερε το ρεαλιστικό πλαίσιο της εκφώνησης. Τέλος, σχεδιάστηκε μια εύκολη παραλλαγή του εργαλείου για δυο συμμετέχουσες με δυσκολίες μάθησης. Αυτή η απλούστερη εκδοχή του περιείχε μόνο 6 από τα 9 προβλήματα, τρία με προσθετικές καταστάσεις υπολογισμού και τρία με πολλαπλασιαστικές, με αριθμητικά δεδομένα με μικρή τιμή. Για παράδειγμα, κανένας δεκαδικός δεν ξεπερνούσε το ένα ακέραιο ψηφίο.

Διαδικασία. Η πειραματική διδασκαλία των υπολογιστικών εκτιμήσεων είχε διάρκεια επτά διδακτικών ωρών σε διάστημα τριών βδομάδων (1 φύλλο εργασίας ανά βδομάδα). Η ικανότητα εκτίμησης των εκπαιδευόμενων μετρήθηκε δύο φορές, πριν και μετά από τη διδακτική παρέμβαση, με ατομικές συνεντεύξεις διάρκειας περίπου 15 λεπτών η καθεμιά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

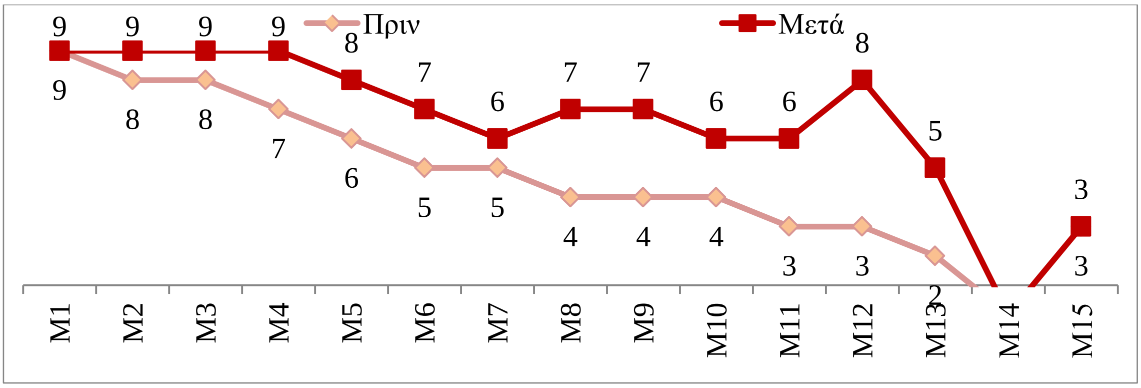
Για την παρουσίαση της συμπεριφοράς των ενηλίκων πριν και μετά από τη μάθηση των στρατηγικών επίλυσης υπολογιστικών εκτιμήσεων έγινε ένας διαχωρισμός του δείγματος σε τρεις ομάδες: στην ομάδα υψηλής επίδοσης, στην ομάδα μέτριας επίδοσης και στην ομάδα χαμηλής επίδοσης.

Στην ομάδα υψηλής επίδοσης ανήκουν τέσσερις εκπαιδευόμενοι που είχαν προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες στις εκτιμήσεις και τους νοερούς υπολογισμούς: μια εκπαιδευόμενη που μετέτρεπε τα μάρκα σε δραχμές ως μετανάστρια στη Γερμανία, ένας εκπαιδευόμενος που δουλεύει σε φούρνο και υπολογίζει τις ποσότητες των συστατικών ανάλογα με το πλήθος ψωμιών που θέλει να βγάλει και δυο τεχνίτες που ασχολούνται με μετρήσεις μηκών και επιφανειών, ο ένας πλακατζής κι ο άλλος τοποθετεί γυψοσανίδες. Επιπλέον, οι εκπαιδευόμενοι αυτοί είχαν ήδη πολύ καλές επιδόσεις στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης, πριν ακόμη από την πειραματική διδασκαλία, με τουλάχιστον 7 σωστές απαντήσεις με νοερή στρατηγική ο καθένας στον έλεγχο πριν (βλ. Μ1-Μ4 στο Σχήμα 1). Μάλιστα, ήταν και οι μόνοι που είχαν άριστη επίδοση (9/9) στον έλεγχο μετά.

Η ομάδα χαμηλής περιλαμβάνει δύο εκπαιδευόμενες (Μ14 & Μ15), οι οποίες είχαν σοβαρές δυσκολίες μάθησης. Οι δυσκολίες αυτές είχαν γίνει αντιληπτές από τον ερευνητή ήδη κατά το στάδιο της προετοιμασίας της έρευνας, επισημάνθηκαν επανειλημμένα από τη μαθηματικό της τάξης και επιβεβαιώθηκαν από την ψυχολόγο του σχολείου, η οποία είπε ότι, αν και δεν έχει γίνει διάγνωση από επίσημο φορέα, αυτές οι δυσκολίες μάθησης συνδυάζονται με προβλήματα χαμηλής αυτοεκτίμησης. Για τις μαθήτριες αυτές χρησιμοποιήθηκε η «εύκολη» παραλλαγή του εργαλείου μέτρησης.

Στην ομάδα μέτριας επίδοσης ανήκουν οι υπόλοιποι εννιά εκπαιδευόμενοι (βλ. Μ5-Μ13 στο Σχήμα 1), οι οποίοι ανέφεραν πως δε χρησιμοποιούν νοερούς υπολογισμούς ή εκτιμήσεις στη δουλειά ή στην καθημερινότητα.

Στο Σχήμα 1 που ακολουθεί παρουσιάζονται συγκεντρωτικά για όλους τους συμμετέχοντες οι σωστές απαντήσεις (πριν και μετά) που δόθηκαν με χρήση νοερής στρατηγικής, δηλαδή είτε με υπολογιστική εκτίμηση, είτε με (ακριβή) νοερό υπολογισμό ή και διαισθητικά. Ο μέγιστος δυνατός αριθμός σωστών απαντήσεων είναι 9 για τους συμμετέχοντες Μ1 με Μ13 και 6 για τις συμμετέχουσες Μ14 και Μ15 που εξετάστηκαν με άλλο εργαλείο.

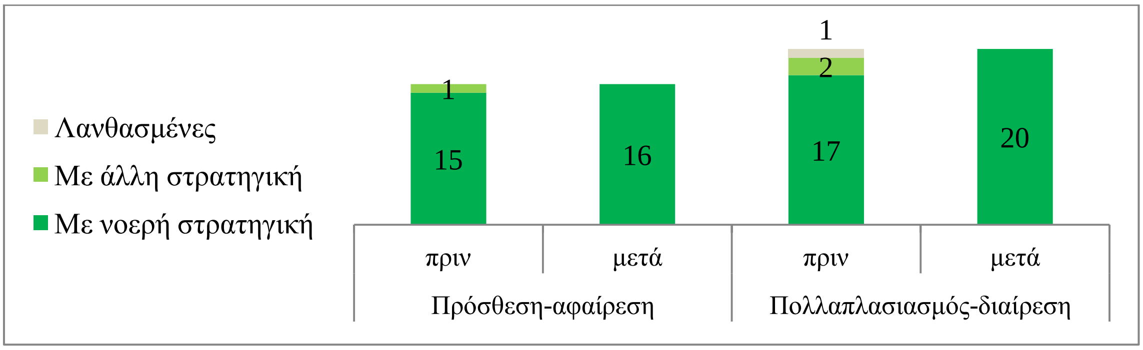


Σχήμα 1: Οι συχνότητες των σωστών απαντήσεων με νοερή στρατηγική ανά εκπαιδευόμενο στους ελέγχους πριν και μετά (max=9 για M1-M13, max=6 για M14-M15)

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά οι στρατηγικές εκτίμησης των συμμετεχόντων με βάση το επίπεδο της επίδοσής τους.

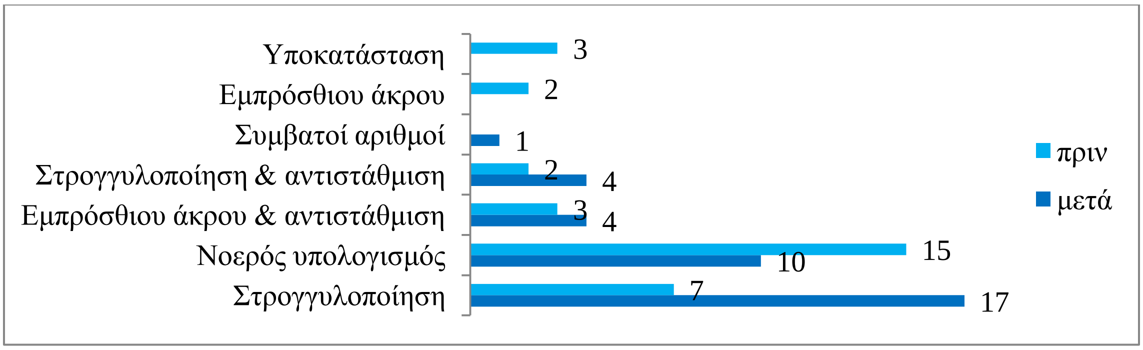
Ομάδα υψηλής επίδοσης

Η ομάδα υψηλής επίδοσης απάντησε με επιτυχία σε όλα τα προβλήματα (βλ. Σχήμα 2) χρησιμοποιώντας κυρίως νοερές στρατηγικές και σπάνια άλλες στρατηγικές, όπως γραπτό αλγόριθμο ή αριθμομηχανή (μόλις 3 τέτοιες απαντήσεις). Το είδος της ζητούμενης πράξης δε φαίνεται να επηρέασε τις απαντήσεις τους. Συνολικά, σημειώθηκε μόνο μία λανθασμένη απάντηση στις δοκιμασίες.



Σχήμα 2: Οι συχνότητες των απαντήσεων των εκπαιδευόμενων με υψηλή επίδοση (N=4) στους ελέγχους πριν και μετά ως προς το είδος της πράξης

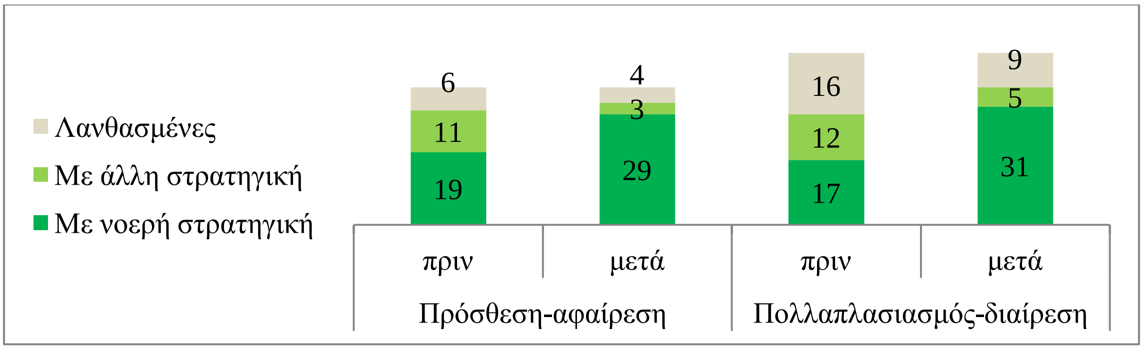
Αναφορικά με τις νοερές στρατηγικές, διαπιστώθηκε ότι στον έλεγχο πριν οι εκπαιδευόμενοι βασίζονταν κυρίως σε νοερούς υπολογισμούς, οι οποίοι είναι ακριβείς και όχι προσεγγιστικοί. Ωστόσο, μετά την πειραματική διδασκαλία, υπερδιπλασιάστηκε η συχνότητα χρήσης της στρογγυλοποίησης και σημειώθηκε με μια μικρή υποχώρηση των νοερών υπολογισμών με ακρίβεια (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Οι συχνότητες των νοερών στρατηγικών των εκπαιδευόμενων με υψηλή επίδοση (N=4) στους ελέγχους πριν και μετά

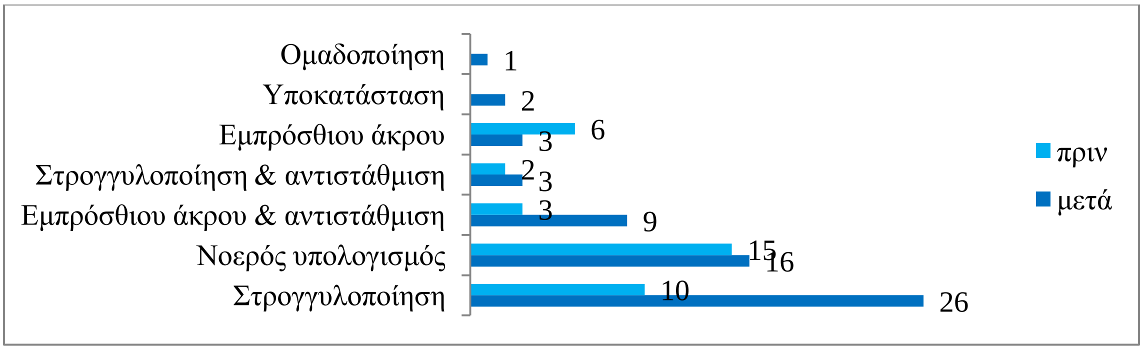
Ομάδα μέτριας επίδοσης

Οι εκπαιδευόμενοι που ανήκουν σε αυτή την ομάδα απάντησαν επιτυχώς στα προβλήματα εκτίμησης, με νοερή ή άλλη στρατηγική, αλλά έκαναν και μερικά λάθη (βλ. Σχήμα 4). Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε δυσκολία στα προβλήματα που απαιτούσαν πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, αφού οι εννιά εκπαιδευόμενοι έδωσαν συνολικά 16 λανθασμένες απαντήσεις στον έλεγχο πριν, σημαντικά περισσότερες από τις 6 λανθασμένες απαντήσεις που έδωσαν στα προσθετικά προβλήματα.



Σχήμα 4: Οι συχνότητες των απαντήσεων των εκπαιδευόμενων με μέτρια επίδοση (N=9) στους ελέγχους πριν και μετά ως προς το είδος της πράξης

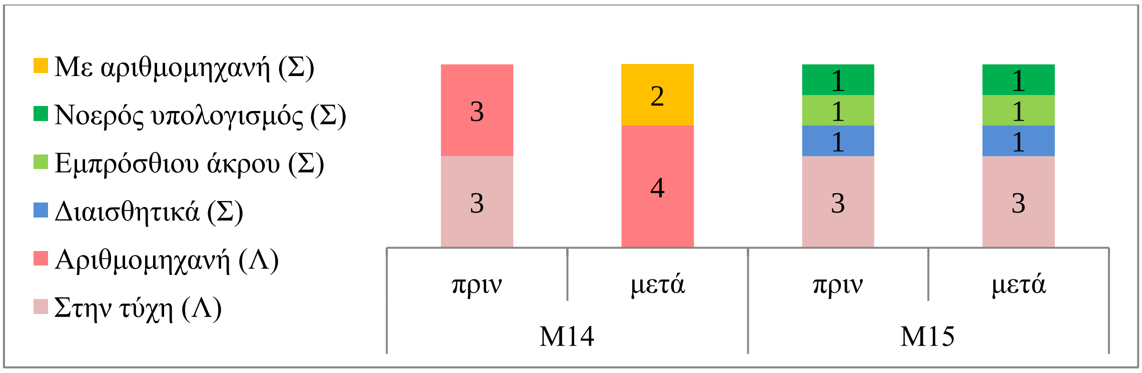
Παρά τις αρχικές δυσκολίες, η διδακτική παρέμβαση φαίνεται πως είχε αποτέλεσμα, γιατί όχι μόνο μειώθηκαν οι λανθασμένες απαντήσεις αλλά και αυξήθηκαν σημαντικά οι σωστές απαντήσεις που βασίζονταν σε νοερές στρατηγικές. Αναλύοντας τις μεταβολές στις συχνότητες των νοερών στρατηγικών μετά από την παρέμβαση, διαπιστώνονται δυο τάσεις. Από τη μία, η συχνότητα χρήσης της στρογγυλοποίησης υπερδιπλασιάστηκε ύστερα από την πειραματική διδασκαλία (βλ. Σχήμα 5). Από την άλλη, αυξήθηκε η συχνότητα χρήσης της στρατηγικής της αντιστάθμισης.



Σχήμα 5: Οι συχνότητες των νοερών στρατηγικών των εκπαιδευόμενων με μέτρια επίδοση (N=9) στους ελέγχους πριν και μετά

Ομάδα χαμηλής επίδοσης

Μέχρι στιγμής διαπιστώθηκε μια τάση αύξησης των απαντήσεων με νοερή στρατηγική και στις δυο προηγούμενες ομάδες, η οποία επιβεβαιώνεται και ατομικά στον κάθε εκπαιδευόμενο, όπως φάνηκε στο Σχήμα 1. Ωστόσο, δεν διαπιστώθηκε παρόμοια τάση στις μαθήτριες με δυσκολίες μάθησης (Μ14-Μ15). Αντίθετα με τον υπόλοιπο πληθυσμό του δείγματος, οι συγκεκριμένες συμμετέχουσες δε χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης ούτε μια φορά (βλ. Σχήμα 6). Ακόμη, παρατηρήθηκε ότι η διδασκαλία των εκτιμήσεων δεν προκάλεσε καμία αλλαγή στη συμπεριφορά τους.



Σχήμα 6: Οι σωστές (Σ) και λανθασμένες (Λ) απαντήσεις των μαθητριών με δυσκολίες μάθησης (Μ14 & Μ15) στους ελέγχους πριν και μετά

Η μία μαθήτρια (Μ14) απάντησε λανθασμένα και στα έξι προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης στον έλεγχο πριν, παρόλο που χρησιμοποίησε την αριθμομηχανή τρεις φορές. Το ίδιο παρατηρήθηκε και στον έλεγχο μετά, αν και απάντησε σωστά σε δυο προβλήματα –σε ένα με προσθετική κατάσταση και σε ένα με πολλαπλασιαστική- με τη χρήση της αριθμομηχανής.

Η άλλη μαθήτρια (Μ15), σε αντίθεση με την προηγούμενη, δεν άγγιξε ούτε την αριθμομηχανή ούτε το μολύβι και το χαρτί. Απαντούσε στην τύχη στα προβλήματα που τη δυσκόλεψαν, ενώ οι σωστές της απαντήσεις ήταν πανομοιότυπες στους δυο ελέγχους. Συγκεκριμένα, παρουσίασε τρεις νοερές στρατηγικές: νοερό υπολογισμό με ακρίβεια, στρατηγική εμπρόσθιου άκρου και διαισθητική απάντηση. Τις δύο πρώτες τις παρουσίασε σε προσθετικά προβλήματα, ενώ την Τρίτη σε πρόβλημα με πολλαπλασιασμό.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα προτείνουν ότι, σε γενικές γραμμές, οι ενήλικες μπορούν να δώσουν απάντηση σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Κυρίαρχη στρατηγική εκτίμησης αναδείχθηκε η στρογγυλοποίηση και στους δυο ελέγχους. Η συχνή χρήση της ίσως οφείλεται στη δυνατότητα γενίκευσής της σε όλες τις καταστάσεις υπολογισμού. Έπειτα, διαπιστώθηκαν διαφορές στις επιδόσεις των ενηλίκων ανάλογα με μια σειρά από παράγοντες.

Πρώτον, οι *προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες* είναι καθοριστικές για την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης, όπως βρήκαν και οι Star, Rittle-Johnson, Lynch & Perova (2009). Η προηγούμενη εμπειρία της ομάδας υψηλής επίδοσης σε εκτιμήσεις μέτρων και σε (ακριβείς) νοερούς υπολογισμούς αποτυπώθηκε στις υψηλές επιδόσεις τους και στις δυο μετρήσεις. Είναι γνωστό ότι επαγγελματίες όπως οι οικοδόμοι, οι πλακατζήδες και όσοι χρησιμοποιούν συστηματικά μετρήσεις παρουσιάζουν μεγάλη ικανότητα εκτίμησης (Λεμονίδης, 2013). Η σχέση αυτή αξίζει να διερευνηθεί περαιτέρω.

Δεύτερον, το *είδος της πράξης* μπορεί να επηρεάσει την επίδοση. Στον έλεγχο πριν, η ομάδα μέτριας επίδοσης έδωσε λιγότερες απαντήσεις με νοερή στρατηγική αλλά και έκανε περισσότερα λάθη στα πολλαπλασιαστικά προβλήματα σε σύγκριση με τα προσθετικά προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με άλλες έρευνες (Tsao, 2013; Bana & Dolma, 2004; Hanson & Hogan, 2000), που αναφέρουν καλύτερη επίδοση σε προσθετικές καταστάσεις εκτίμησης, δεδομένου ότι η ικανότητα εκτίμησης εξαρτάται από την υπολογιστική ικανότητα.

Τρίτον, η ομάδα χαμηλής επίδοσης ίσως υποδεικνύει ότι οι *δυσκολίες μάθησης* μπορεί να οδηγούν σε δυσκολία υπολογιστικής εκτίμησης εξαιτίας μιας μάλλον κακής αίσθησης του αριθμού. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι αναγκαία η διάγνωση των δυσκολιών και ο σχεδιασμός παρεμβάσεων για την ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης και για μια καλή αίσθηση του αριθμού (Gersten, Jordan & Flojo, 2005).

Τέλος, αν και η διδασκαλία ωφέλησε κυρίως την ομάδα μέτριας επίδοσης, προτείνεται η συστηματική διδασκαλία των υπολογιστικών εκτιμήσεων στα προγράμματα αριθμητισμού, μέσα από καταστάσεις εκτίμησης που έχουν νόημα, και όχι η ενσωμάτωσή τους στο αναλυτικό πρόγραμμα με τρόπο επιφανειακό και περιορισμένο, όπως συνέβαινε ως τώρα (Segovia & Castro, 2009), με σκοπό την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού των ενηλίκων και τη βελτίωση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bana, J., & Dolma, P. (2004). The relationship between the estimation and computation abilities of Year 7 students. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematic Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 63-70). Townsville: MERGA.

Δεσλή, Δ., & Ανεστάκης, Π. (2014). Υπολογιστικές εκτιμήσεις και η διδασκαλία τους: επιδόσεις, στρατηγικές και στάσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών. *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early Identification and Interventions for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 293–304.

Hanson, S. A. & Hogan, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 483-499.

Imbo, I., & LeFevre, J.-A. (2011). Cultural differences in strategic behavior: A study in computational estimation. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *37*(5), 1294–1301.

Lemaire, P., Arnaud, L., & Lecacheur, M. (2004). Adults' Age-Related Differences in Adaptivity of Strategy Choices: Evidence From Computational Estimation. *Psychology and Aging*, *19*(3), 467–481.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής: νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Mildenll, P., & Hackling, M. (2012). The Impact of a Professional Learning Intervention Designed to Enhance Year Six Students' Computational Estimation Performance. In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*. Singapore: MERGA.

Mildenhall, P., Hackling, M., & Swan, P. (2009). Computational estimation in the primary school: A single case study of one teache's involvement in a professional learning intervention. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Fremantle: MERGA.

Segovia, I. & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the

University of Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*, *Vol 7*(1), 499-539.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *102*(4), 408–426.

Star, J. R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: the case of computational estimation. *ZDM*, *41*(5), 569–579.

Tsao, Y. L. (2013). Computational Estimation and Computational Estimation Attitudes of Pre-service Elementary Teachers. *US-China Education Review B, 3*(11), 835-846.

Tsao, Y. L., & Pan, T. R. (2011). Study on the Computational Estimation Performance and Computational Estimation Attitude of Elementary School Fifth Graders in Taiwan. *US-China Education Review*, *8*(3), 264-275.

Tsao, Y. L., & Pan, T. R. (2013). The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies*, *11*, 1-15.

Yang, D. C., & Wu, S. S. (2012). Examining the Differences of the 8th-Graders' Estimation Performance Between Contextual and Numerical Problems. *US-China Education Review A, 12*, 1061-1067.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕΣΩ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ‘ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ’

Γεωργία Βαϊτσίδη & Χρυσάνθη Σκουμπουρδή*
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
*kara@rhodes.aegean.gr

Με σκοπό τη διερεύνηση των ικανοτήτων και των στρατηγικών μαθητών 8-9 ετών να συγκρίνουν το μέγεθος δύο επιφανειών μέσω εκτίμησης και μέτρησης με τη χρήση βοηθητικών μέσων πραγματοποιήθηκε έρευνα σε μία τάξη Δ΄ δημοτικού. Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι τα παιδιά της συγκεκριμένης τάξης, στην πλειοψηφία τους, δεν ήταν ιδιαίτερα ικανά στην εκτίμηση και τη μέτρηση εμβαδών. Τα βοηθητικά μέσα που επιλέχτηκαν από τα παιδιά είτε δεν ήταν λειτουργικά για τη μέτρηση του εμβαδού είτε δε χρησιμοποιήθηκαν με τον κατάλληλο τρόπο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του εμβαδού και η μέτρησή του αρχίζει να αναπτύσσεται από την προσχολική ηλικία (ΠΣΝ, 2011). Τα παιδιά, στην ηλικία αυτήν, αντιλαμβάνονται την έννοια του εμβαδού, αλλά δε γνωρίζουν πώς μπορούν να μετρήσουν το μέγεθός του με ακρίβεια. Οι πρώτες τους προσπάθειες για τη μέτρησή του ξεκινάνε με την κάλυψη της επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων (Clements & Stephan, 2004).

Η επιλογή και η χρήση των μέσων που θα διαμεσολαβήσουν για να βρεθεί το μέγεθος της επιφάνειας, καθώς και ο τρόπος διαχείρισής τους προβληματίζει την ερευνητική κοινότητα ως προς τέσσερις κυρίως συνισταμένες (Σκουμπουρδή, 2012), που συσχετίζονται μεταξύ τους: 1. Θα μπορέσουν οι μαθητές να αντιληφθούν το βοηθητικό μέσο ως μονάδα μέτρησης του εμβαδού; 2. Δίνει το μέσο ερεθίσματα για την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης που χαρακτηρίζει το μέγεθος της μονάδας και τον αριθμό των μονάδων που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση; 3. Γίνεται φανερή η δόμηση σχηματισμού με αυτό το μέσο; 4. Μπορεί αργότερα να οδηγήσει, στην επιτυχή μετάβαση, στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού;

Με αφορμή τους παραπάνω προβληματισμούς, πραγματοποιήθηκε έρευνα με σκοπό την ανίχνευση των στρατηγικών παιδιών 8-9 ετών κατά την εκτίμηση και τη σύγκριση εμβαδών, καθώς και των ικανοτήτων τους στη μέτρηση εμβαδών με τη χρήση βοηθητικών μέσων. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν: 1. Είναι ικανά τα παιδιά της Δ’ τάξης να συγκρίνουν το εμβαδόν δύο επιφανειών μέσω εκτίμησης και τι στρατηγικές χρησιμοποιούν; 2. Είναι ικανά τα παιδιά της Δ’ τάξης να μετρήσουν το εμβαδόν επιφανειών με τη χρήση βοηθητικών μέσων για να επιβεβαιώσουν την εκτίμησή τους και τι στρατηγικές χρησιμοποιούν; 3. Ποιό βοηθητικό μέσο επιλέγουν τα παιδιά για τη μέτρηση του εμβαδού; 4. Αντιλαμβάνονται τα παιδιά την ισότητα των δύο εμβαδών και με ποιόν τρόπο;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Από έρευνες έχει φανεί ότι τα παιδιά από μικρά (4-5 ετών) είναι ικανά να συγκρίνουν άμεσα τα εμβαδά δύο σχημάτων (Clements & Stephan, 2004). Τρεις είναι οι κύριες στρατηγικές σύγκρισης δύο ή περισσοτέρων επιφανειών, που χρησιμοποιούν οι μαθητές, σύμφωνα με τις Yuzawa, Bart, Kinne, Sukemune και Kataoka (1999): 1. λαμβάνουν υπόψη τους και τις δύο διαστάσεις του σχήματος, και τα τοποθετούν με παρόμοιο προσανατολισμό στον χώρο. 2. Παρατηρούν μόνο τη μία διάσταση του σχήματος και η σύγκριση του εμβαδού γίνεται με βάση αυτή μόνο τη διάσταση. 3. Δε λαμβάνουν υπόψη τους καμία διάσταση του σχήματος και τα συγκρίνουν χωρίς κάποια συγκεκριμένη διευθέτησή τους στον χώρο.

Όταν δεν είναι δυνατή η άμεση σύγκριση εμβαδών, χρησιμοποιείται η εκτίμηση ως μία κατά προσέγγιση μέτρηση, η εξοικείωση με την οποία καθιστά τον μαθητή πετυχημένο στις μετρήσεις (Muir, 2005). Η απουσία εργαλείων μέτρησης, κατά την εκτίμηση, σημαίνει νοερή ποσοτικοποίηση του προς μέτρηση εμβαδού μέσω της ‘χρήσης’ μιας φανταστικής μονάδας μέτρησης, η οποία επιλέγεται από εκείνον που κάνει την εκτίμηση. Οι Joram, Subrahmanyam και Gelman (1998) αναφέρουν τις τρεις κύριες στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την εκτίμηση: 1. Επανάληψη της μονάδας μέτρησης: νοερός χωρισμός του υπό μέτρηση εμβαδού σε μονάδες και νοερή καταμέτρηση των μονάδων. 2. Σημείο αναφοράς: νοερή σύγκριση του προς μέτρηση εμβαδού με εμβαδόν επιφάνειας που γνωρίζουν. 3. Αποσύνθεση/ Ανασύνθεση: νοερός χωρισμός της επιφάνειας σε μικρότερα οικεία σχήματα και στη συνέχεια χρήση της πρώτης ή της δεύτερης στρατηγικής για την εκτίμηση των επιμέρους τμημάτων. Η διαφορά με τις προηγούμενες δύο είναι ότι το υπό μέτρηση αντικείμενο δεν μπορεί να εκτιμηθεί άμεσα γιατί δεν ευνοεί το σχήμα του.

Η μέτρηση του εμβαδού με διαμεσολάβηση μονάδας μέτρησης, εμπλέκει πέντε θεμελιώδεις έννοιες (Clements & Stephan, 2004): α) τη διαμέριση, β) την επανάληψη της μονάδας, γ) τη διατήρηση, δ) τη δόμηση μιας διάταξης και ε) τη γραμμική μέτρηση. Με τις δύο τελευταίες να επιτυγχάνονται σταδιακά μέσα από επτά στάδια.

Τα αποτελέσματα των ερευνών για τη μέτρηση εμβαδού δείχνουν (Mulligan, Prescott, Mitchelmore & Outhred, 2005˙ Zacharos & Ravanis, 2000) ότι πολλά μικρά παιδιά δεν μπορούν να επικαλύψουν συστηματικά ένα σχήμα ή αν το επικαλύψουν είτε δεν μπορούν να βρουν τον ακριβή αριθμό των μονάδων που χρησιμοποίησαν είτε δεν μπορούν να δηλώσουν πόσο είναι το εμβαδόν του σχήματος. Βέβαια, σε έρευνα στην οποία τα νήπια δούλεψαν σε ομάδες, φάνηκε ότι κατάφεραν και κάλυψαν την επιφάνεια με διακριτό υλικό και να το καταμετρήσουν, άλλοτε με συστηματικό τρόπο που οδηγούσε σε σωστά αποτελέσματα και άλλοτε με μη συστηματικό που οδηγούσε σε διχογνωμίες (Σκουμπουρδή & Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου, 2011). Επίσης, έχει καταγραφεί ότι τα νήπια είναι ικανά να καλύψουν μια ορθογώνια επιφάνεια με γνωστά τους γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τετράγωνα και τρίγωνα), σε ποικίλα μεγέθη, μορφές και τοποθετήσεις, αντιστοιχίζοντάς τα και συνθέτοντάς τα με τον κατάλληλο τρόπο, σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, μέσω παιχνιδιού και να κάνουν συστηματική καταμέτρηση των σχημάτων (Σκουμπουρδή & Μαλαματένιου, 2015).

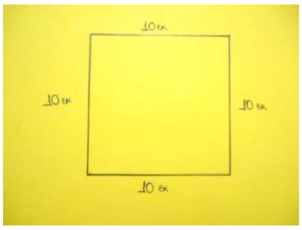
Η μέτρηση εμβαδού, σε άλλη έρευνα (Kilpatrick, et al., 2001), έγινε, από μερικούς μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης, με τη χρήση χάρακα, μέσω της μέτρησης του μήκους. Στις μεγαλύτερες τάξεις, οι μαθητές, τις περισσότερες φορές, διαφοροποίησαν τη μέτρηση του εμβαδού από τη μέτρηση του μήκους και αντιλήφθηκαν την ανάγκη χρήσης συγκεκριμένης μονάδας για το γέμισμα της επιφάνειας. Αντίθετα, οι Mulligan κ.σ. (2005), υποστηρίζουν ότι μαθητές 8-9 ετών, συχνά μπερδεύουν την έννοια της περιμέτρου με αυτή του εμβαδού ακόμη και σε περιπτώσεις που ο μαθηματικός τύπος χρησιμοποιείται σωστά.

Οι δυσκολίες των μαθητών στη μέτρηση του εμβαδού πηγάζουν από τα αναλυτικά προγράμματα, τις οδηγίες των σχολικών εγχειριδίων και τον τρόπο διδασκαλίας, αλλά και από το υλικό που χρησιμοποιείται (Struchens, Martin & Kenney, 2003).

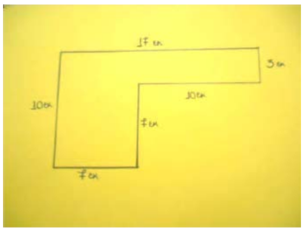
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σχεδιασμός ερευνητικού εργαλείου

Τα σχήματα που σχεδιάστηκαν ήταν ισο-εμβαδικά (100εκ^2), αλλά με διαφορετική περίμετρο (Π1=40εκ. και Π2=54 εκ.), με το πρώτο σχήμα να έχει εσωτερική συμμετρία και το άλλο όχι (Σχήματα 1 και 2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Τα βοηθητικά μέσα που διατέθηκαν στα παιδιά για τη μέτρηση των εμβαδών ήταν ποικίλα και προήλθαν από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας. Συγκεκριμένα: **1.**Ένα ψαλίδι[10]. **2.**Ένας χάρακας[11] των 20εκ, διάσταση μεγαλύτερη από την μεγαλύτερη πλευρά του σχήματος (17cm). **3.**Τετράγωνα χαρτόνια[12] του 1εκ^2 (>200). **4.**Λωρίδες[13] (20) διαστάσεων 1εκx10εκ, διαμερισμένες σε 10 τετράγωνα του 1εκ^2. **5.**Λωρίδες (20) διαστάσεων 1εκx10εκ, μη διαμερισμένες. **6.**Λωρίδες (40) με διαστάσεις 1εκx5εκ, διαμερισμένες σε 5 τετράγωνα του 1 cm^2. **7.**Λωρίδες (40) με διαστάσεις 1εκx5εκ μη διαμερισμένες. **8.** Ποικίλα γεωμετρικά σχήματα[14] όπως τρίγωνα, παραλληλόγραμμα κτλ κατάλληλου μεγέθους και μορφής ώστε να καλύπτουν ακριβώς τα δύο σχήματα.

Περιγραφή έρευνας

Αρχικά, παρουσιάστηκαν τα δύο σχήματα στα παιδιά, με το ακόλουθο σενάριο:

«Ο Δήμαρχος της πόλης της Ρόδου αποφάσισε να χτίσει ένα κλειστό γυμναστήριο για τις βροχερές μέρες. Ζήτησε, λοιπόν, να του φέρουν τα σχέδια δύο οικοπέδων για να αποφασίσει πού θα χτιστεί το γυμναστήριο».

Στη συνέχεια, ρωτήθηκαν τα παιδιά: «Εσύ ποιό από τα δύο οικόπεδα θα διάλεγες αν ήσουν στη θέση του Δημάρχου;»

Ανάλογα με την απάντηση των μαθητών συνεχίσαμε ρωτώντας: «Για ποιό λόγο επέλεξες το συγκεκριμένο οικόπεδο; Είναι πιο μεγάλο αυτό που διάλεξες, πιο μικρό ή ίσο με το άλλο;». Ζητήθηκε από τους μαθητές να εκτιμήσουν τα μεγέθη και να τα συγκρίνουν χωρίς να έχουν στη διάθεσή τους κάποιο βοηθητικό μέσο.

Στην τρίτη φάση της έρευνας, αφήσαμε επάνω στο γραφείο τα διάφορα βοηθητικά μέσα και ζητήσαμε από τους μαθητές να μετρήσουν τα δύο οικόπεδα, με τη βοήθεια κάποιου μέσου, ώστε να επιβεβαιώσουν ή να αναιρέσουν την αρχική τους εκτίμηση.

Δείγμα και συνθήκες πραγματοποίησης της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο του 2014, σε δημόσιο σχολείο σε χωριό της Ρόδου, σε 15 μαθητές (8 κορίτσια και 7 αγόρια), της Δ΄ τάξης. Οι ερωτήσεις απευθύνθηκαν σε κάθε μαθητή χωριστά, με τη μορφή συνέντευξης για την καταγραφή του συλλογισμού του, ενώ οι συνεντεύξεις βιντεοσκοπήθηκαν. Στη συγκεκριμένη τάξη πραγματοποιείται η μετάβαση από την κάλυψη επιφάνειας στην εκμάθηση και χρήση του αλγόριθμου του

[10] Με το ψαλίδι θα μπορούσαν να κόψουν το ένα σχήμα και να διαπιστώσουν αν έχει το ίδιο εμβαδόν με το άλλο εφόσον το χαρτί και το ψαλίδι δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να κόψουν, να μετακινήσουν και να επανα-συγκολλήσουν τα κομμάτια ενός σχήματος για να κατασκευάσουν ένα νέο ισοδύναμο σχήμα (Rahim & Sawoda, 1990). Μέσω δραστηριοτήτων ανακατασκευής σχημάτων γίνεται κατανοητή η αρχή διατήρησης του εμβαδού.

[11] Λόγω του ότι η μέτρηση εμβαδού, γίνεται, από μερικούς μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης, με τη χρήση χάρακα, μέσω της μέτρησης μήκους (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), θέλαμε να παρατηρήσουμε αν θα τον επέλεγαν στη δική μας έρευνα.

[12] Με τα χαρτόνια του 1εκ^2 μπορούν να καλύψουν τα σχήματα και να καταμετρήσουν τις ποσότητες

[13] Οι λωρίδες οι οποίες ήταν οικείες στους μαθητές, ως εικόνες, από το σχολικό εγχειρίδιο της Β' Δημοτικού, γιατί μέσω αυτών είχαν εισαχθεί στην κάλυψη της επιφάνειας, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να καλύψουν τα σχήματα/οικόπεδα.

[14] Τα ποικίλα γεωμετρικά σχήματα, δεν αποτελούν μονάδα μέτρησης, λόγω της διαφορετικότητάς τους, αλλά η σύνθεσή τους για την κάλυψη μιας επιφάνειας είναι οικεία δραστηριότητα στα σχολικά εγχειρίδια.

εμβαδού. Η κάλυψη της επιφάνειας γίνεται με τη χρήση του τετραγωνικού εκατοστού που αποσκοπεί στη δόμηση πλέγματος για την καλύτερη κατανόηση του αλγόριθμου υπολογισμού. Ακόμη, στην τάξη αυτή επιδιώκεται η πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε διαφορετικά πλαίσια καθώς και η επίλυση προβλημάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η καταγραφή και ανάλυση των αποτελεσμάτων βασίστηκε στις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να εκτιμήσουν και να συγκρίνουν το μέγεθος των οικοπέδων, καθώς και στην ανάλυση του τρόπου που χρησιμοποίησαν το μέσο, που επέλεξαν, για να μετρήσουν τα εμβαδά.

Παρόλο που τα παιδιά στην ερώτηση «ποιο από τα δύο οικόπεδα θα επιλέγατε για το χτίσιμο του γυμναστηρίου;», αρχικά, απάντησαν, το ένα από τα δύο (3 μαθητές το 1ο και 12 μαθητές το 2ο) με την αιτιολόγηση «γιατί είναι πιο μεγάλο», στη συνέχεια, μέσω της εκτίμησης και της σύγκρισης, δύο από τα παιδιά (2/15) κατάφεραν να αντιληφθούν ότι τα δύο οικόπεδα έχουν το ίδιο μέγεθος. Οι συγκεκριμένες, στην πρώτη ερώτηση, απάντησαν το 1ο οικόπεδο (γιατί «μου αρέσει περισσότερο») και το 2ο οικόπεδο (χωρίς αιτιολόγηση) αντίστοιχα. Τα υπόλοιπα παιδιά (13/15) συνέχισαν να υποστηρίζουν ότι το ένα οικόπεδο, συνήθως το 2ο, είναι πιο μεγάλο, γιατί: «αυτό είναι πιο ψηλό», «έχει μια πιο ψηλή γραμμή» κτλ ίσως λόγω του ότι οπτικά φαίνεται να εκτίνεται περισσότερο από το πρώτο.

Κατά την εκτίμηση των εμβαδών των οικοπέδων οι μαθητές χρησιμοποίησαν ποικίλες στρατηγικές οι οποίες βρίσκονται σε αντιστοιχία με την κατηγοριοποίηση των Joram κ.σ. (1998). Συγκεκριμένα, εννέα μαθητές (9/15), απάντησαν με *νοερό υπολογισμό* βάση της εικόνας των δύο οικοπέδων, χωρίς να τα αγγίξουν ή να αλλάξουν τον προσανατολισμό τους. Δύο μαθητές (2/15), για να απαντήσουν, χρησιμοποίησαν *την παλάμη* τους και άλλοι δύο (2/15) το *δάχτυλό* τους. Από τους δύο πρώτους ο ένας επέλεξε το 1ο σχήμα ενώ ο άλλος το 2ο. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ανοιχτή την παλάμη τους και την μετακινούσαν μέσα στους δύο χώρους. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το δάχτυλό τους ως μέσο σύγκρισης επέλεξαν το 2ο σχήμα. Ο ένας τοποθέτησε το δάχτυλό του στη μεγαλύτερη πλευρά του δεύτερου σχήματος, θεωρώντας την κριτήριο για την επιλογή του, ενώ ο άλλος το μετακινούσε επαναληπτικά μέσα στα δύο οικόπεδα, σαν μονάδα μέτρησης εμβαδού. Δύο μαθητές (2/15), απάντησαν μέσω *αποσύνθεσης/ ανασύνθεσης του σχήματος* εφόσον έδειξαν με χειρονομίες ότι θα μπορούσαν να κόψουν ένα κομμάτι από το 2ο οικόπεδο για να το τοποθετήσουν κατακόρυφα και να σχηματιστεί το 1ο. Οι μαθήτριες αυτές ήταν και οι μοναδικές που αντιλήφθηκαν την ισότητα των δύο εμβαδών πριν τη χρήση κάποιου βοηθήματος.

Παράλληλα με την εκτίμηση των μεγεθών των δύο οικοπέδων γινόταν και η σύγκρισή τους από τα παιδιά. Στις απαντήσεις τους, με βάση τις κατηγορίες που θέτει η Yuzawa και οι συνεργάτες της (1999): α) Έλαβαν υπόψη και *τις δύο διαστάσεις των οικοπέδων* πέντε μαθητές (5/15). Παρόλο που η συγκεκριμένη προσέγγιση φαίνεται ως ολοκληρωμένη αντίληψη του εμβαδού, τα παιδιά, δεν οδηγήθηκαν, απαραίτητα, σε σωστά συμπεράσματα. Για παράδειγμα, ο μαθητής Μ10 με τη βοήθεια του χάρακα σύγκρινε και μέτρησε μία προς μία τις πλευρές, θεωρώντας τις οριζόντιες πλευρές ως το μήκος των οικοπέδων και τις κατακόρυφες ως το φάρδος των οικοπέδων. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι μαθήτριες οι οποίες αντιλήφθηκαν από την πρώτη φάση την ισότητα των δύο εμβαδών καθώς εξήγησαν ότι το μήκος και το πλάτος των σχημάτων θα είναι τα ίδια αν ανασχηματίσουμε το 2ο οικόπεδο. β) Έλαβαν υπόψη μόνο τη *μία διάσταση των οικοπέδων*, δύο μαθήτριες (2/15), στη μία περίπτωση το μήκος και στην άλλη το πλάτος. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της μαθήτριας Μ5, η οποία με τη βοήθεια του χάρακα μέτρησε τη μία μόνο πλευρά του κάθε οικοπέδου και ανέφερε «Αυτό είναι μέχρι το 17 (μετράει την μία πλευρά του 2ου οικοπέδου) ... και αυτό είναι μέχρι το 10 (μετράει την μία πλευρά του 1ου οικοπέδου). Βλέπουμε ότι αυτό (το 2ο) έχει 7 μέτρα παραπάνω από αυτό (το 1ο).» γ) Δεν έλαβαν υπόψη τους *καμία διάσταση*, οκτώ μαθητές (8/15). Για παράδειγμα, η μαθήτρια Μ6 ανάφερε ότι το τετράγωνο είναι πιο ευρύχωρο σχήμα από το 2ο (συνοδεύοντας τα λόγια της με χειρονομίες), χωρίς κάποια αναφορά στο μήκος ή το πλάτος τους.

Συσχετίζοντας τις απαντήσεις των παιδιών κατά την εκτίμηση και τη σύγκριση των εμβαδών των οικοπέδων, παρατηρήθηκε πως το σύνολο του δείγματος βασίστηκε στην εικόνα των οικοπέδων, χωρίς να προσεγγίσει το θέμα συστηματικά. Βασικό στόχο των παιδιών αποτελούσε η επιβεβαίωση της αρχικής τους εκτίμησης και η επιμονή σε αυτήν. Για τον λόγο αυτό οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν στην αρχή ήταν παρεμφερής με αυτές της επόμενης φάσης. Δηλαδή, τα παιδιά τα οποία κατά την εκτίμηση ακολούθησαν μία ολιστική στρατηγική, κατά τη σύγκριση δεν έλαβαν υπόψη τους καμία διάσταση, εξετάζοντας τα σχήματα συνολικά. Εξαίρεση αποτέλεσαν τρεις μαθητές οι οποίοι ενώ κατά την εκτίμηση αντιμετώπισαν τα δύο σχήματα ολιστικά, στη φάση της σύγκρισης έδωσαν βαρύτητα και στις δύο διαστάσεις των σχημάτων. Αντίστοιχα, αυτά που κατά την εκτίμηση έλαβαν υπόψη μόνο τη μία ή και τις δύο διαστάσεις, το ίδιο έκαναν και κατά τη σύγκριση ακολουθώντας την ανάλογη στρατηγική.

Στην τελική φάση, στην οποία ήταν διαθέσιμα ποικίλα βοηθητικά μέσα για να μπορέσουν τα παιδιά να μετρήσουν το εμβαδόν και να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν την εκτίμησή τους, η επιλογή και η χρήση τους δε έγινε με μεγάλη άνεση. Τα παιδιά δε φάνηκε να είναι εξοικειωμένα με τη χρήση βοηθημάτων και στην αρχή τουλάχιστον ήταν διστακτικά ακόμα και να τα πιάσουν ή να τα χειριστούν με κάποιο τρόπο. Για παράδειγμα, συχνές ήταν οι ερωτήσεις: «Να τα πάρω λίγο αυτά;», «Μπορώ να το γυρίσω λίγο;» κτλ.

Ίσως για αυτόν τον λόγο τα περισσότερα παιδιά (7/15) επέλεξαν τον χάρακα για να μετρήσουν τα οικόπεδα. Η χρήση του περιορίστηκε στη μέτρηση του μήκους της κάθε πλευράς και στον υπολογισμό της περιμέτρου, κάτι που δηλώνει παρανόηση ανάμεσα στις δύο έννοιες (εμβαδόν – περίμετρο). Κάποια παιδιά μάλιστα συνάντησαν δυσκολία στη χρήση του, κάτι που δηλώνει αδυναμία ακόμα και στη μέτρηση του μήκους. Τα παραπάνω επεκτείνουν τα συμπεράσματα ερευνών για τη χρήση του χάρακα από μαθητές 6-8 ετών για τη μέτρηση εμβαδού μέσω της μέτρησης του μήκους (Kilpatrick κ.σ., 2001), αλλά και για το ότι μαθητές 8-9 ετών συχνά μπερδεύουν την έννοια της περιμέτρου με αυτή του εμβαδού (Mulligan κ.σ., 2005).

Οι μη διαβαθμισμένες λωρίδες των 10 εκ. επιλέχθηκαν αυθόρμητα από τέσσερις (4/15) μαθητές. Από αυτούς, μόνο ο ένας (1/15) τις χρησιμοποίησε ως μέσο κάλυψης των δύο επιφανειών. Όλοι οι υπόλοιποι, τις χρησιμοποίησαν είτε ως χάρακα για την μέτρηση και σύγκριση των δύο περιμέτρων, είτε ως μέσο σύγκρισης των πλευρών των δύο οικοπέδων.

Οι διαβαθμισμένες λωρίδες των 10 εκ. επιλέχθηκαν αυθόρμητα από μία μαθήτρια (1/15). Η μαθήτρια τοποθέτησε ίσο αριθμό από λωρίδες στο εσωτερικό των δύο σχημάτων. Όμως, δεν κατέληξε κατευθείαν στο συμπέρασμα περί ισότητας, παρά μόνο μετά την παρότρυνση της ερευνήτριας να τις καταμετρήσει.

Οι διαβαθμισμένες λωρίδες των 5εκ. επιλέχθηκαν αυθόρμητα από μία μαθήτρια (1/15), η οποία τις χρησιμοποίησε ως μέσο κάλυψης των δύο επιφανειών και μάλιστα με αρκετά συστηματικό τρόπο. Παρόλα αυτά φάνηκε να αντιμετωπίζει δυσκολία στη σύγκριση των εμβαδών των οικοπέδων. Μόνο όταν της ζητήθηκε να μετρήσει το εμβαδόν τους μέσω των λωρίδων, καταμέτρησε τις λωρίδες που είχε τοποθετήσει και απέδειξε την ισότητα των εμβαδών των δύο σχημάτων/οικοπέδων.

Τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα επιλέχθηκαν μόνο από μία μαθήτρια (1/15) για την κάλυψη των επιφανειών, η οποία ωστόσο δεν τα χρησιμοποίησε με σωστό τρόπο. Συγκεκριμένα, η μαθήτρια αφού τα τοποθέτησε όλα και στα δύο σχήματα (ίσο αριθμό σχημάτων και στα δύο οικόπεδα), συμπέρανε αυθαίρετα πως είναι ίσα. Παρατηρήθηκε, δηλαδή, πως δεν εφαρμόστηκαν σωστά οι αρχές μέτρησης, καθώς διαπιστώθηκαν τόσο κενά όσο και επικαλύψεις. Ωστόσο, έγινε αντιληπτή η λειτουργία των σχημάτων αυτών ως μέσο κάλυψης.

Τα τετραγωνικά εκατοστά, επιλέχθηκαν από έναν μαθητή ο οποίος τα χρησιμοποίησε μαζί με τις λωρίδες των 10 εκ για τη μέτρηση μήκους, τοποθετώντας τα κατά μήκος των πλευρών. Δεν επεδίωξε τη δημιουργία πλέγματος, στο εσωτερικό των σχημάτων, με τα τετραγωνικά εκατοστά, όπως έκαναν οι μαθήτριες με τις λωρίδες, παρόλο που παρουσιάζεται στα σχολικά τους εγχειρίδια. Η αδυναμία αυτή, σύμφωνα με τους Clements και Stephan (2004), ίσως να δημιουργήσει δυσκολία, αργότερα, στην κατανόηση του μαθηματικού τύπου, ο οποίος βασίζεται σε αυτή τη δόμηση. Βέβαια δεν πρέπει να παραβλέψουμε το γεγονός ότι η αδυναμία αυτή ίσως να οφείλεται στο ότι τα παιδιά δεν κατάφεραν να αντιληφθούν τη μετάφραση της αναπαράστασης (εικόνα τετραγωνικού εκατοστού) σε χειροπιαστό υλικό και άρα μη κατανόηση της λειτουργικότητάς του στη μέτρηση του εμβαδού. Μπορεί όμως να οφείλεται και στο ότι ήθελαν να αποφύγουν τη διαδικασία τοποθέτησης τόσων μονάδων στις επιφάνειες, μια χρονοβόρα και δύσκολη σχετικά διαδικασία.

Τέλος, το ψαλίδι επιλέχθηκε από μία μόνο μαθήτρια (1/15), η οποία από την πρώτη στιγμή που παρατήρησε τα δύο σχήματα ισχυρίστηκε ότι έχουν το ίδιο μέγεθος και το αιτιολόγησε με χειρονομίες. Ζήτησε μάλιστα, από την ερευνήτρια, ένα ψαλίδι για να το αποδείξει, πριν τους δοθούν τα διάφορα βοηθητικά μέσα. Έτσι, με το ψαλίδι έκοψε το δεύτερο σχήμα σε δύο κομμάτια, τα τοποθέτησε επάνω στο πρώτο και το έδειξε στην πράξη. Με αυτόν τον τρόπο αποσύνθεσε το δεύτερο σχήμα και το ανασύνθεσε με βάση το πρώτο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά, της συγκεκριμένης τάξης, δεν ήταν ιδιαίτερα ικανά, να συγκρίνουν το μέγεθος δύο επιφανειών μέσω εκτίμησης και μέτρησης με χρήση βοηθητικών μέσων. Η σύγκριση και η εκτίμηση εμβαδών δεν αποτέλεσε μια αυθόρμητη διαδικασία για τα παιδιά (8-9 ετών). Ακόμα και μετά από παρότρυνση, μόνο δύο παιδιά κατάφεραν να συγκρίνουν αποτελεσματικά τα σχήματα/οικόπεδα μέσω εκτίμησης. Η στρατηγική που χρησιμοποίησαν ήταν της αποσύνθεσης/ανασύνθεσης του σχήματος, δηλαδή αντιλήφθηκαν ολιστικά το σχήμα, μη λαμβάνοντας υπόψη τους συγκριμένη διάσταση.

Η χρήση βοηθητικών μέσων, στην τρίτη φάση, οδήγησε μόνο δύο επιπλέον παιδιά στη σωστή απάντηση. Τα παιδιά επέλεξαν είτε βοηθητικά μέσα που τους ήταν οικεία, αλλά δεν ήταν λειτουργικά για τη μέτρηση του εμβαδού είτε βοηθητικά μέσα τα οποία ήταν λειτουργικά, για τη μέτρηση του εμβαδού, αλλά δε χρησιμοποιήθηκαν με τον κατάλληλο τρόπο. Για παράδειγμα, ο χάρακας, ως οικείο υλικό, τόσο από την καθημερινότητα των παιδιών όσο και από το σχολείο, επιλέχτηκε από τα περισσότερα παιδιά, αλλά ήταν ακατάλληλο εργαλείο για τη συγκεκριμένη μέτρηση. Τα τετραγωνικά εκατοστά δε χρησιμοποιήθηκαν, ως μονάδα μέτρησης, για την κάλυψη των επιφανειών και τη δόμηση σχηματισμού, ενώ οι λωρίδες, με ή χωρίς διαβάθμιση, χρησιμοποιήθηκαν με αυτόν τον τρόπο από ελάχιστα παιδιά. Το ψαλίδι, χρησιμοποιήθηκε αποτελεσματικά από ένα παιδί για την αποσύνθεση και ανασύνθεση του σχήματος προκειμένου να τεκμηριώσει τον συλλογισμό του.

Η διαδικασία της επιλογής του μέσου εκείνου που θα είναι λειτουργικό για τη μέτρηση του εμβαδού, αλλά και της κατάλληλης χρήσης του, είναι μια πολύπλοκη υπόθεση και απαιτεί ταυτόχρονα την καλή γνώση και την εξοικείωση με τη χρήση του μέσου, τη γνώση της μαθηματικής έννοιας και τη συσχέτιση του μέσου με την έννοια. Αν έχει γίνει απόλυτα κατανοητό τι πρέπει να μετρήσω και γνωρίζω πώς θα το μετρήσω, θέτω κάποια κριτήρια επιλογής και χρήσης του μέσου. Αυτό δε φάνηκε να συμβαίνει στην πλειοψηφία των παιδιών της έρευνάς μας.

Τα διάφορα βοηθητικά μέσα επηρεάζουν τον τρόπο δράσης των μαθητών, σε μια δραστηριότητα, καθώς και τον τρόπο αντίληψης μιας μαθηματικής έννοιας. Επιπλέον όμως, οι δράσεις, καθαυτές, των παιδιών με υλικά και άλλα μέσα μπορεί να αποτελέσουν και μία μέθοδο διερεύνησης, από τον εκπαιδευτικό, των δυνατοτήτων τους, των δυσκολιών τους και των εμποδίων που τυχόν αντιμετωπίζουν κατά την οικοδόμηση των εννοιών αυτών. Στη συγκεκριμένη έρευνα, η επιλογή και ο τρόπος χρήσης των βοηθητικών μέσων από τα παιδιά για τη σύγκριση και τη μέτρηση εμβαδών, δίνει σχετικά στοιχεία συνεισφέροντας στον προβληματισμό της ερευνητικής κοινότητας για τον τρόπο αντίληψης της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-k to grade 2 mathematics. In D Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards in early childhood mathematics education* (pp. 105-148). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research* 6, 413-449.

Kilpatrick, J. Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics* (pp. 87-102). Washington DC: National Academy Press.

Mulligan, J.T., Prescott, A., Mitchelmore, M.C. & Outhred, L. (2005). Taking a closer look at young students' images of area measurement. *Australian Primary Mathematics Classroom* 10(2), 4-8.

Muir, 2005). When near enough is good enough: Eight principles for enhancing the value of measurement estimation experiences for students. *Australian Primary Mathematics Classroom* 10(2), 9-14.

ΠΣΝ: *Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου* (2011). Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα. http://www.dipevath.gr/Nov2011/28/1o-meros.pdf

Rahim, M.H. & Sawoda, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology* 21(2), 303-308.

Σκουμπουρδή, Χ. (2012). Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών. Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.

Σκουμπουρδή, Χ. & Μαλαματένιου, Π.-Κ. (2015). Παιχνίδι κάλυψης επιφάνειας για το νηπιαγωγείο. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.) *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 379-392), Ρόδος.

Σκουμπουρδή, Χ. & Παπαϊωάννου-Στραβολαίμου, Δ. (2011). Μέτρηση εμβαδού, από νήπια, μέσω της κάλυψης επιφάνειας με χρήση βοηθητικών μέσων. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών* 5, 39-59.

Struchens, M.E., Martin, W.G. & Kenney, P.A. (2003). What students know about measurement: Perspectives from the NAEP. In D.H. Clements & G. Bright (Eds.) *Learning and teaching measurement* (pp. 197-208). Reston: NCTM.

Yuzawa, M., Bart, W.M., Kinne, L.J., Sukemune, S. & Kataoka, M. (1999). The effect of origami practice on size comparison strategies among Japanese and American children. *Journal of Research in Childhood Education* 13, 133-143.

Zacharos, K. & Ravanis, K. (2000). The transformation of natural to geometrical concepts, concerning children. *European Early Childhood Education Research Journal* 8(2), 63-72.

ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΤΗΝ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΤΑΣΗ ΕΣΤΙΑΣΗΣ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ

Ξένια Βαμβακούση*, Λίνα Βράκα*, Αγγελική Λιολιούση και Jake McMullen**

*Παν/μιο Ιωαννίνων ** Παν/μιο Αθηνών ***University of Turku

xvamvak@cc.uoi.gr, lvraka@outlook.com.gr, ang_lio@yahoo.gr, jamcmu@utu.fi

Παρουσιάζουμε μια έρευνα στην οποία σχεδιάσαμε και δοκιμάσαμε δύο έργα με στόχο την εξέταση της αυθόρμητης (χωρίς καθοδήγηση) τάσης εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων. Στην έρευνα συμμετείχαν 32 παιδιά του Νηπιαγωγείου και της Α΄ τάξης. Σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές ως προς αυτό το χαρακτηριστικό. Συζητάμε τη σημασία των αποτελεσμάτων αυτών για τη μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες.

ΤΑΣΕΙΣ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗΣ ΕΣΤΙΑΣΗΣ

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον για πρώιμους προγνωστικούς παράγοντες της κατανόησης των ρητών αριθμών (π.χ., Jordan κ.ά., 2013). Η *αυθόρμητη τάση εστίασης σε ποσοτικές σχέσεις* φαίνεται να είναι ένας τέτοιος παράγοντας (McMullen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2014).

Προπομπός της έρευνας για αυτήν την τάση είναι η έρευνα για την αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (numerosity) (Hannula, Lepola, & Lehtinen, 2010). Ως τέτοια ορίζεται η τάση (ορισμένων) παιδιών να εστιάζουν την προσοχή τους στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης, χωρίς εξωτερική καθοδήγηση. Σε μια σειρά μελετών, οι Hannula και συνεργάτες έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση αυτή ήδη από την προνηπιακή ηλικία. Επιπλέον, οι διαφορές αυτές στο νηπιαγωγείο προβλέπουν τις αριθμητικές ικανότητες των παιδιών μέχρι και δύο χρόνια αργότερα. Οι Hannula και συνεργάτες εξηγούν αυτό το εύρημα επικαλούμενοι την εξω-σχολική, μη καθοδηγούμενη τριβή με τα αριθμητικά χαρακτηριστικά καθημερινών καταστάσεων, από την οποία επωφελούνται περισσότερο τα παιδιά που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό.

Οι McMullen και συνεργάτες (2014) διερεύνησαν την αντίστοιχη τάση εστίασης σε ποσοτικές σχέσεις, ορίζοντας τις τελευταίες ως «σχέσεις μεταξύ δυο αντικειμένων, συνόλων ή συμβόλων, οι οποίες μπορούν να ποσοτικοποιηθούν ως προς ένα ή περισσότερα μεγέθη» (σελ. 199). Με τον ευρύ αυτό ορισμό, ως ποσοτικές σχέσεις μπορούν να θεωρηθούν, μεταξύ άλλων, οι προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (διακριτών ή συνεχών), ή μεταξύ αριθμών. Οι McMullen και συνεργάτες έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση των παιδιών να εστιάζουν αυθόρμητα, χωρίς καθοδήγηση, σε τέτοιες σχέσεις ήδη στο νηπιαγωγείο. Επιπλέον, αυτές οι ατομικές διαφορές προβλέπουν την επίδοση των παιδιών στα κλάσματα τρία χρόνια αργότερα.

Μια σημαντική πρόκληση σε αυτό το χώρο έρευνας είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων έργων. Τα έργα πρέπει να επιδέχονται αποκρίσεων οι οποίες δε βασίζονται στις υπό μελέτη σχέσεις. Επιπλέον, η προσοχή των παιδιών δεν πρέπει να κατευθύνεται προς τις υπό μελέτη σχέσεις. Τέλος, τα έργα πρέπει να είναι μέσα στις δυνατότητες των παιδιών.

Στην παρούσα έρευνα σχεδιάσαμε και ελέγξαμε δύο έργα που εξετάζουν την αυθόρμητη εστίαση σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Το έναυσμα για τη μελέτη αυτή δόθηκε από έναν περιορισμό της έρευνας των McMullen κ.ά. (2014). Συγκεκριμένα, στα έργα που χρησιμοποίησαν οι ερευνητές αυτοί, η αριθμητικότητα ανταγωνιζόταν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Για παράδειγμα, στο ένα έργο δύο πανομοιότυποι λούτρινοι σκύλοι παρουσιάζονταν στα παιδιά με την πληροφορία ότι είναι φίλοι που θέλουν πάντα να κάνουν τα ίδια ακριβώς πράγματα, και «τώρα θέλουν να φάνε το ίδιο μεζεδάκι». Ο ερευνητής έδινε στο ένα σκυλί το «μεζεδάκι» του, και ζητούσε από το παιδί να κάνει το ίδιο για το άλλο σκυλί. Το «μεζεδάκι» ήταν ένας κυκλικός δίσκος από πλαστελίνη, χωρισμένο σε 2 ίσα μέρη για τον ερευνητή και σε 4 ίσα μέρη για το παιδί. Πολλά παιδιά εστίασαν στο πλήθος των κομματιών, και όχι στο σχετικό μέγεθός τους. Είναι γνωστό ότι, όταν τα παιδιά εξοικειώνονται με την απαρίθμηση, η επίδοσή τους σε έργα όπως αυτό της δίκαιης μοιρασιάς μειώνεται (Resnick & Singer, 1993). Η αριθμητικότητα, δηλαδή, μπορεί να λειτουργεί ως πολύ ισχυρός περισπασμός από τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, κάτι που ενδεχομένως αλλοιώνει τα αποτελέσματα. Επιπλέον, με τέτοιου είδους έργα δεν μπορεί να διαχωριστεί η αυθόρμητη εστίαση στην αριθμητικότητα, από την αυθόρμητη εστίαση σε ποσοτικές σχέσεις, κάτι που θα ήταν χρήσιμο για τη μελέτη της ανάπτυξης των δύο τάσεων και της μεταξύ τους σχέσης.

Επομένως, στόχος μας ήταν ο σχεδιασμός έργων στα οποία η αριθμητικότητα δεν ανταγωνίζεται τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και βασικό μας ερευνητικό ερώτημα ήταν κατά πόσο υφίστανται ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις υπό αυτή τη συνθήκη.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 παιδιά που φοιτούσαν σε ιδιωτικό νηπιαγωγείο των Ιωαννίνων (μέση ηλικία: 5,7 έτη) και 17 παιδιά που φοιτούσαν στην πρώτη τάξη δημόσιου δημοτικού σχολείου (μέση ηλικία: 6,9 έτη) στην περιοχή της Αθήνας.

Ερευνητικά έργα και υλικά

Σχεδιάστηκαν 2 έργα, με 4 δοκιμές το καθένα. Το πρώτο έργο ($Ε_1$) αφορούσε σχέσεις μεταξύ μηκών (1:2, 1:4) και ήταν πλαισιωμένο σε μια ιστορία. Περιληπτικά, το σενάριο ήθελε τον κεντρικό χαρακτήρα (πράσινη νεράιδα/πράσινο ξωτικό) να ετοιμάζει ένα μαγικό φίλτρο. Ένας δευτερεύων χαρακτήρας ανακατεύει τα αντικείμενα που χρειάζεται με άλλα. Υπάρχουν ωστόσο ασπρόμαυρες φωτογραφίες με τα ζητούμενα αντικείμενα από την περσινή χρονιά. Τα παιδιά καλούνταν να εντοπίσουν το ζητούμενο αντικείμενο, με βάση την ασπρόμαυρη φωτογραφία.

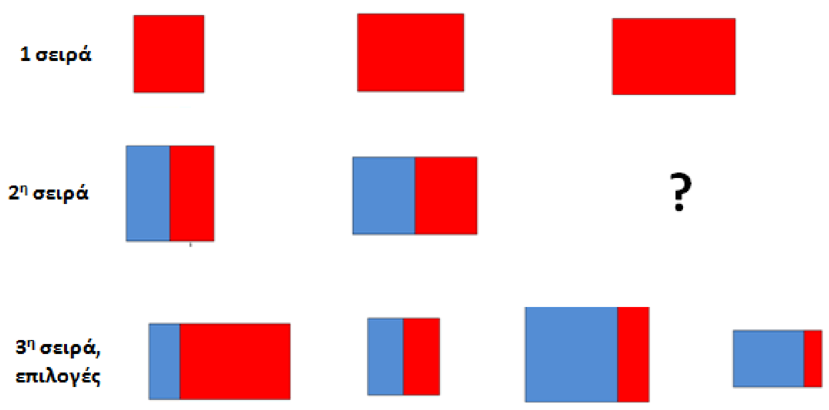
Κατασκευάστηκαν 5 αντικείμενα για την κάθε δοκιμή. Το ένα αντικείμενο λειτουργούσε ως αντικείμενο αναφοράς. Στα υπόλοιπα αντικείμενα, οι δύο διαστάσεις ήταν σταθερές, ενώ η τρίτη (μήκος) μεταβαλλόταν σε σχέση με αυτή του αντικειμένου αναφοράς (βλ. Εικόνα 1 για ένα παράδειγμα). Στη συνέχεια, τραβήχτηκαν ασπρόμαυρες φωτογραφίες του αντικειμένου αναφοράς και του ζητούμενου αντικειμένου για κάθε δοκιμή.

Εικόνα 1: Τα αντικείμενα αναφοράς και επιλογής στην 1η δοκιμή του Έργου 1

Στην 1η δοκιμή (*Συνταγή*), ζητούμενο αντικείμενο ήταν η συνταγή του φίλτρου, σε σχέση 1:2 με το αντικείμενο αναφοράς (το μαγικό ραβδί του χαρακτήρα, βλ. Εικόνα 1). Στη 2η δοκιμή (*Νερό*) ζητούμενο ήταν ένα ποτήρι με νερό πηγής, σε σχέση 1:4 με το δοχείο αναφοράς. Στην 3η δοκιμή, ζητούμενο ήταν ένα ποτήρι με χυμό από άγριο κεράσι, σε σχέση 1:2 με το δοχείο αναφοράς. Στην 4η δοκιμή, ζητούμενο ήταν το κομμάτι από ρίζα βελανιδιάς, σε σχέση 1:4 με το κλαδί αναφοράς.

Το σενάριο της ιστορίας, καθώς και ο ρόλος και τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων επιλογής, δημιουργούν μια ποικιλία παραγόντων στους οποίους ενδέχεται να εστιαστεί η προσοχή των παιδιών, πέραν της υπό μελέτη σχέσης μεταξύ ζητούμενου αντικειμένου και αντικειμένου αναφοράς. Για παράδειγμα, η συμφωνία/ασυμφωνία του χρώματός των αντικειμένων με το αντικείμενο αναφοράς, η ύπαρξη λεπτομερειών σε κάποια από τα αντικείμενα που είναι ελκυστικές στα παιδιά αυτής της ηλικίας (π.χ. κεράσια σε κάποια από τα ποτήρια της 3ης δοκιμής), αλλά και προσδοκίες σχετικά με το ρόλο των αντικειμένων βασισμένες στην εμπειρία (π.χ. οι ρίζες των δέντρων συνήθως απεικονίζονται με χρώμα καφέ).

Το δεύτερο έργο ($Ε_2$) αφορούσε σχέσεις μεταξύ επιφανειών (1:2, 1:4). Ήταν πλαισιωμένο ως επιλογή σχημάτων για την κατασκευή μόμπιλο με γεωμετρικά σχήματα. Για κάθε δοκιμή, υπήρχε μια αρχική σειρά από 3 σχήματα από χαρτόνι, με κόκκινο χρώμα. Για τα δύο πρώτα σχήματα της δεύτερης σειράς, η πειραματίστρια διάλεγε ένα από μια συλλογή τεσσάρων σχημάτων με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε). Η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια του σχήματος ήταν διαφορετική σε κάθε επιλογή. Στην 1η και 3η δοκιμή, η πειραματίστρια διάλεγε τα σχήματα στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια ήταν 1:2, ενώ στην 2η και 4η δοκιμή η σχέση ήταν 1:4. Τα παιδιά καλούνταν να επιλέξουν το τρίτο σχήμα της δεύτερης σειράς, ώστε να ταιριάζει με τα προηγούμενα (βλ. Εικόνα 2 για ένα παράδειγμα από την 3η δοκιμή).



Εικόνα 2: Η 3η δοκιμή του Έργου 2

Όπως και στο $Ε_1$, η επιλογή των παιδιών θα μπορούσε να βασιστεί σε διαφορετικά κριτήρια, πέραν της ζητούμενης σχέσης. Συγκεκριμένα, στην 1η δοκιμή, στα σχήματα που επέλεγε η πειραματίστρια ο προσανατολισμός της νοητής ευθείας που χώριζε τα σχήματα σε δύο μέρη ήταν κατακόρυφος και η μπλε επιφάνεια ήταν τοποθετημένη στα αριστερά. Στη 2η δοκιμή, ο προσανατολισμός ήταν οριζόντιος και η μπλε επιφάνεια ήταν τοποθετημένη στο πάνω μέρος. Στην 3η και 4η δοκιμή, τα σχήματα που επέλεγε η πειραματίστρια είχαν τα εξής χαρακτηριστικά: α) ταίριαζαν ως προς το σχήμα με το αντίστοιχο σχήμα της αρχικής σειράς (π.χ., αν το αρχικό σχήμα ήταν τετράγωνο, η επιλογή ήταν πάλι τετράγωνο), β) ήταν μεγαλύτερης επιφάνειας από το αρχικό σχήμα, γ) το απόλυτο μέγεθος της μπλε επιφάνειας αύξανε από το πρώτο στο δεύτερο σχήμα της δεύτερης σειράς.

Σε όλες τις δοκιμές του $Ε_2$, η επιλογή με βάση τη σχέση που αφηνόταν στο παιδί δεν είχε κανένα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά (βλ. Εικόνα 3).

Διαδικασία

Το κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά, σε γραφείο που βρισκόταν στο χώρο του σχολείου μετά από ενυπόγραφη άδεια από τους γονείς. Η διαδικασία είχε διάρκεια 20-30 λεπτά για κάθε παιδί και βιντεοσκοπήθηκε.

Δε δόθηκε καμία ένδειξη στα παιδιά για το μαθηματικό χαρακτήρα των έργων πριν και κατά τη διάρκεια του πειράματος. Όταν το παιδί έκανε την επιλογή του, η πειραματίστρια του ζητούσε να την εξηγήσει.

Πριν από το Έργο 1, η πειραματίστρια ζητούσε από τα παιδιά να επιλέξουν το χαρακτήρα της ιστορίας που θα ακολουθήσει, παρουσιάζοντας μια ζωγραφιά χρωματισμένη σε τόνους του πράσινου. Πριν από το Έργο 2, η πειραματίστρια παρουσίαζε μια φωτογραφία από ένα μόμπιλο και εξηγούσε πώς φτιάχνεται. Στη συνέχεια, έδειχνε στα παιδιά μια μαύρη κουκκίδα που υπήρχε στα σχήματα του έργου και διευκρίνιζε ότι αυτή η κουκκίδα έπρεπε να βρίσκεται πάντα στο πάνω μέρος του σχήματος, γιατί σε αυτό το σημείο θα περνούσε ο σπάγκος. Η διευκρίνιση αυτή ήταν σημαντική στην 1^{η} και τη 2^{η} δοκιμή του έργου, στις οποίες εμπλεκόταν ο προσανατολισμός.

Μετά το πέρας της διαδικασίας, η πειραματίστρια όρισε ως κριτήριο επιλογής την υπό μελέτη σχέση και ζήτησε από τα παιδιά να επιλέξουν βάσει αυτού του κριτηρίου στις δοκιμές στις οποίες δεν το είχαν κάνει ήδη. Με αυτές τις κατευθυνόμενες δοκιμές θέλαμε να ελέγξουμε κατά πόσο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις υπό μελέτη σχέσεις, εφόσον τους ζητηθεί.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ως αποκρίσεις αυθόρμητης εστίασης στη σχέση (στο εξής, ΑΑΕΣ) θωρήθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών που επέλεξαν το κατάλληλο αντικείμενο, ή που έδωσαν ενδείξεις στην εξήγηση και τη συμπεριφορά τους ότι παρατήρησαν την υπό μελέτη σχέση. Για παράδειγμα, ένα παιδί στη δοκιμή Μόμπιλο 3, αναζητώντας με κριτήριο το σχήμα, είπε «δεν έχει άλλο (*ορθογώνιο*) με μισό μπλε, μισό κόκκινο, γι’ αυτό θα βάλω αυτό που είναι κάπως μισό». Στον Πίνακα 1 εμφανίζονται οι ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Έργο	Δοκιμή (σχέση)	Νηπιαγωγείο (N=15)	1^{η} Τάξη (N=17)
1 (Φίλτρο)	Συνταγή (1:2)	1 6,7%	6 35,3%
	Νερό (1:4)	12 80,0%	12 70,6%
	Χυμός (1:2)	10 66,7%	10 58,8%
	Ρίζες (1:4)	6 40,0%	12 70,6%

2 (Μόμπιλο)	Μόμπιλο 1 (1:2)	11 73,3%	11 64,8%
	Μόμπιλο 2 (1:4)	4 26,7%	4 23,5%
	Μόμπιλο 3 (1:2)	8 53,3%	8 47,1%
	Μόμπιλο 4 (1:4)	7 46,7%	6 35,3%

Πίνακας 1: Συχνότητα και ποσοστά ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Φαίνεται ότι η δοκιμή *Συνταγή* του Έργου 1 απέσπασε με μεγάλη διαφορά τις λιγότερες ΑΑΕΣ, ιδιαίτερα από τα μικρότερα παιδιά. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι η δοκιμή αυτή ακολουθούσε αμέσως μετά την παρουσίαση της ιστορίας και του χαρακτήρα της, ιδιαίτερα της ζωγραφιάς στην οποία ήταν έντονη η διάσταση του χρώματος (πράσινο). Από τις εξηγήσεις των παιδιών φάνηκε ότι αυτό επηρέασε την επιλογή του αντικειμένου (π.χ. «Είναι πράσινο ανοιχτό, όπως τα μαλλιά της νεράιδας»).

Στον Πίνακα 1 φαίνεται να μην υπάρχουν συστηματικές διαφορές μεταξύ των ηλικιακών ομάδων στο Έργο 1. Αντίθετα, στο Έργο 2 τα νήπια έδωσαν πιο συχνά ΑΑΕΣ σε όλες τις δοκιμές. Οι διαφορές ελέγθηκαν με το πιθανολογικό κριτήριο Fisher’s exact test και δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές, για καμία δοκιμή των δύο έργων. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι μη ΑΑΕΣ και για τις δύο ηλικιακές ομάδας μαζί.

Στο Έργο 1, η συχνότερη μη ΑΑΕΣ και στις 4 δοκιμές ήταν η επιλογή της σχέσης που αντιστοιχούσε στο μικρότερο σε μήκος αντικείμενο. Λιγότερο συχνή, αλλά υπαρκτή, ήταν η επιλογή ανάμεσα στα δύο μεγαλύτερα σε μήκος αντικείμενα.

Έργο 1	Συνταγή		Νερό		Χυμός		Ρίζες	
	1:3	22 68,8%	1:8	5 15,6%	1:4	6 18,8%	1:8	7 21,9%
	2:3	2 6,3%	1:2	1 3,1%	2:3	4 12,5%	1:2	5 15,6%
	3:4	1 3,1%	2:3	2 6,3%	3:4	2 6,3%	2:3	2 6,3%
Έργο 2	Μόμπιλο 1		Μόμπιλο 2		Μόμπιλο 3		Μόμπιλο 4	
	1:4*	0 0%	1:8	8 25%	1:4	10 31,3%	1:8	2 6,3%

	1:4**	8 25%	1:2	8 25%	3:4*** (B)	3 9,4%	1:2	11 34,4%
	3:4	2 6,3%	3:4	6 18%	3:4**** (D)	2 6,3%	3:4	5 15,6%
			0	2 6,3%	0	1 3,1%	0	1 3,1%

* Μπλε επιφάνεια στα αριστερά ** Μπλε επιφάνεια στο πάνω μέρος

*** Ορθογώνιο, ίδιο πλάτος με το αρχικό ****Ορθογώνιο, μεγαλύτερο πλάτος από το αρχικό

Πίνακας 2: Συχνότητα και ποσοστά μη ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Από τις 128 συνολικά εξηγήσεις που ζητήθηκαν στο Έργο 1, αξιοποιήσιμες ήταν οι 65 (50,8%). Μη αξιοποιήσιμες ήταν εξηγήσεις του τύπου «Γιατί το βλέπω!». Επί του συνόλου των αξιοποιήσιμων εξηγήσεων, οι 19 (29,2%) αναφέρονταν στα χαρακτηριστικά των αντικειμένων, όπως το χρώμα, τη συμφωνία χρώματος με το αντικείμενο αναφοράς (π.χ. «Γιατί είναι το ίδιο χρώμα όπως το κλαδί»), και το ρόλο τους (π.χ. «Γιατί είναι κόκκινο το φρούτο, το ποτήρι θα πρέπει να είναι κι αυτό κόκκινο». Κοινό χαρακτηριστικό των υπόλοιπων εξηγήσεων ήταν η αναφορά στο μέγεθος των αντικειμένων. Σε ορισμένες (19, 29,2%) απλώς αναφερόταν το μέγεθος (π.χ., «Έχει το ίδιο ύψος με τη φωτογραφία»). Οι εξηγήσεις αυτού του τύπου συνόδευαν τόσο ΑΑΕΣ, όσο και μη ΑΑΕΣ. Σε άλλες αναφερόταν ρητά ως κριτήριο επιλογής το «μικρότερο» αντικείμενο (15, 23,1%) (π.χ., «Γιατί είναι το μικρότερο», «Γιατί είναι πολύ-πολύ μικρό») και συνόδευαν μη ΑΑΕΣ. Τέλος, σε 12 (18,5%) εξηγήσεις, τα παιδιά αναφέρονταν σε σχέσεις, κυρίως ανάμεσα στα 4 αντικείμενα επιλογής (π.χ., «Αυτό είναι πολύ μικρό, τα άλλα είναι πολύ μεγάλα. Αυτό είναι κάπως μεσαίο»). Οι εξηγήσεις αυτές συνόδευαν ΑΑΕΣ.

Όσον αφορά το Έργο 2, στη δοκιμή *Μόμπιλο 1*, η συχνότερη μη ΑΑΕΣ ήταν το σχήμα με τη μπλε επιφάνεια στα αριστερά (1:4), όπως και στα δύο άλλα σχήματα της σειράς. Αντίστοιχα, στο *Μόμπιλο 2*, ένα τέταρτο των παιδιών επέλεξε το σχήμα στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν στο πάνω μέρος (1:2). Ωστόσο, το ίδιο ποσοστό παιδιών επέλεξαν το σχήμα που αντιστοιχούσε στη σχέση 1:8, δηλαδή το σχήμα με τη μικρότερη μπλε επιφάνεια.

Στη δοκιμή *Μόμπιλο 3*, η συχνότερη μη ΑΑΕΣ ήταν το αντικείμενο ίδιου σχήματος και πλάτους με το αρχικό (1:4). Τα ίδια χαρακτηριστικά είχε και η πιο συχνή μη ΑΑΕΣ στο *Μόμπιλο* 4.

Από τις 128 συνολικά εξηγήσεις που ζητήθηκαν στο Έργο 2, αξιοποιήσιμες ήταν οι 56 (43,75%). Επί του συνόλου των αξιοποιήσιμων εξηγήσεων, οι 21 (37,5%) αναφέρονταν στα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους (π.χ., «Είναι τετράγωνο», «Έχει το ίδιο ύψος»). Οι 10 (17,9%) αναφέρονταν στον προσανατολισμό (π.χ. «το μπλε είναι πάνω και το κόκκινο είναι κάτω»). Οι 12 (21,4%) αναφέρονταν στο μέγεθος της μπλε επιφάνειας (π.χ. «έχει πολύ λίγο μπλε»). Τέλος, σε 13 εξηγήσεις (23,2%) αναφέρθηκαν εκφράσεις σχετικές με το μισό για να περιγραφεί η αντίστοιχη σχέση (π.χ. «είναι μισό μπλε, μισό κόκκινο»), οι οποίες προήλθαν από παιδιά του Νηπιαγωγείου.

Στον Πίνακα 3 φαίνεται η κατάταξη των παιδιών, ανάλογα με το πλήθος των ΑΑΕΣ στο σύνολο των δοκιμών κάθε έργου.

Έργο	Πλήθος ΑΑΕΣ							
	0	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
1	2 6,3%	5 15,6%	12 37,5%	12 37,5%	1 3,1%			32 100%
2	5 15,6%	8 25,0%	8 25,0%	9 28,1%	2 6,3%			32 100%
1&2	0 0%	2 6,3%	2 6,3%	7 21,9%	8 25,0%	9 28,1%	4 12,5%	32 100%

Πίνακας 3: Συνολικό πλήθος ΑΑΕΣ ανά έργο, και για τα 2 έργα συνδυαστικά

Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 4 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 3 ΑΑΕΣ είναι οριακά μη τυχαία ($p=0,051$), ενώ η επιλογή 4 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία ($p=0,004$). Από τα στοιχεία του Πίνακα 2 φαίνεται ότι 13 παιδιά (40,6%) και 11 παιδιά (34,4%) έδωσαν τουλάχιστον 3 ΑΑΕΣ στο Έργο 1 και στο Έργο 2, αντίστοιχα.

Εξετάζοντας το πλήθος των ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές των δύο έργων συνολικά, από τον Πίνακα 2 φαίνεται ότι 13 παιδιά (40,6%) έδωσαν τουλάχιστον 5 ΑΑΕΣ. Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 8 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 5 ή 6 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία ($p=0,027$ και $p=0,004$, αντίστοιχα). Θέτοντας τον επιπλέον περιορισμό των τουλάχιστον δύο ΑΑΕΣ σε κάθε έργο ξεχωριστά, 11 παιδιά (34,4%) θεωρήθηκε ότι εστίασαν αυθόρμητα στις σχέσεις 1:2 και 1:4 και στις 8 δοκιμές των δύο έργων.

Σημειώνουμε ότι 29 παιδιά (90,6%) απάντησαν με βάση τις σχέσεις, είτε αυθόρμητα, είτε μετά την καθοδήγηση σε τουλάχιστον 5 από τις 8 δοκιμές, που σημαίνει ότι τα έργα ήταν μέσα στις δυνατότητές τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην έρευνα αυτή σχεδιάσαμε και δοκιμάσαμε δύο έργα με στόχο τη εξέταση της αυθόρμητης εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις μικρές ηλικίες. Από τις επιλογές και τις εξηγήσεις των παιδιών φαίνεται ότι τα έργα είχαν αρκετά εξω-μαθηματικά και μαθηματικά χαρακτηριστικά (π.χ. χρώμα και σχήμα στο E_1 και E_2, αντίστοιχα) που λειτούργησαν ως επαρκής περισπασμός, ώστε οι υπό μελέτη σχέσεις να μην είναι το μοναδικό χαρακτηριστικό της κατάστασης στο οποίο θα μπορούσαν να εστιάσουν τα παιδιά. Κρίνοντας από τα αποτελέσματα, υπάρχουν προσαρμογές που θα γίνουν στα έργα για μελλοντική χρήση. Συγκεκριμένα, η έγχρωμη εικόνα του χαρακτήρα στο E_1 θα αποσυρθεί, καθώς φαίνεται ότι επηρέασε τα παιδιά να επιλέξουν βάσει του χρώματος στην πρώτη δοκιμή, με μεγάλη διαφορά σε σχέση με τα επόμενα. Επιπλέον, δεδομένου ότι τα παιδιά συχνά επέλεξαν το μικρότερο σε μήκος αντικείμενο ή τη μικρότερη μπλε επιφάνεια στα E_1 και E_2, αντίστοιχα, θα ήταν χρήσιμο να υπάρχουν δύο επιλογές, οι οποίες να είναι μικρότερες σε μήκος ή επιφάνεια από το ζητούμενο.

Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στη αυθόρμητη τάση των παιδιών να εστιάζουν σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις (McMullen et al., 2014). Περίπου το ένα τρίτο των παιδιών επέδειξαν αυτό το χαρακτηριστικό συστηματικά στις 8 δοκιμές. Για τα υπόλοιπα παιδιά δεν είναι δυνατόν να αποφανθούμε αν εστίασαν κάποιες φορές στις σχέσεις και κάποιες άλλες όχι, ή αν οι σποραδικές ΑΑΕΣ ήταν τυχαίες. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι υπήρξαν 5 παιδιά (15,6%) τα οποία έδωσαν το πολύ 3 ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές. Κάποια από αυτά έδωσαν εξηγήσεις που έδειχναν ότι εστίαζαν συστηματικά σε άλλα κριτήρια πέραν των υπό μελέτη σχέσεων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτά τα παιδιά συστηματικά *δεν* εστίασαν αυθόρμητα σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Σημειώνουμε ότι, αντίθετα με τα αποτελέσματα των Mc Mullen κ.ά. (2014), δε βρήκαμε διαφορές ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες. Επιπλέον, σε όλες τις δοκιμές του E_2, τα νήπια είχαν περισσότερες ΑΑΕΣ, ενώ χρησιμοποίησαν και εκφράσεις σχετικές με το μισό στις εξηγήσεις τους. Διερευνώντας το υπόβαθρο των παιδιών σχετικά με τα κλάσματα, διαπιστώσαμε ότι τα νήπια είχαν εκτεθεί σε διδασκαλία για το «μισό» αρκετούς μήνες πριν, με το μοντέλο του εμβαδού. Αντίθετα, τα μεγαλύτερα παιδιά δεν είχαν παρόμοιες εμπειρίες. Το εύρημα αυτό δίνει έναυσμα για τη διαμόρφωση μιας υπόθεσης προς μελλοντική διερεύνηση. Πράγματι, μια πιθανή εξήγηση είναι ότι οι εμπειρίες με απλά κλάσματα επηρεάζουν την αυθόρμητη τάση των παιδιών να εστιάζουν στις αντίστοιχες σχέσεις, όταν αυτές εμφανίζονται σε ένα γνώριμο πλαίσιο. Αυτό υποδεικνύει ότι, ενδεχομένως, η υπό μελέτη αυθόρμητη τάση μπορεί να ενισχυθεί στην προσχολική εκπαίδευση, παρόμοια με την αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (Hannula, Mattinen, & Lehtinen, 2005). Περαιτέρω έρευνα προς την κατεύθυνση αυτή θα ήταν χρήσιμη.

Βιβλιογραφία

Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*(1), 45–58.

Hannula, M.M., Lepola, J., & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*, 394–406.

Hannula, M. M., Mattinen, A., & Lehtinen, E. (2005). Does social interaction influence 3 year-old children's tendency to focus on numerosity? A quasi-experimental study in day-care. In L. Verschaffel, E. De Corte, G. Kanselaar, &M. Valcke (Eds.) Powerful learning environments for promoting deep conceptual and strategic learning (pp. 63–80). Leuven, Belgium: Leuven University Press.

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M.M., & Lehtinen, E. (2014). Spontaneous focusing on quantitative relations in the development of children's fraction knowledge. *Cognition and Instruction*, *32*, 198-218.

Resnick, L. B., & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Βλάχος Ιωάννης
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
J_vlh@hotmail.com

Περίληψη: *Η παρούσα εργασία εξετάζει τις αντιλήψεις που σχηματίζουν οι μαθητές Λυκείου για την έννοια του συνόλου, καθώς και τις παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με τις ιδιότητες των συνόλων. Ένα κατάλληλα σχεδιασμένο ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 138 μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου. Τα αποτελέσματα της έρευνας αναλύθηκαν με χρήση του λογισμικού IBM SPSS Statistics 20. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων αναδείχθηκαν 15 διακεκριμένες παρανοήσεις. Η επικρατούσα αντίληψη για την έννοια του συνόλου φάνηκε να είναι αυτή της ομάδας.*

Λέξεις Κλειδιά: *σύνολο, αντιλήψεις, παρανοήσεις, συλλογή, ομάδα*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία συνόλων είναι η βάση των σύγχρονων μαθηματικών. Η σύλληψη της έννοιας σύνολο έχει συνεισφέρει τα μέγιστα στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών και την ανάπτυξη των κλάδων της λογικής και του υπολογιστή, ενώ σημαντικός είναι ο ρόλος της και στη μαθηματική εκπαίδευση (Sirmaci & Tas, 2013). Στα σχολικά μαθηματικά η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια, εν γένει με τρόπο ασυνεπή. Το γεγονός ότι η έννοια γίνεται δεκτή στα μαθηματικά ως πρωταρχική αποτελεί συχνά εμπόδιο για τους μαθητές (Fischbein & Baltsan, 1999).

Η λέξη σύνολο έχει μια διαισθητική σημασία που την κάνει να μοιάζει εύκολη στην κατανόηση και εκμάθηση (Bagni, 2006). Έννοιες της καθομιλουμένης που είναι ήδη γνωστές στους μαθητές και έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές οδηγούν συχνά σε παρανοήσεις. Αντικείμενο της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση των παρανοήσεων των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε σχέση με την έννοια του συνόλου καθώς και της εικόνας που έχουν σχηματίσει για την έννοια αυτή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι μαθητές ξεκινούν να μαθαίνουν χτίζοντας πάνω στις έννοιες που ήδη γνωρίζουν. Μεταξύ αυτών των εννοιών υπάρχουν αυτές που έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές. Η αντίληψη οποιασδήποτε έννοιας με τρόπο αντιφατικό προς την ομόφωνη γνώμη των ειδικών καλείται παρανόηση (Zembat 2008 στο Sirmaci & Tas, 2013). Οι παρανοήσεις είναι πραγματικά επικίνδυνες, δεδομένου ότι επισκιάζουν τις πραγματικές έννοιες που σχετίζονται με το ίδιο φαινόμενο.

Πολλές έννοιες των μαθηματικών συναντώνται εντός ή εκτός μαθηματικού πλαισίου για να οριστούν αργότερα με αυστηρό μαθηματικό τρόπο, αποδίδοντας μια ποικιλία από νοητικές εικόνες στο άκουσμα του ονόματος της έννοιας. Το όνομα μιας έννοιας, όταν το βλέπουμε ή όταν το ακούμε προκαλεί ένα ερέθισμα στη μνήμη μας. Το ερέθισμα αυτό είναι η εικόνα που έχουμε σχηματίσει για την έννοια (Tall & Vinner, 1981).

Η έννοια του συνόλου είναι μια πρωταρχική έννοια. Δεν ορίζεται μέσω ενός αυστηρού ορισμού, αλλά συλλαμβάνεται διαισθητικά σαν μια συλλογή καλά ορισμένων και διακριτών αντικειμένων. Τα σύνολα όμως έχουν ένα πλήθος ιδιοτήτων, ορισμένες από τις οποίες έρχονται σε αντίθεση με εκείνες του διαισθητικού μοντέλου της συλλογής προκαλώντας παρανοήσεις στους μαθητές (Fischbein & Baltsan, 1999).

Οι έρευνα των Linchevski και Vinner (1988) ανέδειξαν τις εξής παρανοήσεις: (α) Τα στοιχεία που περιέχονται σε ένα σύνολο θα πρέπει να διέπονται από κάποια κοινή ιδιότητα. (β) Ένα σύνολο θα πρέπει να περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία. (γ) Επαναλαμβανόμενα στοιχεία θεωρούνται ως διακεκριμένα. (δ) Ένα στοιχείο που ανήκει σε ένα σύνολο δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε άλλα σύνολα. (ε) Δύο σύνολα είναι ίσα αν περιέχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Οι Fischbein και Baltsan (1999) πρόσθεσαν σε αυτές, την παρανόηση ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων, ενώ επιπλέον υποστήριξαν ότι κάθε παρανόηση που σχετίζεται με την έννοια του συνόλου μπορεί να εξηγηθεί αν λάβουμε υπόψη το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής που δρα σιωπηρά και υπόρρητα. Η υπόθεσή μας είναι ότι θα ήταν ασφαλέστερο να θεωρήσουμε το μοντέλο της συλλογής σαν μια πιθανή πτυχή της εικόνας των μαθητών για την έννοια.

Τα διαγράμματα Venn χρησιμοποιούνται ευρέως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση μιας εικόνας για την έννοια του συνόλου. Όταν ένας μαθητής σχεδιάζει μια καμπύλη γραμμή για να θεωρήσει μια συλλογή αντικειμένων στο εσωτερικό της, αντιλαμβάνεται μεταφορικά την οπτική αυτή αναπαράσταση σαν ένα δοχείο. Στα διαγράμματα Venn, τα στοιχεία ενός συνόλου παρουσιάζονται ως σημεία στο εσωτερικό του σχήματος. Αυτή η αναπαράσταση δημιουργεί προβλήματα όταν ένα σύνολο έχει στοιχεία σύνολα. Το να χαράξουμε μια περιοχή μέσα στην αρχική περιοχή θα ήταν παραπλανητικό αφού θα δημιουργούσε σύγχυση της έννοιας του «ανήκει» και του «υποσυνόλου» (Ferro, 1993, σελ. 1086 στο Bagni, 2006).

Στα πεπερασμένα σύνολα, ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολο του. Η γενίκευση αυτής της ιδιότητας στα απειροσύνολα αποτελεί μια συνηθισμένη παρανόηση (Tirosh et al., 2011). Οι Sirmaci και Tas (2013) στην έρευνά τους σε φοιτητές – υποψήφιους δασκάλους της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης έθεσαν το ερώτημα: Είναι το σύνολο των ακεραίων ισοπληθικό με αυτό των αρτίων; Σχεδόν όλοι οι φοιτητές έδωσαν λάθος απαντήσεις στην ερώτηση σχετικά με αυτό το θέμα. Συχνή είναι τέλος, η πεποίθηση ότι για να αποφασίσουμε αν δύο σύνολα είναι ισοπληθικά θα πρέπει να μετρήσουμε τα στοιχεία τους (Tirosh et al., 2011). Η προηγούμενη αντίληψη μπορεί να οδηγήσει τόσο στην παρανόηση ότι δύο απειροσύνολα έχουν πάντοτε το ίδιο πλήθος στοιχείων, όσο και στην παρανόηση ότι οι άρτιοι αριθμοί είναι μισοί από τους ακέραιους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι:

(1) Ποιες αντιλήψεις σχηματίζουν οι μαθητές για την έννοια του συνόλου και τον αντίστοιχο ορισμό της.

(2) Ποιές παρανοήσεις εμφανίζονται μεταξύ των μαθητών του Λυκείου σχετικά με τις ιδιότητες των συνόλων.

Για τους ερευνητικούς μας σκοπούς επιλέξαμε την ποσοτική μεθοδολογία έρευνας. Το δείγμα μας αποτελείται από 78 μαθητές της Α΄ τάξης και 60 της Β΄ τάξης ενός δημόσιου Λυκείου της Αττικής. Τα τμήματα της Β΄ Λυκείου ήταν γενικής παιδείας. Η δειγματοληψία μας ήταν συμπτωματική και η συμμετοχή στην έρευνα εθελοντική και ανώνυμη.

Στους μαθητές δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο που αποτελείτο από 8 ερωτήσεις. Η έρευνα διεξήχθη στον χώρο των μαθητών και διήρκησε μια διδακτική ώρα. Προηγήθηκε πιλοτική έρευνα σε 4 μαθητές της Α΄ Λυκείου και 2 φοιτητές των ΑΤΕΙ Αθηνών. Σκοπός της πιλοτικής έρευνας ήταν η αξιολόγηση των ερωτήσεων ως προς τη σαφήνεια αλλά και ο καθορισμός του απαραίτητου χρονικού περιθωρίου για την ολοκλήρωση του ερωτηματολογίου.

Οι ερωτήσεις 1, 2 και 3 του ερωτηματολογίου σχεδιάστηκαν με πρότυπο το αντίστοιχο ερωτηματολόγιο των Fischbein και Baltsan (1999) τις υποθέσεις των οποίων στόχευαν να εξετάσουν επιπλέον και οι ερωτήσεις 5 και 6 με τρόπο άμεσο. Μέσω της τέταρτης ερώτησης επιχειρήσαμε να ελέγξουμε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τον πληθικό αριθμό απειροσυνόλων. Στην έβδομη ερώτηση εξετάζεται η χρήση των συμβόλων «$\in$» και «$\subseteq$» από τους μαθητές (Bagni, 2006). Τέλος, στην ερώτηση 8 δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να διατυπώσουν έναν δικό τους ορισμό για την έννοια του συνόλου.

Στις ερωτήσεις τύπου «Ναι/Όχι» ή «Σωστό/Λάθος», σωστές θεωρήθηκαν οι σωστές απαντήσεις ακόμη και αν η αιτιολόγηση ήταν λανθασμένη, ελλιπής ή δεν υπήρχε καθόλου. Λάθος θεωρήθηκαν οι απαντήσεις με λανθασμένο χαρακτηρισμό καθώς και οι μη απαντήσεις. Η εξέταση της εμφάνισης των παρανοήσεων έγινε βάση των αιτιολογήσεων που λάβαμε. Στην περίπτωση μη αιτιολόγησης οι τιμές θεωρήθηκαν ελλείπουσες (missing values). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έγινε με το λογισμικό IBM SPSS Statistics 20.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου με τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στην κάθε ερώτηση καθώς και τα ποσοστά που εμφανίστηκαν συγκεκριμένες παρανοήσεις. Τα ποσοστά των παρανοήσεων αναφέρονται μόνο στο σύνολο των απαντήσεων που δόθηκε αιτιολόγηση της απάντησης.

Ερώτηση 1 του ερωτηματολογίου

Μπορεί καθεμιά από τις παρακάτω συλλογές να αποτελέσει σύνολο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α. 2 , 4 , 6 , 8 , 10
β. 2 , 4 , 5 , 8 , 10
γ. Ένα τρίγωνο, ένας κύκλος και ένα τετράγωνο
δ. Ένα τρίγωνο, ένας κύκλος, μια ευθεία, ένα σημείο και ο αριθμός 5

	Σωστό	Εμφάνιση Π1	Εμφάνιση Π7	Missing
1α	99.3%	91.2%		17.4%
1β	44.9%	92.3%		24.6%
1γ	72.5%	93.4%	7.7%	34.1%
1δ	25.4%	92.3%	7.7%	34.1%

Πίνακας 1. Ερώτηση 1, παρανοήσεις Π1 και Π7

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, οι περισσότεροι μαθητές εμφανίζουν την παρανόηση (Π1) ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα. Υπενθυμίζουμε ότι, στην στήλη με την ένδειξη «σωστό» οι μη απαντήσεις θεωρήθηκαν λάθος, ενώ για τον υπόλοιπο πίνακα θεωρούνται ελλείπουσες. Στην ερώτηση (1α) σχεδόν όλοι οι μαθητές απαντούν σωστά παρότι οι περισσότεροι έχουν την εν λόγω παρανόηση. Μια συχνή απάντηση που λάβαμε ήταν η εξής: «Ναι, γιατί είναι όλοι ζυγοί».

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που δεν αναμέναμε είναι ότι ένα σχετικά μικρό ποσοστό μαθητών έχει την παρανόηση (Π7) ότι ένα σύνολο είναι μια συλλογή αριθμών και όχι μια συλλογή αντικειμένων με την ευρεία έννοια. Συγκεκριμένα, ορισμένοι μαθητές δυσκολεύονται να δεχτούν ότι ένα τρίγωνο, ένας κύκλος και ένα τετράγωνο μπορούν να αποτελέσουν σύνολο επειδή τα συγκεκριμένα αντικείμενα δεν είναι αριθμοί. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε ενδεχομένως να εξηγήσει γιατί τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα (1γ) και (1δ) του Πίνακα 1 είναι λίγο χαμηλότερα.

Ερώτηση 2 του ερωτηματολογίου

Ορίζουν οι παρακάτω δηλώσεις ένα σύνολο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

α. Οι λύσεις της εξίσωσης $3+x = 12$.
β. Οι λύσεις της εξίσωσης $0 \cdot x = 5$.
γ. Οι λύσεις της εξίσωσης $0 \cdot x = 0$.
δ. Οι ψηλοί μαθητές της τάξης σας

	Σωστό	Εμφάνιση Π2	Εμφάνιση Π3	Εμφάνιση Π4	Missing
2α	52.9%		48.6%		44.6%
2β	15.9%	84.9%			47.1%
2γ	61.6%			8.6%	58%
2δ	5.8%				

Πίνακας 2. Ερώτηση 2, παρανοήσεις Π2, Π3 και Π4

Οι μισοί περίπου μαθητές έχουν την παρανόηση (Π3) ότι δεν ορίζεται σύνολο με μοναδικό στοιχείο. Ενδεικτικά αναφέρουμε την απάντηση ενός μαθητή στο ερώτημα (2α): «Όχι, γιατί είναι μοναδική». Στο ερώτημα (2β) οι περισσότεροι μαθητές εμφάνισαν την παρανόηση (Π2) ότι δεν ορίζεται σύνολο χωρίς στοιχεία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχε η άποψη ενός μαθητή ο οποίος δήλωσε «όχι, γιατί αποτελεί κενό σύνολο». Ο τελευταίος γνωρίζει την ύπαρξη του κενού αλλά δεν το δέχεται ως σύνολο.

Η παρανόηση (Π4) ότι δεν ορίζονται σύνολα με άπειρα στοιχεία, εμφανίστηκε σε πολύ λίγους μαθητές. Τέλος, το 94.2% των μαθητών απάντησε εσφαλμένα στο ερώτημα (2δ) μέσω του οποίου επιχειρήσαμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται *πότε τα στοιχεία ενός συνόλου είναι καλά ορισμένα*. Αξίζει να αναφερθεί το παράδειγμα ενός μαθητή ο οποίος δήλωσε ότι «δεν μπορώ να απαντήσω καθώς δεν γνωρίζω από ποιο ύψος και πάνω». Ο συγκεκριμένος είναι και ο μόνος που παρείχε μια σωστή και παράλληλα ορθά τεκμηριωμένη απάντηση.

Ερώτηση 3 του ερωτηματολογίου

Είναι τα σύνολα $\{1,2,3\}$ και $\{3,2,1\}$ ίσα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Σωστό	Εμφάνιση Π5	Εμφάνιση Π8	Εμφάνιση Π9	Missing
88.4%	3%	6.1%	5.1%	28.3%

Πίνακας 3. Ερώτηση 3, παρανοήσεις Π5, Π8 και Π9

Με το παραπάνω ερώτημα εξετάζεται η παρανόηση (Π9) ότι ένα σύνολο είναι μια διατεταγμένη ν-άδα. Η εν λόγω παρανόηση εμφανίστηκε μόλις στο

5,1% των μαθητών που αιτιολόγησαν την απάντησή τους. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την απάντηση ενός μαθητή: «Όχι, δεν είναι ίσα διότι υπάρχει λάθος σειρά».

Ένα μικρό ποσοστό μαθητών εμφάνισε την παρανόηση (Π5) ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Επιπλέον, από τους μαθητές που επιχείρησαν να δώσουν κάποια αιτιολόγηση, το 6,1% είχε την παρανόηση (Π8) ότι ένα σύνολο είναι μια διαδικασία ή το αποτέλεσμα μιας πράξης. Στην ουσία η τελευταία παρανόηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως δύο διακεκριμένες (το σύνολο ως διαδικασία και το σύνολο ως αποτέλεσμα). Εντούτοις, επειδή κατά τον σχεδιασμό της έρευνας δεν είχαμε προβλέψει την εμφάνιση των συγκεκριμένων παρανοήσεων δεν υπήρχαν ερωτήσεις που να στοχεύουν στην ανάδειξή τους έτσι δεν ήταν σε κάθε περίπτωση καθαρό ποιά από τις δύο εμφανιζόταν.

Άξιο αναφοράς είναι το παράδειγμα ενός μαθητή ο οποίος έγραψε: «Τα σύνολα είναι ίσα διότι αν προστεθούν βγάζουν τον ίδιο αριθμό». Να θυμίσουμε εδώ ότι στα Ελληνικά η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται συχνά στην καθομιλουμένη ως άθροισμα. Όταν για παράδειγμα θέλουμε να πληρώσουμε σε ένα εστιατόριο, δεν λέμε συνήθως «πόσο είναι το άθροισμα» αλλά «πόσα είναι στο σύνολο».

Ερώτηση 4 του ερωτηματολογίου

Συγκρίνετε ως προς το πλήθος των στοιχείων τους, το σύνολο των φυσικών αριθμών με αυτό των άρτιων αριθμών.

Σωστό	Εμφάνιση Π10	Εμφάνιση Π11	Εμφάνιση Π12	Missing
5.1%	7%	16.3%	19.8%	37.7%

Πίνακας 4. Ερώτηση 4, παρανοήσεις Π10, Π11 και Π12

Οι τρεις παρανοήσεις που υποθέσαμε ότι θα εμφανιστούν σε αυτό το σημείο είναι, η παρανόηση *(Π10) ότι δύο απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων*, η παρανόηση *(Π11) ότι οι άρτιοι αριθμοί (θετικοί) είναι οι μισοί από τους φυσικούς αριθμούς* και η παρανόηση *(Π12) ότι ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του*. Η ερώτηση είναι φυσικά πολύ απαιτητική για μαθητές Λυκείου, δεδομένου ότι η έννοια του πληθαρίθμου δεν διδάσκεται καθόλου στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ενδεικτικά αναφέρουμε τις απαντήσεις ορισμένων μαθητών που εμφανίζουν αντίστοιχα μια από τις παραπάνω παρανοήσεις: «Είναι το ίδιο πλήθος, άπειροι και οι δύο», «Οι άρτιοι είναι οι μισοί από τους φυσικούς», «Το σύνολο των φυσικών είναι σαφώς μεγαλύτερο γιατί περιέχει και το σύνολο των αρτίων».

Κάποιες απαντήσεις των μαθητών ήταν πιο προβληματικές από ότι θα αναμέναμε. Ορισμένοι μαθητές για παράδειγμα δήλωσαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι 10 στο πλήθος θεωρώντας ότι το σύνολο των φυσικών είναι το {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ενώ κάποιοι δήλωσαν ότι οι φυσικοί είναι κατά 5 περισσότεροι από τους άρτιους υπονοώντας ότι οι άρτοι είναι το σύνολο {0,2,4,6,8}.

Ερώτηση 5 του ερωτηματολογίου

Πιστεύετε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να μοιράζονται κάποια κοινή ιδιότητα;

Σωστό	Εμφάνιση Π1	Missing
23.2%	74.8%	5.1%

Πίνακας 5. Ερώτηση 5, παρανόηση Π1

Με το συγκεκριμένο ερώτημα εξετάζουμε την εμφάνιση της παρανόησης (Π1) περί κοινής ιδιότητας των στοιχείων ενός συνόλου. Το 94,1% απαντά στην συγκεκριμένη ερώτηση, ενώ από αυτούς το 74,8% εμφανίζει την εν λόγω παρανόηση. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματά μας ως τώρα, η συγκεκριμένη παρανόηση είναι αυτή που εμφανίζεται συχνότερα μεταξύ των μαθητών.

Τα συμπεράσματα από την πέμπτη ερώτηση του ερωτηματολογίου συμφωνούν με εκείνα των ερωτημάτων της πρώτης, ωστόσο η υπόθεση περί συσχέτισης τους δεν μπόρεσε να επαληθευτεί (Ο συντελεστής συσχέτισης Pearson ήταν της τάξης του 1.5-1.8 σε κάθε περίπτωση ενώ η τιμή p ήταν μεγαλύτερη από 0.05) στερώντας μας τη δυνατότητα να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα.

Ερώτηση 6 του ερωτηματολογίου

Μπορεί ένα στοιχείο να ανήκει σε παραπάνω από ένα σύνολα; Δώστε ένα παράδειγμα.

Σωστό	Εμφάνιση Π6	Missing
85.5%	9.2%	5.8%

Πίνακας 6. Ερώτηση 6, παρανόηση Π6

Η παρανόηση *(Π6)* που σχετίζεται με αυτό το ερώτημα είναι ότι *ένα στοιχείο που ανήκει σε ένα σύνολο, δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε άλλο σύνολο*. Αυτό που φαίνεται από την έρευνά μας είναι πως η συγκεκριμένη παρανόηση υπάρχει σε ελάχιστους μαθητές κάτι που είναι άλλωστε αναμενόμενο αν σκεφτεί κανείς πως η τάση των μαθητών είναι να χρησιμοποιούν τα διαγράμματα Venn για να εξάγουν τα συμπεράσματα τους.

Ακόμη όμως και οι μαθητές που δεν χρησιμοποίησαν διαγράμματα Venn δεν δυσκολεύονταν να βρουν ένα παράδειγμα για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικά παραδείγματα: «Το 2 ανήκει και στους άρτιους και στους φυσικούς αριθμούς», «Για παράδειγμα στα σύνολα {1,2,3,4,5,6} και {2,4,6,8,10}, το 2 και το 4 ανήκουν και στα δύο», «Ένα αγόρι από την τάξη που φοράει γυαλιά ανήκει και στα αγόρια της τάξης και σε αυτούς που φορούν γυαλιά», «Ο Messi παίζει και στη Barcelona και στην Αργεντινή».

Ερώτηση 7 του ερωτηματολογίου

Χαρακτηρίστε τα παρακάτω ως «σωστά» ή «λάθος».

α. $\{1\} \in \{1,2,3,4,5\}$
β. $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
γ. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
δ. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Εμφάνιση Π13	Εμφάνιση Π14	Εμφάνιση Π15
44.9%	50%	33.3%

Πίνακας 7. Ερώτηση 7, παρανοήσεις Π13, Π14, Π15

Οι παρανοήσεις που εμφανίστηκαν εδώ ήταν οι εξής: Ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του (Π13), ταύτιση των συμβόλων $\subseteq$ και $\in$ (Π14) και τέλος ότι $\{\emptyset\} = \emptyset$ (Π15).

Ερώτηση 8 του ερωτηματολογίου

Πως αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο»;

Σκοπός μας με αυτήν την ερώτηση ήταν η εξέταση των αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του συνόλου, επιλέξαμε έτσι να αφήσουμε ελεύθερους τους μαθητές να περιγράψουν την έννοια όπως οι ίδιοι την αντιλαμβάνονται. Οι περισσότερες από τις παρανοήσεις που αναφέραμε προηγουμένως εμφανίστηκαν σε αυτό το σημείο. Συγκεκριμένα, πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται το σύνολο ως μια κατηγοριοποίηση με βάση κάποια κοινή ιδιότητα, ως μοτίβο ή ακολουθία, ως το αποτέλεσμα μιας πράξης, ως πλήθος στοιχείων, ως συλλογή αριθμών ή ως γεωμετρικό τόπο. Συχνότερη εικόνα που φαίνεται να σχηματίζουν οι μαθητές είναι αυτή της ομάδας (38.4%). Η λέξη συλλογή χρησιμοποιήθηκε μόλις από το 3.2% των μαθητών ενώ το 6.15% αντιλαμβάνεται το σύνολο ως ένα δοχείο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συχνότερη παρανόηση που εμφανίστηκε μεταξύ των μαθητών ήταν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να μοιράζονται τουλάχιστον μία κοινή ιδιότητα. Επιπλέον, οι περισσότεροι μαθητές δεν δέχονται το κενό ως σύνολο, ενώ οι μισοί περίπου μαθητές απορρίπτουν το μονοσύνολο. Μεγάλο ποσοστό μαθητών συγχέει τα σύμβολα «∈» και «⊆». Οι μαθητές μαθαίνουν να χειρίζονται ζητήματα που εμπλέκουν τις δύο έννοιες με διαγράμματα Venn με τα οποία δεν μπορεί κανείς να διακρίνει τις έννοιες «ανήκει» και «υποσύνολο» στην περίπτωση συνόλων με στοιχεία σύνολα.

Επιπλέον, εμφανίστηκαν όλες οι παρανοήσεις περί πληθικότητας απειροσυνόλων που αναφέρθηκαν στο θεωρητικό μας πλαίσιο. Συγκεκριμένα, λίγοι μαθητές εμφάνισαν την παρανόηση ότι δύο απειροσύνολα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος στοιχείων, συχνή ήταν η παρανόηση ότι οι άρτιοι αριθμοί (θετικοί) είναι οι μισοί από τους φυσικούς αριθμούς, ενώ ακόμη συχνότερη ήταν η παρανόηση ότι ένα σύνολο έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από κάθε γνήσιο υποσύνολό του.

Όλες οι προηγούμενες παρανοήσεις επιβεβαιώνουν προϋπάρχουσες έρευνες. Εντούτοις, η παρανόηση ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να έχει άπειρα στοιχεία, η παρανόηση ότι ένα στοιχείο δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε δύο σύνολα και η παρανόηση ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων εμφανίζεται σε ελάχιστους μαθητές.

Στην έρευνά μας αναδείχθηκαν ορισμένες παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του συνόλου οι οποίες δεν φαίνεται να αναφέρονται πουθενά στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, πολλοί μαθητές θεωρούν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι κατ' ανάγκη αριθμοί. Επιπλέον, δεν είναι λίγοι οι μαθητές που θεωρούν το σύνολο ως το αποτέλεσμα μιας πράξης επηρεασμένοι ενδεχομένως από τη χρήση της λέξης σύνολο στην καθομιλουμένη (σύνολο ως άθροισμα). Ένας στους τρεις μαθητές θεωρεί το σύνολο $\{\emptyset\}$ ως κενό και όχι ως μονοσύνολο ενώ οι μισοί περίπου μαθητές δηλώνουν ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο του εαυτού του.

Η εικόνα της έννοιας του συνόλου που επικρατεί στους μαθητές είναι αυτή της ομάδας. Αυτό μάλλον συνδέεται με το ότι στην Γ΄ Γυμνασίου το σύνολο ορίζεται ως μια ομάδα ή μια κατηγορία αντικειμένων. Ελάχιστοι ήταν οι μαθητές που όρισαν το σύνολο ως μια συλλογή. Φαίνεται λοιπόν ότι επικρατεί το μοντέλο της ομάδας έναντι εκείνου της συλλογής (Fischbein & Baltsan, 1999) για την εικόνα έννοιας των μαθητών. Στα πλαίσια της παρούσας έρευνας δεν έγινε ξεκάθαρο το «τι εννοούν οι μαθητές με τη λέξη ομάδα», κάτι που παραμένει σαν αντικείμενο περεταίρω μελέτης. Η εικασία μας είναι πως οι ιδιότητες που συνοδεύουν το μοντέλο της ομάδας διαφέρουν από εκείνες του μοντέλου της συλλογής. Για παράδειγμα, το μικρό ποσοστό εμφάνισης της παρανόησης ότι ένα στοιχείο δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε δύο σύνολα, ενδέχεται να οφείλεται στην υιοθέτηση του μοντέλου της ομάδας. Τέλος, ορισμένοι μαθητές αντιλαμβάνονται το σύνολο ως ένα δοχείο. Το φαινόμενο αυτό είναι λογικό αν αναλογιστούμε ότι μαθητές Λυκείου μαθαίνουν να αναπαριστούν τα σύνολα, σχεδόν αποκλειστικά με χρήση των διαγραμμάτων Venn (Bagni, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bagni, G. T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 259-280.

Fischbein, E., & Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the'collection'model. *Educational studies in mathematics*, *37*(1),1-22.

Linchevski, L. and Vinner, Sh. (1988), 'The naive concept of sets in elementary teachers', Proceedings of the 12th International Conference, *Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11, Vezprem, Hungary, pp. 471–478.

Sırmacı, N. & Taş, F. (2013), Knowledge levels of pre-service mathematics teachers on the concept of set, Educational Research and Reviews, Vol. 8(17), pp. 1519-1524.

Tall, D., & Vinner, Sh. (1981), 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, 12 151–169.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. & Tabach, M. (2011), From preschool teachers' professional development to children's knowledge: comparing sets, Journal for *Mathematics Teacher Education* 14: 113–131.

ΤΟ ΑΓΧΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΚΙΝΗΤΡΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΥΨΗΛΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΥΤΙΣΜΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αλεξάνδρα Γεωργίου, Σπυρίδων-Γεώργιος Σούλης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
algeorgiou@cc.uoi.gr, ssoulis@cc.uoi.gr

Τα κίνητρα ενός μαθητή θεωρείται ότι μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά το άγχος του στα μαθηματικά (Kesici S., Erdogan A., 2010). Οι μαθητές με Υψηλής Λειτουργικότητας Αυτισμό (Υ.Λ.Α.) παρακινούνται αναφορικά με τα μαθηματικά για διαφορετικούς λόγους σε σχέση με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές (Wagner S., 1999). Η παρούσα έρευνα προσπάθησε να εντοπίσει το βαθμό άγχους των μαθητών με Υ.Λ.Α., να εξετάσει τα κίνητρα επιτυχίας τους στα μαθηματικά και πώς αυτά μπορούν να εξισορροπήσουν το άγχος τους στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το άγχος των μαθητών με Υ.Λ.Α. εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα κίνητρα επιτυχίας τους στα μαθηματικά και ότι η ηλικία, το φύλο και ο τύπος σχολείου φοίτησης επηρεάζουν σημαντικά το άγχος τους για τα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια ομάδα μαθητών των οποίων οι μαθησιακές ανάγκες στα μαθηματικά συχνά αποτελούν πρόκληση για τους εκπαιδευτικούς τους, είναι οι μαθητές με Υψηλής Λειτουργικότητας Αυτισμό (Υ.Λ.Α.) (Finnane M., 2011). Σύμφωνα με την τελευταία έκδοση του διαγνωστικού εγχειριδίου DSM-5 (DSM-V, 2013) της Αμερικάνικης Ψυχιατρικής Ένωσης (APA), ο Υψηλής Λειτουργικότητας Αυτισμός (Υ.Λ.Α.) υπάγεται στη Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος (ΔΑΦ). Οι μαθητές με Υ.Λ.Α. αναφέρεται ότι παρουσιάζουν δυσκολίες στην κοινωνική επαφή, στην επικοινωνία και επαναλαμβανόμενες στερεοτυπικές συμπεριφορές (DSM-V).

Ενώ ένα ποσοστό των μαθητών με Υ.Λ.Α. έχει εξαιρετικές μαθηματικές ικανότητες (Mc Mullen P., 2000), αρκετές έρευνες δείχνουν ότι στην πλειοψηφία τους αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά (Chiang H., Lin Y., 2007). Στις δυσκολίες τους αυτές έρχεται να προστεθεί το γενικότερο άγχος που βιώνουν απέναντι σε καταστάσεις καθημερινότητας (Attwood, 2007), το οποίο μπορεί να διαταράξει περαιτέρω την ικανότητα τους στα μαθηματικά. Τα τελευταία χρόνια αν και παρατηρείται αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον για το άγχος των μαθητών με Υ.Λ.Α σε διεθνές επίπεδο καταγράφεται απουσία συστηματικών ερευνών ως προς το άγχος τους στα μαθηματικά και ειδικότερα όταν μελετάται η περίπτωση της Ελλάδας (Ooi Y P et al., 2008).

Ο Spicer (2004) αναφέρει ότι το άγχος στα μαθηματικά είναι ένα συναίσθημα που εμποδίζει την ικανότητα ενός ατόμου να σκεφτεί λογικά όταν έρχεται αντιμέτωπο με μια μαθηματική εργασία. Ο Tapia (2004) παρατήρησε ότι οι μαθητές με λίγο ή καθόλου άγχος στα μαθηματικά εμφάνισαν υψηλότερα κίνητρα για μάθηση από ότι οι μαθητές με αρκετό ή πολύ άγχος στα μαθηματικά.

Προκειμένου να διερευνηθεί πως τα κίνητρα των μαθητών επηρεάζουν το άγχος τους στα μαθηματικά, στην παρούσα ερευνητική προσπάθεια επιλέχθηκε η "Θεωρία των Σκοπών Επιτυχίας" (Achievement Goal Theory) (Elliot A., Church M., 1997; Elliot A., 1999) όσον αφορά τη διερεύνηση των κινήτρων (Pantziara M., Filippou G., 2006). Συγκεκριμένα, η θεωρία των σκοπών επιτυχίας επικεντρώνεται στον τρόπο που οι μαθητές αξιολογούν τις ενέργειες που πρόκειται να πράξουν καθώς και την επίδοση-αποτελέσματα που θα προκύψουν από αυτές (Kaplan A., Maehr M., 2007). Ειδικότερα, στους σκοπούς επιτυχίας των μαθητών σε σχέση με την επιτυχία τους στο μαθησιακό περιβάλλον περιλαμβάνονται: οι σκοποί μάθησης (mastery goals), οι σκοποί επίδοσης (performance - approach goals) και οι σκοποί αποφυγής συνεπειών (performance - avoidance goals). Οι σκοποί μάθησης αναφέρονται στην επιδίωξη του μαθητή να βελτιώσει την ικανότητα του σε ένα μάθημα. Οι σκοποί επίδοσης αναφέρονται στην προσπάθεια του μαθητή να επιδείξει την ικανότητα του σε ένα μάθημα σε σύγκριση με αυτή των συμμαθητών του. Οι σκοποί αποφυγής συνεπειών αναφέρονται στην προσπάθεια του ατόμου να επιδείξει την ικανότητα του σε ένα μάθημα προκειμένου να αποφύγει αρνητικές συνέπειες (π.χ. χαμηλοί βαθμοί) (Anderman E., Midgley C., 2002).

Η σχέση μεταξύ των σκοπών επιτυχίας με τη συμπεριφορά των μαθητών, επεξηγήθηκε μέσω του μοντέλο των σκοπών της επιτυχίας (Cury F. et al., 2006; Elliot A., Church M., 1997). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, οι πεποιθήσεις επάρκειας (self-efficacy beliefs) είναι ένα κίνητρο που παρακινεί τους μαθητές προς υιοθέτηση σκοπών μάθησης και σκοπών επίδοσης. Παράλληλα, ο φόβος της αποτυχίας (fear of failure) αποτελεί κίνητρο που οδηγεί τους μαθητές σε σκοπούς αποφυγής συνεπειών. Ταυτόχρονα το εσωτερικό ενδιαφέρον των μαθητών για το μάθημα αποτελεί σημαντική παράμετρο της υιοθέτησης σκοπών επιτυχίας από τους μαθητές (Pantziara M., Filippou G., 2006).

Οι μαθητές με Υ.Λ.Α. αν και διαθέτουν την ικανότητα παρακίνησης, παρακινούνται από διαφορετικές αιτίες σε σύγκριση με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές (Wagner S., 1999). Συχνά όμως τους είναι δύσκολο να κατανοήσουν τις εργασίες που τους ανατίθενται, στο σχολείο ή στο σπίτι, (Lynn K. et al., 2010). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρουσιάζουν μια αντιδραστική συμπεριφορά προκειμένου να αποφύγουν τις εργασίες αυτές (Ochs et al. 2001).

Με βάση τα προαναφερόμενα, σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει: α) τους έξι παράγοντες κινήτρων επιτυχίας των μαθητών με

Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά (σκοποί μάθησης, σκοποί επίδοσης, σκοποί αποφυγής συνεπειών, πεποιθήσεις επάρκειας, φόβο αποτυχίας, εσωτερικό ενδιαφέρον), β) το άγχος των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά όσον αφορά αφενός την αξιολόγηση τους στο μάθημα και αφετέρου την διαδικασία της μάθησης μαθηματικών. Επιπρόσθετα, διερευνάται πώς το φύλο, η ηλικία και ο τύπος του σχολείου στο οποίο φοιτούν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. επηρεάζουν το άγχος και τα κίνητρα επιτυχίας τους στα μαθηματικά. Ειδικότερα, μελετώντας το βαθμό άγχους των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά επιχειρείται να απαντηθεί πώς τα κίνητρα επιτυχίας μπορούν να το εξισορροπήσουν.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 12 μαθητές με Υ.Λ.Α. που φοιτούν σε σχολεία του Νομού Αργολίδας. Και οι δώδεκα μαθητές έχουν γνωμάτευση από δημόσιο πιστοποιημένο διαγνωστικό φορέα (ΚΕΔΔΥ). Από τους συμμετέχοντες μαθητές 4 είναι κορίτσια και 8 αγόρια ηλικίας από 13 έως 17 ετών. Σε Ειδικό Επαγγελματικό Γυμνάσιο φοιτούσαν 2 μαθητές και 2 μαθήτριες, Τμήμα Ένταξης παρακολουθούσαν 2 μαθητές, Παράλληλη Στήριξη δέχονταν 2 μαθητές, ενώ 2 μαθήτριες φοιτούσαν σε τάξη Γενικού Γυμνασίου και 2 μαθητές σε τάξη Γενικού Λυκείου χωρίς να δέχονται κάποια ιδιαίτερη υποστήριξη.

Ερευνητικό εργαλείο

Για τη μέτρηση των κινήτρων επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. χορηγήθηκε στους συμμετέχοντες ερωτηματολόγιο με 35 δηλώσεις τύπου Likert (1 για Διαφωνώ Απόλυτα έως 5 για Συμφωνώ Απόλυτα) που αναφέρονταν σε έξι υποκλίμακες. Οι τέσσερις υποκλίμακες προέρχονταν από το Patterns of Adaptive Learning Strategies–PALS (Midgley C. et al., 2000) και μετρούν σκοπούς μάθησης, σκοπούς επίδοσης, σκοπούς αποφυγής συνεπειών και πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών. Ο φόβος της αποτυχίας μετρήθηκε από σχετικό εργαλείο που αναπτύχθηκε από το Hermans (Elliot A., Church M., 1997) και το εσωτερικό ενδιαφέρον των μαθητών μετρήθηκε από ανάλογο εργαλείο που αναπτύχθηκε από τους Elliot A. και Church M. (1997).

Παράλληλα η Αναθεωρημένη Κλίμακα Βαθμολόγησης του άγχους στα μαθηματικά RMARS (Plake B. S., Parker C.S., 1982) χρησιμοποιήθηκε για να αξιολογήσει το βαθμό άγχους του δείγματος. Η κλίμακα RMARS συμπεριλαμβάνει συνολικά 24 δηλώσεις τύπου Likert (1 για Καθόλου Άγχος έως 5 για Πάρα Πολύ Άγχος) εκ των οποίων 8 δηλώσεις αφορούν το άγχος αξιολόγησης της επίδοσης στα μαθηματικά και 16 δηλώσεις αφορούν το άγχος για τη μάθηση των μαθηματικών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η εικόνα των κινήτρων επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. για τα μαθηματικά όπως προκύπτει από τη διερεύνηση των έξι παραγόντων κινήτρων επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά, είναι αρνητική. Συγκεκριμένα, ο φόβος αποτυχίας των συμμετεχόντων είναι αρκετά υψηλός (Μ=3,70) ενώ χαμηλότερες είναι οι πεποιθήσεις επάρκειας τους (Μ=3,13) και το ενδιαφέρον τους στα μαθηματικά (Μ=3,11). Επίσης, προκύπτει ότι οι μαθητές με Υ.Λ.Α. επικεντρώνονται περισσότερο στην επίδειξη των ικανοτήτων τους στα μαθηματικά προκειμένου να αποφύγουν αρνητικές συνέπειες όπως είναι η χαμηλή βαθμολογία, καθώς οι σκοποί επίδοσης τους (Μ=2,83) είναι πιο χαμηλοί από τους σκοπούς αποφυγής συνεπειών (Μ=3,08). Σε μέτρια επίπεδα κυμαίνονται και οι σκοποί μάθησης των μαθητών με Υ.Λ.Α. (Μ=3,23). Επιπρόσθετα, αρνητική είναι και η εικόνα των μαθητών με Υ.Λ.Α. ως προς το άγχος τους στα μαθηματικά. Παρουσιάζουν υψηλό άγχος αξιολόγησης στα μαθηματικά (Μ=3,89) και χαμηλό άγχος μάθησης μαθηματικών (Μ=2,45). Δηλαδή τα διαγωνίσματα και οι εξετάσεις στα μαθηματικά προκαλούν αρνητικά συναισθήματα και έντονο άγχος στους μαθητές με Υ.Λ.Α. Αντίθετα, από τη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών οι μαθητές με Υ.Λ.Α. δεν αναπτύσσουν έντονο άγχος. (Πίνακας 1)

Στη συνέχεια, εξετάστηκε η επίδραση του φύλου, της ηλικίας και του τύπου σχολείου στο οποίο φοιτούν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. όσον αφορά το άγχος τους και τα κίνητρα επιτυχίας τους στα μαθηματικά. Παρατηρήθηκε ότι τα αγόρια του δείγματος (Μ=3,35) παρουσιάζουν υψηλότερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά από ότι τα κορίτσια (Μ=2,64). Η διαφορά αυτή προέκυψε στατιστικά σημαντική σε 1% επίπεδο σημαντικότητας ($p=0{,}003<0{,}01$). Επίσης, προέκυψε ότι η ηλικία των μαθητών με Υ.Λ.Α. επηρεάζει στατιστικά σημαντικά τον φόβο αποτυχίας τους στα μαθηματικά ($p=0{,}009<0{,}01$), το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά ($p=0{,}000<0{,}01$) και το άγχος τους για τη μάθηση μαθηματικών ($p=0{,}015$). Συγκεκριμένα, τον υψηλότερο φόβο αποτυχίας παρουσίασαν οι μαθητές 17 ετών (Μ=3,77) ενώ τον μικρότερο οι μαθητές 14 ετών (Μ=3,00), μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά δείχνουν οι μαθητές 14 ετών (Μ=3,85) ενώ λιγότερο ενδιαφέρον δείχνουν οι μαθητές 15 ετών (Μ=2,64), περισσότερο άγχος για τη μάθηση μαθηματικών έχουν οι μαθητές 17 ετών (Μ=2,87) και λιγότερο οι μαθητές 14 ετών (Μ=2,06). (Πίνακας 2)

Πίνακας 1: Περιγραφικά στοιχεία κινήτρων επιτυχίας και παραγόντων άγχους στα μαθηματικά

	M	SD	Min/Max
Σκοποί Μάθησης	3,23	1,15312	1,40/4,80
Σκοποί Επίδοσης	2,83	,77616	1,60/3,40
Σκοποί Αποφυγής Συνεπειών	3,08	,38925	2,50/3,50
Πεποιθήσεις Επάρκειας	3,13	,93937	1,60/4,20
Φόβος Αποτυχίας	3,70	,33277	3,00/3,78
Εσωτερικό Ενδιαφέρον	3,11	,45107	2,57/3,86
Άγχος Αξιολόγησης	3,89	,27610	3,00/4,05
Άγχος Μάθησης	2,45	,32348	2,06/2,88

Ο τύπος σχολείου στο οποίο φοιτούν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. επηρεάζει στατιστικά σημαντικά τους σκοπούς επίδοσης τους (p=0,018<0,05), τις πεποιθήσεις επάρκειας τους (p=0,027<0,05) και τον φόβο αποτυχίας τους (p=0,002<0,01) στα μαθηματικά. Τους υψηλότερους σκοπούς επίδοσης εμφανίζουν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. που δέχονται Παράλληλη Στήριξη (M=3,40), ακολουθούν με μικρή διαφορά οι μαθητές με Υ.Λ.Α. που φοιτούν σε Ειδικό Επαγγελματικό Γυμνάσιο (M=3,30). Όσοι φοιτούν σε τάξη Γενικού Γυμνασίου ή Γενικού Λυκείου έχουν αρκετά χαμηλούς σκοπούς επίδοσης (M=2,70), ενώ τους μικρότερους εμφανίζουν όσοι παρακολουθούν Τμήμα Ένταξης (M=1,60). Υψηλότερες πεποιθήσεις επάρκειας έχουν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. που φοιτούν σε Ειδικό Επαγγελματικό Γυμνάσιο (M=4,10), ακολουθούν όσοι παρακολουθούν Τμήμα Ένταξης (M=3,20) και τις χαμηλότερες πεποιθήσεις επάρκειας έχουν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. που δέχονται Παράλληλη Στήριξη (M=2,40) και όσοι φοιτούν σε τάξη Γενικού Γυμνασίου ή Γενικού Λυκείου (M=2,50). Ως προς τον φόβο αποτυχίας, τον μεγαλύτερο φόβο αποτυχίας παρουσιάζουν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. που φοιτούν σε τάξη Γενικού Γυμνασίου ή Γενικού Λυκείου (M=3,77), ακολουθούν όσοι δέχονται Παράλληλη Στήριξη (M=3,44), στη συνέχεια αυτοί που φοιτούν σε Ειδικό Επαγγελματικό Γυμνάσιο (M=3,22) και τέλος όσοι παρακολουθούν Τμήμα Ένταξης (M=3,00). (Πίνακας 2)

Ως προς την επίδραση των κινήτρων επιτυχίας στο άγχος των μαθητών για τα μαθηματικά, παρατηρήθηκε ότι οι σκοποί αποφυγής συνεπειών παρουσιάζουν θετική και στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τους σκοπούς μάθησης (p=0,026<0,05) και τους σκοπούς επίδοσης (p=0,000<0,01). Το εσωτερικό ενδιαφέρον των μαθητών με Υ.Λ.Α. του δείγματος για τα μαθηματικά σχετίζεται αρνητικά και στατιστικά σημαντικά με τον φόβο αποτυχίας (p=0,040<0,05). Το άγχος αξιολόγησης στα μαθηματικά παρουσιάζει θετική και στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τους σκοπούς επίδοσης (p=0,004<0,01) και τους σκοπούς αποφυγής συνεπειών (p=0,005<0,01). Το άγχος για τη μάθηση των μαθηματικών παρουσιάζει αρνητική και στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τους σκοπούς μάθησης (p=0,020<0,05), σκοπούς επίδοσης (p=0,004<0,01), σκοπούς αποφυγής συνεπειών (p=0,048<0,05) και με το φόβο της αποτυχίας (p=0,009<0,01) ενώ παρουσιάζει θετική και στατιστικά σημαντική συσχέτιση με το εσωτερικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά (p=0,039<0,05). (Πίνακας 3)

Πίνακας 2: Διερεύνηση κινήτρων επιτυχίας και άγχους στα μαθηματικά ως προς το φύλο, την ηλικία και το σχολείο των μαθητών με Υ.Λ.Α.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Φύλο	0,792	0,694	0,624	0,568	0,140	**0,003****	0,060	0,290
Ηλικία	0,731	0,562	0,908	0,513	**0,009****	**0,000****	0,277	**0,015***
Σχολείο Φοίτησης	0,580	**0,018***	0,108	**0,027***	**0,002****	0,643	0,106	0,311

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν τον σημαντικό ρόλο των κινήτρων επιτυχίας στην εξισορρόπηση του άγχους των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά. Αρχικά διαπιστώθηκε, ότι το άγχος των μαθητών με Υ.Λ.Α. που προκύπτει από τη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών μειώνεται όσο αυξάνονται οι σκοποί μάθησης, σκοποί επίδοσης και σκοποί αποφυγής συνεπειών. Σε αντίθεση με τους μαθητές με Υ.Λ.Α. αποτελέσματα ανάλογων ερευνών σε τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές δείχνουν ότι όσο προσπαθούν αυτοί να επιδείξουν την ικανότητα τους στα μαθηματικά προκειμένου να αποφύγουν αρνητικές συνέπειες τόσο αυξάνεται το άγχος τους για τη μάθηση των μαθηματικών (Elliot A., 1999).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί το εύρημα ότι ο φόβος που αισθάνονται οι μαθητές με Υ.Λ.Α. από μια ενδεχόμενη αποτυχία τους στα μαθηματικά μειώνει το άγχος τους για τη μάθηση μαθηματικών. Το αποτέλεσμα αυτό δε συνάδει με ευρήματα άλλων ερευνών όπου καταγράφεται ότι το άγχος για μάθηση των μαθητών με Υ.Λ.Α. αυξάνεται από τον φόβο αποτυχίας τους (Karen M., Jeffrey J, 2008). Επιπλέον παρατηρήθηκε στην παρούσα έρευνα ότι η αύξηση του φόβου αποτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά μειώνει επίσης και το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά. Ενεργό ρόλο στη διαμόρφωση του ενδιαφέροντος ενός μαθητή με Υ.Λ.Α. για τα μαθηματικά διαδραματίζει ο εκπαιδευτικός του, ο οποίος με τις διδακτικές πρακτικές του μπορεί να μειώσει τον φόβο αυτό του μαθητή για αποτυχία στα μαθηματικά και να συμβάλλει στην αύξηση του ενδιαφέροντος για το μάθημα.

Πίνακας 3: Correlation coefficients (Spearman rho) μεταξύ των κινήτρων επιτυχίας και άγχους στα μαθηματικά.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Σκοποί Μάθησης (1)	1	,086	**,026***	,020	1,00	,420	,420	**,020***
Σκοποί Επίδοσης (2)		1	**,000****	,204	,222	,204	**,004****	**,004****
Σκοποί Αποφυγής (3)			1	,104	1,00	,312	**,005****	**,048***
Πεποιθήσεις Επάρκειας (4)				1	,252	,791	,533	,658
Φόβος Αποτυχίας (5)					1	**,040***	1,00	**,009****
Εσωτερικό Ενδιαφέρον (6)						1	,533	,059
Άγχος αξιολόγησης (7)							1	,235
Άγχος μάθησης (8)								1

Η έρευνα επίσης έχει εντοπίσει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το άγχος των μαθητών με Υ.Λ.Α. για την αξιολόγηση τους στα μαθηματικά τόσο υψηλότεροι είναι οι σκοποί επίδοσης τους και οι σκοποί αποφυγής συνεπειών. Κατά τη διάρκεια της αξιολόγησης οι μαθητές με Υ.Λ.Α. αναπτύσσουν έντονο άγχος με αποτέλεσμα οι επιδόσεις τους να είναι κατώτερες των δυνατοτήτων τους (Chiang, H., Lin, Y., 2007). Επομένως, για να μειώσουν οι εκπαιδευτικοί το άγχος αξιολόγησης των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά θα πρέπει να επικεντρωθούν σε σκοπούς μάθησης, καθώς όπως προκύπτει από σχετικές έρευνες οι μαθητές που επιδιώκουν να βελτιώσουν την ικανότητα τους στα μαθηματικά έχουν καλύτερη επίδοση και μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά σε σχέση με τους μαθητές που υιοθετούν σκοπούς επίδοσης και σκοπούς αποφυγής συνεπειών (Cury et al., 2006).

Εντούτοις, αν και προκύπτει ότι τα κίνητρα επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α στα μαθηματικά μπορούν να εξισορροπήσουν σε μεγάλο βαθμό το άγχος τους στα μαθηματικά, ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί το εύρημα ότι η εικόνα των κινήτρων επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. για τα μαθηματικά είναι αρνητική. Συγκεκριμένα, υψηλός είναι ο φόβος αποτυχίας τους για τα μαθηματικά ενώ οι πεποιθήσεις επάρκειας και το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά κυμαίνεται σε μέτρια επίπεδα. Επίσης, οι μαθητές αυτοί επικεντρώνονται περισσότερο στην επίδειξη των ικανοτήτων τους στα μαθηματικά προκειμένου να αποφύγουν αρνητικές συνέπειες όπως είναι η χαμηλή βαθμολογία. Αλλά και η επιθυμία τους για βελτίωση των ικανοτήτων τους στα μαθηματικά είναι αρκετά χαμηλή. Κατά συνέπεια, σύμφωνα και με το μοντέλο των σκοπών της επιτυχίας, ο υψηλός φόβος αποτυχίας στα μαθηματικά οδηγεί τους μαθητές με Υ.Λ.Α. να υιοθετούν σε υψηλό βαθμό σκοπούς αποφυγής συνεπειών. Επίσης, οι χαμηλές πεποιθήσεις επάρκειας δεν τους παρακινούν να θέτουν σε υψηλό βαθμό σκοπούς μάθησης και σκοπούς επίδοσης με αποτέλεσμα να διατηρούν χαμηλό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά.

Η εικόνα ωστόσο των μαθητών με Υ.Λ.Α. ως προς τα κίνητρα επιτυχίας τους και το άγχος τους στα μαθηματικά διαφοροποιείται ανάλογα με το φύλο, την ηλικία και τον τύπο σχολείου στο οποίο φοιτούν. Συγκεκριμένα, προέκυψε ότι οι μεγαλύτερης ηλικίας μαθητές με Υ.Λ.Α. σε σχέση με τους μικρότερους βιώνουν μεγαλύτερο φόβο αποτυχίας στα μαθηματικά, ενδιαφέρονται λιγότερο για την επίδοση τους στα μαθηματικά και τη μάθηση μαθηματικών και αγχώνονται περισσότερο για τη μάθηση των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με αποτελέσματα ερευνών όπου καταγράφεται ότι οι επιδόσεις των μαθητών με Υ.Λ.Α. τείνουν να μειώνονται καθώς ο μαθητής "ανεβαίνει" τάξεις στο σχολείο (Goldstein, G. et al.,1994).

Ως προς το φύλο των μαθητών με Υ.Λ.Α. παρατηρήθηκε ότι τα αγόρια του δείγματος παρουσιάζουν υψηλότερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά από ότι τα κορίτσια. Πρόσφατες έρευνες δείχνουν ότι τα αγόρια με Υ.Λ.Α. διαφέρουν από τα κορίτσια με Υ.Λ.Α. και πως ότι ισχύει κατά την διαδικασία μάθησης στα αγόρια δεν ισχύει και στα κορίτσια (Lai M-C et al., 2012). Το γεγονός αυτό πρέπει να ληφθεί υπόψη από τους εκπαιδευτικούς στην προσπάθεια ενίσχυσης των κινήτρων επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. αναφορικά με τα μαθηματικά και εξισορρόπησης του άγχους τους ως προς αυτό το γνωστικό αντικείμενο. Σημαντικά είναι τα αποτελέσματα της έρευνας και όσον αφορά τον τύπο σχολείου στο οποίο φοιτούν οι μαθητές με Υ.Λ.Α. Συγκεκριμένα, οι μαθητές με Υ.Λ.Α. που φοιτούν σε τάξη Γενικού Γυμνασίου ή Γενικού Λυκείου χωρίς καμία ιδιαίτερη υποστήριξη (Παράλληλη Στήριξη ή Τμήμα Ένταξης) εμφανίζουν χαμηλότερους σκοπούς επίδοσης, μικρότερες πεποιθήσεις επάρκειας και μεγαλύτερο φόβο αποτυχίας για τα μαθηματικά από τους μαθητές με Υ.Λ.Α. που φοιτούν σε Ειδικό Επαγγελματικό Γυμνάσιο, παρακολουθούν ΤΕ ή δέχονται Παράλληλη Στήριξη. Το αποτέλεσμα αυτό τονίζει την ανάγκη για εξειδικευμένη διδασκαλία των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά από εκπαιδευτικούς με εξειδικευμένη γνώση.

Ωστόσο, ο μικρός αριθμός των μαθητών με Υ.Λ.Α. που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα καθώς και το γεγονός ότι δεν λήφθηκε υπόψη η επίδοση των συμμετεχόντων μαθητών στα μαθηματικά ως παράγοντας επιρροής του άγχους τους και των κινήτρων τους στα μαθηματικά, δεν επιτρέπουν τη γενίκευση των αποτελεσμάτων. Επίσης, σημαντικό περιορισμό της παρούσας έρευνας αποτελεί και η έλλειψη ομάδας ελέγχου. Θα ήταν ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετηθεί το άγχος και τα κίνητρα των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά συγκριτικά με το άγχος και τα κίνητρα στα μαθηματικά των τυπικών αναπτυσσόμενων μαθητών.

Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας τονίζουν την ανάγκη για κατάλληλη ενημέρωση των εκπαιδευτικών ως προς τα κίνητρα επιτυχίας των μαθητών με Υ.Λ.Α. στα μαθηματικά καθώς και πώς αυτά μπορούν να οδηγήσουν στην εξισορρόπηση του άγχους τους στα μαθηματικά ώστε οι μαθητές με Υ.Λ.Α. να είναι ευτυχισμένοι μέσα στην τάξη και να θέλουν να μάθουν μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderman, E., & Midgley C. (2002). *Methods of studying goals, goal structures, and patterns of adaptive learning. In C. Midgley (Ed.),* Goals, goal structures, and patterns of adaptive learning (pp. 1-20). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Attwood, T. (2007). *The complete guide to Asperger's syndrome*. London: Jessica Kingsley Publishers.

Chiang, H., Lin, Y. (2007). *Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-functioning autism*. Autism, 11, 547–556.

Cury, F., Elliot, A.J., Da Fonseca, D., & Moller, A. (2006). *The social-cognitive model of achievement motivation and the 2 x 2 achievement goal framework.* Journal of Personality and Social Psychology, 90, 666-679.

Elliot, A. (1999). *Approach and avoidance motivation and achievement goals*. Journal of Educational Psychology, 80, 260-267.

Elliot, A., Church, M. (1997). *A hierarchical model of approach and avoidance achievement motivation.* Journal of Personality and Social Psychology, 72, 218-232.

Finnane M., (2011). *Promoting an understanding of mathematical structure in students with High Functioning Autism.* Mathematics: Traditions and New Practices • © AAMT & MERGA 2011

Goldstein, G., Minshew, N.J., Siegal, D.J. (1994). *Age differences in academic achievement in high-functioning autistic individuals.* Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology, 16(5), 671-680.

Kesici, S., Erdogan, A. (2010). *Mathematics anxiety according to middle school students' achievement motivation and social comparison.* Education 131.1 : 54-63.

Kaplan, A., Maehr, M. (2007). *The Contributions and Prospects of Goal Orientation Theory*. Educational Psychology Review, 19, 141-184.

Karen M., Jeffrey J, (2008). *Enhancing CBT for the Treatment of Autism Spectrum Disorders and Concurrent Anxiety.* Behavioural and Cognitive Psychotherapy, Volume 36, Special Issue 04, pp 403-409

Lai M-C et al. (2012). *Cognition in Males and Females with Autism: Similarities and Differences.* PLoS ONE 7(10): e47198. doi:10.1371/journal.pone.0047198

Lynn K. K., Anjileen K. S., and Robert L. K. (2010). *Improving Motivation for Academics in Children with Autism.* Autism and Developmental Disorders, 40(9): 1057–1066.

Mc Mullen, P. (2000). *The Gifted Side of Autism.* Focus on Autism and Other Developmental Disabilities 15: 239–42.

Ooi Y P, Lam C M, Sung M, Tan W T S, Goh T J, Fung D S S, Pathy P, Ang R P, Chua A (2008). *Effects of cognitive-behavioral therapy on anxiety for children with high-functioning autistic spectrum disorders.* Singapore Med J 2008; 49(3): 215-220

Ochs E., Kremer-Sadlik T., Solomon O., Sirota K., (2001). *Inclusion as social practice: Views of children with autism.* Social Development.;10(3):399–419. doi: 10.1111/1467-9507.00172.

Pantziara M., Filippou G., (2006). *Measuring and relating primary school students' motives, goals and perfomance in mathematics.* In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 321-328. Prague: PME. 4 - 321

Plake, B. S., Parker, C. S. (1982). *The development and validation of a revised version of the mathematics anxiety rating scale.* Educational and Psychological Measurement, 42, 551-557.

Spicer, J. (2004). *Resources to combat math anxiety.* Eisenhower National Clearinghouse Focus 12(12). Retrieved July 12, 2004: http://www.enc.org/features/focus/archive/mathanxiety/document.shtm?input=FOC-003455-index

Tapia, M. (2004). *The relationship of math anxiety and gender.* Academic Exchange Quarterly, 8 (2).

Wagner S. (1999). *Inclusive Programming for Elementary students with autism,* ISBN-1-885477-54-6

ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΜΗ ΤΥΠΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Κ. Γκενέ, Β. Κανελλοπούλου ,Ε. Κολέζα

konstantina-gk@hotmail.com, Kan.Vasiliki@gmail.com, ekoleza@upatras.gr

ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Πατρών

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη σχεδιάστηκε με στόχο να καταγράψει και να αναλύσει τον τρόπο που οι μαθητές της Δ΄ δημοτικού αντιλαμβάνονται την έννοια της μέτρησης μήκους. Η ποιοτική προσέγγιση που ακολουθήθηκε χρησιμοποίησε ως εργαλείο συλλογής δεδομένων ένα φύλλο εργασίας με τέσσερις δραστηριότητες, επιχειρώντας σύγκριση των επιδόσεών τους όταν έχουν στη διάθεσή τους διαφορετικά εργαλεία μέτρησης. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν πως η διαδικασία της μέτρησης πραγματοποιείται διαδικαστικά και η επίδοση της χρήσης μη τυπικών μονάδων να φαίνεται πως δεν επηρεάζει την επίδοση της χρήσης τυπικών μονάδων.

Εισαγωγή

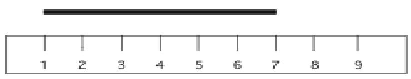
Η μέτρηση περιγράφεται ως δυνατότητα να οριστεί μια αριθμητική τιμή σε μια ιδιότητα ενός αντικειμένου ή γεγονότος (NCTM, 2000) και αποτελεί σημαντική μαθηματική έννοια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση καθώς είναι απαραίτητη για την κατανόηση των μονάδων, οι οποίες είναι το θεμελιώδες μέσο μέτρησης (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008). Σε διεθνές επίπεδο, οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών είναι ως επί το πλείστον διαδικαστικής φύσης, αφήνοντας μικρά περιθώρια για μαθηματική συζήτηση και δημιουργία συνδέσεων. Απόρροια αυτού είναι οι παρανοήσεις που δημιουργούνται, να διατηρούνται μέχρι το επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Blume, Galindo, & Walcott, 2007). Η διαπίστωση αυτή αποτελεί ερευνητικό πρόβλημα της παρούσας εργασίας, η οποία έχει ως στόχο τη διερεύνηση των αναπαραστάσεων των μαθητών σχετικά με την έννοια της μέτρησης μήκους.

Θεωρητικό πλαίσιο

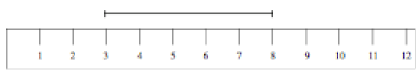
Στην προσχολική εκπαίδευση, σύμφωνα με το Α.Π.Σ. (2011), οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τον χειρισμό συνεχών μεγεθών και επιχειρούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις και διατάξεις ίσων και άνισων μηκών, επικαλύψεις με τυπικές και μη τυπικές μονάδες, σύνδεση των επικαλύψεων ή επαναλήψεων με το αριθμητικό αποτέλεσμα και χρήση χάρακα. Αντίστοιχα, στο δημοτικό σχολείο ολοκληρώνοντας την Γ΄ δημοτικού οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να μετρούν, να συγκρίνουν και να διατάσσουν μήκη χρησιμοποιώντας τυπικές μονάδες μέτρησης μέσω της χρήσης εργαλείων μέτρησης.

Οι δραστηριότητες μέτρησης, σύμφωνα με τους Piaget, Inhelder και Szerninska (1960), περιλαμβάνουν τη χρήση «σταθερών» οι οποίες περιγράφονται ως εξής: «Μετρώ σημαίνει επιλέγω από το όλον ένα τμήμα που το θεωρώ ως μονάδα και το μεταφέρω στο υπόλοιπο του όλου. Ως εκ τούτου μέτρηση είναι η σύνθεση μιας υποδιαίρεσης και μιας αλλαγής θέσης» (σελ. 3). Η αλλαγή θέσης απαιτεί την κατανόηση ότι το μέγεθος της μονάδας διατηρείται και ότι η μονάδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά. Σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η κατανόηση της διαδικασίας της μέτρησης προϋποθέτει τη γνώση ενός πολύπλοκου δικτύου νοητικών λειτουργιών που περιγράφονται ως εξής: (1) η μονάδα πρέπει να είναι συμβατή με το μετρούμενο μέγεθος, (2) η μονάδα παραμένει σταθερή και επαναλαμβάνεται μέχρι την πλήρη κάλυψη του μετρούμενου μεγέθους -χωρίς επικάλυψη-, (3) ως αρχή της μέτρησης εκλαμβάνεται το «σημείο 0» -χωρίς απαραίτητα να συμπίπτει με την αντίστοιχη ένδειξη στο χάρακα-, (4) ένα μέγεθος χωρίζεται σε ισομεγέθη επιμέρους τμήματα και αντίστροφα το άθροισμα των επιμέρους τμημάτων δίνει το όλον, (5) το μέγεθος ενός αντικειμένου δεν μεταβάλλεται με την αλλαγή της θέσης του, (6) μπορεί να γίνει σύγκριση δύο αντικειμένων συγκρίνοντάς τα με ένα τρίτο, (7) για τη σύγκριση μεγεθών απαιτείται κοινή μονάδα, γεγονός που αναδεικνύει τη χρησιμότητα των τυποποιημένων μονάδων μέτρησης, (8) αν οι μονάδες είναι μικρότερες απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός μονάδων για το ίδιο μέγεθος (Lehrer, 2003; Stephan & Clements, 2003). Η κατανόηση του παραπάνω δικτύου νοητικών λειτουργιών δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εφαρμόζουν αποτελεσματικές στρατηγικές μέτρησης. Ορισμένες από τις παραπάνω νοητικές λειτουργίες, ενώ θεωρούνται στοιχειώδεις και προφανείς για τους ενήλικες, δεν είναι το ίδιο προφανείς για τα παιδιά. Ως παράδειγμα, οι Clements και Stephan (2004) αναφέρουν ότι μαθητές του δημοτικού σχολείου θεωρούν ότι δεν μπορούν να μετρήσουν το μήκος της αίθουσας εξαιτίας του μικρού μήκους της μονάδας μέτρησης. Επίσης σε μια διαχρονική έρευνα με τους ίδιους μαθητές, από την Α΄ έως την Γ΄ δημοτικού οι Lehrer, Jenkins και Osana (1998) διαπίστωσαν ότι το 80% των μαθητών δεν θεωρούσε πρόβλημα την ταυτόχρονη χρήση δύο διαφορετικών μονάδων για τη διεξαγωγή μιας μέτρησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι για αρκετούς μαθητές η μονάδα μέτρησης δεν είναι το διάστημα μεταξύ δύο ενδείξεων του χάρακα, αλλά οι αριθμοί στο χάρακα και το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι ο αριθμός που συμπίπτει με το τέλος του μετρούμενου μεγέθους, ανεξάρτητα του σημείου από το οποίο ξεκίνησε η μέτρηση (Stephan & Clements, 2003, Bragg & Outhred, 2004). Επιπρόσθετα, αρκετοί μαθητές έως και την Δ΄ δημοτικού αδυνατούν να πραγματοποιήσουν μέτρηση αντικειμένου που δεν είναι ευθυγραμμισμένο με τη πρώτη γραμμή του χάρακα το -σημείο 0-. Σύμφωνα με τους Clements & Battista (1992) λιγότερο από το 50% των μαθητών της Α΄ γυμνασίου μπορεί να υπολογίσει το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος στην περίπτωση που η αρχή του χάρακα δεν συμπίπτει με την αρχή του τμήματος.

Μια πρώτη αναφορά σε μέτρηση με σπασμένο χάρακα συναντάται σε έρευνα της Hart (1981) η οποία παρατηρεί ότι μαθητές ηλικίας άνω των 10 ετών συχνά αποτυγχάνουν σε μετρήσεις με σπασμένο χάρακα και συμπεραίνει ότι ενώ οι μαθητές χρησιμοποιούν μονάδες για να εκφράσουν το μέγεθος μιας ποσότητας, αρκετές φορές δεν αντιλαμβάνονται το νόημα της σχετικής μονάδας. Το 1990 σε έρευνα του NAEP (National Assessment of Educational Progress) ένα από τα ερωτήματα αφορούσε τη μέτρηση μήκους με σπασμένο χάρακα. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων άγγιζαν το 14% για τη Γ΄ δημοτικού και το 49% για την Α΄ γυμνασίου (Kamii, 2006), ενώ για τη Δ΄ δημοτικού, τη Β΄ γυμνασίου και τη Γ΄ λυκείου ήταν 24%, 61% και 83% αντίστοιχα. Στο NAEP του 2003 σωστή απάντηση σε ίδιου τύπου ερώτημα, διατύπωσε μόνο το 20% των μαθητών της Δ΄ δημοτικού (Blume, Galindo & Walcott, 2007). Οι Nunes, Light και Mason (1993) διερευνώντας τη δυσκολία μέτρησης με χάρακα σε σχέση με τη μέτρηση με μη τυπικά εργαλεία (π.χ. σχοινί) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά χειρίζονταν με μεγαλύτερη ευχέρεια τον χάρακα -ακόμα και στην περίπτωση του σπασμένου- όπου συνάντησαν δυσκολίες μόνο στο 20% των περιπτώσεων. Στις δυσκολίες των μαθητών όταν μετρούν με χάρακα αναφέρεται επίσης η Kamii (1995, 2006). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι μόνο το 31 % των μαθητών της Γ΄ δημοτικού και το 37% των μαθητών της Α΄ γυμνασίου απαντούν ότι το μήκος του παρακάτω τμήματος είναι 6 μετρώντας τα διαστήματα κάτω από τη γραμμή.



Σε ανάλογη ερώτηση, το 9% των μαθητών της Α΄ γυμνασίου και το 30% των μαθητών της Γ΄ δίνουν ως απάντηση το 8.



Οι Barret et al. (2011) σε μια διαχρονική έρευνα με τους ίδιους μαθητές από τη Β΄ μέχρι την Ε΄ δημοτικού, έθεσαν επίσης ένα ερώτημα μέτρησης με σπασμένο χάρακα ο οποίος ξεκινούσε από το 2. Παρατήρησαν ότι 7 στους 8 μαθητές ενώ μπορούσαν να υπολογίσουν το μήκος μετρώντας τις μονάδες (διάστημα μεταξύ δύο αριθμών του χάρακα) έδιναν ανακριβείς μετρήσεις σε περιπτώσεις που το σημείο 0 δεν ήταν διαθέσιμο.

Με βάση όσα αναφέρθηκαν παραπάνω παρατηρείται πως η διδασκαλία της έννοιας της μέτρησης μήκους ακολουθεί μια διδακτική προσέγγιση η οποία δεν συντελεί στην ουσιαστική κατανόηση και μάθηση αυτής. Απόρροια αυτού είναι η εμφάνιση παρανοήσεων και δυσκολιών εκ μέρους των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες μέτρησης και υποδεικνύεται η αναγκαιότητα εστίασης κατά τη διδασκαλία της μέτρησης στο νόημα των διαγραμμίσεων του χάρακα (Clements, 1999) και στην εννοιολόγηση του μήκους ως κίνηση στο χώρο (Lakoff & Nunez, 2000), ανεξάρτητα από το μηδέν, ως στατικό σημείο εκκίνησης της μέτρησης (Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003).

Η έρευνά μας

Η παρούσα μελέτη εντάσσεται στο πεδίο της ποιοτικής έρευνας και συνιστά "Διερεύνηση" που μελετά τις νοητικές παραστάσεις ενός περιορισμένου δείγματος μαθητών, η επιλογή του οποίου πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας. Το βασικό ερώτημα γύρω από το οποίο σχεδιάστηκε η παρούσα εργασία ήταν: *Ποιες από τις βασικές λειτουργίες, απαραίτητες για την κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης μηκών, είναι ικανοί να εκτελέσουν οι μαθητές της Δ΄ δημοτικού;* Με άλλα λόγια, *σε ποιο βαθμό και με δεδομένο ότι έχει ολοκληρωθεί στο σχολείο η διδασκαλία των σχετικών εννοιών και διαδικασιών, οι μαθητές της Δ΄ δημοτικού είναι ικανοί να μετρούν μήκη με χρήση συμβατικών (χάρακα) και μη συμβατικών μονάδων;*

Το δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 15 μαθητές, 9 κορίτσια και 6 αγόρια, της Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου της Πάτρας. Κριτήριο για την επιλογή του δείγματος ήταν το γεγονός ότι στη συγκεκριμένη τάξη οι μαθητές έχουν διδαχθεί την έννοια της μονάδας και τη διαδικασία μέτρησης μήκους. Αξίζει να αναφερθεί ότι ανάμεσα στους μαθητές υπήρχαν δύο μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (δυσλεξία-δυσαριθμησία).

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε τον Μάιο του 2015, αφού είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία της ενότητας του σχολικού εγχειριδίου που έχει ως γνωστικό αντικείμενο την έννοια της μέτρησης. Η ποιοτική προσέγγιση που ακολουθήθηκε χρησιμοποίησε ως εργαλείο συλλογής δεδομένων ένα φύλλο εργασίας με τέσσερις δραστηριότητες. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε επτά ομάδες -έξι ομάδες δύο ατόμων και μία ομάδα τριών ατόμων-. Η επιλογή των ομάδων έγινε με κριτήριο το υψηλό επίπεδο συνεργασίας που είχε αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς μεταξύ των μαθητών, αλλά και με βάση το διαφορετικό γνωστικό τους επίπεδο. Όσον αφορά το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, πέντε μαθητές είχαν Μ.Ο. βαθμολογίας τριμήνων στο μάθημα των μαθηματικών Άριστα (10), επτά μαθητές Άριστα (9) και τρεις μαθητές Πολύ Καλά (8). Σε κάθε ομάδα δόθηκε ένα φύλλο εργασίας στο οποίο έπρεπε να αποτυπώσει τις σκέψεις της σε γραπτή μορφή και τα απαραίτητα εποπτικά υλικά προκειμένου να υλοποιήσει τις δραστηριότητες (μολύβια διαφόρων μηκών, μπλε ράβδος, χάρακας, σπασμένος χάρακας, εικόνα θρανίου σε Α3). Κάθε δραστηριότητα συνοδευόταν από ερωτήσεις, οι οποίες ζητούσαν παράθεση με αναλυτικό τρόπο των σκέψεών της. Ο χρόνος που είχε οριστεί ήταν δυο διδακτικές ώρες (90 λεπτά), όμως στην πορεία διαπιστώθηκε πως οι περισσότερες ομάδες χρειάστηκαν επιπλέον χρόνο.

Το εργαλείο συλλογής δεδομένων

Οι δραστηριότητες του φύλλου εργασίας αναφέρονται με παιγνιώδη τρόπο στη διαδικασία της μέτρησης μέσω της σταδιακής αφήγησης μιας ιστορίας στο «Στρουμφοχωριό». Δυο στρουμφάκια, ο Σπιρτούλης και ο Γκρινιάρης, διεκδικώντας χώρο στο θρανίο τους διαφωνούν και αποφασίζουν να το χωρίσουν στη μέση. Έτσι το μετρούν χρησιμοποιώντας ο καθένας το μολύβι του και οδηγούνται σε διαφορετικά αποτελέσματα.

Στη δραστηριότητα 1 «*Γιατί ο Σπιρτούλης βρίσκει διαφορετικό μήκος από τον Γκρινιάρη; Έχει κάνει κάποιος από τους δύο λάθος; (Για να μπορέσεις να τους βοηθήσεις, χρησιμοποίησε το θρανίο του Σπιρτούλη και του Γκρινιάρη που σου δίνεται σε φωτοτυπία, καθώς και τα μολύβια που χρησιμοποίησαν για να το μετρήσουν)*» οι μαθητές καλούνται να πάρουν θέση στη διαφωνία και να αιτιολογήσουν το διαφορετικό αποτέλεσμα της μέτρησης. «*Τελικά πόσο είναι το μήκος του θρανίου τους; Με τι το μέτρησες;*» εδώ οι μαθητές μετρούν οι ίδιοι το μήκος του θρανίου των δύο ηρώων της ιστορίας (που εικονίζεται σε χαρτί Α3) επιλέγοντας ως μονάδα μολύβια που έχουν στη διάθεσή τους (νοητική λειτουργία 8).

Στη δραστηριότητα 2 «*Μπορούν τώρα να χωρίσουν το θρανίο τους ακριβώς στη μέση; (Χρησιμοποίησε τη μπλε ράβδο που σου δίνεται, για να μετρήσεις κι εσύ το θρανίο τους και να τους βοηθήσεις)*» οι μαθητές ωθούνται στη χρήση κοινής μονάδας μέτρησης (μπλε ράβδος) και ζητείται να αιτιολογήσουν το αποτέλεσμα της μέτρησής τους (νοητική λειτουργία 2).

Στη δραστηριότητα 3 «*Εσύ πώς μετράς το μήκος ενός αντικειμένου; Μήπως αυτός ο τρόπος βοηθήσει τα στρουμφάκια να μετρήσουν ακριβώς το μήκος το* *θρανίου τους ώστε να το χωρίσουν στη μέση; Εξήγησε στα στρουμφάκια πως πρέπει να το χρησιμοποιήσουν για να μετρήσουν σωστά και μέτρησέ το κι εσύ»* ελέγχεται η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν τον βαθμονομημένο χάρακα για τη μέτρηση ενός αντικειμένου (νοητικές λειτουργίες 4, 6).

Στη δραστηριότητα 4 *«Μπορείς εσύ χρησιμοποιώντας το σπασμένο χάρακα του Σπιρτούλη και του Γκρινιάρη, που σου δίνεται, να μετρήσεις το θρανίο τους; Πώς θα το κάνεις; Περίγραψέ τους αναλυτικά»* οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν το θρανίο με σπασμένο χάρακα (νοητική λειτουργία 3).

Αποτελέσματα

Στην πρώτη δραστηριότητα, στο πρώτο ερώτημα, μόνο 2 από τις 7 ομάδες (ομάδες Δ, Ζ) αντιλαμβάνονται την ορθότητα και των δύο απαντήσεων αποδίδοντας το διαφορετικό αποτέλεσμα μέτρησης στη χρήση διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Οι μαθητές των υπόλοιπων ομάδων, επαναλαμβάνοντας τη μέτρηση, διορθώνουν το αριθμητικό αποτέλεσμα. Ως παράδειγμα αξίζει να αναφερθεί πως οι ομάδες Ε και ΣΤ θεωρούν λανθασμένες και τις δύο απόψεις καθώς αυτές βρίσκουν το μήκος 3,5 και 2 αντίστοιχα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι μαθητές της ομάδας Ε θεωρούν το «ένα μολύβι» ως «1 εκατοστό». Στο δεύτερο ερώτημα, της δραστηριότητας 1, σχετικά με το μήκος του θρανίου και τον τρόπο μέτρησής του διαμορφώνονται δύο κατηγορίες απαντήσεων. Οι ομάδες Α, ΣΤ, Ζ προκειμένου να μετρήσουν το μήκος του θρανίου, τοποθέτησαν οριζόντια μολύβια διαφορετικού μεγέθους το ένα δίπλα στο άλλο από τη μία άκρη του θρανίου ως την άλλη. Αντίθετα, οι ομάδες Β, Γ, Δ, Ε χρησιμοποίησαν ένα συγκεκριμένο μολύβι προκειμένου να μετρήσουν το μήκος του θρανίου, ακολουθώντας την εξής διαδικασία: τοποθετούσαν το μολύβι οριζόντια στην άκρη του θρανίου και έβαζαν ένα σημάδι στο τέλος του μολυβιού και το επανατοποθετούσαν με σημείο αφετηρίας το σημάδι που είχαν βάλει. Αξίζει να σημειωθεί η προσκόλληση της ομάδας Ε στην αντίληψη ότι ένα μολύβι είναι ίσο με 1 εκατοστό. Η μέθοδος που επιλέχθηκε από κάθε ομάδα για τη μέτρηση του μήκους φανερώνει την κατανόηση ή μη της επανάληψης της (σταθερής) μονάδας μέτρησης στη διαδικασία μέτρησης.

Όσον αφορά τη δεύτερη δραστηριότητα σχετικά με το αν μπορεί να χωριστεί το θρανίο στη μέση με τη βοήθεια της μπλε ράβδου, οι ομάδες στην πλειονότητά τους απάντησαν αρνητικά, εκτός από μία που δεν απάντησε καθόλου (ομάδα Δ). Πιο συγκεκριμένα, οι ομάδες Α, Β, Γ, Ε διατύπωσαν την άποψη ότι το θρανίο δεν μπορεί να χωριστεί ακριβώς στη μέση διότι το μήκος που προκύπτει είναι κλασματικός ή δεκαδικός αριθμός. Η ύπαρξη δεκαδικού ή κλασματικού αριθμού φάνηκε ότι δυσκόλεψε τους μαθητές, οι οποίοι δεν μπόρεσαν να χωρίσουν το 1/2, το 1/3 και το 0,25 στη μέση. *«Το μήκος είναι 2 1/2 ράβδοι και δεν είναι δύο ή τρεις ακριβώς»* (Ομάδα Α). Στη συγκεκριμένη ερώτηση οι μαθητές της ομάδας Ε θεώρησαν την μπλε ράβδο ως 1 εκ. και το συνολικό μήκος του θρανίου 2,5 εκ. Η ομάδα ΣΤ που υπολόγισε το μήκος 3 ράβδους «περίπου» διατύπωσε την άποψη ότι *«με το περίπου δεν μπορεί να γίνει ακριβής χωρισμός»*. Ωστόσο, εντύπωση προκαλεί η απάντηση της ομάδας Ζ που ενώ υπολόγισε το μήκος του θρανίου ίσο με 3 ράβδους (ακέραιος αριθμός) υποστήριξε ότι *«δεν μπορεί να χωριστεί ακριβώς στη μέση»*.

Σχετικά με την τρίτη δραστηριότητα, παρά το γεγονός ότι όλες οι ομάδες υπέδειξαν ως εργαλείο μέτρησης μήκους τον χάρακα, μόνο η ομάδα Ζ ανέφερε το σημείο 0 του χάρακα ως σημείο τοποθέτησης στη γωνία του θρανίου και έναρξης της διαδικασίας μέτρησης. Επιπλέον, παρατηρήθηκε έλλειψη ακρίβειας στην εξέλιξη της διαδικασίας μέτρησης, γεγονός που φάνηκε στα διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα για το ίδιο μετρούμενο μήκος: οι ομάδες Α, Β, Δ, Ε, ΣΤ υπολόγισαν το μήκος ίσο με 30 εκ., η ομάδα Ζ ίσο με 32 εκ. και η ομάδα Γ ίσο με 30,5 εκ. η οποία διατύπωσε την άποψη ότι αν χωριστεί στη μέση θα είναι 15 εκ. και 15,5 εκ. Η άποψη αυτή φανερώνει την έλλειψη κατανόησης των μαθητών της Γ ομάδας της έννοιας του μισού και του χωρισμού στη μέση.

Τέλος, στην τέταρτη δραστηριότητα σχετικά με τη δυνατότητα μέτρησης του θρανίου με τον σπασμένο χάρακα, προέκυψε ότι: Οι ομάδες Α, ΣΤ θεωρούν πως δεν γίνεται να μετρήσουν με τον σπασμένο χάρακα. *«Όχι, γιατί ο χάρακας είναι σπασμένος. Αν ξεκινούσε από το 0 θα ήταν πιο εύκολο»*. Οι ομάδες Β, Ε προκειμένου να υπολογίσουν το μήκος του χάρακα σε εκατοστά, απαριθμούν τις γραμμές που εικονίζουν τα εκατοστά του χάρακα και όχι τα διαστήματα μεταξύ δύο γραμμών υπολογίζοντας εσφαλμένα το μήκος 9 εκ., αντί για 8 εκ. *«Ναι, ο χάρακας είναι 9 εκ. γιατί ξεκινάει από το 3 και τελειώνει στο 11 και λείπει το 1 και το 2. Ο χάρακας χώρεσε στο θρανίο 3,5 φορές και το μήκος βγήκε 27,5 εκ.»*. Οι ομάδες Γ, Δ, Ζ ενώ κατανοούν ότι το μήκος του σπασμένου χάρακα είναι 8 εκ., τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους προκύπτουν διαφορετικά. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί στην λανθασμένη χρήση του χάρακα και την έναρξη μέτρησης από την αρχή του χάρακα και όχι από το σημείο 0. *«Ναι, ο χάρακας ξεκινάει από το 3 και τελειώνει στο 11, είναι 8 εκ. Ο χάρακας χώρεσε στο θρανίο 4 φορές, 8+8+8+6,5=30,5 εκ.»*, *«Ναι, ο χάρακας είναι από το 3 μέχρι το 11, δηλαδή 8 εκ. και το μήκος είναι 8+8+8+8=32 εκ»*, *«Ναι, στη θέση του 3 βάζουμε το 0, στη θέση του 4 το 1 ... στη θέση του 11 το 8. Βάζουμε το χάρακα οριζόντια και βρίσκουμε 28 εκ.»*.

Συμπεράσματα-Συζήτηση

Ένα πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων, είναι η έλλειψη συσχέτισης μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών σε σχέση με διαδικασίες μέτρησης τυπικών (χάρακας) και μη τυπικών μονάδων. Ως παράδειγμα αξίζει να αναφερθεί η ομάδα Ζ, η οποία ενώ στην δραστηριότητα 1 μετρά λανθασμένα το μήκος του θρανίου χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές (μη τυπικές) μονάδες μέτρησης, εκτελεί με ακρίβεια τις μετρήσεις με χάρακα και σπασμένο χάρακα. Αντίθετα, η ομάδα Β επιτυγχάνει στη δραστηριότητα 1, αλλά αποτυγχάνει στη μέτρηση μήκους με χάρακα. Από την προηγούμενη παρατήρηση θα μπορούσε να προκύψει η υπόθεση ότι οι δραστηριότητες μέτρησης μήκους με μη τυπικές μονάδες μέτρησης δεν επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στις τυπικές μετρήσεις με τον χάρακα. Προφανώς απαιτείται περισσότερη έρευνα για τη διερεύνηση αυτής της υπόθεσης.

Επιπλέον, το γεγονός ότι μόνο 1 από τις 7 ομάδες μετρά με το χάρακα, ξεκινώντας από το σημείο 0, ενώ οι υπόλοιπες εκλαμβάνουν ως σημείο αφετηρίας την αρχή του χάρακα, υποδεικνύει ότι μέχρι την Δ΄ δημοτικού, παρά τις οδηγίες του Α.Π.Σ. η μέτρηση με το χάρακα γίνεται σε διαδικαστικό επίπεδο. Ακόμα, όμως, και σε επίπεδο απλής διαδικασίας, η έρευνα έδειξε ότι στην πλειονότητά τους οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν τον χάρακα για να εκτελέσουν ακριβείς μετρήσεις.

Το γεγονός ότι οι μαθητές ήταν σε θέση να εργαστούν με μη τυπικές μονάδες μόνο στην περίπτωση που το μετρούμενο μήκος ήταν ακέραιο πολλαπλάσιο της μη τυπικής μονάδας, θεωρώντας ότι δεν μπορούν να έχουν μετρήσεις ακριβείας με μη τυπικές μονάδες (δραστηριότητα 2), αναδεικνύει την ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ χρήσης μη τυπικών μονάδων και χάρακα. Εντούτοις, η χρήση κάποιων βασικών υποδιαιρέσεων (1/2, 1/4) των μη τυπικών μονάδων ίσως να διευκόλυνε την κατανόηση της σχέσης μεταξύ των υποδιαιρέσεων του χάρακα. Πρόκειται για μια υπόθεση της οποίας ο έλεγχος απαιτεί περαιτέρω έρευνα.

Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης συμβαδίζουν με τα αποτελέσματα παρόμοιων μελετών στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι στρατηγικές που υιοθέτησαν οι μαθητές στην παρούσα έρευνα είχαν παρατηρηθεί και στην έρευνα των Nunes, Light και Mason (1993) σε έργο που αφορούσε τον σπασμένο χάρακα. Από τις σωστές στρατηγικές καταγράφηκαν η μέτρηση μονάδων και η αφαίρεση της αρχικής ένδειξης από την τελική, ενώ από τις λανθασμένες, η ανάγνωση του τελικού αριθμού και η μη ακριβής μέτρηση (παραμόρφωση κατά 2 ή 3 εκατοστά) λόγω ιδιομορφίας του χάρακα. Στη παρούσα μελέτη, 3 από τις 7 ομάδες υπολόγισαν σωστά το μήκος του χάρακα με την αφαίρεση της αρχικής ένδειξης από την τελική, ωστόσο δεν έδωσαν σωστό τελικό αποτέλεσμα λόγω μη ακριβούς μεταφοράς του χάρακα στο μετρούμενο μέγεθος. Οι υπόλοιπες ομάδες είτε θεώρησαν ως αδύνατη μια μέτρηση με σπασμένο χάρακα, είτε μέτρησαν απλά τις γραμμές. Στην έρευνα των Lehrer, Jenkins και Osana (1998) οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ταυτόχρονα δυο διαφορετικές μονάδες μέτρησης για τη διεξαγωγή μιας μέτρησης, στρατηγική που παρατηρήθηκε και στην παρούσα μελέτη -δραστηριότητα 1- με τη χρήση διαφορετικών μολυβιών για διεξαγωγή μιας μέτρησης.

Τέλος μια γενική αλλά ιδιαίτερα σημαντική παρατήρηση η οποία σημειώθηκε επίσης στις έρευνες των Stephan & Clements (2003) και Bragg & Outhred (2004) είναι πως οι περισσότεροι μαθητές μέχρι την Δ΄ δημοτικού δυσκολεύονται να μετρήσουν με ένα εργαλείο μέτρησης το οποίο δεν ξεκινά από το σημείο 0. Η ελλιπής κατανόηση των εννοιών της μονάδας και της μέτρησης μήκους οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στις διδακτικές προσεγγίσεις που ακολουθούνται για την διδασκαλία τους. Η διαπίστωση αυτή προβάλλει την ανάγκη αλλαγής του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας και την υιοθέτηση μιας διδακτικής προσέγγισης που να έχει ως στόχο την ουσιαστική μάθηση ή αλλιώς μάθηση με νόημα και δραστηριότητες που να κινούνται σε ένα αισθητηριακό επίπεδο προσέγγισης.

Βιβλιογραφία

Barrett, J. E., et al.(2011). Children’s unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM Mathematics Education*, 43, 637-650.

Blume, G. W., Galindo, E. & Walcott, C. (2007). Performance in measurement and geometry from the viewpoint of the Principles and Standards for School Mathematics. In P. Kloosterman & F. K. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*, 95 – 138.

Bragg, P., & Outhred, L. (2004). A measure of rulers: The importance of units in a measure. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, 159–166. Reston, VA: NCTM

Clements, D.(1999). Teaching Length Measurement: Research Challenges. *School Science and Mathematics*, 99, 5-11.

Clements, D. H. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In D. H. Clements, Sarama, J. & A-M DiBiase, *Engaging young children in mathematics*, pp. 299 – 317, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hart, K. M. (1981). *Children’s Understanding of Mathematics: 11–16*. London: John Murray.

Kamii, C. (1995). Why is the use of the ruler so hard? Proceedings of the 17th Conference for Psychology of Mathematics Education- North American Chapter, pp.3-8. Columbus, Ohio.

Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better? Teaching Children Mathematics, 13(3), 154–158.

Καφούση, Σ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2008). *Τα μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών*. *Αριθμοί και χώρος*. Πατάκη.

Lakoff, G., & Nunez, R.(2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*,Vol.1,137–167, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to principles and standards for school mathematic*s. Reston, VA: NCTM

National Center for Education Statistics (1991)The State Of Mathematics Achievement: Naep's 1990 Assessment

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction*,3, 39-54.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). The child's conception of geometry (E. A. Lunzer, Trans. 1981 Basic Books, Inc. ed.). New York: W. W. Norton & Company.

Stephan, M. & Clements, D.(2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. In *Learning and Teaching Measurement*: 2003 Yearbook, ed. by D. Clements and G. Bright, 3-16, NCTM

ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ Γ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Μάρκος Δάλλας
Δάσκαλος, ΜΔΕ «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ, Ελληνογαλλική Σχολή Πειραιά «Jeanne d' Arc»
m_dallas@outlook.com

Στην εργασία μελετώνται οι μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών μιας Γ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Ανατολικής Αττικής κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος πρόσθεσης αφαίρεσης. Τα αποτελέσματα φαίνεται να αναδεικνύουν το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών/-τριών χρησιμοποιούν μεταγνωστικές στρατηγικές που τους επιτρέπουν να ελέγχουν και να αξιολογούν την ορθότητα των διεργασιών κατά τις φάσεις επίλυσης τους προβλήματος, ιδιαιτέρως κατά τη φάση της αξιολόγησης της διαδικασίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μεταγνώση και οι μεταγνωστικές διαδικασίες ελέγχου βοηθούν τους μαθητές τόσο στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων όσο και στην εύρεση της ορθής λύσης (Lucangeli, Tressoldi & Cendron, 1998· Mokos & Kafousi, 2013 κ.α.), καθιστώντας τες αναγκαίες, ιδιαιτέρως στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Schoenfeld, 1992). Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας καταδεικνύει έναν σημαντικό αριθμό θεωρητικών και εμπειρικών ερευνών, που ωστόσο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι περιορισμένος. Οι έρευνες αυτές φανερώνουν τόσο την ικανότητα των μαθητών, από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, να αναπτύσσουν μεταγνωστικές στρατηγικές για τη διαχείριση μαθηματικών προβλημάτων καθώς και τις δυσκολίες που ανακύπτουν (Pettersson,199· Lucangeli et al 1998· Suriyon, Inprasitha & Sangaroon, 2013· Mokos & Kafousi, 2013). Στη συγκεκριμένη εργασία μελετώνται οι μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών/-τριών της Γ΄ Δημοτικού κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος πρόσθεσης αφαίρεσης εστιάζοντας στις φάσεις επίλυσης του προβλήματος.

ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

Ο Flavell (1976, σσ. 232) όρισε τη *μεταγνώση* ως «τη γνώση κάποιου σχετικά με τις γνωστικές του διαδικασίες και τα προϊόντα ή οτιδήποτε σχετίζεται με αυτά» (Desoete, Roeyers & Buysse, 2001). Η μεταγνώση σύμφωνα με τους Flavell (1976) και Flavell, Miller & Miller (2002) αναφέρεται πρώτον, στον ενεργό έλεγχο αυτών των διαδικασιών σε σχέση με τα γνωστικά αντικείμενα ή στοιχεία τα οποία συνήθως σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο στόχο ή σκοπό. Δεύτερον σχετίζεται με τη γνώση των ανθρώπων σχετικά με τις δικές τους δεξιότητες επεξεργασίας πληροφοριών, καθώς και των γνώσεών τους σχετικά με τη φύση των γνωστικών δραστηριοτήτων και των στρατηγικών για την επίλυση δραστηριοτήτων. Επιπλέον, περιλαμβάνει και διαδικαστικές δεξιότητες σχετικά με την παρακολούθηση και την αυτορρύθμιση των γνωστικών δραστηριοτήτων (Desoete et al, 2001· Mokos & Kafousi, 2013). Οι διαδικασίες ελέγχου επιτρέπουν στους μαθητές να αξιολογούν την ορθότητα των αποφάσεων, της λύσης και της απάντησης κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος και να προβαίνουν στις απαραίτητες διορθώσεις εφόσον κάτι τέτοιο είναι αναγκαίο (Τζεκάκη, 2007).

ΜΕΤΑΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση η ανάγκη να επιτευχθεί η ανάπτυξη των μεταγνωστικών λειτουργιών αποτελεί μια πτυχή ζωτικής σημασίας κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, δεδομένου ότι κάνει τους μαθητές καλύτερους λύτες προβλημάτων (Shoenfeld, 1992). Σε έρευνα της η Pettersson (1991) μελετώντας τη μαθηματική επίδοση των μαθητών Γ΄ και Στ΄ Δημοτικού συμπέρανε ότι οι μαθητές συχνά αμελούσαν να ελέγξουν την ορθότητα του αποτελέσματός τους και επικεντρώνονταν περισσότερο στην διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος παρά στο να κατανοήσουν το ίδιο το πρόβλημα. Αντιθέτως, οι Lucangeli et al (1998) μελετώντας τις γνωστικές και μεταγνωστικές ικανότητες των μαθητών από τη Γ΄ Δημοτικού έως την Α΄ Γυμνασίου κατά την επίλυση μαθηματικών λεκτικών προβλημάτων συμπέραναν ότι η αυτο - αξιολόγηση ως μεταγνωστική ικανότητα επαρκεί για την ορθή αξιολόγηση των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται κατά τη φάση της επίλυσης. Αντίστοιχα, οι Mokos & Kafousi (2013) που εξέτασαν τις αυθόρμητες μεταγνωστικές λειτουργίες των μαθητών Ε΄ Δημοτικού σε διάφορα είδη μαθηματικών προβλημάτων συμπέραναν ότι οι διαδικασίες ελέγχου και παρακολούθησης καθώς και οι αντίστοιχες μεταγνωστικές στρατηγικές, ιδιαιτέρως στα αυθεντικού τύπου προβλήματα, εμφανίζονται και στα δύο επίπεδα του γνωστικού συστήματος, σε κάθε τύπο μαθηματικού προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν δράσεις παρακολούθησης, όταν έλυναν μαθηματικά προβλήματα και προσπάθησαν να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η έρευνα των Suriyon et al (2013) οι οποίοι διερεύνησαν τη μεταγνωστική συμπεριφορά τεσσάρων μαθητών της Α΄ Δημοτικού στα μαθηματικά. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι είναι αναγκαίο οι μαθητές να επιχειρούν να βρουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης, ως μια σημαντική μεταγνωστική παράμετρο, που τους βοηθάει στον έλεγχο και την παρακολούθηση των διαδικασιών επίλυσης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πρόβλημα

Στην παρούσα μελέτη διερευνώνται οι μεταγνωστικές στρατηγικές των μαθητών/-τριών της Γ΄ Δημοτικού κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος πρόσθεσης αφαίρεσης. Ειδικότερα, η εστίαση έγκειται στο είδος των μεταγνωστικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τις φάσεις επίλυσης του προβλήματος.

Ερευνητικό εργαλείο

Το ερευνητικό εργαλείο περιλαμβάνει ένα μαθηματικό πρόβλημα πρόσθεσης αφαίρεσης με τα ερωτήματα των επιμέρους φάσεων. Το πρόβλημα επιλέχθηκε ώστε να περιέχει ρεαλιστικά στοιχεία, να μπορούν οι μαθητές να το λύσουν και να έχει πλοκή και πρόκληση. Μετά την αρχική κατασκευή του εργαλείου ακολούθησε πιλοτική εφαρμογή ώστε να ελεγχθεί η λειτουργικότητά του. Η τελική διαμόρφωση του ερευνητικού εργαλείου φαίνεται στον Πίνακα 1.

Πρόβλημα
Σε ένα δημοτικό σχολείο υπάρχουν τρία τμήματα τρίτης τάξης: Το τμήμα Α, το τμήμα Β και το τμήμα Γ. Στο τμήμα Γ υπάρχουν 20 παιδιά, στο τμήμα Β υπάρχουν 6 παιδιά λιγότερα. Στο τμήμα Α υπάρχουν 3 παιδιά περισσότερα από το τμήμα Β. Πόσα είναι όλα τα παιδιά μαζί;
Φάση 1: Πρόβλεψη του αποτελέσματος
1) Τι πιστεύεις ότι είναι αυτό το πρόβλημα, εύκολο ή δύσκολο; Αιτιολόγησε την απάντηση σου. 2) Ποιο περίπου περιμένεις να είναι το αποτέλεσμα; 3) Πώς το βρήκες; 4) Τέσσερις συμμαθητές σου κάνουν τις παρακάτω προβλέψεις. Ποιος νομίζεις ότι είναι πιο κοντά στη σωστή απάντηση; Τι λες εσύ; Γιάννης: Τα παιδιά είναι λιγότερα από 20. Μαρία: Τα παιδιά στο τμήμα Α και στο τμήμα Β είναι περίπου 40. Αντιγόνη: Συνολικά υπάρχουν λιγότερα από 60 παιδιά. Πέτρος: Γνωρίζουμε μόνο τον αριθμό των παιδιών της τρίτης τάξης. 5) Το αποτέλεσμα θα είναι μοναδικό ή θα μπορούσε να είναι και διαφορετικό;
Φάση 2: Σχέδιο λύσης
1) Πως θα λύσεις το πρόβλημα; (Αν ήθελες να περιγράψεις σε έναν συμμαθητή σου τον τρόπο που θα το έλυνες ώστε να τον βοηθήσεις να κάνει κι αυτός το ίδιο, τι θα του έλεγες; Πώς θα τον βοηθούσες να λύσει το πρόβλημα;) 2) Μπορείς να σκεφτείς άλλον τρόπο να λύσεις το πρόβλημα; Υπάρχουν άλλοι; Πόσοι;
Φάση 3: Εκτέλεση

Λύσε το πρόβλημα.
Φάση 4: Αξιολόγηση της διαδικασίας
1) Πόσο βέβαιος/-η είσαι ότι έχεις ακολουθήσει τη σωστή διαδικασία για να λύσεις το πρόβλημα; Αιτιολόγησε την απάντησή σου. 2) Τι λάθη αναμένεις να κάνουν οι συμμαθητές σου σ' αυτό το πρόβλημα; 3) Παρακάτω υπάρχουν τέσσερις απαντήσεις. Έλεγξε αν είναι σωστές. Που είναι το λάθος σε κάθε περίπτωση, αν υπάρχει; Ποιος πιστεύεις ότι έχει δώσει καθεμιά από τις παρακάτω απαντήσεις; (συμμαθητής-τρια/φίλος-η, δάσκαλος;). Σύγκρινε τις απαντήσεις, τι παρατηρείς; Πώς σχετίζονται με το δικό σου τρόπο λύσης;
Τα παιδιά στο τμήμα Γ είναι 20. Αν αφαιρέσω το 6 από το 20 θα βρω 14 που είναι τα παιδιά του τμήματος Β. Και αν προσθέσω το 3 στο 20 θα βρω 23 που είναι τα παιδιά του τμήματος Α. Τα παιδιά στο τμήμα Α και στο τμήμα Β είναι 23+14=20+10+7=37. Ξέρω ότι τα παιδιά στο τμήμα Γ είναι 20 άρα όλα μαζί τα παιδιά θα είναι 20+37=57.
Τα παιδιά στο τμήμα Γ είναι 20. Αν αφαιρέσω το 6 από το 20 θα βρω πόσα είναι τα παιδιά του τμήματος Β, που είναι 14. Τα παιδιά του τμήματος Α θα είναι όσα τα παιδιά του τμήματος Β συν 3, άρα 17. Όλα τα παιδιά μαζί είναι Α+Β+Γ= 17+14+20=17+13+1+20=30+20+1=51.
Στο τμήμα Γ έχουμε 20 παιδιά. Στο τμήμα Β θα έχουμε μείον 6 και στο τμήμα Α θα έχουμε συν 3. Συνολικά θα έχουμε 20-6+3=17.
Στο τμήμα Γ υπάρχουν 20 παιδιά. Στο τμήμα Β υπάρχουν 20-6 = 14. Στο τμήμα Α υπάρχουν 14+3 = 17. Όλα τα παιδιά μαζί είναι 20+14+17=51.
Φάση 5: Αξιολόγηση του αποτελέσματος
1) Πιστεύεις ότι το αποτέλεσμα που βρήκες είναι σωστό; Πώς είσαι σίγουρος/-η. Γιατί; 2) Αν έλυνες το πρόβλημα όταν θα είσαι στο γυμνάσιο θα έκανες κάτι διαφορετικό; Το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο ή θα διέφερε; Αν το έλυνε κάποιος φίλος/-η σου ή ο δάσκαλος σου; 3) Αν δώσεις το πρόβλημα σε ένα παιδί στην Κίνα πως νομίζεις ότι θα το λύσει; Θα το έκανε διαφορετικά; Θα έβρισκε το ίδιο αποτέλεσμα ή διαφορετικό;

Πίνακας 1: Ερευνητικό εργαλείο

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες που έλαβαν μέρος στην έρευνα είναι 26 μαθητές/-τριες (13 αγόρια, 13 κορίτσια) μιας Γ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Ανατολικής Αττικής. Η επιλογή του σχολείου έγινε λόγω προσβασιμότητας. Η Γ΄ Δημοτικού επιλέχθηκε καθώς σε αυτή την ηλικία οι μαθητές έχουν μάθει να διαχειρίζονται προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης παρόμοια με αυτό που επιλέχτηκε. Το μαθηματικό υπόβαθρο των συμμετεχόντων διαμορφώθηκε από στοιχεία που ανέκυψαν κατά την επικοινωνία του ερευνητή με τον εκπαιδευτικό της τάξης και τους μαθητές. Προέκυψε ότι έντεκα μαθητές/-τριες είναι πολύ καλοί έως άριστοι στα μαθηματικά και δηλώνουν ότι τους αρέσει να επιλύουν δραστηριότητες, επτά μαθητές/-τριες είναι καλοί στα μαθηματικά καταβάλλοντας προσπάθεια για την επίλυση δραστηριοτήτων και έξι μαθητές έχουν μέτρια επίδοση στα μαθηματικά ενώ ένας/μία από αυτούς/-ες δήλωσε ότι τα μαθηματικά δεν του/της αρέσουν.

Μέθοδος

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Μάρτιο και τον Απρίλιο του 2014. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι ποιοτική και ειδικότερα μελέτη περίπτωσης (Yin, 2003). Για την διενέργεια της έρευνας πραγματοποιήθηκαν κλινικές συνεντεύξεις (Hunting, 1997) με τη μέθοδο της «φωναχτής σκέψης» (Charters, 2003) με κάθε μαθητή/-τρια στην αίθουσα υπολογιστών του σχολείου και διήρκησαν από 30 έως 45 λεπτά, μία διδακτική ώρα. Κατά τη διάρκεια των κλινικών συνεντεύξεων ο ερευνητής παρουσίαζε το ερευνητικό εργαλείο στους μαθητές, οι οποίοι μελετούσαν την εκφώνηση του προβλήματος και επιχειρούσαν να απαντήσουν προφορικά στα ερωτήματα. Ο ερευνητής παρουσίαζε σταδιακά τα ερωτήματα στους συμμετέχοντες και όπου χρειαζόταν παρενέβαινε προκειμένου να δώσει διευκρινήσεις ή να προτρέψει τους μαθητές να εκφράσουν τη σκέψη τους λεκτικά.

Τρόπος ανάλυσης

Στην πρώτη φάση της ανάλυσης έγινε απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων. Στη δεύτερη φάση πραγματοποιήθηκε κατηγοριοποίηση των επεισοδίων αναλύοντας τα απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα κατά φάση και κατά ερώτημα σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση που προέκυψε από τη βιβλιογραφία, Metacognitive Awareness Index (MAI) (Schraw & Dennison, 1994) και από το τροποποιημένο MAI που χρησιμοποίησαν οι Mokos & Kafousi (2013), σε συνδυασμό με ορισμένες τροποποιήσεις και προσθήκες που ανέκυψαν από μια πρώτη παρατήρηση των δεδομένων. Η ανάλυση των δεδομένων στηρίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο των Nelson & Narens (1990), το οποίο περιλαμβάνει δύο επίπεδα, το αντικείμενο-επίπεδο και το μετα-επίπεδο και την αλληλεπίδραση ανάμεσα στον έλεγχο και τις λειτουργίες παρακολούθησης. Ειδικότερα, η ανάλυση των δεδομένων αποτελεί συνδυασμό παραγωγικής ανάλυσης περιεχομένου (Deductive Content Analysis) και θεμελιωμένης θεωρίας (Grounded Theory) (Strauss & Corbin, 1998). Σε πρώτο επίπεδο από την ανάλυση πέντε απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων κρίθηκε αναγκαία η τροποποίηση της αρχικής κατηγοριοποίησης προκειμένου ορισμένες κατηγορίες να συγχωνευτούν, άλλες να παραλειφθούν καθώς και να προστεθούν νέες κατηγορίες όπου κρίθηκε σκόπιμο. Στο δεύτερο επίπεδο της ανάλυσης χρησιμοποιώντας την τελική κατηγοριοποίηση όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, πραγματοποιήθηκε εκ νέου ανάλυση των απομαγνητοφωνημένων αποσπασμάτων κατά φάση και κατά ερώτημα για κάθε μαθητή/-τρια ξεχωριστά εντοπίζοντας τις μεταγνωστικές συμπεριφορές. Ο Πίνακας 3 αποτελεί υπόμνημα επεξήγησης των συμβόλων που παρουσιάζονται στους υπόλοιπους πίνακες.

Δ. (Γνωστικές) / Μεταγνωστικές συμπεριφορές	Γ. Μεταγνωστικές στρατηγικές
1. Συνειδητά επικεντρώνει την προσοχή του σε σημαντικές πληροφορίες	1. ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ
2. Προσπαθεί να κατακερματίσει τη μελέτη σε μικρότερα βήματα	
3. Επανεκτιμά τις υποθέσεις	2. ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ
4. Σταματά και ξαναδιαβάζει το πρόβλημα	
5. Σταματά και λύνει ξανά το πρόβλημα από την αρχή	
6. Σταματά και λύνει ξανά το πρόβλημα από το σημείο που εντόπισε το λάθος	
7. Διαβάζει προσεκτικά τις οδηγίες πριν ξεκινήσει ένα πρόβλημα (task)	3. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ
8. Προσπαθεί να θυμηθεί αν έχει λύσει κάποιο παρόμοιο πρόβλημα	
9. Αναπαριστά το πρόβλημα σχηματικά	
10. Εξηγεί τη χρησιμότητα της στρατηγικής του	4. ΕΠΙΛΥΣΗΣ
11. Επιχειρεί να βρει διαφορετικούς τρόπους για να λύσει το πρόβλημα	
12. Αναρωτιέται αν υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος να λύσει το πρόβλημα	
13. Νιώθει πιο σίγουρος καταγράφοντας τα δεδομένα του προβλήματος	
14. Εκτίμηση του βαθμού δυσκολίας του προβλήματος	5. ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ
15. Εκτίμηση του αποτελέσματος	
16. Ελέγχει την ορθότητα της εκτίμησης άλλων	
17. Υποθέτει λάθη που μπορεί να κάνουν άλλοι	
18. Κατανόησε τι του ζητούσε το πρόβλημα	6. ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ
19. Συχνά (περιοδικά) ανακεφαλαιώνει για να βοηθηθεί να καταλάβει σημαντικές σχέσεις	
20. Αναρωτήθηκε αν η απάντηση έχει νόημα	
21. Σταματά ταχτικά για να ελέγξει την δική του κατανόησή	
22. Ελέγχει την στρατηγική των άλλων και εντοπίζει πιθανά λάθη και τα διορθώνει	
23. Ελέγχει τους υπολογισμούς του αν είναι σωστοί	
24. Ελέγχει τους υπολογισμούς άλλων αν είναι σωστοί και εντοπίζει πιθανά λάθη και τα διορθώνει	
25. Γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε	7. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
26. Ανακεφαλαιώνει τι έμαθε αφού τελειώσει	
27. Ρωτά τον εαυτό του αν έχει θεωρήσει όλες τις περιπτώσεις μετά από τη λύση ενός προβλήματος	
28. Πριν παρουσιάσει την τελική λύση του προβλήματος εξακριβώνει την ορθότητα της	
29. Επιβεβαιώνει το βαθμό ορθότητας της λύσης του με αναφορά στη δική του στρατηγική	
30. Επιβεβαιώνει το βαθμό ορθότητας της λύσης του με αναφορά σε άλλες λύσεις	
31. Αποφαίνεται για τη μοναδικότητα του αποτελέσματος με αναφορά στην (ενδεχόμενη) ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών	

Πίνακας 2: Τελική κατηγοριοποίηση

Δ 1-31: Μεταγνωστικές συμπεριφορές Γ 1-7: Μεταγνωστικές στρατηγικές (Αναλυτικότερα βλ. Πίνακα 2)	Σ: Σύνολο, Ο1: Ομάδα1, Ο2: Ομάδα 2

Πίνακας 3: Υπόμνημα επεξήγησης συμβόλων

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Φάσεις επίλυσης του προβλήματος με τις δημοφιλέστερες μεταγνωστικές στρατηγικές

Ο1	Γ1		Γ2			Γ3	Γ4	Γ5	Γ6						Γ7			
	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ6	Δ9	Δ10	Δ17	Δ19	Δ20	Δ21	Δ22	Δ23	Δ24	Δ25	Δ28	Δ29	Δ30
Σ	7	6	16	7	5	1	5	11	8	16	16	16	2	16	9	2	4	2

Πίνακας 4: Φάση 4 Αξιολόγηση της Διαδικασίας, Ομάδα1

Από τον Πίνακα 4 προκύπτει ότι οι μαθητές που κατά τη φάση 4, της αξιολόγησης της διαδικασίας, εμφανίζουν τις περισσότερες μεταγνωστικές στρατηγικές είναι 16 και αποτελούν την ομάδα 1. Οι δημοφιλέστερες μεταγνωστικές συμπεριφορές-στρατηγικές που εμφανίζονται και στους 16 μαθητές είναι η μεταγνωστική συμπεριφορά Δ3(επανεκτιμά τις υποθέσεις) – Γ2 (μεταγνωστική στρατηγική διόρθωσης) και οι μεταγνωστικές συμπεριφορές Δ20 (αναρωτήθηκε αν η απάντηση έχει νόημα), Δ21(σταματά τακτικά για να ελέγξει τη δική του κατανόηση), Δ22 (ελέγχει την στρατηγική των άλλων και εντοπίζει πιθανά λάθη και τα διορθώνει), Δ24 (ελέγχει τους υπολογισμούς άλλων αν είναι σωστοί και εντοπίζει πιθανά λάθη και τα διορθώνει), που αντιστοιχούν στη μεταγνωστική στρατηγική Γ6 (ελέγχου κατανόησης). Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι 11 από τους 16 μαθητές εμφανίζουν τη μεταγνωστική συμπεριφορά Δ17 (υποθέτει λάθη που μπορεί να κάνουν άλλοι) που αντιστοιχεί στη μεταγνωστική στρατηγική Γ5 (εκτίμησης). Τέλος, 9 από τους 16 μαθητές χρησιμοποιούν τη μεταγνωστική συμπεριφορά Δ25 γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε) ως στρατηγική αξιολόγησης (Γ7).

Ο2	Γ1		Γ2		Γ6				Γ7
	Δ1	Δ2	Δ3	Δ6	Δ19	Δ20	Δ21	Δ23	Δ25
Σ	3	2	4	1	2	5	4	1	3

Πίνακας 5: Φάσεις 2 & 4 Σχέδιο λύσης και Αξιολόγηση της Διαδικασίας, Ομάδα 2

Από τον Πίνακα 5 παρατηρείται ότι οι μαθητές που κατά τις φάσεις 2 και 4 ταυτόχρονα εμφανίζουν τον μεγαλύτερο αριθμών επαναλήψεων των ίδιων μεταγνωστικών συμπεριφορών-στρατηγικών είναι 5 και αποτελούν την ομάδα 2. Η δημοφιλέστερη μεταγνωστική συμπεριφορά που εμφανίζεται και στους 5 μαθητές είναι η Δ20 (αναρωτήθηκε αν η απάντηση έχει νόημα) που σχετίζεται με τη μεταγνωστική στρατηγική Γ5 (ελέγχου κατανόησης) Ωστόσο, η μεταγνωστική συμπεριφορά Δ3 (επανεκτιμά τις υποθέσεις) που αντιστοιχεί στη στρατηγική Γ2 (διόρθωσης) και η μεταγνωστική συμπεριφορά Δ21 (σταματά ταχτικά για να ελέγξει την δική του κατανόησή) που αντιστοιχεί στη μεταγνωστική στρατηγική Γ6 (ελέγχου κατανόησης), εμφανίζεται στους 4 από τους 5 μαθητές.

Οι δημοφιλέστερες μεταγνωστικές συμπεριφορές που εμφανίζονται συχνότερα και στις δύο ομάδες είναι η Δ3 (επανεκτιμά τις υποθέσεις) – Γ2 (στρατηγική διόρθωσης) και οι Δ20 (αναρωτήθηκε αν η απάντηση έχει νόημα), Δ21 (σταματά τακτικά για να ελέγξει την δική του κατανόηση) – Γ6 (στρατηγικές έλεγχου κατανόησης). Ενώ, οι μισοί και παραπάνω μαθητές και των δύο ομάδων χρησιμοποιούν τη μεταγνωστική συμπεριφορά Δ25(γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε) – Γ7(στρατηγική αξιολόγησης).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν σε μεγάλο βαθμό αποτελέσματα ερευνών των Lucangeli et al (1998) και Mokos & Kafousi (2013) σχετικά με το ρόλο της αξιολόγησης, αφού οι μισοί περίπου μαθητές της τάξης φάνηκε να έχουν επίγνωση της επίδοσης τους. Η εστίαση στις φάσεις επίλυσης στην παρούσα έρευνα ανέδειξε κυρίαρχες τις στρατηγικές διόρθωσης, ελέγχου κατανόησης και αξιολόγησης. Οι στρατηγικές ελέγχου κατανόησης και αξιολόγησης χρησιμοποιούνται κυρίως σε ένα μετα-επίπεδο για την ανάπτυξη μεταγνωστικών λειτουργιών παρακολούθησης συμβάλλοντας στον καλύτερο έλεγχο των διεργασιών, κάτι που υποστηρίζουν και οι Mokos & Kafousi (2013).

Όμως, τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας έρχονται σε αντίθεση με αυτά της Pettersson (1991) αφού οι περισσότεροι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα του αποτελέσματος παρακινούμενοι ενδεχομένως και από το πλαίσιο του προβλήματος, όπως φαίνεται από τη δομή του ερευνητικού εργαλείου, ιδιαιτέρως κατά τη φάση αξιολόγησης της διαδικασίας. Λίγοι μαθητές φαίνεται να εστιάζουν μόνο στην εκτέλεση των διαδικασιών. Οι περισσότεροι μάλιστα επιχειρούν να εντοπίσουν και διαφορετικές στρατηγικές επανεξετάζοντας τα δεδομένα, γεγονός που όπως επισημαίνουν και οι Suriyon et al (2013) αποτελεί ένα είδους ελέγχου και επαλήθευσης της ορθότητας της λύσης.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών/-τριών της συγκεκριμένης Γ΄ Δημοτικού χρησιμοποιούν μεταγνωστικές στρατηγικές που μάλλον τους επιτρέπουν να αναπτύσσουν ικανότητες παρακολούθησης για τον έλεγχο των διαδικασιών κατά τις φάσεις επίλυσης. Ιδιαιτέρως κατά τη φάση 4, της αξιολόγησης της διαδικασίας, πιθανότατα ισχυροποιείται η ικανότητα των μαθητών να προβαίνουν σε διαδικασίες ελέγχου (εκτίμηση, κατανόηση, αξιολόγηση) και διόρθωσης επιτρέποντάς τους να διαχειριστούν καλύτερα τα δεδομένα του προβλήματος.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Charters, E. (2003). The use of think-aloud methods in qualitative research an introduction to think-aloud methods. *Brock Education*, 12(2), 68-82.

Desoete, A., Roeyers, H. & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem Solving in Grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, 34, 435-449. doi: 10.1177/002221940103400505

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.

Lucangeli, D., Tressoldi, E., P. & Cendron, M. (1998). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: Validation of a comprehensive model. *Contemporary Educational Psychology*, 23, 257–275.

Mokos. E. & Kafoussi, S. (2013). Elementary students' spontaneous metacognitive functions in different types of mathematical problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 242-267. doi: 1 0.4471 /redimat.201 3.29

Nelson, T. O. & Narens, L. (1990). Metamemory: A theoretical framework and new findings. *The Psychology of Learning and Motivation*, 26, 125-141.

Pettersson, A. (1991). Pupils' mathematical performance in grades 3 and 6. A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 439-450.

Schoenfeld, A. H., (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schraw, G. & Dennison, R., S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, 19, 460-475.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory (2nd ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.

Suriyon, A., Inprasitha, M. & Sangaroon, K. (2013). Students' metacognitive strategies in the mathematics classroom using open approach. *Psychology*, 4(7), 585-591.

Τζεκάκη, Μ. (2007). Πρόγραμμα με δραστηριότητες. *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα. Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία* (σσ. 123-146). Αθήνα: Gutenberg.

Yin, R. (2003). *Case study Research: Design and Method*, 3rd edition, Thousand Oaks: Sage Publications.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΤΥΠΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΤΥΠΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ

Δεσλή Δέσποινα & Γιακουμή Μαρία
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.
ddesli@eled.auth.gr & magiakou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εξέταση της επίδοσης και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν μαθητές/τριες δημοτικού κατά την εκτίμηση μέτρησης μήκους. Σε έρευνα που διεξήχθη, ζητήθηκε από 46 παιδιά Γ' τάξης και 41 παιδιά Ε' τάξης να εκτιμήσουν το μήκος αντικειμένων μέσα από έργα που αφορούσαν τέσσερις κατηγορίες ερωτήσεων: προσανατολισμού, οπτικής παρεμβολής, χωρικής διάστασης και αναπαραστάσεων. Η επίδοσή τους ήταν σε γενικές γραμμές χαμηλή και επηρεάστηκε από την ηλικία, το είδος των μονάδων μέτρησης (τυπικές και άτυπες) και την κατηγορία ερωτήσεων. Επίσης, παρουσιάστηκε ένα μεγάλο εύρος στρατηγικών, η συχνότητα χρήσης των οποίων βρέθηκε να συσχετίζεται τόσο με το είδος των μονάδων μέτρησης όσο και με την ηλικία των παιδιών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι τύποι της εκτίμησης που συναντώνται πιο συχνά στη βιβλιογραφία είναι τρεις: η εκτίμηση μέτρησης, η εκτίμηση ποσότητας και η υπολογιστική εκτίμηση (Hogan & Brezinski, 2003), με την τελευταία να έχει μελετηθεί περισσότερο (Sowder, 1992) και να αποτελεί μέρος της τυπικής μαθηματικής εκπαίδευσης πολλών χωρών, μεταξύ των οποίων και η Ελλάδα. Από την άλλη, η εκτίμηση μέτρησης, η οποία αναφέρεται στη διαδικασία του να φτάνει κανείς σε μία μέτρηση χωρίς τη βοήθεια εργαλείων (Bright, 1976, στο Sowder, 1992), έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον λιγότερων ερευνητών. Το γεγονός αυτό ίσως οφείλεται σε κάποιες ιδιαιτερότητες που αυτή παρουσιάζει, όπως η εξάρτησή της από τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση (Joram, Subrahmanyam & Gelman, 1998), αλλά και η στενότερη σύνδεσή της με το πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζεται, σε σχέση με την υπολογιστική εκτίμηση (Sowder, 1992). Επίσης, έχει εκφραστεί ανησυχία αναφορικά με την ποικιλία του περιεχομένου των στοιχείων που επισημαίνονται ως εκτίμηση μέτρησης (π.χ., μήκος, μάζα, όγκος, χρόνος) και κατά πόσο όλα αυτά τα στοιχεία συνδέονται με μία μόνο δεξιότητα (Hogan & Brezinski, 2003). Από τα μεγέθη αυτά, η μέτρηση μήκους συστηματικά διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο με εστίαση στον ακριβή υπολογισμό και πολύ περιορισμένα στην εκτίμηση, την οποία μελετά η παρούσα εργασία.

Οι πρώτες έρευνες για την εκτίμηση μέτρησης εστίασαν στην ακρίβεια των εκτιμήσεων, ενώ με το πέρασμα των χρόνων τέθηκαν στο επίκεντρο οι γνωστικές λειτουργίες και οι στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν οι συμμετέχοντες στις εκτιμήσεις τους (Joram et al., 1998). Οι πιο σύγχρονες έρευνες για την εκτίμηση μέτρησης μήκους, στις οποίες συμμετείχαν παιδιά και έφηβοι, μελέτησαν κυρίως τη χρήση στρατηγικών, την ακρίβεια των εκτιμήσεων, καθώς και τα μαθησιακά αποτελέσματα από τη διδασκαλία στρατηγικών. Φαίνεται, μάλιστα, να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη διερεύνηση των σημείων αναφοράς που χρησιμοποιούνται, αφού με τον τρόπο αυτό δίνεται νόημα στις εκτιμήσεις (Joram et al., 1998. Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman & Subrahmanyam, 2005).

Τα μαθησιακά αποτελέσματα από τη διδασκαλία της στρατηγικής των σημείων αναφοράς διερεύνησαν οι Joram et al. (2005) σε Αμερικανούς μαθητές Γ’ τάξης. Η χρήση της στρατηγικής αυτής βρέθηκε να συνδέεται με καλύτερες αναπαραστάσεις των τυπικών μονάδων γραμμικής μέτρησης (linear units) το οποίο οδήγησε τους μαθητές σε περισσότερο ακριβείς εκτιμήσεις. Σημαντική επίδραση στην ακρίβεια των εκτιμήσεων βρέθηκε και για τη στρατηγική της χρήσης του σώματος ως εργαλείου μέτρησης (body ruler), η οποία διδάχθηκε σε μαθητές γυμνασίου από τις Η.Π.Α., για τις ανάγκες της έρευνας των Jones, Taylor και Broadwell (2009).

Παρά την αναγνώριση της σημασίας των σημείων αναφοράς για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και τη βελτίωσή τους, ιδιαίτερο ενδιαφέρον προσφέρει η μελέτη της ποικιλίας των εκτιμήσεων ως αποτέλεσμα της χρήσης προσωπικών στοιχείων αναφοράς. Για παράδειγμα, οι Gooya, Khosroshahi και Teppo (2011) βρήκαν ότι μαθήτριες 15-16 ετών στο Ιράν συχνά εμφάνισαν συγκεκριμένες προσωπικές προτιμήσεις κατά τη διαδικασία εκτιμήσεων μέτρησης, όπως να στηρίζονται σε προηγούμενες εμπειρίες με φυσικά αντικείμενα και αυτά να αποτελούν το μη-τυπικό μέτρο αναφοράς τους. Επιπλέον, υπήρχαν συγκεκριμένες καταστάσεις εκτίμησης που ευνοούσαν περισσότερο ή λιγότερο τη χρήση τέτοιων προσωπικών προτιμήσεων. Ανάλογη σημασία αποδίδουν στη σύνδεση ανάμεσα στις επιτυχείς εκτιμήσεις μέτρησης μήκους και τις απαιτήσεις συγκεκριμένων έργων εκτίμησης οι Jones, Gardner, Taylor, Forrester και Andre (2012) στην έρευνά τους με Αμερικανούς μαθητές γυμνασίου. Επιπρόσθετα, αν και η ακρίβεια των εκτιμήσεων στην έρευνα αυτή βρέθηκε να είναι χαμηλή, φάνηκε να επηρεάζεται από το είδος των μονάδων μέτρησης στις οποίες εκφράζονται, με τις άτυπες μονάδες να συνδέονται με υψηλότερη ακρίβεια εκτιμήσεων σε σχέση με τις τυπικές (εκατοστά).

Παρατηρείται ότι, από τις λιγοστές έρευνες στη σύγχρονη βιβλιογραφία σχετικά με την εκτίμηση μέτρησης μήκους, οι περισσότερες έχουν εστιάσει στην επίδοση των εφήβων, ενώ υπάρχει έλλειψη ερευνών σε παιδιά. Επιπρόσθετα, περιορισμένη είναι η έρευνα σχετικά με τη διδασκαλία της εκτίμησης μέτρησης μήκους. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός η εξέταση της επίδοσης μαθητών/τριών δημοτικού στην εκτίμηση μέτρησης μήκους και αφετέρου η διερεύνηση των στρατηγικών μέσω των οποίων πραγματοποιείται αυτή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν 46 μαθητές/τριες της Γ’ τάξης (μ.ο. ηλικίας: 8 χρόνια και 8 μήνες) και 41 μαθητές/τριες της Ε’ τάξης (μ.ο. ηλικίας: 10 χρόνια και 9 μήνες) που φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της Θεσσαλονίκης και κάλυπταν διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας και δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία στην εκτίμηση μέτρησης μήκους.

Σχεδιασμός - *Εργαλείο μέτρησης*. Σχεδιάστηκαν 8 έργα, καθένα από τα οποία αφορούσε επιμέρους κατηγορίες ερωτήσεων εκτίμησης μέτρησης μήκους. Τα Έργα 1 και 2 εξέτασαν την επίδραση του *προσανατολισμού* των αντικειμένων στις εκτιμήσεις μέτρησης μήκους: στους συμμετέχοντες παρουσιάστηκαν ράβδοι σε οριζόντια (Έργο 1) και κατακόρυφη διάταξη (Έργο 2) και τους ζητήθηκε να εκτιμήσουν το μήκος τους. Τα Έργα 3 και 4 είχαν σκοπό τη διερεύνηση της επίδρασης των *οπτικών παρεμβολών* στις εκτιμήσεις μέτρησης: οι συμμετέχοντες είδαν μαύρες γραμμές σχεδιασμένες σε λευκό φόντο (Έργο 3) και σε περίπλοκο μοτίβο (Έργο 4) και τους ζητήθηκε να εκτιμήσουν το μήκος τους. Με τα Έργα 5 και 6 μελετήθηκε η επίδραση των *χωρικών διαστάσεων* στις εκτιμήσεις μέτρησης μήκους: παρουσιάστηκαν στους συμμετέχοντες πραγματικά αντικείμενα τριών διαστάσεων (Έργο 5) και εικόνες πραγματικών αντικειμένων δύο διαστάσεων (Έργο 6) και έπρεπε να εκτιμήσουν το μήκος των αντικειμένων. Τα Έργα 7 και 8 εξέτασαν τις *αναπαραστάσεις* των παιδιών για τις *τυπικές μονάδες μέτρησης* μήκους: από τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να σχεδιάσουν γραμμές συγκεκριμένου μήκους (Έργο 7) και να δείξουν πραγματικά αντικείμενα συγκεκριμένου μήκους (Έργο 8).

Σε όλα τα έργα (εκτός των έργων 7 και 8), οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις τους εκφρασμένες σε τυπικές μονάδες μέτρησης (εκατοστά) και σε άτυπες μονάδες μέτρησης, με τη βοήθεια αντικειμένων καθημερινής χρήσης (π.χ. μολύβια, καλαμάκια, συνδετήρες) τα οποία τους προσφέρονταν. Τα αντικείμενα που αναφέρονταν στα έργα ήταν μικρού και μεγάλου μήκους (1-30 εκατοστά και 65-100 εκατοστά, αντίστοιχα). Τέλος, η σειρά παρουσίασης των έργων διαφοροποιούνταν στους συμμετέχοντες, προκειμένου να αποφευχθεί η πιθανότητα η σειρά παρουσίασης να επηρεάσει την επίδοσή τους.

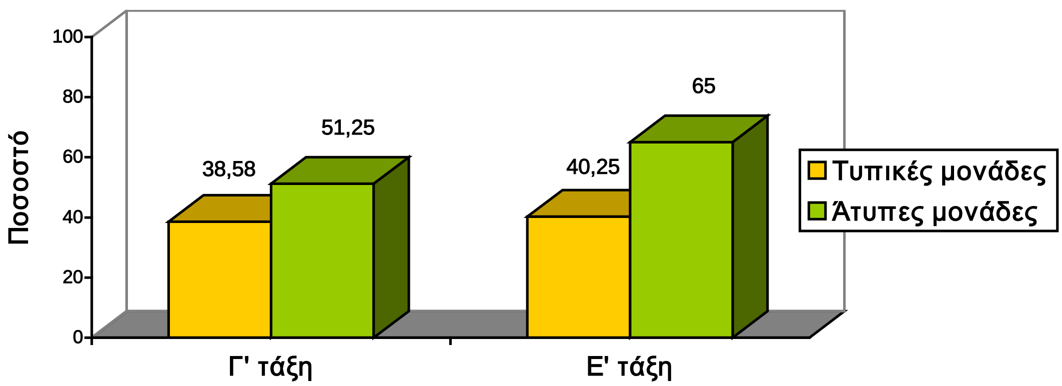
Διαδικασία. Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά σε ήσυχο χώρο του σχολείου τους. Η συμμετοχή τους ήταν εθελοντική και ανώνυμη. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 20 λεπτά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Α. Συνολική επίδοση. Για τον έλεγχο της επίδοσης των συμμετεχόντων χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που είχαν ποσοστιαία απόκλιση κατά 30% από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης (π.χ. για ένα αντικείμενο μήκους 100 εκατοστών θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που του απέδιδαν μήκος από 70 έως 130 εκατοστά). Η γενική επίδοση των παιδιών ήταν χαμηλή, με ποσοστά επιτυχίας κοντά στο 45% και το 53% για τους μαθητές/τριες της Γ' και της Ε' τάξης, αντίστοιχα. Μάλιστα, η διαφορά αυτή στην επίδοση μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική ($t=-2{,}357$, $df=85$, $p<.05$).

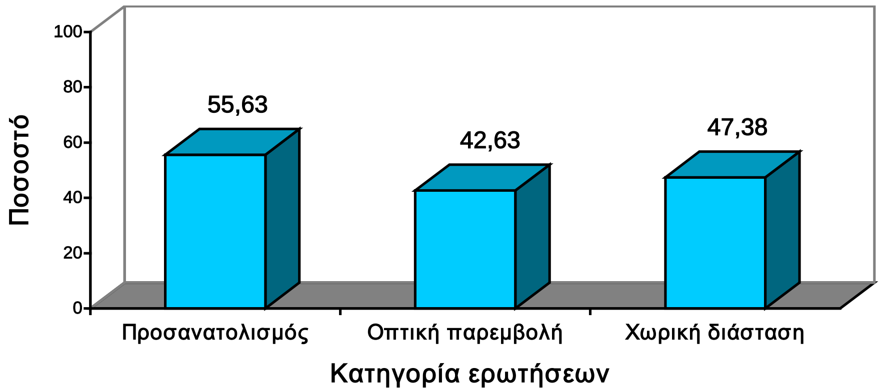
Οι εκτιμήσεις των παιδιών επηρεάστηκαν από το είδος των μονάδων μέτρησης στις οποίες αυτές εκφράστηκαν: στο σύνολό τους τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες εκτιμήσεις με τις άτυπες μονάδες μέτρησης σε σχέση με τις εκτιμήσεις τους με εκατοστά ($t=-5{,}016$, $df=86$, $p<.001$). Αυτές οι διαφορές επιβεβαιώθηκαν και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά ($t= -2{,}375$, $df=45$, $p<.05$ και $t=-5{,}124$, $df=40$, $p<.001$, για την Γ' και την Ε' τάξη, αντίστοιχα). Επίσης, οι εκτιμήσεις των παιδιών της Γ' και της Ε' τάξης με εκατοστά υπήρξαν ιδιαίτερα χαμηλές και δε διέφεραν στατιστικά σημαντικά ως προς την τάξη ($t=-0{,}309$, $df=85$, $p=.758$), ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις εκτιμήσεις τους με άτυπες μονάδες μέτρησης που ήταν πολύ περισσότερο επιτυχείς ($t=-2{,}658$, $df=85$, $p<.01$), με το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της Ε' τάξης να φτάνει το 65% (βλ. Σχήμα 1).

Η επίδοση των συμμετεχόντων επηρεάστηκε από την κατηγορία των ερωτήσεων: όλα τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στα έργα προσανατολισμού σε σχέση με τα έργα οπτικής παρεμβολής και χωρικής διάστασης ($t=5{,}967$, $df=86$, $p<.001$ και $t=3{,}558$,



Σχήμα 1: Ποσοστό επιτυχίας ανά τάξη ως προς το είδος των μονάδων μέτρησης

df=86, p<.01, αντίστοιχα) [1]. Επίσης, οι επιδόσεις των παιδιών στα έργα χωρικής διάστασης ήταν στατιστικά σημαντικά καλύτερες από τις επιδόσεις στα έργα οπτικής παρεμβολής (t=-2,081, df=86, p<.05). Συνεπώς, τα έργα προσανατολισμού ευνόησαν επιτυχείς εκτιμήσεις πολύ περισσότερο από τα άλλα έργα, ενώ οι λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις σημειώθηκαν στα έργα οπτικής παρεμβολής (βλ. Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Ποσοστό επιτυχίας ανά κατηγορία ερωτήσεων στις εκτιμήσεις με τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης

Οι εκτιμήσεις των παιδιών στις ερωτήσεις της κατηγορίας των αναπαραστάσεων δεν διαφοροποιήθηκαν σε ποσοστά επιτυχίας από τις εκτιμήσεις τους (σε εκατοστά) στις υπόλοιπες κατηγορίες ερωτήσεων (t=1,926, df=86, p=.057, t=1,133, df=86, p=.260 και t=-0,226, df=86, p=.822, για τη σύγκριση της κατηγορίας των αναπαραστάσεων με τις κατηγορίες του προσανατολισμού, της οπτικής παρεμβολής και της χωρικής διάστασης, αντίστοιχα). Ωστόσο, όταν ελέγχθηκαν οι επιδόσεις των παιδιών μεταξύ των έργων σε κάθε κατηγορία ερωτήσεων, βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των έργων της κατηγορίας του προσανατολισμού (Έργα 1 και 2) και μεταξύ των έργων της κατηγορίας των αναπαραστάσεων (Έργα 7 και 8). Συγκεκριμένα, σημειώθηκαν καλύτερες επιδόσεις, μόνο για τις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης, όταν ο προσανατολισμός των αντικειμένων ήταν οριζόντιος (t=4,597, df=86, p<.001), καθώς και στη σχεδίαση γραμμών σε σχέση με την υπόδειξη αντικειμένων (t=3,965, df=86, p<.001). Αντίθετα, οι επιδόσεις του συνόλου των παιδιών ήταν παρόμοιες στα έργα της κατηγορίας του προσανατολισμού στις εκτιμήσεις που έγιναν με εκατοστά (t=1,296, df=86, p=.198), όπως επίσης παρόμοιες επιδόσεις παρουσιάστηκαν μεταξύ των έργων (Έργα 3 και 4) της κατηγορίας της οπτικής παρεμβολής (t=-1,656, df=86, p=.101 και t=0,390, df=86, p=.697, για τις εκτιμήσεις με εκατοστά και με άτυπες μονάδες μέτρησης, αντίστοιχα) και μεταξύ των έργων (Έργα 5 και 6) της κατηγορίας της χωρικής διάστασης (t=-0,271, df=86, p=.787 και t=-0,800, df=86, p=.426, για τις εκτιμήσεις με εκατοστά και με άτυπες μονάδες μέτρησης, αντίστοιχα).

Τέλος, το μήκος των αντικειμένων δε φάνηκε να επηρεάζει την επίδοση των παιδιών, η οποία υπήρξε παρόμοια τόσο για τα αντικείμενα μικρού μήκους όσο και για τα αντικείμενα μεγάλου μήκους (t=1,735, df=86, p=.086).

Β. Στρατηγικές των παιδιών. Από όλους τους συμμετέχοντες ζητήθηκε να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, ανεξάρτητα από το αν αυτές ήταν σωστές ή λανθασμένες. Οι απαντήσεις αυτές κατηγοριοποιήθηκαν αναδεικνύοντας τη χρήση συγκεκριμένων στρατηγικών.

Για τις εκτιμήσεις με εκατοστά, οι στρατηγικές ήταν οι εξής: *1. Εκτίμηση βασισμένη σε ιδιοσυγκρασιακές απόψεις* (δεν καταδείχθηκε κάποια συγκεκριμένη στρατηγική που να αναφέρεται σε αυτό που ρωτήθηκαν), *2. Εκτίμηση βασισμένη στην όψη του αντικειμένου* (κρίσεις σχετικά με το μέγεθος των αντικειμένων, χωρίς άλλες αναφορές, περισσότερο διευκρινιστικές), *3. Εκτίμηση βασισμένη στη μνήμη* (ανάκληση μετρήσεων παρόμοιων αντικειμένων στο παρελθόν), *4. Εκτίμηση βασισμένη σε σημεία αναφοράς* (αντικείμενα, μοτίβα πάνω στο έργο, προηγούμενα έργα ή μέρη και διαστάσεις του σώματος), *5. Εκτίμηση βασισμένη σε επαναλήψεις των τυπικών μονάδων μέτρησης* (χρήση αναπαραστάσεων που είχαν για τις τυπικές μονάδες μέτρησης, π.χ. τα εκατοστά πάνω στον χάρακά τους), και *6. Εκτίμηση βασισμένη σε διαίρεση του αντικειμένου σε μέρη* (χωρισμός του αντικειμένου σε μέρη, εκτίμηση του καθενός ξεχωριστά και άθροισμα του μήκους των μερών αυτών).

Για τις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης, πέρα από τις έξι προηγούμενες στρατηγικές, εμφανίστηκε μία επιπλέον στρατηγική: *7. Εκτίμηση βασισμένη σε μαθηματικούς υπολογισμούς* (εκτίμηση του μήκους της άτυπης μονάδας μέτρησης και στη συνέχεια διαίρεση, προκειμένου να βρεθεί πόσες άτυπες μονάδες μέτρησης χωρούν στο αντικείμενο).

Η στρατηγική των επαναλήψεων των μονάδων μέτρησης παρουσιάστηκε πιο συχνά για το σύνολο των συμμετεχόντων. Ωστόσο, η συχνότητα χρήσης των στρατηγικών επηρεάστηκε από το είδος των μονάδων μέτρησης: ενώ βρέθηκε ποικιλία στη χρήση στρατηγικών στις εκτιμήσεις με εκατοστά, παρατηρήθηκε μονομέρεια στη χρήση τους στις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης (βλ. Πίνακα 1). Συγκεκριμένα, οι στρατηγικές των εκτιμήσεων που βασίστηκαν στην όψη του αντικειμένου, τη μνήμη, τα σημεία αναφοράς και τη διαίρεση του αντικειμένου παρατηρήθηκαν πιο συχνά στις εκτιμήσεις με τυπικές σε σχέση με τις άτυπες μονάδες μέτρησης (t=3,611, df=86, p<.01, t=3,824, df=86, p<.001, t=7,233, df=86, p<.001 και t=2,346, df=86, p<.05, αντίστοιχα). Η στρατηγική των επαναλήψεων των μονάδων μέτρησης παρατηρήθηκε πιο συχνά στις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης (t=-7,289, df=86, p<.001), ενώ οι ιδιοσυγκρασιακές απαντήσεις παρατηρήθηκαν με παρόμοια συχνότητα τόσο στις εκτιμήσεις με τυπικές όσο και με άτυπες μονάδες μέτρησης (t=-0,358, df=86, p=.721).

Στρατηγική	**Μ.Ο. χρήσης (mx=12) τυπικές μονάδες**	**Μ.Ο. χρήσης (mx=12) - άτυπες μονάδες**
1. Ιδιοσυγκρασιακές απόψεις	2,25 (3.56)	2,39 (3.09)
2. Όψη αντικειμένου	1,63 (3.24)	0,77 (2.13)
3. Μνήμη	0,34 (.816)	0,01 (.10)
4. Σημεία αναφοράς	2,94 (3.27)	0,59 (1.26)
5. Επαναλήψεις μονάδων μέτρησης	4,25 (4.18)	7,71 (3.62)
6. Διαίρεση αντικειμένου	0,59 (1.49)	0,24 (.73)
7. Μαθηματικοί υπολογισμοί	-	0,29 (.92)

Πίνακας 1: Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) της χρήσης των στρατηγικών στις εκτιμήσεις με τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης

Ηλικιακές διαφορές επίσης εντοπίστηκαν στη χρήση των στρατηγικών: ενώ οι μαθητές της Γ' τάξης χρησιμοποιούσαν ένα εύρος στρατηγικών, όπως τις επαναλήψεις των μονάδων μέτρησης, τις εκτιμήσεις βασισμένες στην όψη του αντικειμένου, τα σημεία αναφοράς αλλά και τις ιδιοσυγκρασιακές τους απόψεις, οι μαθητές της Ε' τάξης στηρίχτηκαν κυρίως στη στρατηγική των επαναλήψεων των μονάδων μέτρησης και σε αυτή των σημείων αναφοράς.

Εξετάζοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και την επιτυχία στις εκτιμήσεις, βρέθηκε ότι, στις εκτιμήσεις με εκατοστά, όλες οι στρατηγικές εμφανίζονταν τόσο με επιτυχείς όσο και με μη επιτυχείς εκτιμήσεις. Αντίθετα, στις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης, βρέθηκε υψηλή αρνητική συσχέτιση μόνο ανάμεσα στις ιδιοσυγκρασιακές απαντήσεις και τα ποσοστά επιτυχών εκτιμήσεων (Pearson's r= -0,583, p<.001) και θετική συσχέτιση ανάμεσα στη στρατηγική των σημείων αναφοράς και αυτής των επαναλήψεων των μονάδων μέτρησης με τα ποσοστά επιτυχίας στις εκτιμήσεις (r= 0,220, p<.01 και r=0,555, p<.001, αντίστοιχα).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της έρευνας που διεξήχθη ήταν η εξέταση της επίδοσης μαθητών Γ' και Ε' τάξης δημοτικού στις εκτιμήσεις μέτρησης μήκους, καθώς και η διερεύνηση των στρατηγικών τις οποίες χρησιμοποιούν για να πραγματοποιήσουν τις εκτιμήσεις αυτές. Αναφορικά με την επίδοση, αυτή ήταν σε γενικές γραμμές χαμηλή, ενώ φάνηκε να επηρεάζεται από την ηλικία των συμμετεχόντων. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με παλαιότερες έρευνες (Joram et al., 1998). Φαίνεται, δηλαδή, να επιβεβαιώνεται ότι όσο αυξάνεται η ηλικία βελτιώνεται και η ικανότητα εκτίμησης μέτρησης, σχετικά με το μήκος. Αντίθετα, εντύπωση προκάλεσε το γεγονός ότι τα παιδιά παρουσίασαν παρόμοια επίδοση στις εκτιμήσεις με αντικείμενα μικρού και μεγάλου μήκους.

Η επίδοση επηρεάστηκε, επίσης, από το είδος των μονάδων μέτρησης και την κατηγορία ερωτήσεων. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις που εκφράστηκαν με άτυπες μονάδες μέτρησης ήταν καλύτερες από αυτές που εκφράστηκαν με τυπικές μονάδες μέτρησης, γεγονός που είχαν επισημάνει και οι Jones et al. (2012). Μάλιστα, στην παρούσα έρευνα οι επιδόσεις των μαθητών τόσο της Γ’ όσο και της Ε’ τάξης ήταν παρόμοιες και ιδιαίτερα χαμηλές στις εκτιμήσεις με εκατοστά, γεγονός που δημιουργεί προβληματισμό, δεδομένης της εξοικείωσης που έχουν τα παιδιά με τα εκατοστά ως μονάδα μέτρησης, ήδη από τη Β’ τάξη του δημοτικού. Σχετικά με την κατηγορία ερωτήσεων, οι εκτιμήσεις του συνόλου των συμμετεχόντων ήταν καλύτερες στις εκτιμήσεις των έργων της κατηγορίας του προσανατολισμού, ακολούθησαν οι εκτιμήσεις στα έργα της χωρικής διάστασης, ενώ λιγότερο καλές ήταν οι εκτιμήσεις στα έργα της οπτικής παρεμβολής. Ωστόσο, αν και φάνηκε η επίδοση να διαφοροποιείται από έργο σε έργο, δεν είναι απόλυτα σαφής ο τρόπος με τον οποίο η κατηγορία ερωτήσεων επηρεάζει την επίδοση, αφού για τις μισές μόνο κατηγορίες ερωτήσεων (προσανατολισμός, αναπαραστάσεις τυπικών μονάδων μέτρησης) βρέθηκαν σημαντικές διαφορές μεταξύ των έργων. Αυτή την ασάφεια επισημαίνουν και οι Jones et al. (2012), στην έρευνα των οποίων βρέθηκαν σημαντικές διαφορές μόνο μεταξύ των έργων της χωρικής διάστασης.

Οι μαθητές της Ε’ τάξης εμφάνισαν συχνότερα περισσότερο σύνθετες στρατηγικές εκτίμησης μήκους σε σχέση με αυτούς της Γ’ τάξης. Τόσο στις εκτιμήσεις με τυπικές όσο και με άτυπες μονάδες μέτρησης, συχνότερη στρατηγική φάνηκε να είναι αυτή των επαναλήψεων των μονάδων μέτρησης, εύρημα που συμφωνεί με παλαιότερες έρευνες (Joram et al., 1998). Εντύπωση προκάλεσε το γεγονός ότι η δεύτερη πιο συχνή στρατηγική ήταν αυτή των σημείων αναφοράς, παρόλο που θεωρείται ότι δύσκολα χρησιμοποιείται από κάποιον αυθόρμητα, χωρίς δηλαδή να έχει προηγηθεί διδασκαλία της (Joram et al., 2005). Και οι δύο αυτές στρατηγικές συνδέθηκαν με επιτυχείς εκτιμήσεις. Ωστόσο, ενώ υπήρξε μεγαλη ποικιλία στη χρήση των στρατηγικών στις εκτιμήσεις με εκατοστά, παρατηρήθηκε μονομέρεια στις εκτιμήσεις με άτυπες μονάδες μέτρησης. Φαίνεται, δηλαδή, ότι οι εκτιμήσεις μέτρησης μήκους εκφρασμένες με τυπικές μονάδες μέτρησης (σε εκατοστά) ευνόησαν περισσότερο τη χρήση διαφορετικών στρατηγικών σε σχέση με τις εκτιμήσεις εκφρασμένες με άτυπες μονάδες μέτρησης. Το στοιχείο αυτό έχει ενδιαφέρον να διερευνηθεί περισσότερο.

Δεδομένης της αξίας των εκτιμήσεων μέτρησης στην καθημερινότητά μας, είναι ανάγκη να δοθεί έμφαση στην εκπαίδευση των παιδιών σχετικά με αυτές. Είναι σημαντικό να εισαχθούν οι εκτιμήσεις μέτρησης στο σχολικό πρόγραμμα προκειμένου οι μαθητές αφενός να αναπτύξουν πολύτιμες δεξιότητες για τη ζωή και αφετέρου να εξοικειωθούν με την έκφραση μήκους τόσο με τυπικές όσο και με άτυπες μονάδες μέτρησης χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών εκτίμησης. Άλλωστε η σπουδαιότητα των σημείων αναφοράς –ως στρατηγική- στις εκτιμήσεις έχει επισημανθεί από προηγούμενες μελέτες (Joram et al., 2005. Jones et al., 2009) και έχει αναδειχθεί ότι συμβάλλει στην προώθηση της επίδοσης των παιδιών σε εκτιμήσεις μέτρησης μήκους (Hagena, 2014). Μέσα από συστηματική διδασκαλία των μετρήσεων μπορεί έτσι να πραγματοποιηθεί μια καλή αρχή και να τεθούν τα γνωστικά θεμέλια των εκτιμήσεων μέτρησης.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Δεν ήταν εφικτή η σύγκριση ανάμεσα στην επίδοση των παιδιών στην κατηγορία των αναπαραστάσεων και τις επιδόσεις τους στις υπόλοιπες κατηγορίες ερωτήσεων, καθώς η συγκεκριμένη κατηγορία περιελάμβανε ερωτήσεις για εκτιμήσεις μόνο με εκατοστά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gooya, Z., Khosroshahi, L.G., & Teppo, A.R. (2011). Iranian students' measurement estimation performance involving linear and area attributes of real-world objects. *ZDM Mathematics Education, 43*, 709–722.

Hagena, M. (2014). Fostering students' measurement estimation performances in a short period of time. In S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 6* (p.89). Vancouver, Canada: PME.

Hogan, T. & Brezinski, K. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-281.

Jones, M.G., Gardner, G.E., Taylor, A.R., Forrester, J.H., & Andre, T. (2012). Students' accuracy of measurement estimation: context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics, 112*(3), 171–178.

Jones, G., Taylor, A., & Broadwell, B. (2009). Estimating linear size and scale: body rulers. *International Journal of Science Education*, *31*(11), 1495-1509.

Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, *68*(4), 413-449.

Joram, E., Gabriele, A.J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 4-23.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan Publishing Company.

ΓΝΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Δεσλή Δέσποινα & Κυριακορεΐζη Αικατερίνη
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.
ddesli@eled.auth.gr & kyriakor@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της γνώσης περιεχομένου και της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των υποψήφιων δασκάλων. Συνολικά 150 προπτυχιακοί και μεταπτυχιακοί φοιτητές συμπλήρωσαν δύο ερωτηματολόγια, ένα που εξέταζε τις γνώσεις τους και ένα άλλο τις παιδαγωγικές τους γνώσεις στις πράξεις με κλάσματα. Εντοπίστηκαν ελλείψεις των προπτυχιακών φοιτητών στις κλασματικές πράξεις και μοιρασμένες απαντήσεις ως προς την έμφαση στην απόκτηση διαδικαστικού ή εννοιολογικού τύπου γνώσεων από τους μαθητές. Αντίθετα, διαπιστώθηκαν υψηλές επιδόσεις των μεταπτυχιακών φοιτητών στις πράξεις με κλάσματα και έμφαση των περισσότερων στην εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές. Η επίδοση των μελλοντικών εκπαιδευτικών και η παιδαγωγική τους προσέγγιση σχετίζονται θετικά, καθώς οι υψηλές επιδόσεις στο γνωστικό αντικείμενο συνοδεύονταν από περισσότερες εννοιολογικού τύπου προσεγγίσεις των πράξεων με κλάσματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια βασικό σημείο σύγκρουσης αρκετών ερευνητών αποτελεί η προτεραιότητα της γνώσης περιεχομένου σε σχέση με την παιδιαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών. Η γνώση περιεχομένου αναφέρεται στη σαφή κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου και, κυρίως, διακρίνεται σε: α) εννοιολογική γνώση, δηλαδή, κατανόηση και ερμηνεία των εννοιών και των σχέσεων μεταξύ των εννοιών και β) διαδικαστική γνώση, δηλαδή, εκτέλεση μίας σειράς βημάτων και ενεργειών για την επίλυση προβλημάτων, χωρίς απαραίτητα την κατανόηση νοημάτων (Hiebert & Lefevre, 1986). Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου αφορά στην ικανότητα του εκπαιδευτικού να παρουσιάσει το μαθηματικό περιεχόμενο με κατασκευή και χρήση μοντέλων, παραδειγμάτων, αναπαραστάσεων, προκειμένου να ενισχυθεί η κατανόηση των μαθητών (Ball, 2008. Κολέζα, 2009).

Εκτενής είναι η βιβλιογραφία σχετικά με τις γνώσεις των εκπαιδευτικών αναφορικά με διάφορες έννοιες των μαθηματικών και, κυρίως, με τα κλάσματα. Ο Newton (2008), για παράδειγμα, βρήκε πως οι γνώσεις υποψήφιων εκπαιδευτικών στα κλάσματα είναι περισσότερο διαδικαστικού τύπου, με τις πανεπιστημιακές σπουδές να λειτουργούν ενισχυτικά στις εννοιολογικές γνώσεις τους στα κλάσματα, αλλά όχι στην ποικιλία των αναπαραστάσεών τους γι' αυτά. Αντίστοιχα, οι Rayner, Pitsolantis και Osana (2009) τονίζουν τις εννοιολογικές και διαδικαστικές αδυναμίες υποψήφιων εκπαιδευτικών στα κλάσματα. Τα ευρήματα των σχετικών ερευνών φαίνεται να συγκλίνουν αναφορικά με τις επιδόσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών στη διαίρεση κλασμάτων. Οι Lin, Becker, Byun, Yang και Huang (2013) ανέδειξαν την αδυναμία εννοιολογικής κατανόησης Κινέζων και Αμερικανών υποψήφιων εκπαιδευτικών στη διαίρεση κλασμάτων. Παρόμοια, οι Leung και Carbone (2013) αναφέρουν την παρουσία κυρίως διαδικαστικής γνώσης στη διαίρεση κλασμάτων από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς στο Χονγκ Κονγκ, ενώ οι Lo και Luo (2012) υποστηρίζουν ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί στην Ταιβάν έχουν επιφανειακή κατανόηση και όχι επαρκείς εξειδικευμένες γνώσεις για τη διαίρεση κλασμάτων, καθώς δυσκολεύονται τόσο στη διατύπωση προβλημάτων μερισμού όσο και στη χρήση κατάλληλων εικονικών διαγραμμάτων.

Διερευνώντας τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των υποψηφίων εκπαιδευτικών, τόσο ο Konig (2013) όσο και οι Lim-Teo, Chua, Cheang και Yeo (2007) διαπίστωσαν ότι αυτές βελτιώνονται κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Επιπρόσθετα, οι Dreher και Kuntze (2015) μελετώντας τις παιδαγωγικές γνώσεις και τις αντιλήψεις υποψήφιων και εν ενεργεία Γερμανών μαθηματικών βρήκαν ότι τόσο οι υποψήφιοι όσο και οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί δεν αντιλαμβάνονται πλήρως το ρόλο-κλειδί των πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Βέβαια, οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί προτείνουν πιο χρήσιμες αναπαραστάσεις για τη διδασκαλία των κλασμάτων και τονίζουν περισσότερο τη σημασία της εναλλαγής αναπαραστάσεων για την ενίσχυση της κατανόησης των μαθητών τους.

Μέσα από τη συγκριτική εξέταση των γνώσεων περιεχομένου και των παιδαγωγικών γνώσεων περιεχομένου των υποψήφιων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ενός πανεπιστημίου των Η.Π.Α., ο Steele (2013) συμπέρανε ότι η καλή γνώση του περιεχομένου από τη μεριά των εκπαιδευτικών οδηγεί σε αυξημένη ικανότητα διδακτικού χειρισμού του μαθηματικού αντικειμένου. Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες που πέτυχαν υψηλές επιδόσεις στη γεωμετρία και τις μετρήσεις ήταν σε θέση να διατυπώσουν σαφέστερους και πιο συγκεκριμένους στόχους για τις μελλοντικές διδασκαλίες τους. Στην ίδια κατεύθυνση είναι και τα αποτελέσματα των Adnan, Zakaria και Maat (2012) οι οποίοι βρήκαν ότι οι γνώσεις περιεχομένου και η μαθηματική εμπειρία των εκπαιδευτικών οδηγούν σε βελτίωση και προαγωγή των διδασκαλιών τους στα μαθηματικά. Παρόμοια, οι Baumert και Kunter (2013) διαπίστωσαν σχέση ανάμεσα στις γνώσεις περιεχομένου και τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των εν ενεργεία εκπαιδευτικών στη Γερμανία. Όπως αναφέρουν οι ερευνητές, η επάρκεια των γνώσεων περιεχομένου ορίζει την πιθανή ανάπτυξη των παιδαγωγικών τους γνώσεων περιεχομένου, ενώ αντίθετα ελλείμματα στο γνωστικό αντικείμενο λειτουργούν εις βάρος της παιδαγωγικής επάρκειας των εκπαιδευτικών και αυτά τα ελλείμματα στο αντικείμενο των μαθηματικών δεν μπορούν να αντισταθμιστούν από την παιδαγωγική ευελιξία των εκπαιδευτικών.

Γενικά, ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται στις γνώσεις περιεχομένου και τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των εκπαιδευτικών, καθώς έχει διαπιστωθεί ότι αποτελούν σημαντικοί παράγοντες τόσο στην ποιότητα της προσφερόμενης διδασκαλίας όσο και στην πρόοδο των μαθητών (Baumert & Kunter, 2013). Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός να μελετήσει τη σχέση ανάμεσα στις γνώσεις περιεχομένου και τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των υποψήφιων δασκάλων πάνω σε ένα συγκεκριμένο θέμα, αυτό των πράξεων με κλάσματα, και αφετέρου να εξετάσει αν αυτή η σχέση επηρεάζεται από το επίπεδο σπουδών των εκπαιδευτικών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 150 υποψήφιοι εκπαιδευτικοί: 136 προπτυχιακοί (90,7%) και 14 μεταπτυχιακοί (9,3%) φοιτητές/ριες του Π.Τ.Δ.Ε. του Α.Π.Θ., από τους οποίους το 87,3% ήταν γυναίκες και το 12,7% άντρες. Όλοι οι προπτυχιακοί φοιτητές/ριες παρακολουθούσαν το 3ο έτος σπουδών, ενώ οι μεταπτυχιακοί προέρχονταν ισάριθμα και από τα δύο έτη σπουδών του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Σχεδιάστηκαν δύο ερωτηματολόγια τα οποία βασίστηκαν και επέκτειναν τα εργαλεία έρευνας των Lin et al. (2013), Li και Huang (2008), Newton (2008) και Lim-Teo et al. (2007). Το πρώτο ερωτηματολόγιο είχε στόχο να εξετάσει τις γνώσεις περιεχομένου των συμμετεχόντων στις κλασματικές πράξεις και περιελάμβανε δύο έργα: το πρώτο αφορούσε ασκήσεις και το δεύτερο προβλήματα με τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις με κλάσματα. Το δεύτερο ερωτηματολόγιο είχε στόχο να εξετάσει τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των συμμετεχόντων στις κλασματικές πράξεις και περιελάμβανε τρία έργα. Στα δύο πρώτα έργα παρουσιάζονταν στους συμμετέχοντες ασκήσεις με κλασματικές πράξεις, από τις οποίες οι μισές ήταν λυμένες ορθά και ζητούνταν να περιγράψουν πώς θα εξηγούσαν τη λύση στους μαθητές και οι άλλες μισές ήταν λυμένες λανθασμένα και ζητούνταν να περιγράψουν πώς θα άρουν τις παρανοήσεις των μαθητών. Στο τρίτο έργο παρουσιάζονταν προβλήματα με κλασματικές πράξεις και οι συμμετέχοντες καλούνταν να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο θα τα εξηγήσουν στους μαθητές τους.

Τα αριθμητικά δεδομένα στις ασκήσεις και τα προβλήματα του δεύτερου ερωτηματολογίου ήταν ίδια με αυτά του πρώτου και αφορούσαν πράξεις τόσο με γνήσια κλάσματα όσο και με μεικτούς αριθμούς. Η σειρά παρουσίασης των έργων και στα δύο ερωτηματολόγια εναλλασσόταν, ώστε να διασφαλιστεί ότι η σειρά παρουσίασης των έργων δεν επηρεάζει τις απαντήσεις των συμμετεχόντων.

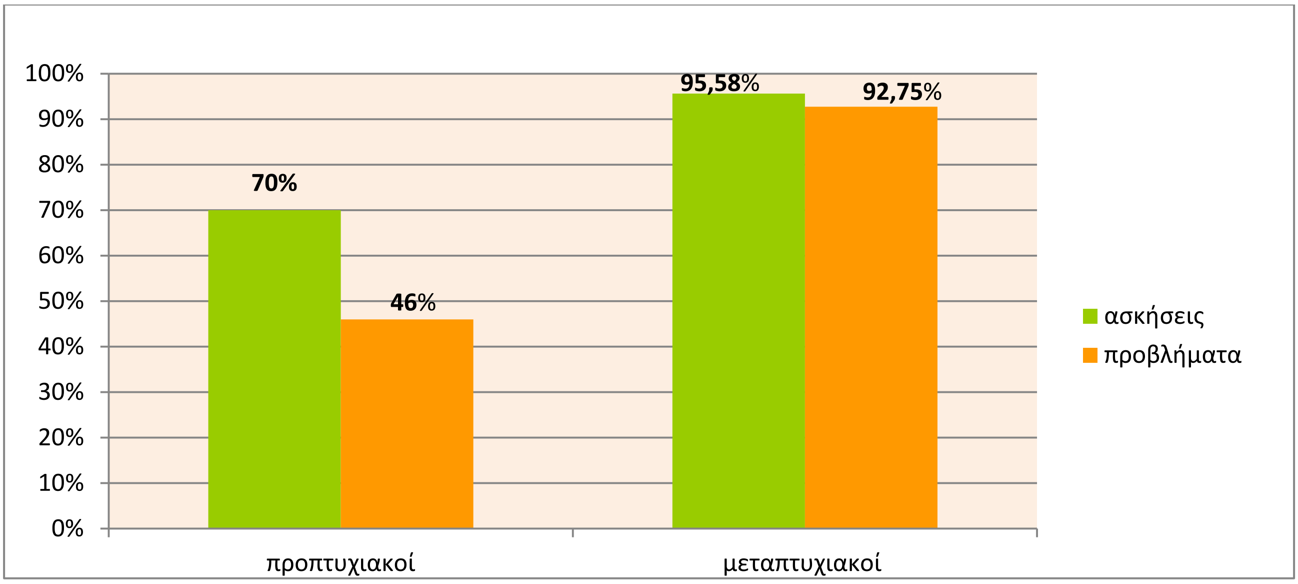
Διαδικασία. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη, έγινε σε εθελοντική βάση και διήρκεσε περίπου 15 λεπτά για το ερωτηματολόγιο των γνώσεων περιεχομένου και 20 λεπτά για αυτό των παιδαγωγικών γνώσεων περιεχομένου. Μεσολάβησαν δύο εβδομάδες ανάμεσα στη χορήγηση των ερωτηματολογίων, τα οποία επιστράφηκαν συμπληρωμένα κατά 90% και 70%, αντίστοιχα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Γνώσεις περιεχομένου στα κλάσματα. Οι επιδόσεις των συμμετεχόντων διαφοροποιήθηκαν ως προς το επίπεδο φοίτησής τους (Σχήμα 1) και, ειδικότερα, οι μεταπτυχιακοί φοιτητές πέτυχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στο σύνολο των έργων με τις πράξεις κλασμάτων ($t=-4{,}402$, $df=133$, $p<.001$). Αυτές οι διαφορές επιβεβαιώθηκαν ξεχωριστά για τις επιδόσεις τόσο στις ασκήσεις ($t=-3{,}674$, $df=133$, $p< .001$) όσο και στα προβλήματα ($t=-4{,}393$, $df= 133$, $p<.001$). Αντίθετα, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη συνολική επίδοση των συμμετεχόντων ούτε ως προς το φύλο ούτε ως προς τη σειρά παρουσίασης των έργων.

Η μελέτη της επίδοσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών για κάθε κλασματική πράξη ξεχωριστά έδειξε ότι η πράξη της πρόσθεσης κλασμάτων ήταν αυτή με τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας ($p<.001$) σε σχέση με τις άλλες πράξεις, ενώ ακολουθούν η πράξη της αφαίρεσης, της διαίρεσης και, τέλος, του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (βλ. Πίνακα 1).

Οι προπτυχιακοί συμμετέχοντες παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις πράξεις με γνήσια κλάσματα παρά στις πράξεις με μεικτούς αριθμούς ($t=10{,}187$, $df=120$, $p<.001$), ενώ δεν βρέθηκε τέτοια διαφορά στους μεταπτυχιακούς συμμετέχοντες.



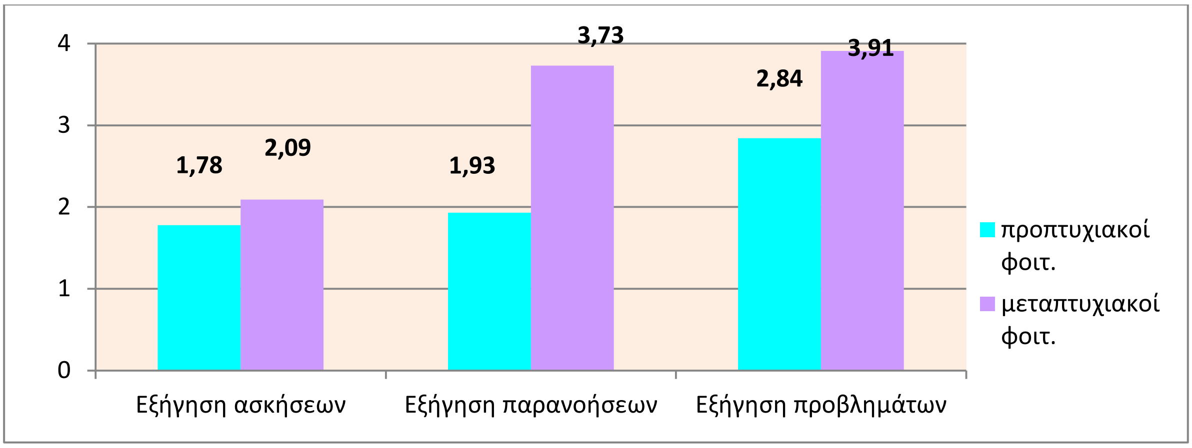
Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στα έργα γνώσης περιεχομένου ως προς το επίπεδο φοίτησης

	Επίπεδο φοίτησης των φοιτητών		
Επίδοση σε:	Προπτυχιακοί	Μεταπτυχιακοί	Σύνολο
Πρόσθεση	2,21 (.80)	2,93 (.26)	2, 28 (.79)
Αφαίρεση	1,95 (.90)	2,93 (.26)	2,05 (.91)
Πολλαπλασιασμό	1,54 (1.1)	2,71 (.82)	1,66 (1.05)
Διαίρεση	1,74 (1.1)	2,79 (.57)	1,85 (1.1)

Μέγιστος αριθμός σωστών απαντήσεων: 3

Πίνακας 1: Μέσοι όροι (τυπικές αποκλίσεις) σωστών απαντήσεων για κάθε κλασματική πράξη ως προς το επίπεδο φοίτησης

β. Παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου στα κλάσματα. Κάθε απάντηση με έμφαση στην απόκτηση διαδικαστικών γνώσεων βαθμολογούνταν με 0 μονάδες, ενώ κάθε απάντηση με έμφαση στην απόκτηση εννοιολογικών γνώσεων βαθμολογούνταν με 1 μονάδα. Η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 12 μονάδες και μια συνολική βαθμολογία πιο κοντά στο 12 δηλώνει έμφαση στην απόκτηση εννοιολογικής γνώσης, ενώ μια συνολική βαθμολογία πιο κοντά στο 0 δηλώνει έμφαση στην απόκτηση διαδικαστικής γνώσης. Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές έδωσαν περισσότερες εννοιολογικού τύπου απαντήσεις στο σύνολο των έργων του ερωτηματολογίου (μέσος όρος 9,72, τυπική απόκλιση: 1,73) σε σχέση με τους προπτυχιακούς φοιτητές (μέσος όρος 7,03, τυπική απόκλιση: 4,84), όμως αυτές οι διαφορές οριακά δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές (t=-1,794, df=40, p=.080). Ωστόσο, όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για κάθε έργο, βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες συμμετεχόντων στα Έργα 2 και 3 (t=-3,354, df=50, p<.01 και t=-2,091, df=40, p<.05, αντίστοιχα). Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές έδωσαν μακράν περισσότερες εννοιολογικού τύπου απαντήσεις, όπως η κατανόηση μέσω γνωστικής σύγκρουσης, η κατανόηση μέσα από τη χρήση μοντέλων ή τη χρήση χειραπτικού υλικού, ενώ λιγότεροι ήταν οι προπτυχιακοί φοιτητές που επέλεξαν μια τέτοιου τύπου εξήγηση (Σχήμα 2). Το φύλο των συμμετεχόντων, όπως και η σειρά παρουσίασης των έργων, δεν βρέθηκε να επηρεάζουν τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στο σύνολο των έργων της παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου.



Σχήμα 2: Μέσοι όροι (mx=4) σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στα έργα παιδαγωγική γνώσης περιεχομένου ως προς το επίπεδο φοίτησης

Αναφορικά με την επίδοση των συμμετεχόντων ξεχωριστά για κάθε κλασματική πράξη, προέκυψε ότι οι απαντήσεις των δύο ομάδων για τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και της διαίρεσης κλασμάτων ήταν παρόμοιες (βλ. Πίνακα 2), ενώ, αντίθετα, στον πολλαπλασιασμό οι απαντήσεις των μεταπτυχιακών φοιτητών ήταν περισσότερο βασισμένες στην εννοιολογική κατανόηση σε σχέση με τις απαντήσεις των προπτυχιακών φοιτητών (t=-3,071, df=41, p<.05).

Οι προπτυχιακοί φοιτητές έδωσαν με παρόμοια συχνότητα εννοιολογικού και διαδικαστικού τύπου απαντήσεις τόσο στις ερωτήσεις που αφορούσαν γνήσια κλάσματα όσο και στις ερωτήσεις που αφορούσαν μεικτούς αριθμούς. Αντίθετα, οι μεταπτυχιακοί φοιτητές έδωσαν στατιστικά σημαντικά περισσότερες εννοιολογικού τύπου απαντήσεις στις ερωτήσεις με γνήσια κλάσματα σε σχέση με τις ερωτήσεις που αφορούσαν μεικτούς αριθμούς (t=4,667, df=10, p<.01).

	Επίπεδο φοίτησης των φοιτητών		
Επίδοση σε:	Προπτυχιακοί	Μεταπτυχιακοί	Σύνολο
Πρόσθεση	1,76 (1.35)	2,27 (.64)	1,93 (1.2)
Αφαίρεση	1,88 (1.26)	2,45 (.52)	2,02 (1.15)
Πολλαπλασιασμό	1,59 (1.29)	2,82 (.40)	1,91 (1.25)
Διαίρεση	1,52 (1.2)	2,18 (.87)	1,68 (1.15)

Μέγιστος βαθμός εννοιολογικής κατανόησης: 3

Πίνακας 2: Μέσοι όροι (τυπικές αποκλίσεις) παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου για κάθε κλασματική πράξη ως προς το επίπεδο φοίτησης

γ. Σύγκριση γνώσεων περιεχομένου και παιδαγωγικών γνώσεων περιεχομένου στα κλάσματα. Και τα δύο ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν από 37 συμμετέχοντες (26 προπτυχιακούς και 11 μεταπτυχιακούς φοιτητές). Ισχυρές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στο ερωτηματολόγιο γνώσεων περιεχομένου και το ερωτηματολόγιο παιδαγωγικών γνώσεων περιεχομένου (Pearson's r=.550, p<.01), δείχνοντας ότι όσοι σημείωσαν υψηλές επιδόσεις στα έργα γνώσης περιεχομένου έτειναν να δίνουν περισσότερες εννοιολογικού τύπου απαντήσεις στα έργα παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου.

Πιο συγκεκριμένα, οι συμμετέχοντες που παρουσίασαν υψηλές επιδόσεις στις ασκήσεις κλασμάτων και στα προβλήματα κλασμάτων έδωσαν περισσότερες εννοιολογικού τύπου απαντήσεις (κατανόηση, χρήση μοντέλων, χρήση υλικού, στρατηγική επίλυσης ενός απλούστερου προβλήματος) για την εξήγησή τους (Pearson's r=.563, p<.001 και Pearson's r=.415, p<.05 για τις ασκήσεις και τα προβλήματα, αντίστοιχα). Επίσης, συσχετίσεις βρέθηκαν και ανάμεσα στις γνώσεις περιεχομένου και τις παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου για κάθε κλασματική πράξη ξεχωριστά. Ενδεικτικά, μια υψηλή επίδοση στην πρόσθεση κλασμάτων συχνά συνοδευόταν από εξήγησή της με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση (Pearson's r=.478, p<.01). Το ίδιο συνέβαινε και με τις υπόλοιπες πράξεις. Τέλος, οι υψηλές επιδόσεις των συμμετεχόντων στους μεικτούς αριθμούς συνοδεύονταν από περισσότερες εννοιολογικού τύπου απαντήσεις στην εξήγησή τους (Pearson's r=.496, p<.01), όμως οι επιδόσεις τους στα γνήσια κλάσματα δεν συσχετίζονταν με τις εξηγήσεις τους γι' αυτά (Pearson's r=.270, p=.107): άλλοτε έδιναν περισσότερο εννοιολογικού και άλλοτε περισσότερο διαδικαστικού τύπου εξηγήσεις.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μελετήθηκαν οι γνώσεις περιεχομένου και οι παιδαγωγικές γνώσεις περιεχομένου των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος στις πράξεις με κλάσματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν τις ελλείψεις των προπτυχιακών φοιτητών στις κλασματικές πράξεις, συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε και ο Newton (2008). Πιο ειδικά, διαπιστώθηκαν οι αδυναμίες τους κυρίως στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων, αποτέλεσμα το οποίο -ως προς την πράξη της διαίρεσης- διαπιστώθηκε και από τους Lin et al. (2013) και τους Li και Huang (2008). Επιπρόσθετα, οι προπτυχιακοί φοιτητές εμφανίστηκαν να δυσκολεύονται τόσο στις κλασματικές πράξεις με μεικτούς αριθμούς όσο και κατά την επίλυση προβλημάτων με κλάσματα, εύρημα που εντοπίστηκε και στην έρευνα των Unlu και Ertekin (2012). Αντίθετα, διαπιστώθηκαν οι υψηλές επιδόσεις των μεταπτυχιακών φοιτητών στο σύνολο των έργων που αφορούσαν κλασματικές πράξεις.

Αναφορικά με τις παιδαγωγικές γνώσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών, οι πιο πολλοί προπτυχιακοί φοιτητές - προκειμένου να εξηγήσουν τις κλασματικές πράξεις στους μαθητές ή να άρουν τις παρανοήσεις τους – φάνηκε να θέλουν να εμβαθύνουν στη σωστή εκτέλεση των αλγορίθμων των κλασματικών πράξεων, δείχνοντας πως θεωρούν ότι η εξήγηση του κανόνα, παραμένοντας στο συμβολικό επίπεδο, αρκεί. Το εύρημα αυτό ενισχύει την ιδέα ότι υπάρχει μία τάση για εφαρμογή και εκτέλεση τυποποιημένων βημάτων καθώς και ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί αποδεσμεύονται από αυτή την τάση καθώς βελτιώνεται το επίπεδο των σπουδών τους (Konig, 2013. Lim-Teo et al., 2007). Επίσης, τα συγκεκριμένα ευρήματα παραλληλίζονται με τα αποτελέσματα των Li και Kulm (2008), οι οποίοι κάνουν λόγο για ανεπάρκεια των υποψήφιων εκπαιδευτικών στη διδασκαλία της διαίρεσης κλασμάτων, αλλά και αυτά της Son (2013) η οποία επισημαίνει ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί αποδίδουν τα λάθη των μαθητών τους σε διαδικαστικές αδυναμίες, ενώ στην πραγματικότητα αυτά οφείλονται σε εννοιολογικές αδυναμίες. Στον αντίποδα, η πλειοψηφία των μεταπτυχιακών φοιτητών προτίθεται να χρησιμοποιήσει μοντέλα, χειραπτικά υλικά ή εικονικές αναπαραστάσεις προκειμένου να ενισχυθεί η εννοιολογική κατανόηση των μαθητών τους για τις πράξεις με τα κλάσματα και να αρθούν οι παρανοήσεις τους. Παρόμοια είναι και η έμφασή τους σε εννοιολογική κατανόηση για την εξήγηση των προβλημάτων με κλάσματα.

Τέλος, βρέθηκε συνάφεια ανάμεσα στις επιδόσεις των συμμετεχόντων στα έργα γνώσεων περιεχομένου και παιδαγωγικών γνώσεων περιεχομένου: όσοι σημείωσαν υψηλές επιδόσεις γενικά στα έργα με τις πράξεις κλασμάτων έτειναν να τα προσεγγίζουν περισσότερο εννοιολογικά, εύρημα που ισχύει και για τις δύο ομάδες συμμετεχόντων. Επομένως, οι επιδόσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών στη μαθηματική περιοχή των κλασμάτων συσχετίζονται θετικά με την παιδαγωγική τους προσέγγιση για τα κλάσματα, όπως συμπεραίνει και πλήθος ερευνητών (Steele, 2013. Adnan, Zakaria & Maat, 2012. Baumert & Kunter, 2013).

Οι αδυναμίες που εντοπίστηκαν και στα δύο είδη γνώσεων, ωστόσο, αναδεικνύουν την ανάγκη για περαιτέρω εκπαίδευση των εκπαιδευτικών (υποψηφίων και εν ενεργεία) με σκοπό τόσο την ενίσχυση των μαθηματικών γνώσεών τους όσο και τη βελτίωση της ικανότητάς τους για παιδαγωγική προσέγγιση αυτών των γνώσεων, με απώτερο σκοπό πάντοτε την αποτελεσματική μάθηση των παιδιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Adnan, M., Zakaria, E., & Maat, S.M. (2012). Relationship between mathematics beliefs, conceptual knowledge and mathematical experience among pre-service teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 46*, 1714- 1719.

Ball, D.L. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Baumert, J., & Kunter, M. (2013). The effect of content knowledge and pedagogical content knowledge on instructional quality and student achievement. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Teachers' professional competence* (pp. 175-205). New York: Springer.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88* (1), 89-114.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, NJ: LEA.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

König, J. (2013). First comes the theory, then the practice? On the acquisition of general pedagogical knowledge during initial teacher education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11* (4), 999-1028.

Leung, I.K.C., & Carbone, R.E. (2013). Pre-service teachers' knowledge about fraction divisions reflected through problem posing. *The Mathematics Educator*, *14* (1/2), 80-92.

Li, Y., & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: The case of fraction division. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *40* (5), 845–859.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *40* (5), 833-843.

Lim-Teo, S.K., Chua, K.G., Cheang, W.K., & Yeo, K.K.J. (2006). The development of diploma in education student teachers' mathematics pedagogical content knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5* (2), 237-261.

Lin, C., Becker, J., Byun, M., Yang, D., & Huang, T. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *113* (1), 41-51.

Lo, J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*, 481-500.

Newton, K.J. (2008). An extensive analysis of pre-service elementary teachers: knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45* (4), 1080–1110.

Rayner, V., Pitsolantis, N., & Osana, H. (2009).Mathematics anxiety in preservice teachers: its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal*, *21* (3), 60-85.

Son, J.-W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84* (1), 49-70.

Steele, M. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16* (4), 245-268.

Unlu, M., & Ertekin, E. (2012). Why do pre-service teachers pose multiplication problems instead of division problems in fractions?. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *46*, 490 – 494.

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ ΩΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Αγγελική Ζούπα **Γιώργος Ψυχάρης**
Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ
mekkapsaki@math.uoa.gr gpsych@math.uoa.gr

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια μικρής έκτασης έρευνα που εστιάζεται στη διερεύνηση της κατασκευής νοημάτων για τη μαθηματική γενίκευση από μαθητές Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε διερευνητικές δραστηριότητες που βασίζονται στη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η πορεία νοηματοδότησης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως αλγεβρική δραστηριότητα (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων) όπως διαμεσολαβείται από τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

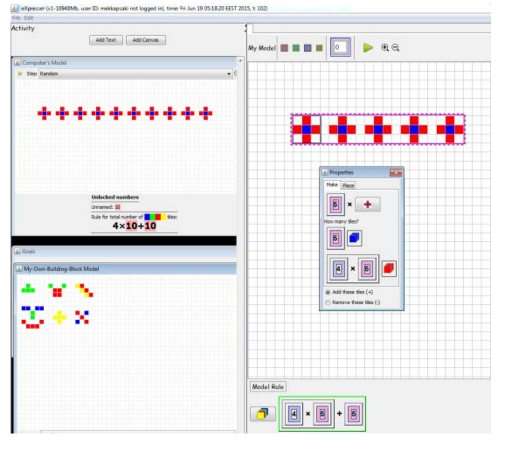
Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζουμε αποτελέσματα μιας μικρής έκτασης πιλοτικής έρευνας που στόχευε στη διερεύνηση της νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης από μαθητές της Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε διερευνητικές δραστηριότητες που σχετίζονται με αυθεντικούς χώρους εργασίας. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των πέντε ατόμων χρησιμοποιώντας χειραπτικά μέσα και το διερευνητικό λογισμικό eXpresser (Noss et al., 2009) το οποίο παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής μοτίβων με τετραγωνάκια διαφορετικών χρωμάτων. Το eXpresser επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές για να αναπαράγουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση.

Η αλγεβρική γενίκευση ενός μοτίβου περιλαμβάνει τρία στάδια: την αναγνώριση μιας ομοιότητας, τη γενίκευσή της για όλους τους επακόλουθους όρους και την έκφραση του αντίστοιχου αλγεβρικού τύπου (Radford, 2010). Στην προσπάθειά του να μελετήσει τη συγκρότηση σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως αλγεβρική δραστηριότητα, ο Radford (2014) υπέδειξε τρία χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης: (1) την ύπαρξη αγνώστων ποσοτήτων (π.χ. μεταβλητών, παραμέτρων), (2) την ανάγκη να ονομαστούν και να συμβολιστούν αυτές οι ποσότητες με διαφορετικούς τρόπους (όχι αποκλειστικά με τη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού, αλλά και με αλφαριθμητικά σύμβολα, φυσική γλώσσα, κινήσεις ή συνδυασμό τους), (3) τον χειρισμό (π.χ. με πράξεις όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) των απροσδιόριστων ποσοτήτων σαν να είναι γνωστές. Για παράδειγμα, στην εύρεση της τιμής ενός αγνώστου σε μια εξίσωση, αλγεβρική στρατηγική συνιστά ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού της μέσω πράξεων με μεταβλητές και όχι μέθοδοι δοκιμής-λάθους.

Η πορεία της σκέψης των μαθητών προκειμένου να διακρίνουν και να εκφράσουν μια σχέση γενίκευσης δεν χαρακτηρίζεται μόνο από τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, αλλά μάλλον από έναν ιδιαίτερο τρόπο αντιμετώπισης του γενικού. Ο Radford (2010) ανέπτυξε τη θεωρία της αντικειμενικοποίησης προκειμένου να περιγράψει τη σημειωτική διαδικασία μετάβασης των μαθητών από τη διάκριση μιας ομοιότητας στην έκφρασή της ως σχέση γενίκευσης με περισσότερο μαθηματικοποιημένους τρόπους μέσα από τη χρήση σημείων (χειρονομιών, λέξεων, συμβόλων). Στη συγκεκριμένη θεωρία, διακρίνονται τρία επίπεδα γενίκευσης των μαθητών που χαρακτηρίζονται από αντίστοιχους σημειωτικούς τρόπους αντικειμενικοποίησης (Radford, 2010). Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές πραγματοποιούν πραγματολογικές γενικεύσεις (factual generalizations) που βασίζονται στην εύρεση του συνολικού αριθμού των στοιχείων ενός μοτίβου για συγκεκριμένο κάθε φορά αριθμό επαναλήψεων συνήθως μέσω λεκτικών περιγραφών και χειρονομιών. Στο δεύτερο επίπεδο της γενίκευσης σε πλαίσιο (contextual generalization), τα γενικευμένα αντικείμενα ονομάζονται αλλά δεν συμβολίζονται και παίρνουν μορφή μέσα από δεικτικές εκφράσεις που περιγράφουν τη θέση τους στο χώρο, όπως π.χ. 'το επόμενο σχήμα' (δηλ. ο επόμενος όρος ενός μοτίβου), 'στην από πάνω γραμμή'. Στο τρίτο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης (symbolic generalization), οι γενικεύσεις εκφράζονται μέσω της χρήσης του αλφαριθμητικού σημειωτικού συστήματος της άλγεβρας. Επιχειρώντας να κατηγοριοποιήσει τα νοήματα που κρύβονται πίσω από τους σημειωτικούς τρόπους αντικειμενικοποίησης στο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης, ο Radford (2000) διέκρινε τρεις κύριες στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές για να προσφέρουν μια συμβολική αναπαράσταση ενός μοτίβου. Στην πρώτη στρατηγική (Σ1), οι μαθητές ακολουθούν ένα είδος (ευρετικής) μεθόδου δοκιμή-λάθος, η επιτυχία της οποίας εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του μοτίβου. Στην δεύτερη στρατηγική (Σ2), οι μαθητές χρησιμοποιούν γενικές εκφράσεις που βασίζονται σε αριθμητικές σχέσεις μεταξύ κάποιων όρων του μοτίβου. Στην τρίτη στρατηγική (Σ3), οι μαθητές βασίζονται στη γεωμετρική μορφή των σχημάτων του μοτίβου.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό eXpresser και χειραπτικά υλικά προκειμένου να εμπλέξουμε τους μαθητές στην κατασκευή και τον έλεγχο μοτίβων καθώς διερευνούν προβλήματα που επιχειρούν να συνδέσουν τη μάθηση των μαθηματικών με χώρους εργασίας. Στην έρευνα λάβαμε υπόψη το πρόσφατο ερευνητικό ενδιαφέρον για την αξιοποίηση των χώρων εργασίας ως πλαισίων που μπορούν να αποτελέσουν πεδία νοηματοδότησης των μαθηματικών στην σχολική τάξη (Wake, 2014). Επιδιώκοντας την εστίαση των μαθητών στη δομή και την έκφραση της γενίκευσης, μελετήσαμε την προοδευτική διαδικασία διάκρισης του γενικού μέσω του ειδικού και την πορεία νοηματοδότησης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως μια διαδικασία αντικειμενικοποίησης. Στην εστίασή μας ήταν επίσης το αν και πώς η διαδικασία αυτή αποκαλύπτει αλγεβρικούς τρόπους σκέψης (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων) όπως και πώς διαμεσολαβείται από τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ



Σχ. 1 Μοτίβο στο eXpresser με μια δομική μονάδα με 4 κόκκινα τετράγωνα και 1 μπλε

Το eXpresser αποτελείται από δύο κύριες περιοχές: (α) μια περιοχή εργασίας (My Model, Σχ. 1 δεξιά στην οθόνη) και (β) μια περιοχή προβολής (Computer’s Model, Σχ. 1 αριστερά στην οθόνη). Στην περιοχή My Model οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από την επανάληψη μιας σύνθεσης από τετράγωνα διαφορετικών χρωμάτων που ονομάζεται δομική μονάδα (building block) (Σχ. 1). Οι ποσότητες στο eXpresser μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί, που εμφανίζονται μέσα σε γκρι ορθογώνιο πλαίσιο, ή εικονικές μεταβλητές, η τρέχουσα τιμή των οποίων εμφανίζεται σε ροζ ορθογώνιο πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετατρέψουν ένα σταθερό αριθμό (γκρι πλαίσιο) σε εικονική μεταβλητή (ροζ πλαίσιο) ‘ξεκλειδώνοντάς’ τον με την εντολή Ξεκλείδωμα. Με το πάτημα του κουμπιού Play το πρόγραμμα αποδίδει τυχαίες τιμές στις εικονικές μεταβλητές που έχει ορίσει ο χρήστης. Σε αυτή την περίπτωση το μοτίβο εμφανίζεται χρωματισμένο στο My Model μόνο όταν οι μαθητές συμπληρώσουν σωστά τα ειδικά εικονίδια με ‘?’ στις ιδιότητες του μοτίβου (Σχ. 6α). Σε αντίθετη περίπτωση και ως ένδειξη της ύπαρξης λάθους, το μοτίβο εμφανίζεται χωρίς χρώμα. Τέλος, για να χρωματιστεί το μοτίβο και στο Computer’s Model, θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν μια ‘αλγεβρική’ έκφραση που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο πλαίσιο Model Rule (Σχ. 1 κάτω δεξιά)’. Έτσι, η γενίκευση στο eXpresser εμφανίζεται μέσω της ανάγκης αναγνώρισης της δομικής μονάδας ενός μοτίβου και εκφράζεται με τη χρήση μιας εικονικής μεταβλητής, η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό επαναλήψεων της δομικής μονάδας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

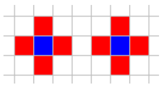
Οι δραστηριότητες διαρθρώθηκαν σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, οι μαθητές ανέλαβαν το ρόλο ενός υπαλλήλου εταιρείας η οποία θα οργάνωνε την διάταξη των τραπεζιών για ένα πάρτι γενεθλίων με 38 καλεσμένους. Στη φάση αυτή έγινε η προσομοίωση του προβλήματος μέσω χειραπτικού υλικού. Δόθηκαν στους μαθητές 6 μεγάλα χαρτόνια με την κάτοψη του μαγαζιού (Σχ. 5) που θα φιλοξενούσε την εκδήλωση, μαζί με 16 ειδικά σχεδιασμένα τραπέζια από χαρτόνι (ο δομικός πυρήνας του μοτίβου) (Σχ. 4) τα οποία οι μαθητές θα έπρεπε να τοποθετήσουν στην κάτοψη ώστε να βρουν τη βέλτιστη διάταξη. Ο αριθμός 38 των καλεσμένων επιλέχτηκε ως έναυσμα για να πειραματιστούν οι μαθητές με διαφορετικές διατάξεις τραπεζιών (π.χ. ενώνοντας τραπέζια). Στη δεύτερη φάση, ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν το ίδιο πρόβλημα για 132 καλεσμένους. Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα δεν μπορούσε να διερευνηθεί με το χειραπτικό υλικό καθώς ο αριθμός των διαθέσιμων (χαρτονένιων) τραπεζιών δεν επαρκούσε. Αυτό αναμέναμε να οδηγήσει με φυσικό τρόπο στην αναγκαιότητα της χρήσης του eXpresser ώστε να μελετηθεί το πρόβλημα για οποιονδήποτε αριθμό τραπεζιών. Στη συνέχεια έγινε από την ερευνήτρια μια σύντομη περιγραφή του eXpresser μέσα από την παρουσίαση κατασκευής ενός απλού μοτίβου όπου αναπαράγεται ένα μπλε τετραγωνάκι για οποιονδήποτε αριθμό επαναλήψεων. Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν ένα μοτίβο που αναπαριστούσε το τραπέζι που συνάντησαν στο χειραπτικό υλικό και αποτελούνταν από 1 μπλε τετράγωνο για το τραπέζι και 4 κόκκινα τετράγωνα για τις καρέκλες γύρω από το μπλε (Σχ. 2α). Τέλος λόγω έλλειψης χρόνου δόθηκε στους μαθητές ένα ήδη κατασκευασμένο μοτίβο με ενωμένα τραπέζια και τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν την εκτέλεσή του και να κατασκευάσουν στο expresser την ‘αλγεβρική’ έκφραση που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου. Ο γενικός στόχος μας ήταν μέσα από την ενασχόληση με τα μοτίβα οι μαθητές να οδηγηθούν στη λύση του αρχικού προβλήματος διερευνώντας τη σχέση των διατάξεων των τραπεζιών με τον αριθμό των ατόμων που μπορούν να καθίσουν κάθε φορά. Σημειώνουμε ότι παράλληλα δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασίας με ερωτήματα που θα μας επέτρεπαν να μελετήσουμε τη μετάβαση σε διαφορετικά επίπεδα γενίκευσης. Παραδείγματα ερωτήσεων: *Πόσα τετράγωνα θα έχει το μοτίβο στο νούμερο 5; (αντίστοιχα για τα νούμερα 10, 25, 100)* (Πραγματολογική γενίκευση). *Περιγράψτε με απλά λόγια τη διαδικασία που εκτελεί το μοτίβο κάθε φορά* (Γενίκευση σε πλαίσιο). *Περιγράψτε πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε φορά για οποιονδήποτε αριθμό τραπεζιών* (Συμβολική γενίκευση).

ΜΕΘΟΔΟΣ

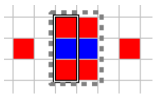
Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 50 μαθητές (δύο τμήματα) της Α' Γυμνασίου (50 μαθητές) στο 2ο πειραματικό γυμνάσιο Αθηνών. Οι μαθητές εργάστηκαν στην τάξη τους σε ομάδες των πέντε για 2 διδακτικές ώρες (50λ η καθεμιά) με διδάσκοντα τον καθηγητή μαθηματικών και την ερευνήτρια σε ρόλο συμμετοχικού παρατηρητή. Κατά την πρώτη ώρα οι μαθητές εργάστηκαν με το χειραπτικό υλικό και κατά την δεύτερη με το υπολογιστικό περιβάλλον eXpresser με χρήση φορητών υπολογιστών. Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν κομμάτια διαλόγων των μαθητών. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και πράξεων των μαθητών γύρο από ένα συγκεκριμένο θέμα. Τα επεισόδια επιλέχτηκαν έτσι ώστε να αναδεικνύονται οι διαδικασίες των τύπων γενίκευσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και οι στρατηγικές που ανέπτυξαν καθώς και πώς το λογισμικό επηρέασε την εξέλιξη της δραστηριότητάς τους. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε επεισόδια από την εργασία μιας ομάδας 5 μαθητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα κατά τη δεύτερη φάση των δραστηριοτήτων όταν οι μαθητές κλήθηκαν να φτιάξουν το δικό τους μοτίβο τραπεζιών αποτελούμενο από 4 κόκκινα τετράγωνα και 1 μπλε (Σχ. 2α). Πριν από αυτό οι μαθητές έλυσαν το πρόβλημα με τους 38 καλεσμένους μέσω του χειραπτικού υλικού (Σχ. 3, 4, 5). Πήραν δηλαδή τα χαρτονένια τραπέζια (Σχ. 4) και είτε τα τοποθέτησαν το ένα δίπλα στο άλλο είτε τα δίπλωσαν έτσι ώστε να χωρέσουν στον κενό χώρο της κάτοψης (Σχ. 5). Όταν όμως το πρόβλημα αναφερόταν σε 132 καλεσμένους και το χειραπτικό υλικό δεν επαρκούσε για τη συνέχιση του πειραματισμού, εμφανίστηκε η ανάγκη χρήσης του λογισμικού για την αναπαραγωγή διαφορετικού αριθμού τραπεζιών.



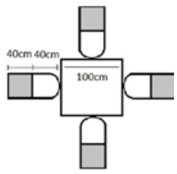
Σχ. 2α Μοτίβο τραπεζιών



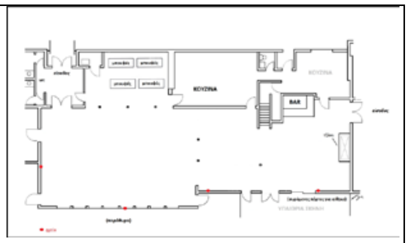
Σχ. 2β Μοτίβο ενωμένων τραπεζιών

Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν το μοτίβο τραπεζιών που φαίνεται στο Σχ. 2α. Αρχικά, οι μαθητές αναγνώρισαν ότι αποτελείται από μία δομική μονάδα με 4 κόκκινα τετράγωνα και 1 μπλε. Αφού επέλεξαν τα 5 συγκεκριμένα τετράγωνα, έδωσαν το 5 ως αρχική τιμή επαναλήψεων και στο My model εμφανίστηκε το μοτίβο του Σχ. 2α για 5 επαναλήψεις.

Σχ. 3 Στιγμιότυπο ομάδας

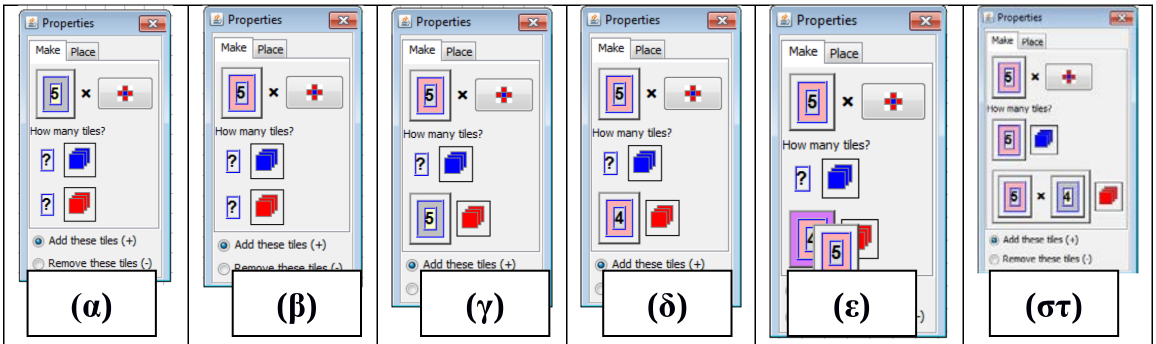


Σχ. 4 Τραπέζι από χαρτόνι



Σχ. 5 Κάτοψη μαγαζιού

Με το πάτημα του κουμπιού Play, το μοτίβο παρέμεινε ακίνητο καθώς δεν είχε χρησιμοποιηθεί εικονική μεταβλητή. Οι μαθητές ξεκλείδωσαν τον αριθμό των επαναλήψεων δημιουργώντας έτσι μια (ροζ) εικονική μεταβλητή (Σχ. 6β). Για τον σωστό χρωματισμό του μοτίβου, έπρεπε στη συνέχεια να εκφραστούν με την συγκεκριμένη μεταβλητή ο αριθμός των κόκκινων και μπλε τετραγώνων στις Ιδιότητες Μοτίβου (Σχ. 6β). Πιο συγκεκριμένα, στη θέση των μπλε έπρεπε να τοποθετηθεί (με σύρσιμο και αντικατάσταση) η ίδια εικονική μεταβλητή, ενώ στη θέση των κόκκινων η εικονική μεταβλητή επί τον αριθμό 4.

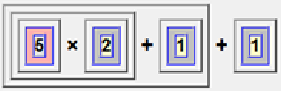


Σχ. 6 Ιδιότητες Μοτίβου για την κατασκευή και κίνηση του μοτίβου του Σχ. 1.

Αρχικά οι μαθητές έδωσαν την σταθερή τιμή 5 για τα μπλε τετραγωνάκια (Σχ. 6γ). Πατώντας Play για την αναπαραγωγή του μοτίβου οι μαθητές διαπίστωσαν ότι το μοτίβο δεν χρωματίζεται σωστά καθώς άλλαζε συνεχώς τιμές η εικονική μεταβλητή ενώ ο αριθμός των μπλε τετραγώνων παρέμενε σταθερός. Μία μαθήτρια αμέσως αναγνώρισε ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν την ίδια εικονική μεταβλητή και για τον αριθμό των μπλε τετραγώνων (Σχ. 6ε). Στη συνέχεια οι μαθητές ακολούθησαν την ίδια διαδικασία και για την έκφραση του αριθμού των κόκκινων τετραγώνων (Σχ. 6στ). Έτσι, μέσα από τη διερεύνηση του ρόλου των σταθερών αριθμών και των (εικονικών) μεταβλητών για τη σωστή αναπαραγωγή του μοτίβου, οι μαθητές άρχισαν να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης μέσω της 'άλγεβρας' του eXpresser αποδεχόμενοι τον προσφερόμενο συμβολισμό των μεταβλητών ποσοτήτων (ροζ εικονίδιο) και την δυνατότητα χρήσης του σε πράξεις.

Αφού τελείωσαν με την κατασκευή του μοτίβου οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στα ερωτήματα του φύλλου εργασίας. Το πρώτο ερώτημα ήταν: Τι μένει σταθερό και τι αλλάζει στο μοτίβο των τραπεζιών κατά την αναπαραγωγή; Οι μαθητές απάντησαν: «Σταθερά μένουν τα χρώματα και το σχήμα των τραπεζιών. Αλλάζει ο αριθμός των τραπεζιών ανάλογα με τη μεταβλητή». Στη συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις οι οποίες ζητούσαν τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων (5, 10, 25, 100). Οι μαθητές αντίστοιχα απάντησαν: 20 (5*4), 40 (10*4), 100 (25*4), 400 (100*4). Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον το ότι οι μαθητές απάντησαν χρησιμοποιώντας παρένθεση το οποίο, στο σημειωτικό επίπεδο, αποκαλύπτει τον γενικευμένο τρόπο με τον οποίο είχαν εκφράσει τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων στο λογισμικό (πολλαπλασιασμός της εικονικής μεταβλητής με 4). Η γενίκευση των μαθητών εδώ έχει όνομα όχι αλγεβρικό αλλά αριθμητικό και ανήκει στο επίπεδο της πραγματολογικής γενίκευσης του Radford. Ακόμη, ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν με απλά λόγια τη διαδικασία που εκτελεί το μοτίβο κάθε φορά και απάντησαν ότι «το σχήμα πολλαπλασιάζεται σύμφωνα με τη μεταβλητή» (Γενίκευση σε πλαίσιο). Τέλος, περιέγραψαν με λόγια πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε φορά για οποιοδήποτε αριθμό τραπεζιών χωρίς τη χρήση αλγεβρικού συμβολισμού: «Εμφανίζονται τετραπλάσια κόκκινα εικονίδια από τον αριθμό των τραπεζιών» (Γενίκευση σε πλαίσιο που αποκαλύπτει την μετακίνηση προς τις συμβολικές γενικεύσεις).

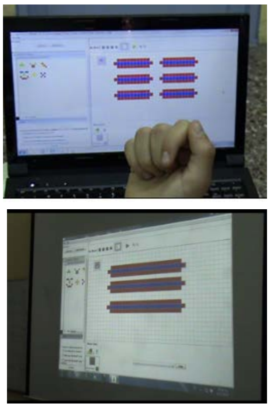
Στη συνέχεια οι μαθητές προχώρησαν στην λεπτομερή μελέτη και παρατήρηση ενός έτοιμου μοτίβου που απεικόνιζε ενωμένα τραπέζια χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία του λογισμικού. Συγκεκριμένα, οι μαθητές άνοιξαν τις ιδιότητες του μοτίβου και παρατήρησαν τις εικονικές μεταβλητές και τις σχέσεις τους για να αποκρυπτογραφήσουν πώς δουλεύει το μοτίβο. Ακολούθως, και ενώ το μοτίβο αναπαραγόταν σωστά και εμφανιζόταν χρωματισμένο στο My Model, οι μαθητές θέλησαν να το χρωματίσουν και στο Computer's Model, έτσι όπως έγινε και στην παρουσίαση του λογισμικού. Γι' αυτό κατασκεύασαν μια 'αλγεβρική' έκφραση (Σχ. 7) που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο ειδικό πλαίσιο Model Rule σέρνοντας από τις ιδιότητες Μοτίβου τις εικονικές εκφράσεις που αντιστοιχούσαν στον αριθμό των τετραγώνων ανά χρώμα και επιλέγοντας από το μενού 'πρόσθεση'.



Σχ. 7 Αλγεβρική έκφραση μοτίβου με εικονικές μεταβλητές

Εδώ, βλέπουμε ότι οι μαθητές επεκτείνουν την προηγούμενη εμπειρία τους με τα εργαλεία του eXpresser και αξιοποιούν τη δομή του για το χτίσιμο περισσότερο σύνθετων εκφράσεων με αλγεβρικό τρόπο. Χρησιμοποιούν τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων (πάνω και κάτω από τα μπλε) ως μια δομική μονάδα και τον 'χειρίζονται' (τον 'σέρνουν') για να εκφράσουν τον συνολικό αριθμό των κόκκινων τετραγώνων.

Ακολούθως, καταγράφουμε μερικές απαντήσεις από το φύλλο εργασίας που ακολούθησε, ώστε να δούμε αν και πώς η εμπειρία αναγνώρισης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης στο eXpresser επηρέασε τις μετέπειτα γενικεύσεις των μαθητών. Στην ερώτηση πόσα κόκκινα τετράγωνα θα έχει το μοτίβο στο νούμερο 100 οι μαθητές απάντησαν: (100*2)+2 = 200+2 = 202. Στην ερώτηση που ζητούσε να περιγράψουν πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε φορά για οποιοδήποτε αριθμό τραπεζιών απάντησαν: (x*2)+2, όπου x το πλήθος των τραπεζιών. Τέλος, στην ερώτηση για το αν χωράνε όλα τα τραπέζια που χρειαζόμαστε στην οθόνη του λογισμικού αν τα διατάξουμε με το προηγούμενο μοτίβο και τι μπορούμε να κάνουμε για να καθίσουν όλοι οι καλεσμένοι οι μαθητές βρήκαν δύο λύσεις: Με 6 σειρές των 10 τραπεζιών (22 άτομα στο καθένα) και με 3 σειρές των 21 τραπεζιών (21*2+2 =44, 44*3 =132) (Σχ. 8).



Σχ. 8 Πειραματισμός μαθητών

Από τις παραπάνω απαντήσεις φαίνεται ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εκφράζουν συμβολικές γενικεύσεις με χρήση αλγεβρικού συμβολισμού έχοντας παράλληλα τη δυνατότητα να διακρίνουν τις αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των όρων του μοτίβου, αλλά και να επικεντρώνονται στη δομή του μοτίβου λαμβάνουν υπόψη το είδος των γεωμετρικών σχημάτων που το αποτελούν (στρατηγική Σ3 κατά Radford). Αυτό γίνεται αντιληπτό από το πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν σημεία, όπως τις παρενθέσεις, για να εκφράσουν τον συνολικό αριθμό των εικονιδίων: με τις παρενθέσεις απομονώνουν τις δύο καρέκλες που αναπαράγονται απέναντι η μία από την άλλη και με το +2 σηματοδοτούν τις καρέκλες στην κεφαλή (αριστερά και δεξιά) που μένουν σταθερές.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, η δυνατότητα πρόσβασης στη δομή των μοτίβων μέσω των προσφερόμενων συμβολικών και εικονικών αναπαραστάσεων του eXpresser φάνηκε να ευνόησε την προοδευτική διαδικασία διάκρισης του γενικού μέσω του ειδικού και την πορεία νοηματοδότησης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως μια διαδικασία αντικειμενικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έφτασαν με επιτυχία σε όλα τα αντίστοιχα επίπεδα γενίκευσης. Οι μεταβάσεις στο πραγματολογικό επίπεδο και το επίπεδο πλαισίου ευνοήθηκαν από τον πειραματισμό των μαθητών με το χειραπτικό υλικό και την προσπάθεια να εντοπίσουν αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των διατάξεων των τραπεζιών και των ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε αυτά. Η εμπειρία αυτή εμπλουτίστηκε ακολούθως από την ‘μεταφορά’ των διατάξεων/μοτίβων αυτών στο eXpresser και την δυνατότητα των μαθητών να μελετήσουν τη δομή και τις σχέσεις που διέπουν την δυναμική αναπαραγωγή τους για διαφορετικές τιμές. Η εμπλοκή των μαθητών με την έκφραση σχέσεων γενίκευσης στο λογισμικό φάνηκε να ευνόησε τη μετάβασή τους στο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης. Μάλιστα, οι αλγεβρικές εκφράσεις που έγραψαν στο φύλλο εργασίας οι μαθητές είχαν άμεση αντιστοίχιση με τις εικονικές ‘αλγεβρικές’ εκφράσεις που είχαν νωρίτερα συγκροτήσει στο λογισμικό. Η εμπειρία της απόδοσης τυχαίων τιμών στην εικονική μεταβλητή και η δυναμική αναπαραγωγή του μοντέλου για τις αντίστοιχες τιμές φάνηκε να ενίσχυσε την αντιστοίχιση της εικονικής μεταβλητής (αριθμός μπλε τετραγώνων) με το γράμμα x που έκαναν ακολούθως οι μαθητές με χαρτί-μολύβι στο φύλλο εργασίας.

Αναφορικά με τα αλγεβρικά χαρακτηριστικά της σκέψης των μαθητών, είδαμε ότι οι μαθητές αναγνώρισαν άγνωστες ποσότητες (π.χ. αριθμός ατόμων γύρω από τραπέζι), ονόμασαν τις ποσότητες αυτές, αναγνώρισαν μεταξύ τους συναρτησιακές συσχετίσεις τις οποίες και εξέφρασαν τόσο στο eXpresser όσο και στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και, τέλος, τις χρησιμοποίησαν για τη λύση του προβλήματος που τέθηκε προς διερεύνηση. Προκειμένου να συνδέσουμε τα ευρήματα αυτά με την υπάρχουσα έρευνα, σημειώνουμε ότι η εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή μοτίβου στο eXpresser φάνηκε να ευνόησε την αποκλειστική ανάπτυξη της τρίτης στρατηγικής κατά Radford (Σ3) στο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης. Αυτό είναι ένα εύρημα που απουσιάζει από προηγούμενες σχετικές έρευνες (π.χ. Radford, 2010; Rivera & Becker, 2008), στις οποίες καταγράφηκαν και οι τρεις στρατηγικές συμβολικής γενίκευσης (Σ1, Σ2, Σ3). Το δεδομένο ότι στις έρευνες αυτές οι μαθητές εργάζονταν αποκλειστικά με στατικές εικόνες στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι, μας επιτρέπει να αποδώσουμε το εύρημα αυτό στο ρόλο του eXpresser. Τέλος, το πλαίσιο του χώρου εργασίας φάνηκε να ευνόησε την εμπλοκή των μαθητών με το πρόβλημα και την διερεύνηση. Το συγκεκριμένο πλαίσιο ήταν παρόν σε όλη τη διάρκεια του πειραματισμού των μαθητών, ενώ οι περιορισμοί στον χώρο και τη διάταξη των τραπεζιών αποτέλεσαν πρόκληση για του μαθητές στην αναζήτηση της βέλτιστης λύσης.

Η περιορισμένη έκταση της δραστηριότητας δεν επιτρέπει τη γενίκευση των συμπερασμάτων. Προσφέρει όμως την αφετηρία για την περαιτέρω διερεύνηση της κατασκευής νοημάτων για τη μαθηματική γενίκευση από μαθητές Α′ γυμνασίου σε μεγαλύτερης έκτασης και διάρκειας έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of ‘dynamic’: a microworld to support students’ generalization. *ZDM*, *41*(4), 493-503.

Radford, L. (2000). Students’ processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 4, 81-88. Hiroshima University, Japan.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257–277.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2008). Middle school children’s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, *40*(1), 65-82.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271-290.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Σωτήριος Ζωιτσάκος[1], Θεοδόσιος Ζαχαριάδης[1], Χαράλαμπος Σακονίδης[2]

[1]Πανεπιστήμιο Αθηνών, [2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

s-zoitsakos@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, xsakonid@eled.duth.gr

Η γνώση του περιεχομένου για τη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί το επίκεντρο σημαντικής έρευνας που έχει ως στόχο να προσδιορίσει αυτή τη γνώση και να διερευνήσει τους τρόπους με τους οποίους επηρεάζει τη διδακτική πρακτική. Το άρθρο μελετά την διολίσθηση της μαθηματικής ορθότητας κατά τον διδακτικό μετασχηματισμό, όταν καθηγητές μαθηματικών διαχειρίζονται υποθετικές παρανοήσεις μαθητών σχετικά με τη δεκαδική αναπαράσταση «0,3999 ...». Στη μελέτη αξιοποιείται το θεωρητικό εργαλείο του ορίζοντα όπως εμφανίζεται στην σχετική βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ορθότητα των αντιλήψεων δεν διατηρείται, όταν δεν υπάρχει αρμονία του εσωτερικού και του εξωτερικού ορίζοντα της αντίληψης για την έννοια.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Την τελευταία δεκαετία η γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία έχει προσελκύσει ιδιαίτερα το ενδιαφέρον των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης (Ball, Thames & Phelps, 2008, Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009), προσφέροντας λεπτότερες περιγραφές της αρχικής κατηγοριοποίησης που προτάθηκε από τον Shulman (1986). Για παράδειγμα, οι Ball et al. (2008) διακρίνουν την γνώση του περιεχομένου (Subject Matter Knowledge, SMK) στην κοινή γνώση του περιεχομένου (Common Content Knowledge, CCK), στην εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου (Specialized Content Knowledge, SCK) και στη γνώση του ορίζοντα του περιεχομένου (Horizon Content Knowledge, HCK). Επίσης, διακρίνουν την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge, PCK) σε γνώση του περιεχομένου και των μαθητών (Knowledge of Content and Students, KCS), γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας (Knowledge of Content and Teaching, KCT) και γνώση του περιεχομένου και του προγράμματος σπουδών (Knowledge of Content and Curriculum, KCC).

Παρά τη σημασία που αποδίδεται στο περιεχόμενο της γνώσης των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία, η κατηγοριοποίηση που έχει προταθεί μέχρι σήμερα έχει επικριθεί με πολλούς τρόπους. Η Huillet (2009) υποστηρίζει ότι «η διάκριση μεταξύ καθαρά μαθηματικής γνώσης (SMK ή CCK) και μαθηματικής γνώσης ειδικά για τη διδασκαλία (PCK ή SCK) δεν είναι κατάλληλη» (σ.10). Οι Davis και Simmt (2006) είναι ενάντια στη διάκριση μεταξύ τυπικής επιστημονικής γνώσης και γνώσης για τη διδασκαλία, υποστηρίζοντας ότι «τα μαθηματικά για τη διδασκαλία δεν είναι ούτε ζήτημα ‘περισσότερο από’ ούτε ‘σε μεγαλύτερο βάθος από’ τη γνώση που αναμένεται από τους μαθητές. Είναι ποιοτικά διαφορετική [...] και θα μπορούσε πράγματι να θεωρηθεί ως ένας ιδιαίτερος κλάδος των μαθηματικών» (σ. 294).

Οι περισσότερες από τις μελέτες που ασχολούνται με το ερώτημα «ποια είναι η μαθηματική γνώση μαθηματικών που απαιτείται για τη διδασκαλία;» επικεντρώνονται σε εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (π.χ. Ball et al., 2008, Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009). Ωστόσο, υπάρχουν λίγες σχετικές μελέτες που εστιάζουν σε καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, οι Zazkis και Lekin (2010) θεωρούν ότι υπάρχει μια πιο σύνθετη σχέση μεταξύ Ανώτερης Μαθηματικής Γνώσης (Advanced Mathematical Knowledge, AMK), δηλαδή της γνώσης που αποκτάται στο πανεπιστήμιο και της μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία. Οι Hossain, Mendick και Adler (2013) υιοθετούν μια μεταδομιστική προσέγγιση για να διερευνήσουν την «κατανόηση των μαθηματικών σε βάθος» από μελλοντικούς εκπαιδευτικούς μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η παρούσα εργασία αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης έρευνας, στην οποία μελετώνται οι γνώσεις εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τη διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών με άπειρα ψηφία και συγκεκριμένα αυτών με περίοδο 9. Η επιλογή της εστίασης στο συγκεκριμένο θέμα οφείλεται στην άμεση σύνδεσή του με στοιχειώδη μαθηματικά (π.χ. δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί) αλλά και ανώτερα (π.χ. πυκνότητα ρητών αριθμών, ακολουθίες, άπειρα αθροίσματα), καθώς και στη δυσκολία προσέγγισής του από μαθητές όλων των ηλικιών (π.χ. Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005, Giannakoulias, Sougioul, & Zachariades, 2007).

Σε προηγούμενες εργασίες μελετήθηκε η μαθηματική κατανόηση της συγκεκριμένης αναπαράστασης από καθηγητές μαθηματικών, καθώς και η δυνατότητα αναγνώρισης από αυτούς σχετικών παρανοήσεων μαθητών (Zoitsakos, Zachariades & Sakonidis, 2013, Ζωιτσάκος Ζαχαριάδης & Σακονίδης, 2014). Επιπλέον, διερευνήθηκε η σχέση αυτής της κατανόησης με τις διδακτικές τους προτάσεις για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών (Zoitsakos, Zachariades & Sakonidis, 2015). Στο πλαίσιο αυτής της ερευνητικής δραστηριότητας αναγνωρίστηκε μια ομάδα εκπαιδευτικών οι οποίοι, ενώ διαθέτουν ορθή κατανόηση της αναπαράστασης 0,3999…, εμφανίζουν προβλήματα μαθηματικής φύσης στις διδακτικές τους προτάσεις.

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στην τελευταία ομάδα εκπαιδευτικών, επιχειρώντας μια ανάλυση των αλλοιώσεων της μαθηματικής γνώσης που προκύπτουν κατά τον διδακτικό μετασχηματισμό, δηλαδή κατά την επεξεργασία της επιστημονικής γνώσης ώστε να καταστεί αντικείμενο διδασκαλίας. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται ως εργαλείο μελέτης η έννοια του *ορίζοντα*, όπως αυτή προτείνεται από τον Husserl, η οποία πρόσφατα προσελκύει το ενδιαφέρον ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης που ασχολούνται με την γνώση των εκπαιδευτικών (π.χ Ball & Bass, 2009, Zazkis & Mamolo, 2011, Mamolo & Pali, 2014).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τον Husserl (1982), όταν παρατηρούμε μια πλευρά ενός αντικειμένου δεν μπορούμε πάντα να δούμε και τις άλλες πλευρές του ή στο εσωτερικό του. Όμως, παρόλο που οι άλλες πλευρές δεν είναι οπτικά παρούσες, το αντικείμενο συλλαμβάνεται μέσα σ' ένα περιβάλλον 'συν-δοσμένων'. Ο Husserl (1973) διακρίνει τον *εσωτερικό ορίζοντα* της εμπειρίας, ο οποίος περιλαμβάνει πλευρές του αντικειμένου που δεν είναι στο επίκεντρο της προσοχής αλλά εννοούνται, από τον *εξωτερικό ορίζοντα*, ο οποίος περιλαμβάνει πτυχές του αντικειμένου που υπάρχουν στο ευρύτερο περιβάλλον του. Δηλαδή, ο εσωτερικός ορίζοντας αποτελεί μια συνειδητοποίηση της πολλαπλότητας των διαφορετικών πτυχών του αντικειμένου που συνδέονται άμεσα με αυτό, ενώ ο εξωτερικός ορίζοντας περιλαμβάνει ευρύτερα χαρακτηριστικά, έννοιες, και ιδέες του κόσμου στον οποίο ανήκει το αντικείμενο. Έτσι, για παράδειγμα, όταν παρατηρούμε ένα δέντρο, ο εσωτερικός του ορίζοντας μπορεί να περιλαμβάνει τη μορφή των ριζών και του κορμού που δεν είναι άμεσα ορατά, ενώ ο εξωτερικός ορίζοντας περιλαμβάνει στοιχεία από ευρύτερες κατηγορίες, στις οποίες ανήκει το δέντρο (π.χ φυλλοβόλο ή αειθαλές).

Αρκετοί ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν χρησιμοποιήσει την ιδέα του ορίζοντα. Για παράδειγμα, οι Ball et al. (2008) ορίζουν τη γνώση του ορίζοντα ως μια συνειδητοποίηση του ευρύτερου μαθηματικού πεδίου, στην οποία εγκαθίσταται η εμπειρία και η διδασκαλία. Οι Ball και Bass (2009) θεωρούν ότι αυτό το είδος γνώσης είναι σημαντικό για τη διδασκαλία, καθώς μπορεί να καταστήσει δυνατές ενέργειες όπως η επισήμανση κρίσιμων σημείων, η αιτιολόγηση αυτού που είναι σημαντικό στα μαθηματικά, να δημιουργήσει συνδέσεις, να ευαισθητοποιήσει την προσοχή σε βαρύνοντα μαθηματικά ζητήματα σε όσα υποστηρίζουν οι μαθητές και να προλαμβάνει πιθανές μελλοντικές στρεβλώσεις και παρανοήσεις. Οι Zazkis και Mamolo (2011) υποστηρίζουν ότι η ανώτερη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών επιτρέπει μια υψηλότερη και ευρύτερη 'θέαση' αναφορικά με τα χαρακτηριστικά του ίδιου του αντικειμένου (εσωτερικός ορίζοντας) και σε σχέση με τις βασικές ιδέες και δομές του πεδίου (Ball και Bass, 2009) που διέπουν τον κόσμο στον οποίο υφίσταται το αντικείμενο (εξωτερικός ορίζοντας). Οι Mamolo και Pali (2014) υιοθετούν την ιδέα του εσωτερικού και εξωτερικού ορίζοντα και, σε συνάφεια με την ανάλυση των Ball και Bass (2009), διερευνούν συνδέσεις μεταξύ της γνώσης του μαθηματικού ορίζοντα υποψηφίων εκπαιδευτικών και της γνώσης περιεχομένου των μαθητών (KCS).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τις ανάγκες τις έρευνητικής μας προσέγγισης όπου μελετάμε ομάδες εστίασης (focus group), συγκροτήθηκε ένα διδακτικό σενάριο που παρατίθεται στη συνέχεια. Τα ερωτήματα που διατυπώνονται στο σενάριο απαντήθηκαν από 106 καθηγητές μαθηματικών (36 άνδρες και 70 γυναίκες), με ποικίλη διδακτική εμπειρία. Οι απαντήσεις δόθηκαν στο πλαίσιο γραπτής εξέτασης για την είσοδό τους σε μεταπτυχιακό πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών. Το σενάριο έχει ως εξής:

Σε μια σχολική τάξη Γ΄ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης ο καθηγητής ρωτάει τους μαθητές: «Τι εκφράζει η παράσταση 0,3999…, όταν τα 9 είναι άπειρα;». Τέσσερις μαθητές απαντούν ως ακολούθως: (i) Μαθητής Α: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία που τείνει στο 0,4, (ii) Μαθητής Β: Το 0,3999… είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,4, (iii) Μαθητής Γ: Είναι ο αριθμός αμέσως πριν τον 0,4, (iv) Μαθητής Δ: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει το άθροισμα 0,3+0,09+ 0,009+… αλλά, επειδή συνεχώς αυξάνεται, δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό.

α) Ποιος πιστεύετε ότι μπορεί να ήταν ο στόχος της ερώτησης του καθηγητή; β) Για καθέναν από τους τέσσερις μαθητές να αναφέρετε: i) πως νομίζετε ότι σκέφτηκε και έδωσε την παραπάνω απάντηση, ii) ποια θεωρείτε θετικά σημεία της άποψής του (αν υπάρχουν) και iii) ποιες είναι οι πιθανές παρανοήσεις του.

γ) Αν ήσασταν ο καθηγητής της παραπάνω τάξης πως θα βοηθούσατε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις στις οποίες αναφερθήκατε στην απάντηση του ερωτήματος β;»

Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε ένα σενάριο όπως το παραπάνω μπορεί να χρησιμεύσει ως μέσο α) μελέτης των κατανοήσεών τους που σχετίζονται με λεπτές διαφορές του νοήματος μέσω των παρανοήσεων των μαθητών και β) διερεύνησης των πρακτικών διδασκαλίας τους κατά την προσπάθειά τους να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεραστούν πιθανές παρανοήσεις τους (Biza, Nardi & Zachariades, 2007).

Η αξία της επιλογής της αναπαράστασης ‘0,3999...’ και η χρησιμότητα της αξιοποίησης της έννοιας του (εσωτερικού – εξωτερικού) ορίζοντα τεκμηριώνονται στη βάση της πολλαπλότητας των ‘θεάσεων’ και των πλούσιων συνδέσεων που προσφέρει η συγκεκριμένη αναπαράσταση, καθιστώντας την έτσι μια αξιόλογη περίπτωση συστηματικής διερεύνησης της γνώσης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, ειδικότερα των ανώτερων, μέσα από το λόγο που αρθρώνουν αναφορικά με τη δική τους κατανόηση των παρανοήσεων των μαθητών και των κατάλληλων διδακτικών μετασχηματισμών για την αντιμετώπισή τους. Έτσι, η αναπαράσταση ‘0,3999...’ επικεντρώνει την προσοχή κάποιων στη σχέση της με την ακολουθία 0,3, 0,39, 0,399, ..., άλλων στη σχέση της με το άπειρο άθροισμα 0,3+ 0,09+ 0,009+... και άλλων στο αν εκφράζει έναν ρητό ή έναν άρρητο αριθμό και ποιά η σχέση του με το 0,4. Τα παραπάνω θεωρούμε ότι αποτελούν στοιχεία του εσωτερικού ορίζοντα της αντίληψης του αντικειμένου. Όμως, η αναπαράσταση ‘0,3999...’ παραπέμπει επίσης σε ευρύτερες έννοιες, όπως οι ακολουθίες, οι άπειρες σειρές, οι ιδιότητες σύγκλισής τους, καθώς και ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως η πυκνότητα. Όλες αυτές οι έννοιες, οι οποίες σχετίζονται έμμεσα με την συγκεκριμένη αναπαράσταση και αποτελούν το ευρύτερο περιβάλλον στο οποίο εντάσσεται, θεωρούμε ότι αποτελούν τον εξωτερικό της ορίζοντα.

Αναλύοντας τα γραπτά δοκίμια των καθηγητών σε προηγούμενη εργασία (Zoitsakos et al., 2015) επιχειρήσαμε μια συνδυαστική ανάλυση από τη μια των αντιλήψεων των καθηγητών για την αναπαράσταση ‘0,3999 ...’, με βάση το θεωρητικό πλαίσιο των Gray και Tall (1999) για τη μετάβαση από το process στο procept και, από την άλλη, των διδακτικών προτάσεών τους με βάση το κριτήριο της μαθηματικής ορθότητας και το κριτήριο του φορμαλισμού. Στην παρούσα εργασία στρέφουμε την προσοχή μας σε μια μικρή ομάδα πέντε εκπαιδευτικών που από την προηγούμενη συνδυαστική ανάλυση προέκυψε ότι, ενώ έχουν ικανοποιητική μαθηματική κατανόηση, εντούτοις οι διδακτικές τους προτάσεις διολισθαίνουν από μαθηματική άποψη.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα ενότητα αναλύονται ενδεικτικά αποσπάσματα των γραπτών δοκιμίων καθηγητών της παραπάνω ομάδας, με βάση τον εσωτερικό και τον εξωτερικό τους ορίζοντα για την αναπαράσταση ‘0,3999...’ σε μια προσπάθεια διερεύνησης των πιθανών αιτιών που οδηγούν σε αυτήν τη διολίσθηση.

Μια περίπτωση ατυχούς συνδυασμού του εσωτερικού και του εξωτερικού ορίζοντα προκύπτει από την απάντηση της καθηγήτριας Κ7. Η καθηγήτρια αυτή φαίνεται να έχει ορθή μαθηματική γνώση για την εν λόγω αναπαράσταση, εφόσον σε σχέση με το μαθητή Β αναφέρει ότι «το 0,3999… δεν είναι ‘ένας αριθμός που τείνει στο 0,4’ αλλά το 0,4», ενώ σε άλλο σημείο αναφέρει ότι: «$0{,}3+\sum_{i=1}^{\infty} 0{,}9\frac{1}{10^i}=0{,}4$». Όμως, οι διδακτικές συστάσεις της προς τους μαθητές έχουν κάποια απόσταση από τη συγκεκριμένη έννοια, χωρίς να αποφεύγουν και κάποια προβλήματα. Για παράδειγμα, αναφέρεται ότι «για το μαθητή Β θα έγραφα $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}=0$ και θα ρώταγα: το ‘ $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}$ ’ είναι το ‘0’ ή τείνει στο ‘0’.

Από το συγκεκριμένο απόσπασμα, στο οποίο δεν εμφανίζεται κάποιο λάθος, φαίνεται ότι, ενώ ο μαθητής Β αναφέρεται σε ‘αριθμό που τείνει στο 0,4’, η διδακτική πρόταση στηρίζεται σε ένα παράδειγμα για τα χαρακτηριστικά μιας ακολουθίας. Δηλαδή, ορθά στοιχεία του εξωτερικού ορίζοντα της σχετικής γνώσης αδυνατούν να επικοινωνήσουν με συγκεκριμένα στοιχεία της γνώσης του μαθητή. Επίσης, για τον μαθητή Δ αναφέρεται:

> Θα έφτιαχνα μια γραφική παράσταση π.χ της $(\alpha_n)_{n\in N}$ με $a_n=1-(1/n)$ που έχει ασύμπτωτη την y=1 και είναι γνησίως αύξουσα, με $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$. Έτσι, κάποια άπειρα αθροίσματα μπορεί να υπάρχουν, παρόλο που οι όροι τους όλο και μεγαλώνουν. Αρκεί ένα τέτοιο άθροισμα να είναι άνω φραγμένο και τότε υπάρχει, δηλαδή, ισούται με έναν πραγματικό αριθμό.

Προτείνεται, λοιπόν, ένα παράδειγμα ‘φορτωμένο’ με έννοιες όπως, ακολουθία, ασύμπτωτη, μονοτονία και όριο ακολουθίας, φράγμα ακολουθίας, παρά το γεγονός ότι ο μαθητής Δ δεν αναφέρεται σε αυτές. Επίσης, απουσιάζει η αιτιολογία του ισχυρισμού ότι ‘κάποια άπειρα αθροίσματα μπορεί να υπάρχουν’. Δηλαδή, ορθές κατανοήσεις εμφανίζονται κατά τον διδακτικό μετασχηματισμό απομονωμένες από τις ανησυχίες του μαθητή, χωρίς αιτιολόγηση των βασικών ισχυρισμών.

Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι χαρακτηριστική της αδυναμίας της ανώτερης γνώσης των μαθηματικών που εντάσσεται στον εξωτερικό ορίζοντα να μετασχηματιστεί δημιουργικά κατά τη διδακτική πράξη, ώστε να συμβάλει στην κατανόηση του συγκεκριμένου αντικειμένου. Εντοπίζονται, λοιπόν προβλήματα τόσο στον διδακτικό μετασχηματισμό όσο και στην επικοινωνία με τις ανάγκες των μαθητών.

Ο καθηγητής Κ6 παρουσιάζει ικανοποιητική κατανόηση του ‘0,3999...’, καθώς αναφέρει για τις παρανοήσεις των μαθητών του σεναρίου: «[Ο μαθητής] Γ δεν αντιλαμβάνεται ότι [ο 0,3999...] είναι 0,4. [Ο μαθητής Δ] δεν αντιλαμβάνεται ότι η σειρά που περιγράφει συγκλίνει στο 0,4.»

Ωστόσο, στις διδακτικές του προτάσεις προσφέρει μια προβληματική μαθηματικά απόδειξη της ισότητας: 0,3999…=0,4.

> Θα χρησιμοποιούσα την εις άτοπον. Έστω ότι 0,3999...=0,4 τότε από την πληρότητα του **R** θα έπρεπε να βρίσκαμε αριθμό μεταξύ τους. Αν υπάρχει τέτοιος, τότε το πλήθος των ψηφίων [του] θα ήταν πεπερασμένο. Άτοπο.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα είναι φανερή η δυσκολία συνδυασμού των πτυχών του εσωτερικού ορίζοντα για την αναπαράσταση 0,3999…, όπως η σχέση της με το 0,4 και τα άπειρα δεκαδικά ψηφία, με τον εξωτερικό ορίζοντα, που είναι οι ευρύτερες έννοιες της πληρότητας του **R**, την οποία συγχέει με την πυκνότητα των ρητών αριθμών, και της αποδεικτικής μεθόδου της απαγωγής σε άτοπο, κατά τη διδακτική μεταφορά.

Στην απάντηση του καθηγητή Κ26 αποτυπώνεται εξαιρετική δυσκολία συνεργασίας ορθής αντίληψης πτυχών του εσωτερικού και του εξωτερικού ορίζοντα. Συγκεκριμένα, διαφαίνεται καλή αντίληψη της έννοιας κατά την επιχειρηματολογία ότι «Ο αριθμός 0,3999… ισούται με 0,4 ως άθροισμα των όρων της ακολουθίας 0,3, 0,39, 0,399, … και είναι αριθμός ρητός» (οι υπογραμμίσεις δικές του) και ότι «Ο μαθητής Α δεν συνειδητοποίησε ότι ο αριθμός [0,3999…] ισούται με 0,4». Όμως, για τον μαθητή Γ υποστηρίζει ότι:

> […] δεν έχει κατανοήσει πλήρως τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. […]. Σκέφτηκε ότι καθώς δεν μπορεί να σκεφτεί αριθμό ανάμεσα στο 0,4 και το 0,3999… δεν υπάρχει, [η οποία είναι] λάθος σκέψη.

Η διδακτική του σύσταση προς τον συγκεκριμένο μαθητή είναι:

> Ο μαθητής Γ δεν έχει κατανοήσει πλήρως τους ρητούς αριθμούς. Πρέπει να κατανοήσει ότι μεταξύ δυο ρητών υπάρχει τρίτος, π.χ μεταξύ του 0,398 και [του] 0,399 υπάρχει ο 0,3989.

Ουσιαστικά φαίνεται ότι, ενώ ο καθηγητής γνωρίζει πως 0,3999…= 0,4 και έτσι ο 0,3999… δεν είναι ο αμέσως προηγούμενος του 0,4, επιχειρηματολογεί για το ότι μεταξύ δυο διαφορετικών ρητών υπάρχει άλλος ρητός, αφήνοντας στον υποτιθέμενο μαθητή τη δυνατότητα να θεωρήσει ότι και μεταξύ του 0,3999… και του 0,4 υπάρχει άλλος ρητός αλλά δεν μπορεί να τον σκεφτεί. Έτσι, ενώ αναφέρει ορθά την έννοια της πυκνότητας των ρητών, που ανήκει στον εξωτερικό ορίζοντα, για να δικαιολογήσει ότι δεν υπάρχει η έννοια του προηγούμενου ρητού ενός αριθμού, αδυνατεί να κάνει σωστά τη σύνδεση με τον συγκεκριμένο προβληματισμό του μαθητή Γ.

Επίσης, ατυχής είναι η σύνδεση που επιδιώκει ανάμεσα στον προβληματισμό του μαθητή Δ και σε ένα παράδειγμα ενταγμένο σε ρεαλιστικό πλαίσιο, όπως φαίνεται στην αντίστοιχη διδακτική του σύσταση.

> …μπορεί να του ζητηθεί να προσθέσει τους αριθμούς 1000000 και 0,0000001 και στη συνέχεια να ερωτηθεί ‘αν δυο εταιρείες σου πρόσθεταν μισθούς 1000000 και 1000000,0000001 ευρώ ποια θα προτιμούσες;’

Η καθηγήτρια Κ43, ενώ γνωρίζει ότι «Η απάντηση στο ερώτημα ‘τι εκφράζει η παράσταση 0,3999…, όταν τα 9 είναι άπειρα’ είναι ότι εκφράζει τον αριθμό 0,4» και, επίσης, σωστά εντοπίζει ότι «ο μαθητής Δ ορθά γράφει το 0,3999… στη μορφή ενός άπειρου αθροίσματος, αλλά στη συνέχεια εσφαλμένα τονίζει ότι δεν αποτελεί αριθμό», στις διδακτικές της προτάσεις για τους μαθητές Γ και Δ αναφέρει:

> …τους ρωτάμε αν ο αριθμός 0,3999… είναι ο αριθμός 0,4 και, αν απαντήσουν αρνητικά, τους ζητάμε να βρουν αν υπάρχει κάποιο δεκαδικό ψηφίο του αριθμού 0,3999… το οποίο τον καθιστά μικρότερο στη διάταξη από τον αριθμό 0,4. Όσον αφορά στο ότι η παράσταση 0,3999… δεν είναι αριθμός σχεδιάζουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών και προσπαθούμε να βρούμε που βρίσκονται διάφοροι πραγματικοί αριθμοί.

Στο απόσπασμα αυτό φαίνεται μια ιδιαίτερη προσπάθεια απλοποίησης των εννοιών, με αποτέλεσμα να χάνεται εντελώς το μαθηματικό περιεχόμενο. Επίσης, εντοπίζεται μια αδιαφανής προσπάθεια να εμφανιστεί το αναπαραστατικό πλαίσιο της ευθείας των πραγματικών αριθμών για να προσδώσει χαρακτηριστικά αριθμού στο 0,3999… .

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η σύνδεση μιας δεκαδικής αναπαράστασης με περίοδο 9 με στοιχειώδη αλλά και με ανώτερα μαθηματικά αναδεικνύει ένα πλούσιο εσωτερικό και εξωτερικό ορίζοντα γνώσης και συνιστά ένα εξαιρετικά προκλητικό πεδίο μάθησης και διδασκαλίας.

Η ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας έδειξε ότι η καλή κατανόηση της συγκεκριμένης αναπαράστασης, καθώς και η γνώση των στοιχείων του εσωτερικού και του εξωτερικού ορίζοντά της, δεν αρκούν για ένα αποτελεσματικό διδακτικό μετασχηματισμό. Εκπαιδευτικοί, ενώ διαχειρίζονται ικανοποιητικά πτυχές του εσωτερικού και του εξωτερικού ορίζοντα, αποτυγχάνουν να συνδέσουν στοιχεία τους με κατάλληλο τρόπο κατά την ανάπτυξη των διδακτικών τους προτάσεων. Ορισμένοι, στην προσπάθεια τους να συνδέσουν στοιχεία του εσωτερικού ορίζοντα με ευρύτερα του εξωτερικού, χρησιμοποιούν ακατάλληλα παραδείγματα. Άλλοι, επιχειρώντας να επιτύχουν αυτή τη σύνδεση μέσα από ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, χρησιμοποιούν άστοχες μεταφορές, οι οποίες μπορεί να δημιουργήσουν παρανοήσεις στους μαθητές. Μερικοί προσπαθούν, χωρίς επιτυχία, να συνδέσουν με τυπικό τρόπο τους δύο ορίζοντες. Τέλος, υπάρχουν και κάποιοι που αρκούνται σε γενικές αναφορές συνδέσεων, τις οποίες, ωστόσο, αποφεύγουν να υλοποιήσουν. Καταγράφεται, λοιπόν, μια σημαντική δυσκολία στη σύνδεση του εξωτερικού ορίζοντα του αντικειμένου με στοιχεία του εσωτερικού ορίζοντα, με αποτέλεσμα να μην καθίσταται δυνατό η γνώση των δύο οριζόντων να μετασχηματιστεί δημιουργικά στη διδακτική πράξη, συμβάλλοντας έτσι στην κατανόηση του αντικειμένου.

Η λεπτότητα της υπό εξέταση μαθηματικής έννοιας, τόσο σε σχέση με το μαθηματικό της περιεχόμενο όσο και σε σχέση με το επιστημολογικό της υπόβαθρο, φαίνεται να συνδέεται με αυτά τα προβλήματα, καθιστώντας εμφανή την ιδιαίτερη προσοχή που απαιτείται κατά τη διάρκεια του διδακτικού μετασχηματισμού της. Επιπλέον, τονίζει τον ποιοτικά διαφορετικό χαρακτήρα του γνωστικού περιεχομένου της διδασκαλίας των μαθηματικών (Davis & Simmt, 2006).

Τα παραπάνω ευρήματα καταδεικνύουν με σαφήνεια την εξειδίκευση και την ποιότητα της μαθηματικής γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία, ιδιαίτερα σε ανώτερο επίπεδο. Επίσης, υπογραμμίζουν τη σημασία περαιτέρω έρευνας σχετικά με εκείνα τα χαρακτηριστικά που την καθιστούν ιδιαίτερη, καθώς και με εκείνους τους λόγους που μαθηματικά σωστές αντιλήψεις δεν εγγυώνται διδακτικές προσεγγίσεις απαλλαγμένες από αλλοιωμένες έως και εσφαλμένες μαθηματικές ιδέες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gelleschaft fur Didaktic der Mathematik, Oldenburg, Germany. Retrieved May 15, 2011 from www.mathematik.unidortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/BzMU2009-Inhalt-fuer-Homepage.htm.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 301-309.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 293- 319.

Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics,* 60: 253-266.

Giannakoulias, E., Sougioul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties, *Proceedings of the 5th Conference of European Research in Mathematics Education* (CERME), 1955-1964, Larnaca, Cyprus.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141.

Hossain, S., Mendick, H., & Adler, J. (2013). Troubling "understanding mathematics in-depth: Its role in the identity work of students –teachers in England. *Educational Studies in Mathematics*, 84: 35- 48.

Huillet, D. (2009). Mathematics for teaching: an anthropological approach and its use in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 4-10.

Husserl, E. (1982). *Ideas Pertaining to a Pure Phenomenology and to a Phenomenological Philosophy*. Trans. F. Kersten. The Hague: Nijhoff.

Husserl, E. (1973). *Experience and Judgement: Investigations in a Genealogy of Logic*. Evanston: Northwestern University Press.

Mamolo, A., & Pali, R. (2014). Factors Influencing Prospective Teachers' Recommendations to Students: Horizons, Hexagons, and Heed, *Mathematical Thinking and Learning*, 16: 32-50.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: Sage.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263–281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics, 31*(2), 8–13.

Ζωιτσάκος, Σ., Ζαχαριάδης, Θ., & Σακονίδης Χ. (2014). Διερευνώντας τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών μέσα από την ερμηνεία παρανοήσεων μαθητών. *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Φλώρινα.

Zoitsakos, S., Zachariades, Th., & Sakonidis Ch. (2015). Secondary mathematics teachers' content knowledge for teaching in two contexts: interpreting versus managing didactically students' understandings. *Proceedings of the 9th Conference of European Research in Mathematics Education* (CERME), (in press), Prague, Czech Republic.

Zoitsakos, S., Zachariades, Th., & Sakonidis Ch. (2013). Secondary mathematics teachers' understanding of the infinite decimal representation of a rational number. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.) *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 441- 448). Kiel, Germany: PME.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΔΥΟ ΟΠΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΤΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΗ ΣΥΛΛΗΨΗ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Παναγιώτα Ηρακλέους, Παρασκευή Μιχαήλ - Χρυσάνθου & Αθανάσιος Γαγάτσης
Πανεπιστήμιο Κύπρου
pirakl01@ucy.ac.cy, pmicha06@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy

Η έρευνα εξετάζει τον τρόπο που δυο οπτικές μεταβλητές επηρεάζουν την ευρετική λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων, με βάση τη θεωρία του Duval. Συγκεκριμένα, διερευνήθηκε η επίδραση των μεταβλητών αυτών στις στρατηγικές τεσσάρων μαθητών Α΄ Γυμνασίου σε έργα μερολογικής τροποποίησης γεωμετρικών σχημάτων. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσα από ημιδομημένες συνεντεύξεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι δυο οπτικές μεταβλητές επηρεάζουν έντονα την ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης του σχήματος και της ευρετικής του λειτουργίας. Με βάση τα αποτελέσματα διατυπώνονται εισηγήσεις για τη διδασκαλία της γεωμετρίας καθώς και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Αναλυτικά Προγράμματα των Μαθηματικών δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στη γεωμετρία (NCTM, 2000), αφού συνιστά ένα μέσο ανάπτυξης της ικανότητας εξεικόνισης και απόδειξης (Battista, 2007). Ένα στοιχείο που παίζει αξιοσημείωτο ρόλο στη γεωμετρία είναι το σχήμα, το οποίο αναπαριστά μια γεωμετρική κατάσταση με πιο σύντομο τρόπο από την ομιλούμενη γλώσσα (Lemonidis, 1997). Ωστόσο, το σχήμα συχνά προκαλεί δυσκολίες στους μαθητές (Gal & Linchevski, 2010).

Η επιτυχία στη λύση γεωμετρικών έργων επαφίεται στον τρόπο που βλέπει κανείς το σχήμα (Duval, 2014). Ο Duval (1995) πρότεινε κάποιες οπτικές μεταβλητές που διευκολύνουν ή εμποδίζουν την ευρετική λύση ενός γεωμετρικού έργου. Μέχρι στιγμής, δεν έχουν διεξαχθεί έρευνες που να εξετάζουν εμπειρικά την επίδραση των οπτικών μεταβλητών στην ευρετική επεξεργασία του γεωμετρικού σχήματος (Michael, Gagatsis, Avgerinos, & Kuzniak, 2011). Το βιβλιογραφικό αυτό κενό υπαγορεύει την αναγκαιότητα της παρούσας έρευνας, η οποία επιχειρεί να αποτυπώσει μια πιο σφαιρική εικόνα για τις γνωστικές διαδικασίες που υφέρπουν κάτω από τις δυσκολίες των μαθητών στη γεωμετρία.

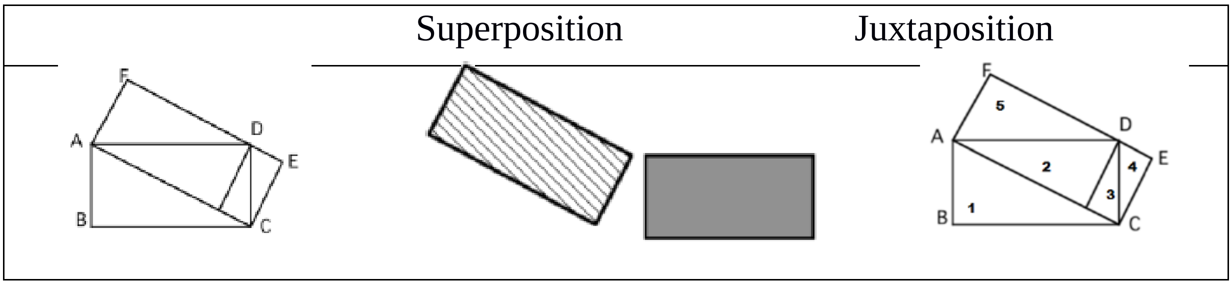
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η εν λόγω έρευνα υιοθετεί ως κατευθυντήριο θεωρητικό πλαίσιο τη θεωρία του Duval. Ο Duval (1995, 1999, 2006) προσέγγισε τις δυσκολίες των μαθητών στη γεωμετρία από μια γνωστική σκοπιά, προσδιορίζοντας τους εξής τέσσερις τύπους σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

1. Αντιληπτική σύλληψη: η αβίαστη αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να λειτουργήσει κάποια γεωμετρική φιγούρα ως σχήμα. Ωστόσο, ο μαθητής μπορεί να παγιδευτεί στη στατική εικόνα του σχήματος.
2. Ακολουθιακή σύλληψη: χρησιμεύει στην κατασκευή ή την περιγραφή των σταδίων κατασκευής ενός σχήματος.
3. Λεκτική/λογική σύλληψη: απαιτεί το λεκτικό σημειωτικό σύστημα για να οριστούν οι μαθηματικές σχέσεις του σχήματος (Duval, 1995).
4. Λειτουργική σύλληψη: οδηγεί το μαθητή στη λύση (Duval, 2006). Εμπλέκει τη νοερή ή φυσική επεξεργασία του σχήματος (Duval, 1995) και δίνει στο σχήμα ευρετική λειτουργία (Duval, 1999). Η μερολογική τροποποίηση είναι ο πιο δύσκολος τύπος τροποποίησης (Michael, Gagatsis, Elia, Deliyianni, & Monoyiou, 2009) και αφορά στη διαίρεση του σχήματος σε υποσχήματα, το συνδυασμό των υποσχημάτων και τη δημιουργία νέων υποσχημάτων (Duval, 1995).

Οι 4 τύποι σύλληψης μπορούν να συνοψιστούν σε δυο τρόπους προσέγγισης (Duval, 2014). Ο αντιληπτικός τρόπος προσέγγισης είναι η αυθόρμητη αναγνώριση του σχήματος. Ο μαθηματικός τρόπος σχετίζεται με τη λειτουργική σύλληψη. Δηλαδή αφορά στον έλεγχο της αναγνώρισης του σχήματος μέσω των ιδιοτήτων του, από τις οποίες εξάγονται άλλες ιδιότητες. Ο μαθητής μπορεί να δει ένα σχήμα ευέλικτα μέσω του «superposition» αλλά και του «juxtaposition» (Duval, 2014). Όπως φαίνεται στο παράδειγμα του σχήματος 1, με το «superposition» ένας μαθητής βλέπει μόνο δυο ορθογώνια που επικαλύπτονται. Αντίθετα, μέσω το «juxtaposition» βλέπει πέντε υποσχήματα που αντιπαρατίθενται.

Σχήμα 1: Superposition και juxtaposition



Ορατότητα της ευρετικής επεξεργασίας του σχήματος

Κομβικό σημείο στη λειτουργική σύλληψη του σχήματος είναι η ορατότητα της τροποποίησής του, που εξαρτάται από τις ακόλουθες 5 οπτικές μεταβλητές (Duval, 1995). Πρωτίστως, η διαίρεση του σχήματος σε υποσχήματα διευκολύνει τη λειτουργική σύλληψη. Παράλληλα, η ανάγκη για διπλή χρήση ενός υποσχήματος σε ένα έργο περιορίζει την ορατότητα της πράξης. Επίσης, αν το αναδιοργανωμένο σχήμα προεξέχει από το αρχικό πλαίσιο του σχήματος, η ορατότητα της πράξης μειώνεται. Τέλος, εάν τα υποσχήματα σχηματίζουν κυρτό σχήμα ή αν ο συνδυασμός των υποσχημάτων δημιουργεί ένα γνωστό σχήμα, η λειτουργική σύλληψη ενεργοποιείται πιο εύκολα. Οι γνωστικές μεταβλητές μπορούν να αξιοποιηθούν ως διδακτικές μεταβλητές για το σχεδιασμό έργων που αναπτύσσουν την ευρετική ικανότητα των παιδιών (Duval, 2014).

Η ερευνητική δραστηριότητα γύρω από τις πιο πάνω οπτικές μεταβλητές είναι περιορισμένη. Ειδικότερα, εξετάστηκε η επίδραση των διδακτικών μεταβλητών και της αντιληπτικής σύλληψης σε έργα περιμέτρου (Παναγίδου, Τσιαννή & Γαγάτσης, 2004 στο Γαγάτσης, κ.α., 2011). Διερευνήθηκαν επίσης οι προσεγγίσεις μαθητών μέσης εκπαίδευσης σε έργα που εμπλέκουν ρητό και διαισθητικό μέτρο και λύνονται μέσω λειτουργικής σύλληψης (Michael-Chrysanthou & Gagatsis, 2013).

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα εξετάζει το ρόλο που διαδραματίζουν δυο οπτικές μεταβλητές στην ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης του σχήματος σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου. Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

1.Ποια είναι η επίδραση της διπλής χρήσης ενός υποσχήματος στην ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης του σχήματος;

2.Πώς επηρεάζει ο μη εμφανής διαχωρισμός του σχήματος σε υποσχήματα την ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

Οι συμμετέχοντες ήταν 4 μαθητές Α΄ Γυμνασίου: η Άννα, ο Γιώργος, ο Σωκράτης και η Χρίστια, οι οποίοι είχαν μαθηματική επίδοση άνω του μετρίου, με βάση τους βαθμούς τους στην τρέχουσα σχολική χρονιά.

Συλλογή δεδομένων

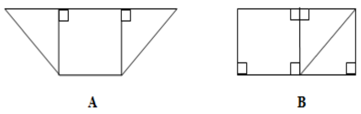
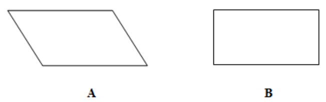
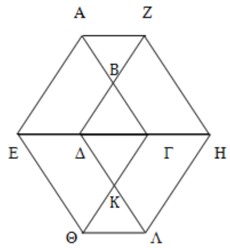
Λήφθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις των 30 λεπτών, που περιείχαν τρεις ομάδες έργων μερολογικής τροποποίησης του σχήματος. Το σχήμα 2 παρουσιάζει ένα ενδεικτικό έργο από κάθε ομάδα έργων. Η α΄ ομάδα έργων περιλαμβάνει 3 έργα σύγκρισης εμβαδού, στα οποία δεν παρεμβαίνει κάποιος οπτικός παράγοντας. Τα έργα της β΄ ομάδας αφορούν επίσης στο εμβαδόν, όμως τα σχήματα δεν είναι εμφανώς χωρισμένα σε υποσχήματα. Τα έργα της γ' ομάδας απαιτούν τη διπλή χρήση ενός υποσχήματος. Οι μαθητές πρέπει να εντοπίσουν σχήματα που περιέχονται σε γεωμετρικές συνθέσεις. Συγχρόνως, τα παιδιά κλήθηκαν να περιγράψουν τις στρατηγικές, τις δυσκολίες τους και τις σχολικές μαθησιακές τους εμπειρίες.

Σε πρώτη φάση, τους δόθηκε η α΄ ομάδα έργων, ενώ οι άλλες δυο ομάδες έργων λύθηκαν μια εβδομάδα μετά.

Ανάλυση δεδομένων

Σε πρώτο επίπεδο, οι απαντήσεις αξιολογήθηκαν ως προς την ορθότητά τους. Έπειτα, αναγνωρίστηκε η στρατηγική των παιδιών, ώστε να ανιχνευθεί ποιος τύπος σύλληψης του σχήματος ενεργοποιήθηκε.

Σχήμα 2: Παραδείγματα έργων από τις συνεντεύξεις

Α΄ΟΜΑΔΑ ΕΡΓΩΝ:	Β΄ΟΜΑΔΑ ΕΡΓΩΝ:	Γ΄ΟΜΑΔΑ ΕΡΓΩΝ:
1.Ποια δήλωση είναι σωστή;  α) Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι πιο μεγάλο από αυτό του σχήματος Β. β) Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι ίσο με αυτό του σχήματος Β. γ) Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι πιο μικρό από αυτό του σχήματος Β.	1.Το πρώτο σχήμα είναι παραλληλόγραμμο, ενώ το δεύτερο σχήμα είναι ορθογώνιο. Ποια δήλωση είναι σωστή;  α) Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι πιο μεγάλο από αυτό του σχήματος Β. β) Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι ίσο με αυτό του σχήματος Β. γ) Το εμβαδόν του σχήματος Α είναι πιο μικρό από αυτό του σχήματος Β.	1.Να ονομάσεις τα τρίγωνα, τους ρόμβους και τα τραπέζια που εντοπίζεις πιο κάτω. 

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Λύσεις και στρατηγικές μαθητών στα έργα της συνέντευξης

Α ομάδα έργων: Σχήματα όπου δεν παρεμβαίνουν οπτικές μεταβλητές

Έργο 1: Το έργο επιλύθηκε ορθά από τους μαθητές μέσω μερολογικής τροποποίησης, οι οποίοι δήλωσαν ότι η πράξη που έπρεπε να εκτελέσουν στο σχήμα ήταν ορατή. Εξαίρεση αποτέλεσε η Χρίστια, η οποία συνδύασε και μια δεύτερη μέθοδο. Εντόπισε αντιληπτικά τα υποσχήματα του κάθε σχήματος και έκανε μέτρηση με τη χρήση διαισθητικού μέτρου, θεωρώντας το ένα ορθογώνιο ως μονάδα μέτρησης. Ανέφερε μάλιστα ότι μια τέτοια στρατηγική είναι αποδεκτή από την καθηγήτριά της.

Έργο 2: Όλοι οι μαθητές προέβηκαν σε ευρετική επεξεργασία του σχήματος, λύνοντας το έργο ορθά. Αν και η μερολογική τροποποίηση του σχήματος έγινε εύκολα, η συμπεριφορά της Χρίστιας παρουσίασε ενδιαφέρον. Αρχικά, η Χρίστια παγιδεύτηκε στην αντιληπτική σύλληψη. Βλέποντας με την πρώτη ματιά το σχήμα, δεν μπόρεσε να διακρίνει τα δυο υποσχήματα του σχήματος Α: «Στην αρχή μπερδεύτηκα, επειδή δεν είδα το μισό κύκλο που περισσεύει στο σχήμα Α». Ωστόσο, στην πορεία χειρίστηκε το σχήμα ευρετικά και έλυσε το έργο.

Έργο 3: Όλοι οι μαθητές έλυσαν ορθά το έργο, επιστρατεύοντας την αντιληπτική και τη λειτουργική σύλληψη του σχήματος. Αναγνώρισαν τα υποσχήματα των σχημάτων και τα αναδιαμόρφωσαν κατάλληλα. Είναι άξιο αναφοράς ότι η Χρίστια μετά τη μερολογική τροποποίηση του σχήματος, εφάρμοσε την αντιληπτική προσέγγιση της μέτρησης. Ανέφερε χαρακτηριστικά ότι: «Στο σχήμα Α έχουμε ½ και ½, που μας κάνει 1 και στο σχήμα Β έχουμε ½ και ½ , που μας κάνει πάλι 1». Δηλαδή μέτρησε τα υποσχήματα του σχήματος, με μονάδα μέτρησης το ένα ορθογώνιο.

Πίνακας 1: Στρατηγικές μαθητών στην α΄ ομάδα έργων

Μαθητής	**Έργο 1**	**Έργο 2**	**Έργο 3**
Χρίστια	Μερολογική τροποποίηση & Μέτρηση	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση & Μέτρηση
Σωκράτης	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση
Γιώργος	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση
Άννα	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση

Β ομάδα έργων: Σχήματα μη εμφανώς χωρισμένα σε υποσχήματα

***Έργο 1*:** Ο μη εμφανής διαχωρισμός του σχήματος μείωσε την ορατότητα της πράξης. Σύμφωνα με το Σωκράτη: «Είναι άλλο σχήμα το Α και άλλο σχήμα το Β. Το Α είναι παραλληλόγραμμο και το Β ορθογώνιο». Το έργο λύθηκε ορθά από όλους, χρησιμοποιώντας διαφορετικές όμως μεθόδους. Η Χρίστια λειτούργησε αντιληπτικά. Αποφάνθηκε ότι τα εμβαδά είναι ίσα, διότι: «Όταν λυγίζεις [το ορθογώνιο] γίνεται παραλληλόγραμμο». Ο Σωκράτης κατέφυγε επίσης σε μια αντιληπτική μέθοδο. Μέτρησε τις διαστάσεις των σχημάτων και αξιοποίησε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού. Η Άννα επεξεργάστηκε το σχήμα ευρετικά, όμως ένιωσε την ανάγκη να επιβεβαιώσει την απάντηση της μέσω εκτέλεσης πράξεων. Μόνο ο Γιώργος αξιοποίησε αποκλειστικά τη μερολογική τροποποίηση του σχήματος. Διαίρεσε το σχήμα σε υποσχήματα και το αναδιοργάνωσε.

Έργο 2: Οι μαθητές έλυσαν το έργο ορθά. Η Χρίστια και ο Σωκράτης αξιοποίησαν μια αντιληπτική προσέγγιση. Είδαν το σχήμα στατικά, κάνοντας μετρήσεις και πράξεις για τη σύγκριση των εμβαδών. Αντίθετα, η Άννα συνδύασε τη μερολογική τροποποίηση του σχήματος μαζί με την εκτέλεση πράξεων για να επιβεβαιώσει τη λύση της. Ο Γιώργος κατέφυγε και πάλι στην ευρετική επεξεργασία του σχήματος και αναγνώρισε τη σχέση ισότητας των εμβαδών, που δεν ήταν αντιληπτικά εμφανής.

Έργο 3: Αν και όλοι έλυσαν ορθά το έργο, η ορατότητα της πράξης ήταν μειωμένη. Η Χρίστια και ο Σωκράτης περιορίστηκαν στην αντιληπτική σύλληψη. Ο Σωκράτης δήλωσε: «Δεν μπορείς να συγκρίνεις τα δυο σχήματα, γιατί δεν είναι χωρισμένα σε πιο μικρά τρίγωνα». Έτσι, μέτρησαν τα μήκη των πλευρών και εφάρμοσαν τον τύπο του εμβαδού. Η Άννα κατόπιν της μερολογικής τροποποίησης του σχήματος, αξιοποίησε την αλγοριθμική προσέγγιση, που την όπλισε με σιγουριά για την ορθότητα της λύσης της. Τέλος, ο Γιώργος έλυσε το έργο αναλύοντας το σχήμα σε υποσχήματα και τροποποιώντας το μερολογικά.

Πίνακας 2: Στρατηγικές μαθητών στη β΄ ομάδα έργων

Μαθητής	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Χρίστια	Αντιληπτική	Αλγοριθμική	Αλγοριθμική
Σωκράτης	Αλγοριθμική	Αλγοριθμική	Αλγοριθμική
Γιώργος	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση	Μερολογική τροποποίηση
Άννα	Μερολογική τροποποίηση & Αλγοριθμική	Μερολογική τροποποίηση & Αλγοριθμική	Μερολογική τροποποίηση & Αλγοριθμική

Γ ομάδα έργων: Διπλή χρήση υποσχημάτων κατά τη μερολογική τροποποίηση

Έργο 1: Κανένας μαθητής, πλην του Γιώργου, δεν αναγνώρισε ορθά όλα τα σχήματα, διότι παρέμβαινε η μεταβλητή της διπλής χρήσης ενός υποσχήματος. Η Χρίστια ανέφερε χαρακτηριστικά: «Έχει πολλά σχήματα μαζί ανακατεμένα». Όσον αφορά τα τρίγωνα, όλοι εντόπισαν και τα οκτώ τρίγωνα. Μάλιστα, όλοι είδαν με την πρώτη ματιά τα 4 μικρά τρίγωνα, διότι δεν απαιτούν τη διπλή χρήση ενός υποσχήματος. Σχετικά με τους ρόμβους, οι τρεις εγκλωβίστηκαν στη στατική όψη του σχήματος, βλέποντας μόνο το ρόμβο ΔΚΓΒ. Μόνο ο Γιώργος είδε τα σχήματα μέσω του μαθηματικού τρόπου και αναγνώρισε και τους άλλους 2 ρόμβους. Η αναγνώριση των τραπεζίων χαρακτηρίστηκε πιο δύσκολη: «Πρέπει να δεις πιο προσεκτικά» διότι ορισμένα είναι περιστραμμένα. Η Χρίστια δεν εντόπισε κανένα τραπέζιο, αφού δεν θυμόταν το μαθηματικό του ορισμό. Ο Σωκράτης κι η Άννα αναγνώρισαν μόνο τα δυο τραπέζια με οριζόντια βάση. Μόνο ο Γιώργος εντόπισε και τα υπόλοιπα 4 τραπέζια.

Έργο 2: Η ανάγκη για διπλή χρήση των υποσχημάτων του σχήματος μείωσε την ορατότητα της πράξης. Κανένας δεν εντόπισε όλους τους συνδυασμούς υποσχημάτων που δημιουργούν το δοθέν σχήμα. Η Χρίστια είδε το σχήμα μόνο αντιληπτικά. Αναγνώρισε μόνο ένα συνδυασμό: τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΖΔΕ, ΖΕΒ και ΒΕΓ, που δεν απαιτούν διπλή χρήση υποσχημάτων. Ο Σωκράτης και η Άννα αξιοποίησαν εν μέρει τη λειτουργική σύλληψη, βρίσκοντας ακόμα ένα συνδυασμό: τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΕΓ με το παραλληλόγραμμο ΖΒΕΔ. Τέλος, ο Γιώργος χρησιμοποίησε πιο έντονα τη λειτουργική σύλληψη, βλέποντας και έναν τρίτο συνδυασμό: το τραπέζιο ΑΖΔΕ και το παραλληλόγραμμο ΖΒΓΕ.

Έργο 3: Κανένας δεν αναγνώρισε ορθά όλα τα σχήματα, καθώς η αντιληπτική σύλληψη κυριάρχησε σε βάρος της λειτουργικής. Αναφορικά με τα τετράγωνα, μόνο ο Γιώργος κατόρθωσε να αξιοποιήσει στο έπακρο τη λειτουργική σύλληψη και να εντοπίσει και τα 10 τετράγωνα. Η Χρίστια παγιδεύτηκε στον αντιληπτικό τρόπο προσέγγισης, αναγνωρίζοντας μόνο τα τέσσερα μικρά τετράγωνα. Ο Σωκράτης και η Άννα εντόπισαν οκτώ συνολικά τετράγωνα: 4 μικρά και 4 μεσαίου μεγέθους. Η αναγνώριση των ορθογωνίων θεωρήθηκε πιο δύσκολη, διότι προϋποθέτει απαραίτητα το συνδυασμό υποσχημάτων. Ειδικότερα, η Χρίστια είδε το σχήμα στατικά και δεν αναγνώρισε κανένα ορθογώνιο. Ο Σωκράτης και η Άννα είδαν τέσσερα και τρία ορθογώνια αντίστοιχα. Τέλος, ο Γιώργος προσέγγισε τα σχήματα με το μαθηματικό τρόπο, συνδύασε τα δοθέντα υποσχήματα και έτσι αναγνώρισε οκτώ συνολικά ορθογώνια. Είναι αξιοσημείωτο ότι κανείς δεν αναγνώρισε τα τετράγωνα ως ειδικές περιπτώσεις ορθογωνίων.

Πίνακας 3: Τρόποι προσέγγισης σχήματος στη γ΄ ομάδα έργων

Μαθητής	Έργο 1	Έργο 2	Έργο 3
Χρίστια	Μόνο αντιληπτικός	Μόνο αντιληπτικός	Μόνο αντιληπτικός
Σωκράτης	Κυρίως αντιληπτικός	Κυρίως αντιληπτικός	Κυρίως αντιληπτικός
Γιώργος	Μαθηματικός	Μαθηματικός	Μαθηματικός
Άννα	Κυρίως αντιληπτικός	Κυρίως αντιληπτικός	Κυρίως αντιληπτικός

4.2.Μαθησιακές εμπειρίες μαθητών στη γεωμετρία

Οι μαθητές επεσήμαναν ότι τα έργα της συνέντευξης διαφέρουν από τις σχολικές ασκήσεις, οι οποίες αφορούν κυρίως σε εκτέλεση υπολογισμών. Για παράδειγμα, ο Γιώργος δήλωσε: «Συνήθως δίνονται τα νούμερα και πρέπει να βρούμε πόσο είναι το εμβαδόν των σχημάτων ή μετρούμε τις πλευρές με τη ρίγα». Ο Σωκράτης πρόσθεσε: «Μπορεί να σου δίνει το εμβαδόν για να βρεις τη μια πλευρά που λείπει». Επομένως, οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με έργα που λύνονται με ποιοτική σύγκριση του εμβαδού των σχημάτων. Οι τυπικές σχολικές ασκήσεις δεν εστιάζουν ούτε στην αναγνώριση σχημάτων μέσα σε γεωμετρικές συνθέσεις. Σύμφωνα με τη Χρίστια, στις σχολικές ασκήσεις: «Μπορεί να έχει ένα ή δυο σχήματα, αλλά δεν είναι όλα μαζί, το ένα μέσα στο άλλο». Συνεπώς, δεν είναι εξασκημένοι να βλέπουν τα σχήματα με το μαθηματικό τρόπο, δηλ. να κινούνται ανάμεσα στο «juxtaposition» και το «superposition».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εν λόγω έρευνα υποστηρίζει εμπειρικά τον ισχυρισμό του Duval (1995) ότι οι δυο υπό εξέταση οπτικές μεταβλητές δυσχεραίνουν την ορατότητα της ευρετικής επεξεργασίας του σχήματος. Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, ο μη διαχωρισμός του σχήματος επηρέασε τη λειτουργική σύλληψη, σε διαφορετικό φυσικά βαθμό στο κάθε παιδί. Εκτενέστερα, στα έργα της α΄ομάδας, όλοι χρησιμοποιούσαν το σχήμα ως την πηγή λύσης, προβαίνοντας στη μερολογική τροποποίησή του. Εξαίρεση αποτέλεσε η Χρίστια η οποία, εκτός από μερολογική τροποποίηση, αξιοποιούσε συστηματικά και τη μέτρηση με τη χρήση διαισθητικού μέτρου. Αυτή η στρατηγική φαίνεται να απορρέει από το διδακτικό συμβόλαιο, δηλαδή τις άτυπες κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες που είχε καθιερώσει η καθηγήτρια της (Brousseau, 1984).

Αντίθετα, στα έργα όπου τα σχήματα δεν ήταν εμφανώς διαιρεμένα, οι μαθητές κατέφυγαν σε διαφορετικές μεθόδους. Για τη Χρίστια και το Σωκράτη, η λειτουργική σύλληψη αδρανοποιήθηκε πλήρως, αφού σε όλα τα έργα κατέφευγαν στην αλγοριθμική προσέγγιση και έβλεπαν το σχήμα στατικά (Duval, 1995). Στην περίπτωση της Άννας, η οπτική αυτή μεταβλητή δεν αδρανοποίησε τη λειτουργική σύλληψη αλλά διαφοροποίησε τη στρατηγική της. Εξακολούθησε μεν να τροποποιεί μερολογικά τα σχήματα, αλλά υπήρχε και η ανάγκη για επιβεβαίωση της λύσης, με την εφαρμογή τύπων. Μόνο ο Γιώργος έμεινε ανεπηρέαστος από την οπτική αυτή μεταβλητή, καθώς διαχώριζε ο ίδιος τα σχήματα σε υποσχήματα και τα αναδιοργάνωνε κατάλληλα (Duval, 1995).

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα, η ανάγκη για διπλή χρήση υποσχημάτων επηρέασε τον τρόπο που μαθητές έβλεπαν το σχήμα σε διαφορετικό βαθμό στον καθένα τους. Για τη Χρίστια η ορατότητα της πράξης ελαχιστοποιήθηκε εντελώς. Έβλεπε τα σχήματα μόνο μέσω του «superposition» (Duval, 2014) και αναγνώριζε μόνο όσα δεν απαιτούν διπλή χρήση υποσχημάτων. Ο Σωκράτης και η Άννα επηρεάστηκαν σε μικρότερο βαθμό. Αναγνώριζαν τα σχήματα κυρίως αντιληπτικά, όμως σε κάποιες περιπτώσεις έβλεπαν το σχήμα και με το μαθηματικό τρόπο, μέσα από το «juxtaposition» (Duval, 2014). Δηλαδή συνδύαζαν υποσχήματα, δημιουργώντας νέα σχήματα (Duval, 1995). Τέλος, ο Γιώργος μπόρεσε να εντοπίσει ένα πιο ευρύ φάσμα σχημάτων. Έκανε διπλή χρήση υποσχημάτων και ανακάλυπτε αλυσίδες σχημάτων που δεν ήταν αντιληπτικά προφανείς (Duval, 1999).

Η επίδραση των δυο υπό εξέταση οπτικών μεταβλητών στις στρατηγικές των μαθητών μπορεί να ερμηνευθεί από το διδακτικό συμβόλαιο που έχουν συνάψει με το δάσκαλο και τα Μαθηματικά (Brousseau, 1984) και τις μαθησιακές τους εμπειρίες. Η έρευνα αυτή έδειξε ότι οι μαθησιακές εμπειρίες των παιδιών με δραστηριότητες που λύνονται μέσω μερολογικής τροποποίησης του σχήματος είναι μηδαμινές. Επομένως, όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με έργα στα οποία παρεμβαίνουν οι εν λόγω οπτικές μεταβλητές, παγιδεύονται στον αντιληπτικό τρόπο προσέγγισης, αδυνατώντας να επεξεργαστούν το σχήμα ευρετικά.

Ο διαφορετικός βαθμός στον οποίο οι δυο μεταβλητές επηρέασαν τις προσεγγίσεις του κάθε μαθητή μπορεί να επεξηγηθεί από ατομικά χαρακτηριστικά όπως το γνωστικό στυλ και η χωρική ικανότητα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ο Γιώργος διαθέτει χωρικό γνωστικό στυλ και γι' αυτό εξακολούθησε να ενεργοποιεί τη λειτουργική σύλληψη του σχήματος χωρίς να επηρεαστεί από τις δυο υπό εξέταση μεταβλητές. Επίσης, ενδεχομένως να έχει ανεπτυγμένη χωρική ικανότητα, που του επιτρέπει να βλέπει και να χειρίζεται ευέλικτα τα σχήματα. Βέβαια, η υπόθεση αυτή θα πρέπει να ελεγχθεί εμπειρικά από μελλοντικές έρευνες.

Εισηγήσεις για τη διδακτική πράξη και για μελλοντική έρευνα

Τα πορίσματα της έρευνας εγείρουν την ανάγκη αναδιαμόρφωσης των μαθησιακών εμπειριών που παρέχονται στους μαθητές Α' γυμνασίου, που μεταβαίνουν σε μια άλλη εκπαιδευτική βαθμίδα (Mullins & Ivrin, 2000). Εκτενέστερα, είναι σημαντικό να αξιοποιούνται έργα ευρετικής επεξεργασίας του σχήματος με βάση τις οπτικές μεταβλητές που προτείνει ο Duval (1995). Έτσι, οι μαθητές θα καταστούν ικανοί να βλέπουν το σχήμα με όλους τους τύπους σύλληψης (Duval, 1995, 1999).

Συγχρόνως, τα αποτελέσματα της εργασίας υποδεικνύουν κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα. Πρωτίστως, είναι αναγκαίο να διερευνηθεί εάν μαθητές με διαφορετικά ατομικά χαρακτηριστικά (π.χ. μαθηματική επίδοση, γνωστικό στυλ ή χωρική ικανότητα) επηρεάζονται με τον ίδιο τρόπο από τις δυο οπτικές μεταβλητές κατά τη λύση γεωμετρικών έργων. Ένα άλλο θέμα που χρήζει εξέτασης είναι η εφαρμογή διδακτικών παρεμβάσεων με σκοπό την ενδυνάμωση της λειτουργικής σύλληψης του σχήματος. Τέλος, θα ήταν ενδιαφέρον να εξιχνιαστεί ο ρόλος των υπόλοιπων τριών οπτικών μεταβλητών στην ορατότητα της ευρετικής επεξεργασίας του σχήματος (Duval, 1995).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H. G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education* (pp. 110-119). Bielefeld, Germany: IDMUB.

Γαγάτσης, Α., Μιχαήλ, Π., Δεληγιάννη, Ε., Μονογυιού, Α., Καλογήρου, Π., & Φιλίππου, Α. (2011). *Ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και γεωμετρίας: Η μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ΙΠΕ.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 163-183.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning*. Retrieved from www.matedu.cinvestav.mx/publicaciones/e-librosydoc/pme-procee.pdf.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2014). The first crucial point in geometry learning: Visualization. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*. *13*(1-2), 1-28.

Lemonidis, C. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *30*(4), 2087-2095.

Michael – Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*

Michael, P., Gagatsis, A, Avgerinos, E., & Kuzniak, A. (2011). Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, *11*, 45 –55.

Michael, S., Gagatsis, A., Elia, I., Deliyianni, E., & Monoyiou, A. (2009). Operative apprehension of geometrical figures of primary and secondary school students'. In A. Gagatsis & S. Grozdev (Eds.), *Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp.67-78). Plovdiv, Bulgaria: University of Plovdiv, CMS.

Mullins, E. R., & Irvin, J. L. (2000). Transition into middle school. *Middle School Journal*, *31*(3), 57-60.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Η ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΛΟΓΟ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ: ΑΥΤΟΝΟΜΙΑ, ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΟΠΤΙΚΩΝ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΤΩΝ

Αθηνά Θωμά και Έλενα Ναρδή
Πανεπιστήμιο East Anglia (UEA), Ηνωμένο Βασίλειο
a.thoma@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk

Οι πανελλαδικές εξετάσεις καθορίζουν την εισαγωγή των μαθητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Είναι σημαντικό, λοιπόν, να εξετάσουμε σε βάθος τη φύση των θεμάτων τους. Χρησιμοποιώντας ένα αναλυτικό πλαίσιο βασισμένο στην επικοινωνιογνωστική θεωρία αναλύουμε χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου στον οποίο καλείται να συμμετέχει ο μαθητής όταν λύνει θέματα του μαθήματος 'Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής'. Η ανάλυση των θεμάτων των τελευταίων δέκα ετών επισημαίνει ότι με την πάροδο του χρόνου μειώνεται η πολυπλοκότητά τους όπως και το εύρος των οπτικών διαμεσολαβητών που παράγονται από τους μαθητές. Τέλος παρατηρείται αύξηση των νύξεων για τον τρόπο επίτευξης ορθών αποτελεσμάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μαθηματικές ασκήσεις που καλούνται να λύσουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια των σπουδών τους καθορίζουν την εμπειρία τους στα μαθηματικά και τη σχέση τους με αυτά. Οι ασκήσεις αυτές τίθενται από τους εκπαιδευτικούς, που είναι μέλη της μαθηματικής κοινότητας και στοχεύουν στο να διευκολύνουν τη συμμετοχή των μαθητών στην κοινότητα αυτή. Η φύση των ασκήσεων έχει μεγάλη επίδραση στη διαμόρφωση των απόψεων των μαθητών για τα μαθηματικά (Mason, 2000). Ειδικότερα, ιδιαίτερη επιρροή έχουν οι ασκήσεις που αποτελούν μέρος της αξιολόγησης των μαθητών. Έρευνες έχουν καταγράψει ότι τα θέματα που χρησιμοποιούνται στις εξετάσεις επηρεάζουν τις στάσεις που υιοθετούν οι μαθητές απέναντι στη μάθηση (Ramsden, 1983; Trigwell & Prosser, 1991) και φανερώνουν στους μαθητές αυτό που θεωρούν σημαντικό οι καθηγητές τους για το εξεταζόμενο μάθημα (Smith et al., 1996; van de Watering et al., 2008).

Οι πανελλαδικές εξετάσεις είναι σταθμός στην εκπαίδευση, διότι σηματοδοτούν το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και καθορίζουν την εισαγωγή των μαθητών στην τριτοβάθμια. Οι εξετάσεις αυτές επιδρούν στη διδασκαλία των τελευταίων χρόνων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επομένως είναι σημαντικό να καταγράψουμε και να αναλύσουμε τη φύση των ασκήσεων που τίθενται σε αυτές. Στην παρούσα έρευνα μελετούμε τις ασκήσεις των πανελλαδικών εξετάσεων (από εδώ και στο εξής θα τις αναφέρουμε ως θέματα) στο μάθημα 'Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής'. Στο μάθημα αυτό διδάσκονται στοιχεία από: διαφορικό λογισμό, στατιστική και πιθανότητες. Οι μαθητές όλων των κατευθύνσεων που επιθυμούν να επιλέξουν το επιστημονικό πεδίο των Επιστημών Οικονομίας και Διοίκησης καθώς και οι μαθητές της θεωρητικής κατεύθυνσης που στοχεύουν στην εισαγωγή τους σε σχολές Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών εξετάζονται υποχρεωτικά σε αυτό το μάθημα. Στόχος της ανάλυσης των θεμάτων είναι η διερεύνηση της φύσης των μαθηματικών που διαφαίνεται σε αυτά όπως επίσης και της μαθηματικής δραστηριότητας που αναμένεται από τους μαθητές όταν διαβάζουν και λύνουν τα θέματα.

Χρησιμοποιώντας ένα αναλυτικό πλαίσιο που δημιουργήθηκε για να περιγράψει το μαθηματικό λόγο και τη συμμετοχή των μαθητών σε αυτόν, αναλύουμε τα θέματα των τελευταίων δέκα ετών. Αρχικά, παρουσιάζουμε το αναλυτικό πλαίσιο και μετά τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας. Τέλος συζητούμε την ανάλυση, παρατηρούμε τις δυνατότητες του αναλυτικού πλαισίου και κάνουμε κάποιες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΩΝ TANG, MORGAN ΚΑΙ SFARD

Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη θεμάτων εξετάσεων και έχουν δημιουργήσει αναλυτικά πλαίσια για να μπορέσουν να τα περιγράψουν και να τα χαρακτηρίσουν. Το κάθε πλαίσιο εστιάζει σε διαφορετικές πτυχές των θεμάτων. Το πλαίσιο που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία επικεντρώνεται στη συμμετοχή των μαθητών στο μαθηματικό λόγο.

Η Sfard ορίζει το λόγο (discourse) ως ένα ‘διακριτό τρόπο επικοινωνίας που χαρακτηρίζεται από τους διαμεσολαβητές που χρησιμοποιούν οι συμμετέχοντες στην επικοινωνία και τους κανόνες που ακολουθούν’ (Sfard, 2008, σελ.93). Στη συνέχεια περιγράφει τα χαρακτηριστικά του λόγου: *χρήση λέξεων* (word use), *οπτικούς διαμεσολαβητές* (visual mediators), *ρουτίνες* (routines) και *επικυρωμένα αφηγήματα* (endorsed narratives) (Sfard, 2008, σελ.133-135). Τα μαθηματικά αντιμετωπίζονται ως λόγος που χαρακτηρίζεται από τις *λέξεις*, δηλαδή τη μαθηματική ορολογία και συγκεκριμένες λέξεις καθημερινού λόγου που αποκτούν μαθηματική έννοια με τη χρήση τους στο μαθηματικό λόγο, καθώς και από τους *οπτικούς διαμεσολαβητές* (όπως γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα και σύμβολα). Τα *επικυρωμένα αφηγήματα* στην περίπτωση του μαθηματικού λόγου είναι τα κείμενα που περιγράφουν μαθηματικά αντικείμενα και διαδικασίες καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους (όπως ορισμοί, πορίσματα και θεωρήματα). Και τέλος, οι *ρουτίνες* είναι οι καλά ορισμένοι και διακριτοί, για τη μαθηματική κοινότητα, κανόνες που ορίζουν μια επαναληπτική δράση του μαθηματικού λόγου (όπως η διαδικασία της απόδειξης). Για μία σύντομη περιγραφή του πλαισίου της Sfard, ίδε (Nardi, Ryve, Stadler, & Viirman, 2014, σελ.183-5).

Με στόχο να μελετήσουν τη φύση της συμμετοχής των μαθητών στο μαθηματικό λόγο (mathematical discourse) και τις αλλαγές που έχουν επέλθει στη συμμετοχή αυτή τα τελευταία τριάντα χρόνια, οι Tang, Morgan και Sfard [1] διερεύνησαν τα θέματα που εξετάζονται οι μαθητές ηλικίας 16 ετών στην Βρετανία (GCSE – General Certificate of Secondary Education). Εστιάζοντας στην περιγραφή του μαθηματικού λόγου δημιούργησαν ένα αναλυτικό πλαίσιο. Οι θεωρητικές ρίζες του πλαισίου βρίσκονται στη Συστημική Λειτουργική Γλωσσολογία (Systemic Functional Linguistics) (Halliday, 1978) και στην επικοινωνιογνωστική (commognitive) θεωρία της Sfard (2008). Το πλαίσιο χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: Μαθητής και Μαθηματικά. Η κατηγορία Μαθητής αντιστοιχεί στη *διαπροσωπική* (interpersonal) λειτουργία της γλώσσας που αφορά τη σχέση των συνομιλητών (Halliday, 1978; Morgan, 2006). Αυτή η κατηγορία διερευνά τη σχέση μεταξύ του θέματος και του μαθητή. Πιο συγκεκριμένα, η κατηγορία αυτή εξετάζει τη θέση που εκχωρεί ο θεματοθέτης στο μαθητή, την παρουσία προσώπων σε μαθηματικές ή καθημερινές ασχολίες και τέλος τις αποφάσεις και οδηγίες που μορφοποιούν τη λύση του μαθητή. Η κατηγορία Μαθηματικά περιγράφει το μαθηματικό λόγο στον οποίο καλείται να μετέχει ο μαθητής καθώς διαβάζει και λύνει το θέμα. Αντιστοιχεί στην *(ανα)παραστατική* (ideational) λειτουργία της γλώσσας (Halliday, 1978; Morgan, 2006) και αφορά την αναπαράσταση του κόσμου των μαθηματικών. Η κατηγορία αυτή χωρίζεται σε υποκατηγορίες που βασίζονται στα χαρακτηριστικά του μαθηματικού λόγου (Sfard, 2008) και είναι: λεξιλόγιο, συντακτικό, οπτικοί διαμεσολαβητές, ρουτίνες και επικυρωμένα αφηγήματα. Στην υποκατηγορία λεξιλόγιο εξετάζεται η χρήση μαθηματικής ορολογίας καθώς και η αντικειμενοποίηση (objectification) του μαθηματικού λόγου. Στη γραμματική και λογική πολυπλοκότητα του λόγου αναφέρεται η υποκατηγορία συντακτικό. Την παρουσία και τις αλλαγές μεταξύ διαφορετικών οπτικών διαμεσολαβητών μελετά η υποκατηγορία οπτικοί διαμεσολαβητές. Στην υποκατηγορία ρουτίνες εξετάζονται οι μαθηματικές περιοχές που εμπλέκονται στα θέματα καθώς και η μορφή της ασχολίας του μαθητή. Τέλος, στην προέλευση και θέση της μαθηματικής γνώσης αναφέρεται η υποκατηγορία επικυρωμένα αφηγήματα.

Στην παρούσα εργασία αναλύουμε μερικά μόνο στοιχεία από τις δύο κατηγορίες. Συγκεκριμένα, από την κατηγορία Μαθητής εξετάζουμε το βαθμό στον οποίο οι δράσεις του μαθητή προκαθορίζονται από την εκφώνηση του θέματος - πιο συγκεκριμένα, εάν δίνονται οδηγίες για τη μέθοδο επίλυσης του θέματος, για την παρουσίαση της λύσης καθώς και την ακρίβεια της αναμενόμενης λύσης. Επιπλέον εξετάζουμε την πολυπλοκότητα του θέματος, λαμβάνοντας υπόψη μας την εξαρτημένη φύση των ερωτημάτων. Αντίστοιχα, από την κατηγορία Μαθηματικά εξετάζουμε τη χρήση οπτικών διαμεσολαβητών (πίνακες, διαγράμματα, αλγεβρικά σύμβολα), τον τρόπο ενσωμάτωσής τους (δηλαδή εάν δίνονται στην εκφώνηση του θέματος ή αν πρέπει να τους δημιουργήσει ο μαθητής) καθώς και τις μετατροπές από το ένα είδος οπτικού διαμεσολαβητή σε άλλο.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΟ 2006 ΜΕΧΡΙ ΣΗΜΕΡΑ

Τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων που αναλύουμε στην παρούσα έρευνα είναι αυτά που τέθηκαν στο μάθημα ‘Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής’ το έτος 2006 μέχρι και το έτος 2015 και βρίσκονται αναρτημένα στην ιστοσελίδα του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων. Οι πανελλαδικές εξετάσεις λαμβάνουν χώρα στο τέλος του σχολικού έτους και διαρκούν τρείς ώρες. Οι μαθητές που παίρνουν μέρος καλούνται να ασχοληθούν με τέσσερα θέματα, τα οποία χωρίζονται σε ερωτήματα, και αξιολογούνται με 25 μονάδες το καθένα.

Εξετάζουμε στοιχεία της κατηγορίας Μαθητής, ξεκινώντας από τις οδηγίες, έμμεσες και άμεσες, που δίνονται στους μαθητές. Η ανάλυση των θεμάτων φανέρωσε ότι υπάρχουν οδηγίες που αφορούν τη μέθοδο επίλυσης, τον τρόπο παρουσίασης, το βαθμό ακρίβειας καθώς και νύξεις για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την κάθε κατηγορία με μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν εκφωνήσεις που υποδεικνύουν στους μαθητές ποια στοιχεία πρέπει να χρησιμοποιήσουν για να υπολογίσουν τα ζητούμενα, όπως φανερώνουν οι παρακάτω φράσεις: ‘αφού μεταφέρετε...να υπολογίσετε’ (2010 – Θέμα Γ2), και ‘με βάση το παραπάνω...να υπολογίσετε’ (2012 – Θέμα Β1). Άμεση οδηγία για τη μέθοδο επίλυσης έχουμε στο θέμα που απεικονίζεται στην εικόνα 1, όπου ζητείται από τους μαθητές να κάνουν χρήση του ορισμού της παραγώγου για να αποδείξουν το ζητούμενο. Οδηγίες για τον τρόπο παρουσίασης της λύσης δίνονται σε κάποια θέματα που πραγματεύονται έννοιες της στατιστικής. Συγκεκριμένα, υπάρχουν οδηγίες για να παρουσιαστούν τα δεδομένα σε μορφή πίνακα συχνοτήτων (2010 – Θέμα Γ2, 2012 – Θέμα Β2, 2014 – Θέμα Β2) και σχετικών συχνοτήτων (2011 – Θέμα Γ3, 2013 – Θέμα Γ2, 2015 – Θέμα Γ1).

> Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι $(cf(x))' = cf'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εικόνα 1: Πανελλαδικές 2014 – Θέμα Α1

Επίσης, έχουμε ερωτήματα με οδηγίες για την ακρίβεια της αναμενόμενης λύσης. Το 2008(Θέμα Γ2) και το 2014(Θέμα Β1) οι θεματοθέτες ζητούν από τους μαθητές να αποκαλύψουν τον τρόπο που ακολούθησαν για να απαντήσουν όπως φαίνεται από τις φράσεις ‘να αιτιολογήσετε την απάντησή σας’ και ‘δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες’. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι σε αντίστοιχα θέματα άλλων ετών που καλούσαν το μαθητή να συμπληρώσει τον πίνακα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων δεν υπήρχε αντίστοιχη οδηγία. Το 2008 και 2012, σε ερώτημα ορισμού (Εικόνα 2) υπάρχει υπόδειξη για την ακρίβεια της αναμενόμενης λύσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση καλείται ο μαθητής να λάβει υπόψη του τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η μέση τιμή. Αντίστοιχα, ο μαθητής πρέπει να λάβει υπόψη του το άρτιο ή περιττό πλήθος παρατηρήσεων όταν καλείται να ορίσει τη διάμεσο, όμως δεν υπάρχει τέτοια υπόδειξη το 2013 όπου ζητήθηκε αυτός ο ορισμός (Θέμα Α3).

> Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X, αν $\overline{x} > 0$ και πώς, αν $\overline{x} < 0$·

Εικόνα 2: Πανελλαδικές 2008 & 2012 – Θέμα Α2 & Α3

Τέλος, παρατηρούμε νύξεις για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Τα τελευταία χρόνια κάποια ερωτήματα (2013 – Θέμα Γ3, 2014 – Θέμα Γ2) αποκαλύπτουν στις εκφωνήσεις τους τιμές που ζητούνται να βρεθούν στα προηγούμενα ερωτήματα.

> Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες(K), άσπρες(A), και πράσινες(Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι $P(K) = x_1$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(A) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x) = 4x^2 - \frac{7}{2} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.
>
> **Γ1.** Να βρείτε τις πιθανότητες $P(K)$, $P(A)$ και $P(\Pi)$, όπου $P(\Pi)$ η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.
>
> **Γ2.** Αν $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
>
> Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»
>
> Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»
>
> E: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

Εικόνα 3: Πανελλαδικές 2014 – Θέμα Γ

Στο θέμα που φαίνεται στην εικόνα 3 οι μαθητές καλούνται αρχικά να βρουν τις πιθανότητες *P(K)* και *P(A)* που είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης *f(x)*. Το επόμενο ερώτημα όμως αποκαλύπτει τις τιμές που πρέπει να βρουν οι μαθητές. Οι θεματοθέτες μπορεί να ενήργησαν έτσι στην προσπάθειά τους να καταστήσουν τα ερωτήματα ανεξάρτητα μεταξύ τους, δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να λύσουν επόμενα ερωτήματα ακόμα και αν δεν κατάφεραν να λύσουν τα προηγούμενα. Το γεγονός ότι δίνονται τα αποτελέσματα διευκολύνει αφού δίνει την δυνατότητα στους μαθητές να αναλογιστούν την ορθότητα της λύσης τους.

> Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:
>
> - $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$
> - Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x = 1$, όπου $f(x) = \frac{x}{3}lnx$, $x > 0$
>
> **Β1.** Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Εικόνα 4: Πανελλαδικές 2013 – Θέμα Β

Αντίστοιχα, έχουμε ερωτήματα (Πίνακας 1) όπως της εικόνας 4 με την έκφραση ‘να αποδείξετε ότι …’ και ακολουθεί η τιμή που καλείται να βρει ο μαθητής. Είναι φανερό ότι αυτά θα μπορούσαν να εκφραστούν και ως 'Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(\omega_1)$ και $P(\omega_3)$' χωρίς να ακολουθεί η αποκάλυψη της τιμής.

Έτος	Ερωτήματα
2006	Δ1
2007	Β1, Γ3, Δ1
2008	Δ3
2009	Β1, Β2, Γ1, Δ1α
2010	Α1, Γ1, Δ2
2011	Β1
2012	Β2, Γ1, Γ2, Δ1, Δ2
2013	Β1, Γ1, Γ3, Δ1, Δ2α
2014	Δ1, Δ2
2015	Β1, Γ1, Γ4, Δ1, Δ2

Πίνακας 2

Επιπλέον, έχουμε και άλλα ερωτήματα με έμμεσες οδηγίες για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Κάποια έτη δίνονται στους μαθητές οι προσεγγιστικές τιμές τετραγωνικών ριζών για να τους βοηθήσουν στην επίλυση των θεμάτων (2008 – Θέμα Γ, 2009 – Θέμα Β, 2012 – Θέμα Β, 2015 – Θέμα Γ). Εδώ πρέπει να προσθέσουμε ότι αυτές οι προσεγγιστικές τιμές δίνονται διότι δεν επιτρέπονται αριθμομηχανές κατά τη διάρκεια των εξετάσεων. Αυτές όμως οι τιμές δίνουν άλλη μια ευκαιρία ελέγχου της ορθότητας των αποτελεσμάτων. Υπάρχει περίπτωση ο μαθητής να μην καταλήξει στη συγκεκριμένη ρίζα που του δίνεται, να προβληματιστεί για την τιμή στην οποία κατέληξε, να ελέγξει τους υπολογισμούς του και να διορθώσει τη λύση του.

Όσον αφορά την πολυπλοκότητα του θέματος εξετάζουμε εάν η επίλυση κάποιου ερωτήματος εξαρτάται άμεσα από την ορθή επίλυση ενός προηγούμενου. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 5 το Δ1 ζητά τη μονοτονία της συνάρτησης. Ο μαθητής πρέπει να βρει την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης και τα σημεία μηδενισμού της για να αποφανθεί για τα διαστήματα όπου η συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Με αυτήν τη μελέτη της μονοτονίας ο μαθητής καταλήγει στην εύρεση τοπικών ακρότατων που είναι οι πιθανότητες P(A) και P(B). Εάν ο μαθητής δεν καταφέρει να βρει αυτές τις τιμές δεν θα καταφέρει να προχωρήσει στο Δ2. Με το συμβολισμό Δ2←Δ1 δηλώνουμε ότι το Δ2 ερώτημα εξαρτάται από το ερώτημα Δ1. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε την εξάρτηση των ερωτημάτων των θεμάτων (Πίνακας 2)

> Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$
>
> **Δ1.** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
>
> **Δ2.** Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A)$, $P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(A \cup B)$, $P(B - A)$.

Εικόνα 5: Πανελλαδικές 2011 – Θέμα Δ

Έτος	Ερωτήματα
2006	Β2←Β1, Β3←Β1, Β4←Β1, Γ2←Γ1, Γ3←Γ1, Δ2β←Δ2α
2007	-
2008	Γ2←Γ1, Γ3←Γ1, Γ4←(Γ3, Γ1)
2009	Δ1β←Δ1α, Δ2α←Δ1α
2010	Β3←Β2, Γ3←Γ2, Γ4←Γ2, Δ2←Δ1
2011	Β3←Β2, Β4←Β2, Γ2←Γ1, Γ3←Γ2, Γ4←Γ3, Γ5←Γ4, Δ2←Δ1, Δ3α←Δ3β
2012	Β2←Β1, Β3←Β2, Β4←Β2, Γ2←Γ1
2013	Γ3←Γ2
2014	Β2←Β1, Β3←Β2 Δ3←Δ1
2015	Δ4←Δ2

Πίνακας 3

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την ανάλυση από τους οπτικούς διαμεσολαβητές, της κατηγορίας Μαθηματικά. Πρώτα εξετάζουμε τις αλλαγές μεταξύ δύο διαφορετικών οπτικών διαμεσολαβητών. Παρατηρούμε ότι κάποια ερωτήματα στα οποία ζητείται εύρεση πιθανοτήτων τα ενδεχόμενα εκφράζονται με κείμενο και όχι με το συμβολισμό πράξεων μεταξύ συνόλων. Οι μαθητές καλούνται πρώτα να αντικαταστήσουν το κείμενο με αφήγηση που χρησιμοποιεί μαθηματικό συμβολισμό και στη συνέχεια να υπολογίσουν την πιθανότητα (Εικόνα 3). Σε άλλα ερωτήματα δεν χρειάζεται να κάνουν αυτήν την αλλαγή (Εικόνα 5). Τέτοια απαίτηση για αλλαγή λόγου από κείμενο σε σύμβολο έχουμε και στα παρακάτω ερωτήματα: 2008(Δ1, Δ2), 2010(Γ4, Δ3, Δ4), 2011(Β4), 2012(Γ, Γ1, Γ3, Γ4), 2013(Δ4β), 2015(Α4ε, Β2, Β3).

Τέλος, εντοπίζουμε οπτικούς διαμεσολαβητές, κυρίως πίνακες συχνοτήτων και γεωμετρικά σχήματα, που δίνονται στην εκφώνηση των θεμάτων (2006 – Θέμα Β, 2008 – Θέμα Γ, 2009 – Θέμα Β, 2010 – Θέμα Γ, 2012 – Θέμα Β, 2013 – Θέμα Γ, 2014 – Θέμα Β, Θέμα Δ, 2015 – Θέμα Γ, Θέμα Δ). Σε άλλα όμως θέματα ο μαθητής καλείται να παράγει ο ίδιος οπτικούς διαμεσολαβητές όπως στο ερώτημα της εικόνας 6 και στα θέματα Δ των ετών 2012 και 2013.

> Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις: $A(8,0)$, $B(10,0)$, $\Gamma(12,20)$, $\Delta(14,y_\Delta)$, $E(16,y_E)$, $Z(18,10)$, $H(20,0)$ όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.
>
> **Γ1.** Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E και των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα.
>
> **Γ2.** Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$

Εικόνα 6: Πανελλαδικές 2011 – Θέμα Γ

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας ανάλυσης ήταν η περιγραφή μερικών στοιχείων της συμμετοχής των μαθητών στο μαθηματικό λόγο, δίνοντας έμφαση στην αυτονομία των μαθητών, στην πολυπλοκότητα των θεμάτων καθώς και στους οπτικούς διαμεσολαβητές.

Η ανάλυση των θεμάτων με το συγκεκριμένο αναλυτικό πλαίσιο επισήμανε ότι στην προσπάθεια να καταστήσουν ανεξάρτητα τα ερωτήματα των θεμάτων, οι θεματοθέτες δίνουν υποδείξεις για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αλλάζει η φύση των θεμάτων, αφού ο μαθητής έχει στη διάθεσή του τρόπο ελέγχου της απάντησής του. Ακόμη, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, δεν δίνονται πολλές οδηγίες για τη μέθοδο επίλυσης. Θα ήταν ενδιαφέρον όμως να ερευνηθεί περαιτέρω ο λόγος για τον οποίο το 2014 (Εικόνα 1) δίνεται άμεση οδηγία για τη χρήση του ορισμού της παραγώγου, σε αντίθεση με παρόμοια θέματα σε άλλες χρονιές. Πιθανόν αυτό να οφείλεται σε παρατηρήσεις από τους διορθωτές ότι οι μαθητές δε χρησιμοποιούν τον ορισμό για να αποδείξουν παρόμοια ερωτήματα. Έχοντας υπόψη μας την ανάλυση από την κατηγορία Μαθητής, παρατηρούμε ότι δίνονται πολλοί έμμεσοι υπαινιγμοί για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Επίσης, τα τελευταία έτη μειώνεται η εξαρτημένη φύση των ερωτημάτων. Η ανάλυσή μας το θεωρεί αυτό ένδειξη μείωσης της πολυπλοκότητας των θεμάτων.

Η κατηγορία του πλαισίου Μαθηματικά αναδεικνύει ενδιαφέροντα στοιχεία των θεμάτων. Επιπλέον, η ανάλυση με το συγκεκριμένο πλαίσιο μας δίνει πληροφορίες για την ενασχόληση των μαθητών σε εξειδικευμένο μαθηματικό λόγο. Εξετάζουμε εάν οι μαθητές χειρίζονται ειδικούς οπτικούς διαμεσολαβητές. Τα δεδομένα δείχνουν ότι με την πάροδο των χρόνων όλο και συχνότερα η εκφώνηση παρέχει οπτικούς διαμεσολαβητές στους μαθητές, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην εξασκούνται στην κατασκευή τους.

Το πλαίσιο των Tang, Morgan και Sfard [1] μας δίνει τη δυνατότητα μιας λεπτομερούς περιγραφής της φύσης την μαθηματικής δραστηριότητας που εμπλέκεται ο μαθητής όταν διαβάζει και λύνει το θέμα μέσω της ανάλυσης του λόγου που χρησιμοποιεί. Στην παρούσα έρευνα αναλύσαμε τα θέματα των πανελλαδικών των τελευταίων δέκα ετών χρησιμοποιώντας μερικά από τα στοιχεία του πλαισίου. Μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση απαιτεί ανάλυση των θεμάτων και με τα υπόλοιπα στοιχεία του συγκεκριμένου αναλυτικού πλαισίου και σε μεγαλύτερο βάθος χρόνου. Για παράδειγμα, συνδυάζοντας τα δεδομένα από την ανάλυση για την εξάρτηση των ερωτημάτων και τις πληροφορίες για τις μαθηματικές περιοχές που εμπλέκονται στο θέμα, μπορούμε να μελετήσουμε τη συνδυαστική φύση των ερωτημάτων. Παράλληλα σε έρευνα που εξελίσσεται αναλύουμε το μαθηματικό λόγο θεμάτων εξετάσεων προπτυχιακών σπουδών σε τμήματα Μαθηματικών, λαμβάνοντας υπόψη και τις απόψεις των καθηγητών για τη συμμετοχή των φοιτητών στο μαθηματικό λόγο όπως αυτή διαφαίνεται στις απαντήσεις τους σε αυτά τα θέματα (Thoma & Iannone, 2015).

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Πληροφορίες για το έργο των Tang, Morgan και Sfard μπορούν να βρεθούν στην ιστοσελίδα http://www.esrc.ac.uk/my-esrc/grants/RES-062-23-2880/read [Ανακτήθηκε από το διαδίκτυο στις 18 Ιουνίου, 2015]

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 31*(1), 97-111.

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics 61(1-2)*, 219-245.

Morgan, C. & Tang, S. (2012). Studying changes in school mathematics over time through the lens of examinations: The case of student positioning. In Tso, T. Y. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 3* (pp. 241-248). Tapei, Taiwan.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education 16*(2), 182-198.

Ramsden, P. (1983). Institutional variations in British students’ approaches to learning and experiences of teaching. *Higher education 12* (6): 691-705.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B., Crawford, K., & Ball, G. (1996). Constructing mathematical examinations to assess a range of knowledge and skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 27*(1), 65-77.

Thoma & Iannone (2015, in press). Analysing university closed book examinations using two frameworks. In N. Vondrova & K. Krainer (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of European Researchers in*

Mathematics Education (pp. tbc-tbc). Charles University, Prague: The Czech Republic.

Trigwell, K. and M. Prosser. (1991). Improving the quality of student learning: the influence of learning context and student approaches to learning on learning outcomes. *Higher education 22* (3), 251-266.

van de Watering, G., Gijbels, D., Dochy, F., & van der Rijt, J. (2008). Students' assessment preferences, perceptions of assessment and their relationships to study results. *Higher Education 56*(6), 645-658.

ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΟΥΝ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΧΩΡΟΥΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

***Ελισάβετ Καλογερία, **Χρήστος Μάλλιαρης, ***Γιώργος Ψυχάρης**

* Μαθηματικός,** Μαθηματικός,*** Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ

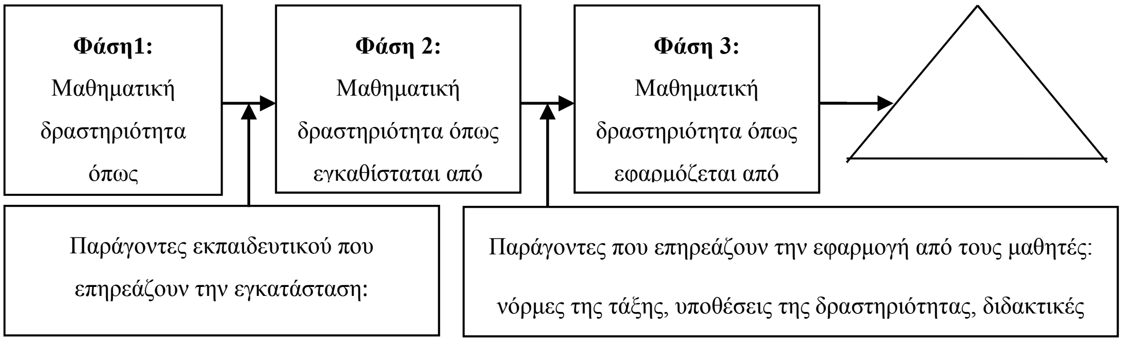
ekaloger@ppp.uoa.gr, chrismalliaris@gmail.com, gpsych@math.gr

Στην παρούσα εργασία περιγράφεται η διαδικασία ανάπτυξης διδακτικού υλικού από δυο εκπαιδευτικούς, με στόχο την ένταξη διερευνητικών τρόπων μάθησης στη σχολική τάξη μέσα από κατάλληλη σύνδεση με χώρους εργασίας. Η διερεύνηση καθοδήγησε τον σχεδιασμό, ώστε οι προτεινόμενες δραστηριότητες να παρέχουν ένα παράδειγμα σύνδεσης των μαθηματικών με έναν συγκεκριμένο χώρο εργασίας, με στόχο την καλλιέργεια της διερευνητικής σκέψης των μαθητών, ενώ παράλληλα αποτέλεσε το μέσο για τη μελέτη της διαδικασίας σχεδιασμού και της υλοποίησής του στη σχολική τάξη, μέσα από συνεργασία και αναστοχασμό, πριν, κατά και μετά την εφαρμογή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η βασισμένη στη διερεύνηση διδασκαλία αποτελεί μια σύγχρονη τάση στη μαθηματική εκπαίδευση, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές καλούνται να εργασθούν με τρόπους παρόμοιους με αυτούς των μαθηματικών και των επιστημόνων (Artigue & Blomhøj, 2013). Η διανοητική ενασχόληση των μαθητών κατά τη διάρκεια της εμπλοκής τους με το προς διερεύνηση αντικείμενο, όπως δείχνει η σχετική έρευνα, μπορεί να συνεισφέρει στην κατανόηση και μάθηση μιας επιστημονικής θεωρίας (Nuffield Foundation, 2013). Η σημασία της πρακτικής εμπλοκής μέσα από αυθεντικά προβλήματα, οδήγησε την έρευνα στη μελέτη της συμπερίληψης των χώρων εργασίας ως μέρους ενός μαθηματικού προβλήματος. Η εστίαση δόθηκε στην πράξη, δηλαδή στη σύζευξη των ανθρώπινων ενεργειών πάνω σε σχετικά σύνθετες δραστηριότητες ή προβλήματα που ένας εργαζόμενος καλείται να εκτελέσει, με το ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά σε όλη αυτή τη διαδικασία (Wake, 2014). Οι στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος που σχετίζεται με κάποιο χώρο εργασίας, καθώς και ο τρόπος χειρισμού αλγεβρικών και χωρικών εννοιών ή σχέσεων που εμφανίζονται σε αυτό το πλαίσιο, θέτουν το ζήτημα του επαναπροσδιορισμού των αντίστοιχων σχολικών Προγραμμάτων Σπουδών (Π.Σ.) (Triantafyllou & Potari, 2010), με δυνατότητα συμπερίληψης χώρων εργασίας σε δραστηριότητες, τόσο στα μαθηματικά, όσο και σε άλλα διδακτικά αντικείμενα (Wake, 2014).

Η διδασκαλία που εμπλέκει το συνδυασμό διερευνητικής μάθησης με χώρους εργασίας, δεν συνηθίζεται σε επίπεδο σχολικής τάξης και απαιτεί αλλαγή του ρόλου του εκπαιδευτικού, από παθητικό εφαρμοστή του Π.Σ. της πολιτείας, σε αυτόν του συνδιαμορφωτή της καθημερινής σχολικής πρακτικής. Ο ενεργός ρόλος του συνίσταται στην επινόηση δραστηριοτήτων αυτής της μορφής, είτε στην τροποποίηση υπαρχουσών, στην εφαρμογή τους στην πράξη, καθώς και στον επανασχεδιασμό τους με βάση τα ευρήματα από την υλοποίηση. Οι Henningsen και Stein (1997) περιγράφουν 3 φάσεις στην εξέλιξη μιας μαθηματικής δραστηριότητας (διάγραμμα 1):



Διάγραμμα 1: Φάσεις στην εξέλιξη μιας μαθηματικής δραστηριότητας

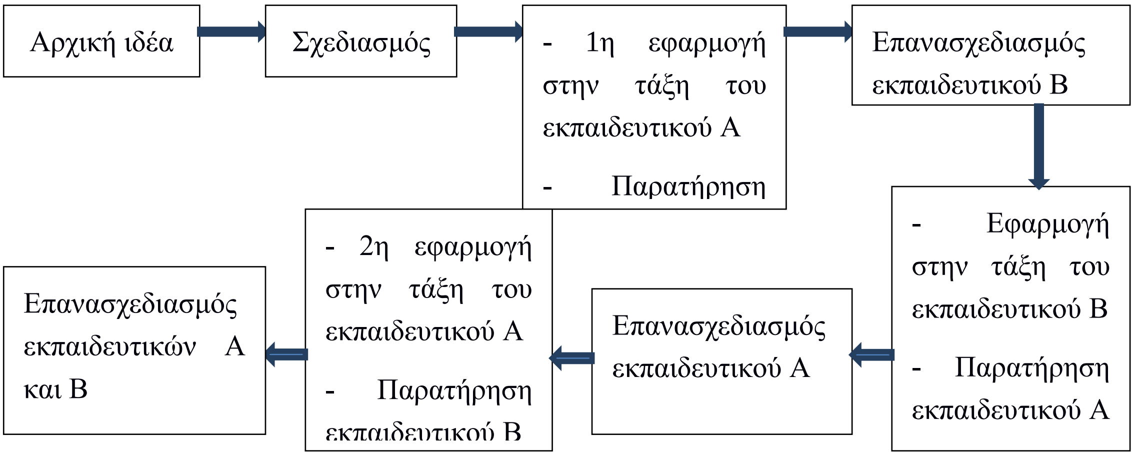
Κατ΄ αναλογία, σε μία διερευνητική δραστηριότητα που εμπλέκει και χώρους εργασίας ο εκπαιδευτικός πρέπει να σκεφθεί για τον συνδυασμό χώρων-εννοιών, πώς οι έννοιες αυτές περιγράφονται στα επίσημα Π.Σ. και τι διαφορετικό θα μπορούσε να αναδείξει ο σχεδιασμός του. Η δημιουργία συναφούς υλικού (π.χ. σεναρίων που επιχειρούν αυτή τη σύνδεση, αντίστοιχων φύλλων εργασίας και αρχείων λογισμικού) είναι ένα επόμενο βήμα, το οποίο, επηρεάζεται από μία σειρά παραμέτρων που έχουν να κάνουν με αυτή καθαυτή την προτεινόμενη δραστηριότητα, αλλά και με το έμψυχο υλικό της τάξης (πώς οι μαθητές υιοθετούν στην πράξη το ρόλο ενός επαγγελματία και πώς ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται αυτή τη νέα κατάσταση). Το τελικό αποτέλεσμα δεν είναι αυτονόητο, αντίθετα, χρήζει περαιτέρω διερεύνησης από τον εκπαιδευτικό και ενδεχομένως οδηγεί στον επανασχεδιασμό της δραστηριότητας.

Όπως δείχνει η σχετική έρευνα, η διαδικασία σχεδιασμού, εφαρμογής, αναστοχασμού και επανασχεδιασμού, ενδυναμώνεται ιδιαίτερα μέσα από τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού σε ‘διερευνητικές κοινότητες’, με στόχο τη βελτίωση της διδασκαλίας και μάθησης (Jaworski, 2004). Στις κοινότητες αυτές, εκπαιδευτικοί και ερευνητές διερευνούν από κοινού τη διαδικασία χρήσης διερευνητικών μεθόδων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί αναπτύσσουν διερευνητικές προσεγγίσεις που αφορούν τις ίδιες τους τις πρακτικές, αλλά και τρόπους βελτίωσής τους. Στην παρούσα έρευνα, η διερεύνηση λειτούργησε και στα τρία επίπεδα που περιγράφει η Jaworski (2004): 1) Στην εισαγωγή της διερευνητικής μάθησης στα μαθηματικά μέσα από τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων, που συνδέουν μαθηματικά με χώρους εργασίας, για τις οποίες αξιοποιήθηκαν τα ευρήματα αντίστοιχων ερευνών (Artigue & Blomhøj, 2013), δηλαδή: δόθηκε έμφαση στην αυθεντικότητά τους, στον πειραματισμό και την πρακτική εμπλοκή με χειραπτικά υλικά και λογισμικό, στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος, στη δυνατότητα αυτόνομης εργασίας των μαθητών σε ομάδες, στο διάλογο ανάμεσα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, καθώς και στη συνεργασία ανάμεσα στους μαθητές σε ομάδες, αλλά και των ομάδων μεταξύ τους. 2) Στη διερεύνηση της διδασκαλίας, για τη μελέτη του σχεδιασμού μας και της υλοποίησης των (διερευνητικών) δραστηριοτήτων στην σχολική τάξη. 3) Στη διαδικασία χρήσης διερεύνησης στα μαθηματικά και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Έτσι, το πρώτο και το δεύτερο επίπεδο διερεύνησης σχετίζονται με τις φάσεις 2 και 3 του διαγράμματος 1 και επιχειρούν να καταγράψουν τις επιλογές του εκπαιδευτικού σε επίπεδο σχεδιασμού (π.χ. επιλογές που ενισχύουν τη διερεύνηση των μαθητών στα μαθηματικά) αλλά και τους παράγοντες που επηρεάζουν την εγκατάσταση του σχεδιασμού στη σχολική τάξη όπως και την ίδια τη διδασκαλία Το τρίτο επίπεδο διερεύνησης συσχετίζει τα άλλα δυο επίπεδα και επιχειρεί να διαπιστώσει αν και πώς οι διαδικασίες που μελετήθηκαν σε αυτά, μπορούν να συνεισφέρουν στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό, η παρούσα έρευνα επιχειρεί να προσεγγίσει τους παράγοντες που διαμορφώνουν τον σχεδιασμό δυο εκπαιδευτικών που ξεκινούν από την ίδια ιδέα σύνδεσης με ένα χώρο εργασίας, τις δυνατές τροποποιήσεις του σχεδιασμού με βάση την εφαρμογή στην πράξη και τη δυναμική που αναδύεται μέσα από τη διαδικασία αυτή για την βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Α) Περιγραφή - είδος της έρευνας - συμμετέχοντες: Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση των διερευνητικών δραστηριοτήτων έγινε από 2 εκπαιδευτικούς (Α και Β) και απευθύνθηκε σε δυο διαφορετικά σχολικά πλαίσια και γυμνασιακές τάξεις. Συγκεκριμένα, η ίδια ιδέα διερεύνησης απευθύνθηκε από τον εκπαιδευτικό Β σε μαθητές Α΄ Γυμνασίου πρότυπου πειραματικού σχολείου (2 ώρες), ενώ από την εκπαιδευτικό Α σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου δημόσιου σχολείου (3 ώρες). Ο ερευνητικός σχεδιασμός βασίστηκε στην ακολουθία: προγραμματισμός → δράση → παρατήρηση → αναστοχασμός → ανατροφοδότηση → προγραμματισμός, που θεωρείται ως κεντρικού χαρακτήρα στην *έρευνα δράσης* (Jaworski, 2007). Αναλυτικά, η ερευνητική διαδικασία παριστάνεται στο διάγραμμα 2. Οι εκπαιδευτικοί Α και Β αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης ομάδας που συγκροτήθηκε στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil (http://www.mascil-project.eu). Στη διαδικασία συμμετείχε και ένας πανεπιστημιακός από το χώρο της διδακτικής μαθηματικών, ο ρόλος του οποίου εστιάσθηκε στη θεωρητική υποστήριξη των εκπαιδευτικών σε ό,τι αφορά στη διερευνητική μάθηση και στη μεθόδευση διερεύνησης των πρακτικών τους.



Διάγραμμα 2: Η διαδικασία σχεδιασμού και υλοποίησης

Β) Δεδομένα: i) Το υλικό που παράχθηκε από τους δυο εκπαιδευτικούς σε όλες τις φάσεις του διαγράμματος 2 (φύλλα εργασίας, αρχεία λογισμικού) ii) σημειώσεις ετεροπαρατήρησης iii) σημειώσεις από τις αναστοχαστικές συναντήσεις που πραγματοποιούνταν μετά από κάθε εφαρμογή iv) φόρμες προετοιμασίας/εγκατάστασης των παρεμβάσεων πριν την εφαρμογή και φόρμες αποτίμησης των διδακτικών παρεμβάσεων μετά την εφαρμογή στην τάξη, που συμπληρώθηκαν από όλους τους συμμετέχοντες στο project και v) βιντεοσκοπημένο υλικό 6 ωρών από τις τρεις εφαρμογές.

Γ) Η δραστηριότητα: *i) Η αρχική ιδέα*: Οι μαθητές υιοθετούν το ρόλο των εργαζόμενων σε βιοτεχνία κατασκευής χαρταετών, με στόχο την εξοικονόμηση χαρτιού. *ii) Η προετοιμασία*: Πριν την εφαρμογή χωρίζονται σε ομάδες, αναζητούν πληροφορίες και τις αναρτούν στην e-class, για τα ακόλουθα: α) Το χαρτί που χρησιμοποιείται για την κατασκευή χαρταετών (διαστάσεις, συσκευασία και κόστος αγοράς του). β) Τα σχήματα και τις διαστάσεις των χαρταετών, με εστίαση σε κανονικό εξάγωνο διαστάσεων 80εκ, 100εκ, 120εκ, που μπορεί να αποτελείται από 6 ισόπλευρα τρίγωνα ή 2 ισοσκελή τραπέζια ή 4 ορθογώνια τραπέζια με εναλλάξ χρώματα, στο κανονικό οκτάγωνο διαστάσεων 80εκ, 100εκ, 120εκ, που μπορεί να αποτελείται από 8 ισοσκελή τρίγωνα και στο ρομβοειδές. *iii) Ο σχεδιασμός της διερεύνησης*: βασίσθηκε στην αξιοποίηση των ευρημάτων των μαθητών και ακολούθησε τις φάσεις που περιγράφονται στην ανάλυση.

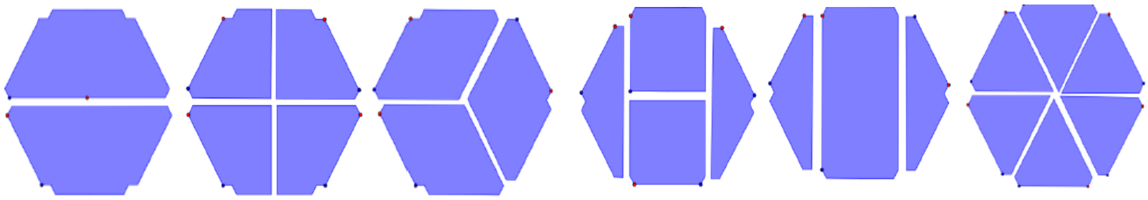
Ανάλυση

Με βάση το διάγραμμα 2, αρχικά αναλύονται οι επιλογές των εκπαιδευτικών για τις διαδοχικές φάσεις εγκατάστασης και εφαρμογής στις τάξεις τους, ενώ στη συνέχεια αποτιμώνται τα σημεία τα οποία φαίνεται να συνεισφέρουν συνολικά στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών.

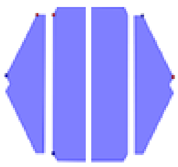
Α) Εγκατάσταση και εφαρμογή: Η αρχική ιδέα υπέστη αρκετές τροποποιήσεις πριν και μετά από κάθε εφαρμογή στην σχολική τάξη. Στην υποενότητα αυτή αναλύονται οι εναλλασσόμενες φάσεις σχεδιασμού και εφαρμογών (διάγρ.2), ώστε να καταστεί εμφανής η σημασία της αλληλεπίδρασης των εκπαιδευτικών στην εξέλιξη του σχεδιασμού.

Α1) Αρχική εγκατάσταση του σχεδιασμού στη σχολική τάξη (εκπαιδευτικοί Α και Β): Ένα πολύ σημαντικό ζήτημα ήταν η αποτύπωση της αρχικής ιδέας σε διδακτικά βήματα μέσω του φύλλου εργασίας. Τα υπό διαπραγμάτευση θέματα σε αυτή τη φάση και οι αντίστοιχες αποφάσεις υλοποίησης ήταν: i) Η διατύπωση και το εύρος του πραγματικού προβλήματος (ελαχιστοποίηση κατανάλωσης χαρτιού), καθώς και η δυνατότητα ανάδειξης της κεντρικής μαθηματικής ιδέας (βέλτιστη κάλυψη επιφάνειας μέσω πολυγώνων), σε σχέση με τη στενότητα του διδακτικού χρόνου: Κρίθηκε απαραίτητος ο περιορισμός του προβλήματος σε χαρταετό σχήματος κανονικού εξαγώνου, διαμέτρου 80εκ., με έμφαση σε συγκεκριμένες δομικές μονάδες για τη σύνθεσή του (ισόπλευρα/ισοσκελή τρίγωνα, ισοσκελή/ορθογώνια τραπέζια και ορθογώνια παραλ/μα). ii) Οι προαπαιτούμενες γνώσεις: πυθαγόρειο, κανονικά πολύγωνα (εκπαιδευτικός Α), ιδιότητες παραλληλογράμμων και τραπεζίων (εκπαιδευτικοί Α και Β) iii) Οι συνδέσεις με το Π.Σ.: ομοιότητα, κλίμακες (εκπαιδευτικός Α), κλίμακες, ιδιότητες παραλληλογράμμων (εκπαιδευτικοί Α και Β). iv) Η ένταξη της τεχνολογίας: Κοινή απόφαση ήταν η χρήση του Geogebra για χειρισμό/σύνθεση των δομικών μονάδων και επαλήθευση των εικασιών που προέκυψαν από τον πειραματισμό με χειραπτικό υλικό και διαδραστικού πίνακα για τις φάσεις ανακοίνωσης των ευρημάτων των ομάδων σε ολομέλεια τάξης. v) Η «ανοιχτότητα» των προς διερεύνηση θεμάτων και ο βαθμός διδακτικής καθοδήγησης: οι πρώτες δραστηριότητες του φύλλου εργασίας είχαν τη μορφή καθοδηγούμενης διερεύνησης, ενώ οι επόμενες σταδιακά εξελίχθηκαν σε ανοιχτή διερεύνηση, με πολλές δυνατές λύσεις, μη προδιαγεγραμμένες. vi) Η αυθεντικότητα της δραστηριότητας: Επιλέχθηκε η ένταξη πραγματικών δεσμεύσεων κατασκευής χαρταετού όπως το πλήθος από κόλλες σε κάθε πακέτο (46 κόλλες ανά πακέτο), καθώς και το ‘στρίφωμα’ στην πολυγωνική γραμμή που αποτελεί το περίγραμμά του (εικ.1) και η σύνδεση των δομικών μονάδων μεταξύ τους. Η επιλογή αυτή, επέφερε ιδιαίτερη δυσκολία στο σχεδιασμό διότι οι μαθητές θα έπρεπε αφενός να χειρισθούν σύνθετα σχήματα όπως ένα ισόπλευρο τρίγωνο στη μια πλευρά του οποίου υπήρχε ένα ισοσκελές τραπέζιο (στρίφωμα) και αφετέρου να συνενώσουν δομικές μονάδες μεταξύ τους με σκοπό τη σταθερότητα της κατασκευής και την προσομοίωσή της με ένα πραγματικό χαρταετό. Έτσι, κρίθηκαν απαραίτητες οι εξής παραδοχές: το ‘στρίφωμα’ να γίνεται μόνο στην εξωτερική πλευρά κάθε δομικής μονάδας και οι εσωτερικές συνδέσεις των δομικών μονάδων να γίνονται μέσω πρόσθετης κολλητικής ταινίας. Στην εικόνα 1, φαίνονται τα είδη χαρταετών/δομικών μονάδων με τα αντίστοιχα ‘στριφώματα’.

Α2) Αρχική εφαρμογή του σχεδιασμού στην τάξη (2 ώρες – Γ΄ Γυμνασίου - εκπαιδευτικός Α): Το φύλλο εργασίας αρχικά ζητούσε τον υπολογισμό των πραγματικών διαστάσεων ενός εξαγωνικού χαρταετού και όλων των δυνατών δομικών μονάδων του (η κάθε ομάδα ανέλαβε έναν συνδυασμό). Στη συνέχεια, μέσω κλίμακας 1:4 οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν τις αντίστοιχες διαστάσεις ομοίων σχημάτων, να τα κατασκευάσουν και να τα τοποθετήσουν σε πλαίσιο όμοιο με τις πραγματικές κόλλες του εμπορίου, ώστε να μένει κενός ο μεγαλύτερος δυνατός χώρος. Τέλος, ζητήθηκε η τοποθέτηση στον κενό χώρο δομικών μονάδων από χαρταετό άλλης ομάδας. Ωστόσο, η δραστηριότητα αυτή δεν έγινε από καμία ομάδα. Ο υπολογισμός των διαστάσεων των δομικών μονάδων και η κατασκευή τους απαίτησε πολύ περισσότερο χρόνο από τον προσδοκώμενο, με αποτέλεσμα τη μη ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων και την ανάγκη συνέχισής τους σε επόμενο μάθημα. Επίσης, προέκυψαν προβλήματα στη χρήση του λογισμικού, καθώς δεν υπήρχε δυνατότητα μετακίνησης - περιστροφής των δομικών μονάδων με όλους τους δυνατούς τρόπους, με αποτέλεσμα τα ευρήματα που προέκυπταν με τα χειραπτικά υλικά να μην μπορούν να επαληθευθούν με το λογισμικό. Αξιοσημείωτη ήταν η περίπτωση της ομάδας 4 (εικ.1, σχήμα δ), που δημιούργησε τα παραλ/μα με διαφορετικό



Εικόνα 1 (σχήματα α, β, γ, δ, ε, στ αντίστοιχα)



Εικόνα 2

τρόπο από αυτόν που οι εκπαιδευτικοί Α και Β είχαν προβλέψει (εικ.2), διότι όπως είπαν η μορφή της εικόνας 1δ «*μας φαίνεται για τετράγωνο*». Οι δομικές αυτές μονάδες, αποδείχθηκαν ιδιαίτερα ευέλικτες στη διερεύνηση και αξιοποιήθηκαν στον σχεδιασμό του εκπαιδευτικού Β.

Στη συζήτηση αναστοχασμού, επισημάνθηκε η μη ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων και η ανάγκη κλεισίματος του κύκλου σύνδεσης με τη βιοτεχνία χαρταετών. Συζητήθηκε επίσης η σημασία της παρακάτω αλληλουχίας: με αφετηρία τον χώρο εργασίας να αναδεικνύονται οι μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες, οι οποίες μέσα από τη διαδικασία διερεύνησης να γίνονται αντικείμενα χειρισμού από τους μαθητές, για να επιστρέψουν τελικά στον χώρο εργασίας και να δώσουν μια συνολική απάντηση, όπως θα έκανε ο αντίστοιχος επαγγελματίας.

Α3) Προσαρμογή αρχικού σχεδιασμού (εκπαιδευτικός Β): Κατά την παρατήρηση (του εκπαιδευτικού Β) της εφαρμογής από τον εκπαιδευτικό Α, αναδείχθηκε η ανάγκη ύπαρξης αρκετού χρόνου για τις κατασκευές αλλά και η βελτίωση του αρχείου λογισμικού, κατά συνέπεια υπήρξαν βελτιώσεις στον σχεδιασμό του εκπαιδευτικού Β πριν την εφαρμογή. Συγκεκριμένα: i) Αποφασίστηκε να δοθεί στους μαθητές έτοιμο «πατρόν» με το κανονικό εξάγωνο και το «στρίφωμα» (αφού πρώτα θα δοκίμαζαν να κατασκευάσουν κανονικό εξάγωνο γνωρίζοντας την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, συνεπώς την πλευρά του εξαγώνου) και θα καλούνταν να σχηματίσουν τις δομικές μονάδες (η κάθε ομάδα την περίπτωση που της έχει ανατεθεί), να τις κόψουν και στη συνέχεια να πειραματιστούν με τις διαφορετικές διατάξεις των δομικών μονάδων, αλλά και με δομικές μονάδες άλλων ομάδων με σκοπό την κατασκευή ενός ολόκληρου χαρταετού με χρήση όσο το δυνατόν λιγότερης επιφάνειας χαρτιού. ii) Υπήρξε βελτίωση στο αρχείο λογισμικού, ώστε να επιτυγχάνεται η κατασκευή των συμμετρικών των δομικών μονάδων τόσο ως προς σημείο όσο και ως προς άξονα.

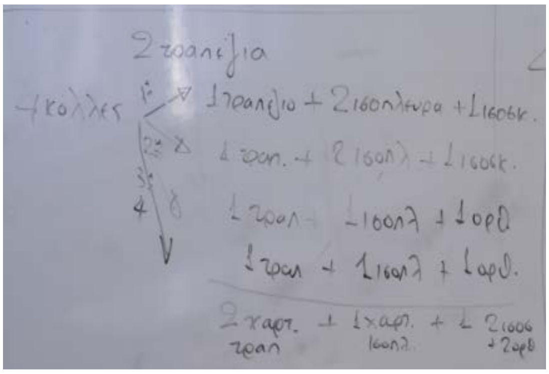
Α4) Εφαρμογή νέου σχεδιασμού (2 ώρες – Α΄ Γυμνασίου - εκπαιδευτικός Β): Κατά την παρατήρηση (του εκπαιδευτικού Α) της εφαρμογής από τον εκπαιδευτικό Β προέκυψε η έννοια του ΕΚΠ κατά την διάρκεια ανταλλαγής δομικών μονάδων ανάμεσα στις ομάδες με σκοπό την κατασκευή ενός ολόκληρου χαρταετού. Ενδεικτικό παράδειγμα συνεργασίας ομάδων και ανταλλαγής δομικών μονάδων είναι το εξής: η ομάδα 6 που έχει ως δομικές μονάδες τα 6 ισόπλευρα διαπιστώνει ότι μπορεί να κατασκευάσει σε 1 κόλλα χαρτί 5 ισόπλευρα και η ομάδα 3 που έχει ως δομικές μονάδες τους 3 ρόμβους διαπιστώνει ότι μπορεί να κατασκευάσει σε 1 κόλλα χαρτί 2 ρόμβους. Αποφασίζουν να χρησιμοποιήσουν από κοινού μία κόλλα χαρτί και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι 1 κόλλα χωρά 2 ρόμβους και 2 ισόπλευρα (εικ.3). Συνεπώς, με 3 κόλλες χαρτιού μπορούν να κατασκευάσουν 6 ισόπλευρα (ένα χαρταετό) και 6 ρόμβους (2 χαρταετούς), άρα συνολικά 3 χαρταετούς. Εφόσον χρειάζονταν πλήθος ισοπλεύρων τριγώνων που να είναι πολλαπλάσιο του 6 και πλήθος ρόμβων που να είναι πολλαπλάσιο του 3 και το κάθε πακέτο περιέχει 46 κόλλες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι πρέπει να αναζητήσουν το ΕΚΠ(3,6,46)=138. Άρα χρησιμοποιώντας 138 χαρτιά (3 πακέτα με κόλλες) κατασκευάζουν 138 χαρταετούς, εκ των οποίων 138:3=46 με ισόπλευρα και οι διπλάσιοι (46x2=92) με ρόμβους. Στο τέλος του μαθήματος έγινε η σύνδεση με το χώρο εργασίας μέσα από την αξιολόγηση των προτάσεων της κάθε ομάδας για την πλέον συμφέρουσα ιδέα κατασκευής.

Εικόνα 3

Στη συζήτηση αναστοχασμού που ακολούθησε, αναδείχθηκε η σημασία της χρήσης έτοιμου υλικού (πατρόν) που έδωσε ο εκπαιδευτικός Β, παρέχοντας χρόνο στις ομάδες για περαιτέρω διερεύνηση της κατασκευής με ανταλλαγή δομικών μονάδων ανάμεσά τους.

Α5) Επανασχεδιασμός (εκπαιδευτικός Α): Με βάση τον αναστοχασμό που περιγράφηκε, αποφασίστηκε στο επόμενο μάθημα της εκπαιδευτικού Α, να δοθούν σε κάθε ομάδα έτοιμα πατρόν όλων των δομικών μονάδων (και των υπολοίπων ομάδων και της κόλλας) και η εστίαση να γίνει στην επικοινωνία των ομάδων μέσω ανταλλαγής δομικών μονάδων.

Α6) Εφαρμογή (1 ώρα - Γ΄ Γυμνασίου - εκπαιδευτικός Α): Το μάθημα επικεντρώθηκε στην ανταλλαγή δομικών μονάδων μεταξύ των ομάδων. Με βάση το συμπέρασμα στο οποίο η κάθε ομάδα είχε καταλήξει στο πρώτο δίωρο, έπρεπε να αποφασίσει να συνεργαστεί με μία ή περισσότερες ομάδες, ώστε να εκμεταλλευτεί με βέλτιστο τρόπο την ελεύθερη επιφάνεια χαρτιού που είχε απομείνει. Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση της ομάδας 1 (2 ισοσκελή τραπέζια), η οποία δανείσθηκε δομικές μονάδες από την ομάδα 6 (με τα 6 ισόπλευρα) και την ομάδα 4 (2 ισοσκελή και 2 ορθογώνια παραλ/μα). Η ομάδα αυτή (εικ.4), κατασκεύασε με 4 κόλλες χαρτί, 4 χαρταετούς τριών διαφορετικών ειδών (δυο με τραπέζια, έναν με ισόπλευρα και έναν με 2 ισοσκελή και 2 ορθ. παραλ/μα). Η έννοια του Ε.Κ.Π. προέκυψε και εδώ, μέσα από την ανάγκη η κατασκευή αυτή να υλοποιηθεί με τετράδες από κόλλες. Η ύπαρξη 46 χαρτιών σε κάθε πακέτο, οδήγησε στο συμπέρασμα ότι απαιτούνται 2x46=92 κόλλες και κατασκευάζονται 92 χαρταετοί τριών διαφορετικών δομικών μονάδων (46 με τραπέζια και από 23 από τις άλλες δυο ομάδες).



Εικόνα 4

Στη συζήτηση ανατροφοδότησης, αναδείχθηκε ο πλουραλισμός των προτάσεων των ομάδων, ο οποίος προέκυψε ως απόρροια της δυνατότητας συνδυασμού των δομικών μονάδων, τις οποίες είχε στη διάθεσή της η κάθε ομάδα. Η παρατήρηση του μαθήματος του εκπαιδευτικού Β, καθόρισε τον επανασχεδιασμό της εκπαιδευτικού Α προς την κατεύθυνση αυτή.

Β) Συνεισφορά της διαδικασίας αυτής στη βελτίωση της διδασκαλίας:

Υπάρχουν δύο επίπεδα αλλαγών στο σχεδιασμό των εκπαιδευτικών ανάμεσα στις εφαρμογές. Το πρώτο σχετίζεται με αλλαγές που στόχευαν στο να γίνει η διδασκαλία περισσότερο *λειτουργική* σε επίπεδο διδακτικής διαχείρισης και εκπορεύτηκαν από το τι είχε φανεί να λειτουργεί στην διδασκαλία που παρατήρησαν και τι όχι και πώς αυτό αποτιμήθηκε στον αναστοχασμό που ακολούθησε. Ο εκπαιδευτικός Β, για παράδειγμα, μέσω της παρατήρησης της 1ης διδασκαλίας της εκπαιδευτικού Α αποφάσισε να μοιράσει τα πατρόν που αντιστοιχούν σε κάθε ομάδα και να παρακάμψει τις μετρήσεις αφενός επειδή απευθυνόταν σε μαθητές μικρότερης τάξης και αφετέρου επειδή παρατήρησε ότι η διαδικασία αυτή ήταν αρκετά χρονοβόρα και επιπλέον στερούσε στον εκπαιδευτικό τη δυνατότητα να επιστρέψει στο αρχικό πρόβλημα (χώρο εργασίας). Στην αποτίμηση της 1ης διδασκαλίας της εκπαιδευτικού Α, το σημείο αυτό συζητήθηκε αναφορικά με την δυσκολία του εκπαιδευτικού να εξασφαλίζει διδακτικό χρόνο απαραίτητο για την πραγματοποίηση διερεύνησης από την πλευρά των μαθητών. Έτσι, στην διδασκαλία του εκπαιδευτικού Β, που πραγματοποιήθηκε μετά την αναστοχαστική συνάντηση, οι αλλαγές που ενσωμάτωσε δεν αφορούσαν μόνο το παραπάνω (πρώτο) επίπεδο αλλαγών αλλά εμπλουτίστηκαν και από μία νέα κατηγορία: την διενέργεια αλλαγών με στόχο την *εξασφάλιση χρόνου διερεύνησης και επιστροφής στον χώρο εργασίας*. Πράγματι, η ανάλυση της διδασκαλίας του εκπαιδευτικού Β, έδειξε ότι η συγκεκριμένη αλλαγή βοήθησε τους μαθητές να εμβαθύνουν στην διερεύνηση του προβλήματος και οδήγησε στην ανάδειξη της έννοιας του ΕΚΠ που προέκυψε κατά την διάρκεια ανταλλαγής δομικών μονάδων ανάμεσα στις ομάδες. Στην αποτίμηση που ακολούθησε, ο εκπαιδευτικός Β ανέφερε το παράδειγμα αυτό ως απόρροια της παρακολούθησης που προηγήθηκε. Στο επίπεδο της διερεύνησης της βελτίωσης της διδασκαλίας το σημείο αυτό διευρύνθηκε και συζητήθηκε στην ομάδα των εκπαιδευτικών ως παράδειγμα του πώς η διαδικασία ετερο-παρατήρησης μπορεί να προσφέρει ένα πλαίσιο ενίσχυσης της διερεύνησης στην τάξη.

Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία μελέτησε τη διαδικασία συνεργατικού σχεδιασμού και εφαρμογής διερευνητικών δραστηριοτήτων που υποστηρίζουν τη χρήση μαθηματικών εννοιών για την επίλυση προβλημάτων που συνδέονται με τον χώρο εργασίας. Η διερεύνηση αυτής της διαδικασίας ανέδειξε τη σημασία *εξασφάλισης περισσότερου διδακτικού χρόνου για διερεύνηση*. Σύμφωνα με την ανάλυση των δεδομένων, οι διαδοχικές προσαρμογές του σχεδιασμού, υποδηλώνουν δυο σημαντικές πτυχές βελτίωσης της διδασκαλίας: Η πρώτη αφορά σε *λειτουργικά στοιχεία* του σχεδιασμού, που ευνοούν την υλοποίηση συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, δηλαδή την εστίαση σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες κατά τη διαδικασία διερεύνησης. Η δεύτερη, επιδιώκει τη *δυνατότητα επιστροφής στο χώρο εργασίας* μετά από τη διαδικασία διερεύνησης και φέρνει στην επιφάνεια τον κρίσιμο ρόλο του πλαισίου σε δραστηριότητες που στοχεύουν στη σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με πραγματικές καταστάσεις. Η επαναφορά στον χώρο εργασίας φάνηκε ότι ενίσχυσε την διερεύνηση καθεαυτή προσφέροντας στους μαθητές ένα πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών σε ένα αυθεντικό επαγγελματικό πλαίσιο.

Βιβλιογραφία

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 524-549.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. I, pp. 17-32. Bergen, Norway: Bergen University College.

Jaworski, B. (2007). Developmental research in mathematics teaching and learning. Developing learning communities based on inquiry and design, *Proceedings of 2006 Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group*, pp. 3-16, Calgary Canada: University of Calgary.

Nuffield Foundation. (2013). *Nuffield Practical Work for Learning: Model-based inquiry*, downloaded from www.nuffieldfoundation.org.

Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: The role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 275–294.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 271-290.

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ CASYOPÉE

Γεώργιος – Ιγνάτιος Καφετζόπουλος, Γιώργος Ψυχάρης
Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ
gkafetzo@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Στόχος του άρθρου είναι η διερεύνηση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες μοντελοποίησης στο λογισμικό Casyopée. Στα αποτελέσματα καταγράφονται τα επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής που προέκυψαν και ο κρίσιμος ρόλος των διαθέσιμων εργαλείων στην εξέλιξη των νοημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα εργασία εστιάζεται στη διερεύνηση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος Casyopée (Lagrange, 2010), το οποίο προσφέρει διασυνδεόμενες αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Το Casyopée επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν με τις μεταβολές και συμμεταβολές μεγεθών σε ένα σύστημα Δυναμικής Γεωμετρίας και να διερευνήσουν αν και ποιες από αυτές ορίζουν συναρτήσεις μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση. Στην περίπτωση αυτή, ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης προσφέρεται αυτόματα ως βάση για περαιτέρω μελέτη της συνάρτησης με χρήση πίνακα τιμών και γραφήματος. Έτσι, το λογισμικό παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να εμπλακούν με τη δημιουργία μίας συνάρτησης και να τη νοηματοδοτήσουν περαιτέρω με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η προϋπάρχουσα έρευνα γύρω από τη συνάρτηση ως συμμεταβολή έχει εστιαστεί στη μελέτη της κατανόησης των μαθητών κυρίως με στατικά μέσα όπως ερωτηματολόγια (π.χ., Carlson et al., 2002). Στην παρούσα έρευνα, δίνεται έμφαση σε ποιοτικά χαρακτηριστικά της σκέψης των μαθητών που σηματοδοτούν αντίστοιχα επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Η συνάρτηση έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης σε πλήθος ερευνών, πολλές από τις οποίες εστιάζονται στην πολυπλοκότητα των κατανοήσεων των μαθητών. Η Sfard (1991) υπέδειξε ότι οι μαθητές μεταβαίνουν από τη διαδικαστική κατανόηση (συνάρτηση ως *διαδικασία*) στη δομική κατανόηση (συνάρτηση ως *αντικείμενο*) και επεσήμανε ότι η συγκεκριμένη μετάβαση έχει δυναμικό χαρακτήρα και είναι επιθυμητή η ευελιξία μεταξύ των δύο κατανοήσεων. Παρότι η διάσταση διαδικασία-αντικείμενο βρέθηκε στο επίκεντρο πολλών ερευνών για πολλά χρόνια, από τα μέσα της προηγούμενης δεκαετίας καταγράφεται μία σταδιακή μετακίνηση της εστίασης της έρευνας από τη συνάρτηση ως διαδικασία-αντικείμενο στη συνάρτηση ως συμμεταβολή (π.χ. Thompson, 2011; Lagrange, 2010, 2014; Psycharis, in press).

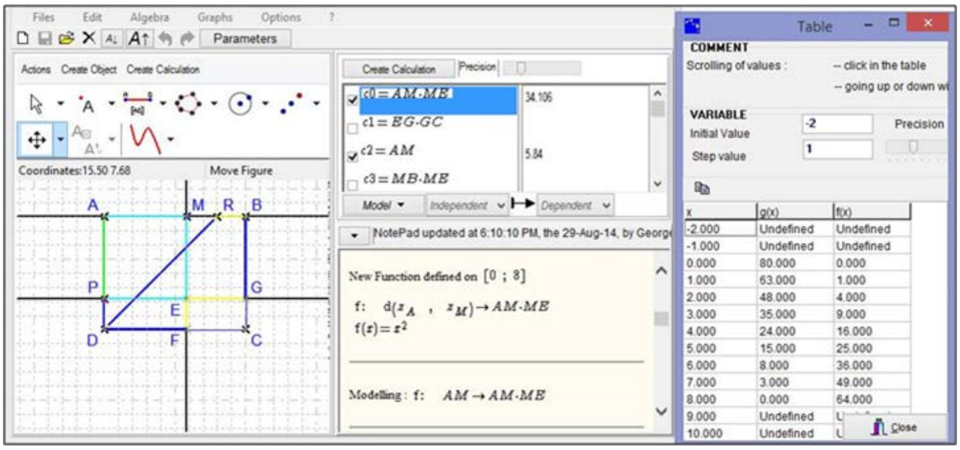
Η κατανόηση της συμμεταβολής (Thompson, 1994) αναφέρεται στην παρατήρηση των τρόπων με τους οποίους μεταβάλλοντας τις τιμές μίας μεταβλητής ποσότητας μεταβάλλονται οι τιμές μίας άλλης και αναδεικνύεται ως ουσιώδης για την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού όπως του ρυθμού μεταβολής. Στην προσπάθεια να κατηγοριοποιηθούν τα εννοιολογικά επίπεδα κατανόησης των μαθητών για την έννοια της συμμεταβολής, οι Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, και Hsu (2002) μελέτησαν την ικανότητα φοιτητών να αναπτύξουν συλλογισμούς σχετικά με τη συμμεταβολή ποσοτήτων σε δυναμικές καταστάσεις (π.χ. γέμισμα σφαιρικής φιάλης με νερό). Από την έρευνά τους προέκυψε το πλαίσιο των πέντε επιπέδων της συμμεταβολής που περιγράφηκαν με βάση τις αντίστοιχες νοητικές διεργασίες: *Εξάρτηση* (συσχέτιση αλλαγών μίας μεταβλητής με αλλαγές μίας άλλης), *Κατεύθυνση αλλαγής* (συσχέτιση της κατεύθυνσης της αλλαγής μίας μεταβλητής - αύξηση ή μείωση – με αλλαγές μίας άλλης), *Ποιοτική συσχέτιση* (συσχέτιση του ποσού της αλλαγής μίας μεταβλητής με αλλαγές μίας άλλης), *Μέσος ρυθμός* (συσχέτιση του μέσου ρυθμού μεταβολής με ομοιόμορφες αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής) και *Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* (συσχέτιση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής με συνεχείς αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής).

Ένα κρίσιμο σημείο στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών αναφορικά με τη συνάρτηση ως συμμεταβολή φαίνεται ότι είναι η δυνατότητα μετάβασης από τον ποσοτικό συλλογισμό, δηλαδή την περιγραφή σχέσεων μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, στον αλγεβρικό συλλογισμό που αφορά στην περιγραφή σχέσεων με χρήση μαθηματικού φορμαλισμού (Thompson, 2011). Ο Lagrange (2014) υπέδειξε τη μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων της καθημερινότητας ως ένα πλαίσιο διασύνδεσης των ποσοτήτων με τις συναρτήσεις μέσα από τη συμμεταβολή των αντίστοιχων μεγεθών στο Casyopée. Μάλιστα, όπως θα δούμε παρακάτω, ο σχεδιασμός του Casyopée βασίστηκε στην επιδίωξη της διευκόλυνσης των μαθητών να μεταβούν από τον κόσμο των αλληλεξαρτήσεων/συμμεταβολών σε ένα φυσικό σύστημα, στον κόσμο των συναρτήσεων μέσα από τη συμμεταβολή ποσοτήτων/μεγεθών και τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στην παρούσα έρευνα υιοθετήσαμε τις παραπάνω προσεγγίσεις και επιπλέον θεωρήσαμε την πορεία μετάβασης των μαθητών από τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες/μεγέθη στη συνάρτηση ως μία αφαιρετική διαδικασία κατασκευής νοημάτων που βασίζεται στην έννοια των τοπικών γενικεύσεων (situated abstractions, Noss & Hoyles, 1996) καθώς πραγματοποιείται σε στενή συνάφεια με τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία και το μαθησιακό πλαίσιο.

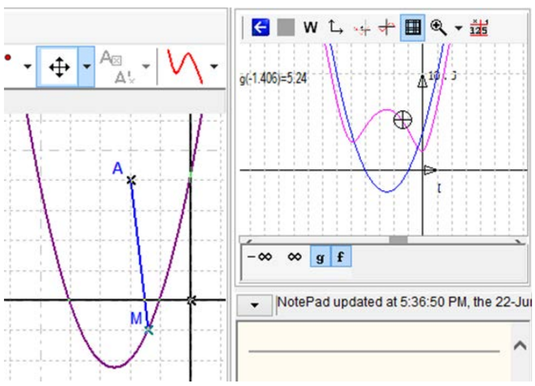
Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό Casyopée για να μελετήσουμε τις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα, μας ενδιέφερε ο εντοπισμός των επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής με ποιοτικό τρόπο όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν την εμπειρία χειρισμού συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο γεωμετρικό πλαίσιο, τη διερεύνηση των μεταξύ τους σχέσεων και τη σταδιακή μετάβαση στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων. Επίσης, εστιαστήκαμε στη μελέτη του ρόλου των προσφερόμενων εργαλείων στην πορεία νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέσα από τη σκιαγράφηση της αναπτυξιακής πορείας των νοημάτων των μαθητών καθώς αλληλεπιδρούσαν με τα διαθέσιμα εργαλεία.

ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ CASYOPÉE

Το Casyopée διαθέτει ένα παράθυρο Άλγεβρας, το οποίο προσφέρει εργαλεία και αναπαραστάσεις για τη μελέτη συναρτήσεων (π.χ. παραγοντοποίηση τύπου, εύρεση παραγώγου – παράγουσας, επίλυση εξίσωσης συναρτήσεων). Το παράθυρο της Άλγεβρας συνδέεται με ένα παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν ελεύθερα και εξαρτώμενα γεωμετρικά αντικείμενα σε ένα σύστημα αξόνων (σχ. 1). Ένα πρωτότυπο χαρακτηριστικό του λογισμικού αποτελεί το παράθυρο «γεωμετρικοί υπολογισμοί», στο οποίο οι μαθητές μπορούν να ορίζουν ανεξάρτητα μεγέθη (με βάση ελεύθερα σημεία) και εξαρτημένα μεγέθη (όπως μήκος τμήματος, εμβαδό, τετμημένη ή τεταγμένη σημείου) ως αντικείμενα (c0, c1, c2,…). Με κλικ πάνω σε έναν γεωμετρικό υπολογισμό-αντικείμενο (c0, c1, c2, …) οι μαθητές μπορούν να πληροφορηθούν από ποια μεγέθη εξαρτάται. Επιπλέον, μέσω της λειτουργίας της «αυτόματης μοντελοποίησης» οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν αν μπορεί να οριστεί συνάρτηση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών, επιλέγοντας το πρώτο ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το δεύτερο ως εξαρτημένη μεταβλητή.



Σχήμα 1: Τα παράθυρα γεωμετρίας, γεωμετρικών υπολογισμών και πίνακα τιμών.



Σχήμα 2: Τα παράθυρα γεωμετρίας και γραφικών παραστάσεων.

Σε περίπτωση που μπορεί να οριστεί συνάρτηση, εξάγεται αυτόματα ο αλγεβρικός τύπος της στο παράθυρο της Άλγεβρας. Σε αντίθετη περίπτωση, το περιβάλλον παρέχει κατάλληλη πληροφόρηση. Τέλος, μία συνάρτηση μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως πίνακα τιμών (σχ. 1) και γραφικής παράστασης. Οι μαθητές μπορούν να περιηγηθούν πάνω στη γραφική παράσταση με τη χρήση του «κινούμενου στόχου», δηλαδή ενός δυναμικού σημείου που εκφράζει τις συμμεταβολές των ποσοτήτων μέσω των οποίων ορίστηκε η συνάρτηση (σχ. 2, γράφημα).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος, πλαίσιο, δραστηριότητες και συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν έξι μαθητές Β΄ Λυκείου που εργάστηκαν σε ομάδες των δύο για 5 ώρες (60λ.). Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε μελέτη περίπτωσης με στοιχεία έρευνας σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Οι μαθητές εργάστηκαν σε τρεις δραστηριότητες που αναφέρονταν σε προβλήματα μεγιστοποίησης. Η αλληλουχία των δραστηριοτήτων ήταν τέτοια ώστε να εμφανίζεται η συμμεταβολή από απλές σε περισσότερο σύνθετες καταστάσεις. Η δραστηριότητα 1 ζητούσε την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου από μία παραβολή (σχ. 2). Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν μία συνάρτηση ορίζοντας ως μεγέθη την απόσταση AM και την τετμημένη του σημείου M. Η δραστηριότητα 2 περιείχε ένα ορθογώνιο ABCD και ένα κινητό σημείο M (κινούμενο μεταξύ των A και R), ώστε το AMEP να παραμένει τετράγωνο και το EGCF να είναι ορθογώνιο (σχ. 1). Τα χωρία AMEP και EGCF αντιστοιχούσαν σε κήπους, ενώ τα MBGE και

PEFD σε χώρους κατοικιών. Τέθηκαν ερωτήματα όπως: «Παρατηρείτε κάποιες ποσότητες να συμμεταβάλλονται;», «Υπάρχει θέση του σημείου Μ ώστε: (α) τα εμβαδά των δύο κήπων να είναι ίσα; (β) τα εμβαδά των κήπων να είναι ίσα με τα εμβαδά των κατοικιών;». Ο σκοπός ήταν ο καθορισμός των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (το μήκος ΑΜ με τα εμβαδά κήπων ή κατοικιών) και η επίλυση του προβλήματος μέσα από τη δημιουργία κατάλληλων συναρτήσεων. Η δραστηριότητα 3 ζητούσε τον προσδιορισμό της θέσης των κορυφών ενός ορθογωνίου πάνω στις πλευρές δοσμένου τριγώνου έτσι ώστε το ορθογώνιο να έχει το μέγιστο εμβαδό. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση απομαγνητοφωνήθηκε το σύνολο των δεδομένων.

Μέθοδος ανάλυσης

Σε πρώτη φάση, προκειμένου να εντοπίσουμε τα επίπεδα νοηματοδότησης των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή επιλέξαμε λεκτικές εκφράσεις σχετικά με τον καθορισμό και τη σχέση των εκάστοτε συμμεταβαλλόμενων μεγεθών κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους. Οι εκφράσεις αυτές αποτέλεσαν ενδείξεις τοπικών αφαιρετικών διαδικασιών, καθώς περιελάμβαναν αναφορές τόσο σε επίπεδο ποσοτήτων/μεγεθών όσο και σε επίπεδο τυπικών μαθηματικών αντικειμένων και αποτύπωναν το τρέχον επίπεδο νοηματοδότησης των μαθητών. Προέκυψαν τέσσερα επίπεδα νοηματοδότησης της συμμεταβολής από διαισθητικές σε περισσότερο μαθηματικοποιημένες εκδοχές, η διάκριση των οποίων βασίστηκε στα εξής κριτήρια: τη συμμεταβολή χωρίς ποσοτική αναφορά (διαισθητικά), την αλληλεξάρτηση μεγεθών, το μαθηματικό φορμαλισμό και τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Σε δεύτερη φάση, επιλέξαμε επεισόδια μεγαλύτερης έκτασης από το σύνολο των δεδομένων προκειμένου να αναδειχθεί η εξέλιξη της νοηματοδότησης των μαθητών μέσα από την παράλληλη διερεύνηση του ρόλου των εργαλείων. Τα επεισόδια επιλέχτηκαν με βάση: (α) τις διαδικασίες αναγνώρισης και συσχέτισης συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών/μεταβλητών από την πλευρά των μαθητών πριν και μετά τη δημιουργία συναρτήσεων στο λογισμικό και (β) τον ρόλο των εργαλείων σε αυτές. Μέσα από συγκριτική ανάλυση της εργασίας των ομάδων προέκυψαν τέσσερις θεματικές κατηγορίες επεισοδίων, οι οποίες φωτίζουν διαφορετικές πτυχές της πορείας προς τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, πριν και μετά τον ορισμό συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο Casyopée. Κάποιες από τις κατηγορίες αυτές περιλαμβάνουν τη μετακίνηση των μαθητών στα διαφορετικά επίπεδα νοηματοδότησης που εντοπίστηκαν στην πρώτη φάση της ανάλυσης. Στις επόμενες ενότητες παραθέτουμε συνοπτική περιγραφή: (α) των τεσσάρων επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής και (β) των θεματικών κατηγοριών επεισοδίων που σκιαγραφούν την εξέλιξη της νοηματοδότησης των μαθητών καθ' όλη την εργασία τους.

ΕΠΙΠΕΔΑ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Επίπεδο 1: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά

Στο επίπεδο 1 οι μαθητές περιέγραφαν τις μεταβολές δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (π.χ. το μήκος AM και το εμβαδό) διαισθητικά. Οι μαθητές αντιμετώπιζαν ανεξάρτητα τις αλλαγές σε κάθε μεταβλητή χωρίς κάποια ποσοτική περιγραφή των αλλαγών. Για παράδειγμα (σχ. 1):

Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν;

Μαθήτρια 2: Μεταβάλλεται το AM και μεταβάλλεται και το εμβαδό αυτού (το εμβαδό των κατοικιών PEFD και MBGE). (Ομάδα 1, δρ.2, στίχος 621)

Επίπεδο 2: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών

Στο επίπεδο 2 οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μία αντίστοιχη μεταβολή σε ένα άλλο μέγεθος. Έτσι, το κύριο χαρακτηριστικό του επιπέδου 2 είναι η έννοια της αλληλεξάρτησης. Για παράδειγμα (σχ. 1):

Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν;

Μαθητής 5: Μας λέει ότι όταν αυξάνεται το AM, αυξάνεται και το εμβαδό (AMEP) ανάλογα. (Ομάδα 3, δρ.2, στίχος 203)

Επίπεδο 3: Νοηματοδότηση συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό

Στο επίπεδο 3 οι μαθητές ήταν σε θέση να περιγράψουν τη συμμεταβολή με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό. Για παράδειγμα, στο επόμενο απόσπασμα οι μαθητές της ομάδας 3 έχοντας προσδιορίσει τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες 'μήκος AM' και 'εμβαδό AMEP' (σχ. 1) στο Casyopée, αντιμετώπισαν το τρίτο ερώτημα της δραστηριότητας 2: *«Προσδιορίστε τη θέση του M στο AR ώστε οι δύο κήποι (εμβαδά AMEP και EGCF) να έχουν ίσο εμβαδό»*. Οι μαθητές δημιούργησαν δύο συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το AM (μία για το εμβαδό του AMEP και μία για το εμβαδό του EGCF) και εμφάνισαν τον πίνακα τιμών (στήλες x, f(x), g(x)). Μέσα από την παρατήρηση των στηλών του πίνακα τιμών, ο μαθητής 5 αιτιολογεί ότι η f είναι συνάρτηση με αναφορά στα σύμβολα x και f(x). Η συμμεταβολή των δύο αλληλοεξαρτώμενων ποσοτήτων εκφράζεται ως τοπική αφαιρετική διαδικασία και υπονοείται από τη λέξη «όσο».

Μαθητής 5: Αφού για κάθε x έχω ένα y, θέτοντας x το AM, έχω ένα άλλο y. Συνδέονται, τέλος πάντων, μεταξύ τους. Όσο μεγαλώνει ας πούμε το x, ανάλογα μεγαλώνει και το f(x). (Ομάδα 3, δρ.2, στίχος 314).

Επίπεδο 4: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Στο επίπεδο 4 της συμμεταβολής, οι μαθητές περιέγραφαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με μαθηματικούς όρους, συνδέοντας ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Στο παράδειγμα που ακολουθεί φαίνεται πώς οι μαθητές της ομάδας 2 μετακινούνται στο επίπεδο 4. Αφού απάντησαν στα τρία πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας 2, οι μαθητές επεξεργάζονταν το ερώτημα: «*Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι (εμβαδά AMEP και EGCF) θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες (εμβαδά MBGE και PEFD) που πρόκειται να κτιστούν; (σχ. 1)*». Οι μαθητές δημιούργησαν τους γεωμετρικούς υπολογισμούς των αθροισμάτων των εμβαδών (c3 και c6 αντίστοιχα) και όρισαν τη συνάρτηση του μήκους AM (c2) σε σχέση με το εμβαδό των κήπων (c3). Περιγράφοντας τη συμμεταβολή του μήκους του AM και του αθροίσματος των εμβαδών *AMEP* και *EGCF*, η μαθήτρια M4 χρησιμοποιεί αλγεβρικούς όρους συνδέοντας τον πίνακα τιμών και το παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών.

Μαθήτρια 4: Βλέπουμε ότι για κάθε c2 που μεταβάλλεται, δηλαδή μήκος AM, μεταβάλλεται και το c3. (σχ. 1) (Ομ. 2, δρ.2, στ.392).

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε συνοπτικά τις τέσσερις θεματικές κατηγορίες επεισοδίων που φωτίζουν τη σταδιακή μετακίνηση των μαθητών σε διαφορετικά επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής που πρόεκυψαν από τη σύνθεση της δραστηριότητας όλων των μαθητών. Οι δύο πρώτες κατηγορίες αναφέρονται στις φάσεις στις οποίες οι μαθητές δεν έχουν εμπλακεί με τη δημιουργία συνάρτησης στο λογισμικό.

Η αλληλεξάρτηση μεταξύ μεγεθών

Όλοι οι μαθητές παρατήρησαν διαισθητικά τη συμμεταβολή μεγεθών πριν εμπλακούν με τη δημιουργία συναρτήσεων στο Casyopée. Τα επεισόδια της κατηγορίας αυτής βασίστηκαν στην παρατήρηση της αλληλεξάρτησης των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο πλαίσιο του δυναμικού χειρισμού των ελεύθερων σημείων από τους μαθητές στο παράθυρο της Γεωμετρίας.

Ο καθορισμός της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής

Το ζήτημα επιλογής της ανεξάρτητης μεταβλητής εμφανίστηκε όταν οι μαθητές οδηγήθηκαν για πρώτη φορά στη δημιουργία συνάρτησης κατά τη μοντελοποίηση των προβλημάτων που υπήρχαν στις δραστηριότητες. Τα επεισόδια της κατηγορίας αυτής αφορούσαν δυσκολίες των μαθητών αναφορικά με την κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Σταδιακά, μέσω της εμπειρίας που προήλθε από τη μετακίνηση ελεύθερων σημείων και την παρατήρηση της μεταβολής των τιμών στα αλληλεξαρτώμενα μεγέθη (παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών), οι μαθητές εξοικειώθηκαν τόσο με τη συμμεταβολή μεγεθών όσο και με τον πειραματισμό για την επιλογή της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής στο Casyopée.

Η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή

Στην κατηγορία αυτή η νοηματοδότηση της συμμεταβολής προήλθε από την εμπλοκή των μαθητών με τον ορισμό συνάρτησης στο λογισμικό και την επακόλουθη ερμηνεία της με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Στα αντίστοιχα επεισόδια οι μαθητές μετακινούνται μεταξύ των επιπέδων νοηματοδόησης της συμμεταβολής 1, 2 και 3 μέσω της αλληλεπίδρασης με το Casyopée. Στο παράδειγμα που ακολουθεί οι μαθητές της ομάδας 3 έχουν δημιουργήσει τη συνάρτηση που περιγράφει τη συμμεταβολή της θέσης του σημείου Μ και του μήκους του ΑΜ (δραστηριότητα 1) και έχουν εμφανίσει το γράφημά της και τον «κινούμενο στόχο» σε αυτό (σχ. 2).

Μαθητής 5: Λοιπόν, κινούμε το x κινώντας το βελάκι … Κινούνται και τα δύο (*ενν. ο στόχος και το σχήμα της παραβολής στο παράθυρο της γεωμετρίας*).

Ερευνητής: Πες μου, τι παρατηρείς;

Μαθητής 5: Όσο κατεβαίνουμε το x πλησιάζει ας πούμε στο 0. *(ενν. η κίνηση του στόχου προς τα δεξιά επηρεάζει την τιμή του μεγίστου).*

Από το απόσπασμα προκύπτει ότι μέσα από τη δυναμική μετακίνηση του «κινούμενου στόχου» ο μαθητής 5 αναγνωρίζει την αλληλεξάρτηση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και του μήκους του τμήματος ΑΜ στο παράθυρο της γεωμετρίας και μεταβαίνει στο επίπεδο 2 νοηματοδότησης της συμμεταβολής. Ακολούθως, οι μαθητές της ίδιας ομάδας νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό (επίπεδο 3 νοηματοδότησης της συμμεταβολής) μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση. Συνοψίζοντας, μέσα από το παράδειγμα της ομάδας 3 φαίνεται ο καθοριστικός ρόλος των διαθέσιμων αναπαραστάσεων για τη μετάβαση των μαθητών στα επίπεδα νοηματοδότησης της συμμεταβολής 1, 2 και 3.

Η έννοια της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις

Στην κατηγορία αυτή η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής χαρακτηρίστηκε από την εμφάνιση του αλγεβρικού συμβολισμού μέσα από τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Στα αντίστοιχα επεισόδια καταγράφηκαν μετακινήσεις των μαθητών στο επίπεδο 4 νοηματοδότησης της συμμεταβολής. Σημειώνουμε ότι δύο από τις τρεις ομάδες που παρακολουθήσαμε έφτασαν στο επίπεδο 4 κάνοντας συνδέσεις μεταξύ του πίνακα τιμών και του παραθύρου γεωμετρικών υπολογισμών. Συνολικά, στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών έπαιξε καθοριστικό ρόλο το παράθυρο «πίνακας τιμών» και ο τρόπος που οι μαθητές συνδύασαν τον πίνακα τιμών με: (α) τη γραφική παράσταση και (β) με τις μεταβλητές c0, c1 και c2, στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εστιαστήκαμε στη διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου, κατά τη μοντελοποίηση προβλημάτων στο λογισμικό Casyopée. Η ανάλυση ανέδειξε τέσσερα ιεραρχημένα επίπεδα: (α) νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά, (β) νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών, (γ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό και (δ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Σε δεύτερο επίπεδο σκιαγραφήσαμε την πορεία εξέλιξης της νοηματοδότησης των μαθητών για τη συμμεταβολή, μέσα από θεματικές κατηγορίες επεισοδίων, που καταδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο των εργαλείων. Οι θεματικές κατηγορίες επεισοδίων ήταν: (α) η αλληλεξάρτηση μεταξύ μεγεθών, (β) ο καθορισμός της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, (γ) η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή και (δ) η έννοια της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις. Περαιτέρω έρευνα είναι απαραίτητη για να μελετηθεί ο τρόπος που εμφανίζεται η συμμεταβολή κατά την εμπλοκή των μαθητών με τη μοντελοποίηση και διερεύνηση προβλημάτων σε ρεαλιστικά πλαίσια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v.32, 9-13.

Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 243-255.

Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *33*(3), 179-192.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht: Kluwer.

Psycharis, G. (in press). Formalising functional dependencies: The potential of technology. *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prague, Czech Republic.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1, Issues in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΤΑ ΑΠΟ 17 ΧΡΟΝΙΑ, 3 ΑΠΣ ΚΑΙ ΝΕΑ ΒΙΒΛΙΑ

Πέτρος Κλιάπης, Όλγα Κασσώτη
Σχολικός Σύμβουλος 12ης Περιφέρειας Π.Ε. Θεσσαλονίκης,
Διευθύντρια 2ου Δ.Σ. Τριανδρίας
pkliapis@gmail.com, okassoti@gmail.com

Η έρευνα αυτή είναι μια συγκριτική μελέτη στην οποία εξετάζονται οι μαθηματικές γνώσεις μαθητών Στ΄ Δημοτικού από την περιοχή της Θεσσαλονίκης με τις ίδιες γραπτές δοκιμασίες που εξετάστηκαν οι αντίστοιχοι μαθητές το σχολικό έτος 1998-1999 στην «Έρευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συγκριτικές μελέτες χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολλά πεδία της επιστημονικής έρευνας. Ως μεθοδολογία έρευνας, παρά τη δυνατότητά της συγκριτικής μελέτης για ευρεία και διεπιστημονική χρήση, υπάρχει συνήθως μια επιφύλαξη από τους ερευνητές στην υιοθέτησή της, καθώς όταν η σύγκριση γίνεται μεταξύ υποκειμένων διαφορετικών κοινωνιών, γλωσσών και κουλτούρας εγείρονται σημαντικά μεθοδολογικά ζητήματα λόγω των πολλών παραμέτρων που υπεισέρχονται στη σύγκριση (Azarian, 2011). Στην παρούσα συγκριτική μελέτη εξετάζονται οι γνώσεις των μαθηματικών 292 μαθητών Στ΄ Δημοτικού από την περιοχή της Θεσσαλονίκης με τις ίδιες γραπτές δοκιμασίες που εξετάστηκαν οι αντίστοιχοι μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν το σχολικό έτος 1998-1999 στην «Έρευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών». Συγκρίνονται οι επιδόσεις και επιχειρείται μια πρώτη ερμηνεία για τις διαφορές τους.

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΕΧΡΙ ΤΟ 1998

Το 1985 το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο προχώρησε στην αναθεώρηση των Προγραμμάτων Σπουδών (Π.Σ.) των μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού (ΥΠΕΠΘ, 1985) και στο τέλος του 1986 των μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το σχολικό έτος 1993-94 έγινε αλλαγή των βιβλίων των Δ΄ Ε', και Στ' τάξεων του Δημοτικού, βιβλία προσανατολισμένα στη μάθηση κανόνων, τύπων και διαδικασιών (ΥΠΕΠΘ, 1985).

Το 1995 τα νέα Π.Σ. εισήγαγαν και πρόβλεψη για τη διαμόρφωση των στάσεων: «Να εθιστούν οι μαθητές στην κριτική σκέψη, στην αυτοπειθαρχία, στην αυτοπεποίθηση και στην υπευθυνότητα, να αποκτήσουν θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά και να χαίρονται όταν ενασχολούνται με αυτά» (ΥΠΕΠΘ, 1995). Οι δάσκαλοι της εποχής ήταν προσανατολισμένοι στη μηχανιστική μετάδοση αλγορίθμων και κανόνων και θεωρούσαν πως ο ρόλος τους ήταν να «παραδίδουν», «να απλουστεύουν & να εξηγούν» (Καφούση & Χαβιάρης, 1999).

Η ΈΡΕΥΝΑ ΤΟΥ 1998

Στη δεκαετία του 90 η τάση στη μαθηματική εκπαίδευση διεθνώς ήταν η ανάπτυξη σημαντικών γνωστικών διεργασιών. Ωστόσο, διαπιστώνεται από έρευνες ότι οι μαθηματικές γνώσεις που αποκτούν οι μαθητές στο τέλος του Δημοτικού εξακολουθούν να παραμένουν ιδιαίτερα χαμηλές και ότι η κατάσταση στη μαθηματική παιδεία δεν έχει ουσιαστικά διαφοροποιηθεί παρά τις αλλαγές (Πόταρη, 1989. Φιλίππου, 1990, 1992).

Οι παραπάνω διαπιστώσεις οδηγούν μια ομάδα ερευνητών να σχεδιάσει μια ερευνητική παρέμβαση κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 1998-99. Η έρευνα κινήθηκε σε δύο άξονες: α) καταγράφηκε η υπάρχουσα κατάσταση στη διδασκαλία των μαθηματικών και β) έγιναν πειραματικές διδασκαλίες με εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις (Τζεκάκη & Δεληγιωργάκος, 2000), με στόχο να καταγραφεί η συνολική εικόνα των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών στους βασικούς άξονες της ύλης, να αναδειχτούν οι δυσκολίες των μαθητών και να αναπτυχθούν εργαλεία που θα επιτρέψουν την παραγωγή πιστότερων αναπαραστάσεων της γνώσης (Οικονόμου, Σακονίδης, & Τζεκάκη, 2000).

Οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού ελέγχθηκαν με τη βοήθεια γραπτής δοκιμασίας, η οποία συντάχθηκε για τις ανάγκες της έρευνας και περιείχε ερωτήσεις επί της διδασκόμενης ύλης σε αντιστοιχία με τις ασκήσεις και τα προβλήματα των σχολικών βιβλίων (Οικονόμου, Σακονίδης, & Τζεκάκη, όπ.π.). Το δείγμα αποτέλεσαν 495 μαθητές Στ' Δημοτικού (257 αγόρια και 238 κορίτσια) από 22 σχολεία των Νομών Θεσσαλονίκης, Ιωαννίνων και Έβρου. Η επιλογή των σχολείων έγινε με τυχαία δειγματοληψία.

ΟΙ ΑΛΛΑΓΕΣ ΣΤΟ ΘΕΣΜΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 1998 - 2015

Σύγχρονες θεωρήσεις υποδεικνύουν ότι ένα σύγχρονο Π.Σ. μαθηματικών οφείλει να αποθαρρύνει την έμφαση στην απλή γνώση και την εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών, επενδύοντας στη μελέτη των συνδέσεων και στην ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων, στάσεων και πεποιθήσεων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα μέσω των μαθηματικών (Τζεκάκη, 2010). Μια τέτοια προσέγγιση θεραπεύει την πάγια αγωνία των εκπαιδευτικών να καλύψουν την ύλη, η οποία οδηγούσε σε βιαστική παράθεση στείρας γνώσης μέσα από μετωπική διδασκαλία χωρίς δραστηριοποίηση των μαθητών (Οικονόμου Π., 2010). Η οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών προτείνεται να γίνεται μέσα από κατάλληλες και πλούσιες δραστηριότητες και προβλήματα (Κλιάπης & Κασσώτη, 2005).

Το Υπουργείο Παιδείας, συντάσσει το 1997 το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ) των Μαθηματικών (ΥΠΕΠΘ-ΠΙ, 1997). Βασικές αρχές του ήταν, ότι α) η διαδικασία μάθησης των μαθηματικών είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα, β) οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών και γ) ο μαθητής πρέπει να αναπτύξει την ικανότητα χρήσης της μαθηματικής συμβολικής γλώσσας και να κατανοήσει τις σημασίες που περικλείει ένα σύμβολο ή μια έννοια. Το 2000 το Π.Ι. εισήγαγε την έννοια της διαθεματικότητας σύμφωνα με την οποία τα αναλυτικά προγράμματα πρέπει να λειτουργήσουν σε 2 άξονες, της διαθεματικότητας, όπου η γνώση γίνεται αντιληπτή ως ενιαία ολότητα και των διακριτών μαθημάτων. Ως αποτέλεσμα το Ε.Π.Π.Σ αντικαταστάθηκε από το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), το οποίο συμπληρώνει τα Ε.Π.Π.Σ. με διαθεματικές προσεγγίσεις και τις βασικές αρχές της αξιολόγησης. Όλες οι παραπάνω αλλαγές υλοποιήθηκαν στην εκπαιδευτική πράξη μέσα από την προκήρυξη συγγραφής των νέων σχολικών βιβλίων το 2003 τα οποία και χρησιμοποιούνται από το 2007 στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στα νέα βιβλία το παραδοσιακό «δασκαλοκεντρικό» μοντέλο διδασκαλίας αμφισβητείται, ενώ η διδασκαλία δεν αφορά μόνο τις γνώσεις, αλλά και τις διαδικασίες μάθησης. Σύμφωνα με νέα αντίληψη, ο εκπαιδευτικός είναι δεν είναι απλός μεταδότης τις γνώσης, αλλά ο οργανωτής ενός πλαισίου μέσα στο οποίο ο μαθητής θα κινείται ανακαλύπτοντας τη γνώση. Η παραδοσιακή διδασκαλία αντικαθίσταται με το «ανακαλυπτικό μοντέλο» της μάθησης, που στηρίζεται κυρίως στη δραστηριοποίηση των μαθητών και την εμπλοκή τους στην αντιμετώπιση ειδικών διδακτικών καταστάσεων. Οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης επιτυγχάνονται μέσα από την αντιμετώπιση δραστηριοτήτων ή/και μέσα από την αντιμετώπιση προβλημάτων (Κασσώτη, Κλιάπης, & Οικονόμου, 2006).

Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΟΥ 2015

Με βάση τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν τα τελευταία 17 χρόνια, οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί θεωρείται ότι εργάζονται πλέον σε ένα πλαίσιο το οποίο κινείται σε αντιδιαμετρική τροχιά με το πλαίσιο του 1998. Τα τελευταία Π.Σ. για τα μαθηματικά (τόσο του 2003 όσο και του 2011) κινούνται στην κατεύθυνση του «κάνω Μαθηματικά» δηλαδή συνδέω τις εμπειρίες των μαθητών με την ίδια τη μαθηματική γνώση. Στην προσέγγιση αυτή ο εκπαιδευτικός αναγνωρίζει ότι δεν «διδάσκει», αλλά καθοδηγεί τους μαθητές να αναπτύσσουν μαθηματικές γνώσεις. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν οι αλλαγές στα Π.Σ. και στα βιβλία βελτίωσαν τις γνώσεις των μαθητών που φοιτούν στη Στ΄ Δημοτικού σε σύγκριση με τους αντίστοιχους μαθητές του 1998.

Θέλοντας να εξετάσουμε κάτω από το ίδιο πρίσμα και με τα ίδια εργαλεία τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών και να τις συγκρίνουμε με εκείνες της έρευνας του 1998 χρησιμοποιήσαμε τι ίδιες γραπτές δοκιμασίες σε δείγμα 292 μαθητών Στ΄ Δημοτικού σε σχολεία της Θεσσαλονίκης.

Προκειμένου να διερευνηθεί η εσωτερική συνέπεια των απαντήσεων διωνυμικού τύπου, εφαρμόστηκε ο δείκτης Kuder – Richardson formula 20, ο οποίος ελέγχθηκε με το στατιστικό πακέτο SPSS και βρέθηκε πολύ ικανοποιητικός (KR-20 = 0,843).

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, όπως στην έρευνα του 1998, θεωρήθηκε ότι οι μαθητές κατέχουν τις έννοιες που εξετάζονται στην κάθε κατηγορία, όταν τα 2/3 των μαθητών (ποσοστό 66,6%) απάντησαν επιτυχώς στις ερωτήσεις τις κατηγορίας αυτής.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 1, από τις πέντε κατηγορίες που ελέγχθηκαν το 1998 και το 2015, οι μαθητές απάντησαν επιτυχώς μόνο στην κατηγορία 4 στην παρούσα έρευνα (2015).

Ομάδα	Κατηγορία	Ποσοστά επιτυχίας 1998	Ποσοστά επιτυχίας 2015
1	Αριθμοί: α) σύνολα β) διάταξη γ) τρόποι γραφής δ) πράξεις μεταξύ αριθμών	28,6	40,8
2	Σχέσεις αναλογίας (ποσά ανάλογα, ποσά αντιστρόφως ανάλογα)	40,9	43,0
3	Απλές γεωμετρικές έννοιες: περίμετρος, καθετότητα	19,8	39,4
4	Χρήση σχημάτων και γραφικών παραστάσεων	45,4	67,8
5	Λύση προβλημάτων τεσσάρων πράξεων που παρουσιάζονται λεκτικά	45,8	40,4

Πίνακας 1: Ποσοστό μαθητών που απάντησαν σωστά στην κατηγορία

Αναλυτικά οι επιδόσεις των μαθητών ανά κατηγορία

Κατηγορία 1 - Δοκιμασία α. Βάλε στη σειρά τους αριθμούς, από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο:

1,53   1 $\frac{3}{2}$ 1,058 1,6 $\frac{4}{3}$

Ποσοστά επιτυχίας (1998) 11,1% (2015) 32,2%

Η διαπίστωση της ερευνητικής ομάδας του 1998 ήταν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν τους αριθμούς που διδάχτηκαν ως στοιχεία ενός ενιαίου συνόλου τα οποία μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, αλλά θεωρούν ξεχωριστά το σύνολα των ακεραίων, των δεκαδικών και των ρητών αριθμών ενώ ταυτόχρονη συνύπαρξη τριών ειδών αριθμών τους προκαλεί σύγχυση. Το 2015 το ποσοστό επιτυχίας τριπλασιάστηκε μεν αλλά εξακολουθεί να είναι χαμηλό. Μόνο τέσσερις στους δέκα μαθητές καταφέρνουν να διαχειριστούν τα είδη των αριθμών με επιτυχία.

Κατηγορία 1 - Δοκιμασία β. Υπολόγισε:

$3 : 5 =$ Ποσοστά επιτυχίας (1998) 57,4% (2015) 64,4%

$\frac{2}{5} + \frac{7}{3} =$ Ποσοστά επιτυχίας (1998) 28,9% (2015) 24,0%

$1 - \frac{5}{12} =$ Ποσοστά επιτυχίας (1998) 22,0% (2015) 26,0%

$\frac{2}{5} : \frac{7}{3} =$ Ποσοστά επιτυχίας (1998) 23,6% (2015) 30,0%

Όπως και το 1998 τα παιδιά εξακολουθούν να έχουν σοβαρό πρόβλημα στην εκτέλεση των πράξεων η οποία μάλιστα επιδεινώθηκε στην περίπτωση της πρόσθεσης κλασμάτων. Η μικρή βελτίωση σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις δεν δίνει αισιόδοξα μηνύματα για τις ικανότητες των τελειόφοιτων του δημοτικού στην εκτέλεση πράξεων.

Κατηγορία 2 - Δοκιμασία. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Η πλευρά του τετραγώνου είναι:	3		5	
Η περίμετρος του τετραγώνου είναι:		4		18

Οι επιτυχίες ανά υποερώτημα είναι

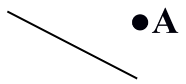
3.1. Ποσοστά επιτυχίας (1998) 45,1% (2015) 45,2%

3.2. Ποσοστά επιτυχίας (1998) 38,0% (2015) 46,6%

3.3. Ποσοστά επιτυχίας (1998) 45,5% (2015) 45,2%

3.4. Ποσοστά επιτυχίας (1998) 35,2% (2015) 39,4%

Κατηγορία 3 - Δοκιμασία α. Φέρε την κάθετο:

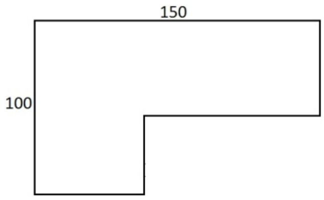


Στην άσκηση 8 (γεωμετρικές έννοιες) τα αποτελέσματα ήταν:

Ποσοστά επιτυχίας (1998) 25,5% (2015) 48,6%

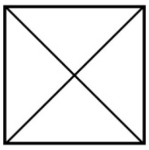
Η βελτίωση που καταγράφεται είναι σημαντική. Οι μαθητές σχεδόν διπλασίασαν το ποσοστό επιτυχίας χωρίς όμως να μπορεί να υποστηριχτεί ότι ή έννοια της καθετότητας έχει κατακτηθεί από τη συντριπτική πλειονότητα των μαθητών της Στ΄ δημοτικού.

Κατηγορία 3 - Δοκιμασία β. Υπολόγισε την περίμετρο του σχήματος



Στην άσκηση αυτή η οποία συνδυάζει γεωμετρικές έννοιες και γραφικά δεδομένα οι μαθητές που απαντούν σωστά ανέρχονται (1998) 14,1% (2015) 30,1%

Κατηγορία 4 - Δοκιμασία, υποερώτημα 1. Βάψε τα ¾ του τετραγώνου

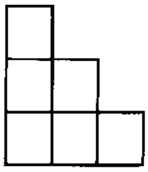


Ποσοστά επιτυχίας

(1998) 86,5%

(2015) 98,6%

Στο υποερώτημα 2 όπου καλούνται να βάψουν τα 2/3 του διπλανού σχήματος, τα ποσοστά επιτυχίας μειώνονται δραματικά

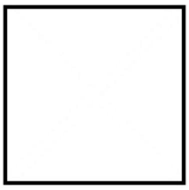


Ποσοστά επιτυχίας

(1998) 51,3%

(2015) 53,4%

Στο υποερώτημα 3 βάψε τα 3/5 του διπλανού τετραγώνου, τα ποσοστά επιτυχίας μειώνονται ακόμη περισσότερο



Ποσοστά επιτυχίας

(1998) 41,0%

(2015) 51,3%

Κατηγορία 5 - Δοκιμασία α.

Ο Γιάννης αγόρασε 5 μαστίχες και έδωσε 2 ευρώ. Πήρε ρέστα 40 λεπτά. Πόσα λεπτά κόστιζε κάθε μαστίχα;

Ποσοστά επιτυχίας (1998) 58,2% (2015) 39,0% Στο συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρείται σημαντική πτώση του ποσοστού επιτυχίας που αναδεικνύει τη δυσκολία διαχείρισης των υποδιαιρέσεων του ευρώ.

Κατηγορία 5 - Δοκιμασία β.

Μία τάξη έχει 31 μαθητές και τα κορίτσια είναι 3 περισσότερα από τα αγόρια. Πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;

Ποσοστά επιτυχίας (1998) 33,3% (2015) 41,8%

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΡΜΗΝΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Όπως δείχνουν τα ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάσθηκαν πιο πάνω, οι αποκτηθείσες μαθηματικές γνώσεις στο τέλος του Δημοτικού απέχουν σημαντικά από το να είναι ικανοποιητικές. Όπως και το 1998, οι μαθητές που συμμετείχαν στη γραπτή δοκιμασία δεν εμφανίζονται να έχουν αποκτήσει τις βασικές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που προβλέπονται από τα Προγράμματα Σπουδών της Στ΄ Δημοτικού.

Τα μεγάλα ποσοστά λανθασμένων απαντήσεων αναδεικνύουν την ύπαρξη λανθασμένων αντιλήψεων: στους αριθμούς η ταύτισή τους με τη μορφή στην οποία παρουσιάζονται και ο χειρισμός των δεκαδικών κατ' αναλογία με τους φυσικούς και στις σχέσεις μεταξύ μεταβλητών η δυσκολία αντίληψης της αναλογίας. Οι μαθητές του 2015 όπως και οι μαθητές του 1998 έχουν αποσπασματική, θεματική, προσέγγιση των Μαθηματικών αφού η μείξη διαφορετικών θεμάτων (π.χ. εμβαδό και αναλογία, γεωμετρική σχέση και υπολογισμός, δεκαδικοί και κλάσματα, γεωμετρία και άλγεβρα) προκαλεί στους μαθητές ανυπέρβλητες δυσκολίες.

Μια πιθανή ερμηνεία της σημαντικής διαφοροποίησης που καταγράφεται στις κατηγορίες 4 και 5, με βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών στην κατηγορία «Χρήση σχημάτων και γραφικών παραστάσεων» και επιδείνωση στην κατηγορία «Λύση προβλημάτων τεσσάρων πράξεων που παρουσιάζονται λεκτικά» είναι ο διαφορετικός προσανατολισμός των νέων ΠΣ και των νέων βιβλίων. Τα ΠΣ του 1998 περιλαμβάνουν όλα τα στοιχεία μιας ολοκληρωμένης διδασκαλίας με έμφαση «…την απόκτηση τεχνικών για την εκτέλεση των βασικών μαθηματικών πράξεων και την ετοιμότητα για εφαρμογή τους σε συγκεκριμένα προβλήματα, την καλλιέργεια της ικανότητας για τη λύση προβλημάτων και τη διάθεση για αναζήτηση περισσοτέρων λύσεων σε κάθε πρόβλημα» (ΥΠΕΠΘ, 1995). Αντίθετα στα ΠΣ του 2003 εστίαση αυτή μετακινήθηκε στην κατεύθυνση του «κάνω μαθηματικά» και αποσκοπεί στην επίλυση προβλημάτων μέσα από την ανθρώπινη δραστηριότητα έτσι, ώστε να παράγεται νόημα (Οικονόμου Π., 2010). Στα νέα βιβλία που ακολούθησαν τα ΠΣ του 2003 έγινε προσπάθεια να εφαρμοστεί η διαθεματική προσέγγιση και οι δραστηριότητες να συσχετίσουν τη γνώση με τα ενδιαφέροντα των μαθητών με στόχο η μαθησιακή διαδικασία να γίνει περισσότερο βιωματική, ενδιαφέρουσα και αποτελεσματική, ώστε οι μαθητές πλέον να «εξερευνούν κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, (να) διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, (να) αναγνωρίζουν και (να) περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνώντας ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις...» (Π.Ι., 2003). Η αλλαγή αυτή στον προσανατολισμό των ΠΣ και στην εστίαση των βιβλίων φαίνεται πως επέδρασε θετικά στη χρήση σχημάτων και γραφικών παραστάσεων από τους μαθητές ενώ επιδείνωσε την ικανότητά τους να λύνουν λεκτικά προβλήματα.

Εκτός από τη διαφοροποίηση που καταγράφεται στις κατηγορίες 4 και 5, θεωρούμε ως πολύ ενδιαφέρον εύρημα της παρούσας έρευνας τη διαχρονική ομοιομορφία στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στις επιδόσεις των μαθηματικών. Αυτό μπορεί να σημαίνει:

Είτε ότι οι αλλαγές στο θεσμικό πλαίσιο της εκπαίδευσης (Προγράμματα σπουδών και σχολικά βιβλία) δεν ήταν ικανές να αλλάξουν το μαθησιακό αποτέλεσμα των μαθητών του δημοτικού στα Μαθηματικά, είτε ότι οι εκπαιδευτικοί, παρά τις επιμορφώσεις, είναι απρόθυμοι να μετακινηθούν από τις «παραδοσιακές» διδακτικές προσεγγίσεις και να εφαρμόσουν τις υποδεικνυόμενες πρακτικές στη διδακτική πράξη. Η άποψη των εκπαιδευτικών είναι πως ο χρόνος μέσα στη σχολική αίθουσα είναι πολύ περιορισμένος σε σχέση με την προβλεπόμενη ύλη, ώστε να μην μένουν περιθώρια εμβάθυνσης ή πειραματισμού (Kliapis & Kassoti, 2009. Κλιάπης, 2013). Για τη χρήση δραστηριοτήτων, φαίνεται πως από μόνη της μια δραστηριότητα, ή το πλαίσιο μέσα από το οποίο αυτή αναδύεται δεν είναι ικανά να οδηγήσουν σε ουσιαστική μάθηση (Οικονόμου Α., 2010). Ο ρόλος του εκπαιδευτικού και η διαχείριση, από τη μεριά του της πορείας της δραστηριότητας, καθώς και η συνεχής αναπροσαρμογή του πλαισίου της σε ευθυγράμμιση με τα εκάστοτε δεδομένα της τάξης αποτελεί εξίσου κρίσιμο σημείο (Γκαράνης, 2010. Οικονόμου Π., 2010).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Azarian, R. (2011). Potentials and Limitations of Comparative Method in Social Science. Int. Jour. of Humanities & Social Science, 1 (4), 113-125.

Kliapis, P., & Kassoti, O. (2009). Innovative primary school Teachers' In-service Training for Improving Mathematics Constructivist Learning. Ανακοίνωση που παρουσιάστηκε στο συνέδριο Educating the Adult Educator: Quality Provision and Assesement in Europe, Thessaloniki.

Γκαράνης, Π. (2010). Η μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη. Μεταπτυχιακή Εργασία. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο, Αθήνα

Κασσώτη, Ό., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2006). Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού: Βιβλίο δασκαλου. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Καφούση, Σ., & Χαβιάρης, Π. (1999). Οι απόψεις των δασκάλων του Δημοτικού σχολείου για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ανακοίνωση που παρουσιάστηκε στο 16ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - Μαθηματικά, Νέα Γενιά και Κοινωνία, Λάρισα.

Κλιάπης, Π. (2013). Μαθηματικά: Μια εξελικτική διαδικασία από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο. Στο Α. Ήργης (Επιμ.), Γονείς: Τα παιδιά μας οδηγούν (σελ. 43-61). Θεσσαλονίκη: Ασύλο του παιδιού.

Κλιάπης, Π., & Κασσώτη, Ό. (2005). Πειραματική εφαρμογή του νέου σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Στ Δημοτικού: Αλλαγές στις στάσεις και τις συμπεριφορές των μαθητών, Αθήνα. Ανακοίνωση που παρουσιάστηκε στο 1ο συνέδριο ΕνΕΔιΜ: Η Διδακτική των Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης, Αθήνα.

Οικονόμου, Α. (2010). Αναπαραστάσεις χώρου σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Εξελικτική πορεία. Διδακτορική Διατριβή, ΑΠΘ., Θεσσαλονίκη.

Οικονόμου, Α., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2000). Αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων μαθητών Στ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου. Στο Μ. Τζεκάκη & Ι. Δεληγιωργάκος (Επιμ.), Έρευνα για Εναλλακτικές Διδακτικές Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ.

Οικονόμου, Π. (2000). Στάσεις αντιλήψεις και πρακτικές των διδασκόντων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Μ. Τζεκάκη & Ι. Δεληγιωργάκος (Επιμ.), Έρευνα για Εναλλακτικές Διδακτικές Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ.

Οικονόμου, Π. (2010). Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Π.Ι. (2003). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα: Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων Ανακτήθηκε από http://pi-schools.gr/download/lessons/mathematics/epps-math.zip.

Πόταρη, Δ. (1989). Δυσκολίες μάθησης των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Ευκλείδης Γ' (21), 3-22.

Τζεκάκη, Μ. (2010). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία: Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Τζεκάκη, Μ., & Δεληγιωργάκος, Ι. (2000). Παρουσίαση του έργου "Έρευνα για εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών". Αθήνα: ΥΠΕΠΘ.

ΥΠΕΠΘ-ΠΙ. (1997). Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα.

ΥΠΕΠΘ. (1985). Αναλυτικό πρόγραμμα Φυσικών Ε΄ τάξης και Μαθηματικών ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Αθήνα: Ανακτήθηκε από http://pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/1985_140.pdf.

ΥΠΕΠΘ. (1995). Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών των Δ΄, Ε΄, και ΣΤ΄ τάξεων του Δημοτικού Σχολείου. Αθήνα: Ανακτήθηκε από http://pi-schools.gr/progr_spoudon_1899_1999/1995_170.pdf.

Φιλίππου, Γ. (1990). Οι μαθηματικές γνώσεις των αποφοίτων του Δημοτικού Σχολείου. Μια συγκριτική αξιολόγηση. Ανακοίνωση που παρουσιάστηκε στο συνέδριο Ε.Μ.Ε.

Φιλίππου, Γ. (1992). Οι μαθηματικές γνώσεις των Τελειόφοιτων του Γυμνασίου. Ανακοίνωση στο 7ο Συνέδριο ΕΜΕ, Αθήνα.

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΕΝΗΛΙΚΕΣ ΣΕ ΣΧΟΛΕΙΟ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ

Αριστούλα Κοντογιάννη, Κωνσταντίνος Τάτσης
ΣΔΕ Άρτας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
desmath@gmail.com, ktatsis@uoi.gr

Η έρευνα ασχολείται με τη διερεύνηση των γνώσεων και των δεξιοτήτων των εκπαιδευομένων σε ένα Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας σχετικά με την κατανόηση γραφημάτων. Επικεντρωνόμαστε στον τρόπο που αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευόμενοι τα γραφήματα, τα συμπεράσματα που εξάγουν από αυτά καθώς και στην ετοιμότητά τους να αντιλαμβάνονται παραπλανητικά γραφήματα και να αντικρούουν σχετικούς λανθασμένους ισχυρισμούς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο σύγχρονος πολίτης έρχεται καθημερινά αντιμέτωπος με μεγάλο όγκο πληροφοριών, οι οποίες παρέχονται συχνά μέσω γραφημάτων ως ένας τρόπος σύνοψης και παρουσίασης των δεδομένων αλλά και εξαγωγής συμπερασμάτων. Η ικανότητα κριτικής ανάγνωσης γραφημάτων σχετίζεται στενά με τον αριθμητισμό, ο οποίος αφορά στην ικανότητα «πρόσβασης, χρήσης, ερμηνείας και επικοινωνίας μαθηματικών πληροφοριών και ιδεών με σκοπό την ενασχόληση και αντιμετώπιση των απαιτήσεων διαφόρων καταστάσεων της ενήλικης ζωής» (PIAAC Numeracy Expert Group, 2009, σ. 21). Στην Ελλάδα οι ενήλικες διδάσκονται Μαθηματικά είτε στο πλαίσιο της Γ΄θμιας εκπαίδευσης είτε στο πλαίσιο δομών της εκπαίδευσης ενηλίκων, καθώς και δομών της δια βίου μάθησης. Η διδασκαλία των Μαθηματικών σε αυτές τις δομές αποσκοπεί στο να είναι οι πολίτες αριθμητικώς εγγράμματοι. Σε αυτό το πλαίσιο σχεδιάσαμε τη διεξαγωγή μίας έρευνας σε σχολείο δεύτερης ευκαιρίας με αντικείμενο τη μελέτη των γνώσεων και των δεξιοτήτων των εκπαιδευομένων σε βασικές στατιστικές έννοιες. Στην παρούσα εργασία περιοριζόμαστε στα αποτελέσματα που αφορούν στην κατανόηση και ερμηνεία γραφημάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η εκπαίδευση των Μαθηματικών για ενήλικες αποτελεί ένα πεδίο μελέτης και πρακτικής που καλύπτει μεγάλο εύρος χώρων διδασκαλίας, μάθησης και έρευνας. Ο όρος αριθμητισμός είναι μία ασαφής έννοια για την οποία υπάρχουν διάφοροι ορισμοί. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών είναι η αντιμετώπιση αυτής της έννοιας ως ένα είδος «γέφυρας» μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και των καθημερινών προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι ενήλικες. Το να είναι κανείς ενάριθμος σημαίνει ότι έχει μία συγκεκριμένη συμπεριφορά που σχετίζεται με:

- Το πλαίσιο: καθημερινότητα (ή προσωπικό), εργασία, κοινωνία και κοινότητα, επιπλέον μάθηση.

- Την ανταπόκριση (ως προς την μαθηματική δραστηριότητα): αναγνώριση/οριοθέτηση/πρόσβαση (ως προς την πληροφορία), ενέργεια/χρήση, ερμηνεία/αξιολόγηση.
- Το μαθηματικό περιεχόμενο: ποσότητα και αριθμοί, διάσταση και χώρος, μοτίβα και σχέσεις, δεδομένα και πιθανότητες
- Τις αναπαραστάσεις (των μαθηματικών/στατιστικών πληροφοριών): π.χ. σε κείμενο, πίνακες και/ή σε γραφήματα. (Evans, 2014)

Μία από τις κατηγορίες του μαθηματικού περιεχομένου αφορά έννοιες της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, η κατανόηση των οποίων συνδέεται με τον *στατιστικό γραμματισμό*. Ο όρος στατιστικός γραμματισμός (Gal, 2012) χρησιμοποιείται για την περιγραφή της συγκεκριμένης γνώσης που χρειάζονται οι πολίτες για να κατανοούν και να παίρνουν αποφάσεις βασιζόμενοι στην ανάλυση στατιστικών πληροφοριών. Αν και υπάρχει πληθώρα δημοσιεύσεων για τον τρόπο που οι ενήλικες μαθαίνουν Μαθηματικά, τόσο στη χώρα μας όσο και σε άλλες ευρωπαϊκές χώρες, δεν είναι αρκετά τα εμπειρικά στοιχεία σχετικά με την ικανότητα των ενηλίκων να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα (Ehmke, Wild & Müller-Kalhoff, 2005). Οι γνώσεις και οι δεξιότητες Στατιστικής που έχουν οι ενήλικες αποτελούν τμήμα της έρευνας PIAAC (Program for the International Assessment of Adult Competencies), η οποία όμως δεν έχει ολοκληρωθεί στην χώρα μας και αναφέρεται στο σύνολο του ενήλικου πληθυσμού. Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2002) δεν υπάρχει επαρκής αριθμός ερευνών που να αφορούν στη μάθηση των μαθηματικών από ενήλικες. Στο εξωτερικό η έρευνα για τις γνώσεις Στατιστικής των ενηλίκων επικεντρώνεται είτε σε εκπαιδευτικούς (Monteiro & Ainley, 2007) είτε σε μαθητές επαγγελματικής εκπαίδευσης (Bakker κ.α., 2014). Όσον αφορά στην κατανόηση των γραφημάτων έχουν διεξαχθεί έρευνες σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς (Batanero, Arteaga & Ruiz, 2010). Στην χώρα μας υπάρχουν έρευνες που αφορούν τα ΣΔΕ και τον τρόπο μάθησης των μαθηματικών εννοιών από τους εκπαιδευόμενους (Anestakis & Lemonidis, 2014), καθώς και τον τρόπο διδασκαλίας των καθηγητών των Μαθηματικών στα ΣΔΕ (Λεμονίδης, 2003), χωρίς όμως να υπάρχει κάποια έρευνα για το πώς οι εκπαιδευόμενοι σε αυτά κατανοούν έννοιες της Στατιστικής. Η παρούσα μελέτη έρχεται να καλύψει αυτό το κενό με τα αποτελέσματά της να αποτελέσουν μια πρώτη εικόνα για τις γνώσεις και δεξιότητες των εκπαιδευομένων στα ΣΔΕ σχετικά με βασικές στατιστικές έννοιες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μεθοδολογία μας στηρίχτηκε στις αρχές διεξαγωγής ενός ερευνητικού διδακτικού πειράματος (Steffe & Thompson, 2000). Τον ρόλο του δασκάλου αλλά και του παρατηρητή/ερευνητή είχε η εκπαιδεύτρια (πρώτη συγγραφέας) και κάθε μάθημα μαγνητοφωνήθηκε. Το μαγνητοφωνημένο υλικό επεξεργάστηκε με σκοπό να εντοπιστούν τα καίρια σημεία της διδασκαλίας, αλλά και ο τρόπος συλλογισμού των εκπαιδευομένων. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 43 εκπαιδευόμενοι στο ΣΔΕ από δύο τμήματα του Α και ένα του Β κύκλου σπουδών. Οι εκπαιδευόμενοι του Β κύκλου σπουδών δεν είχαν διδαχθεί έννοιες της Στατιστικής την προηγούμενη χρονιά. Η πλειονότητα αποτελούνταν από άνδρες (33) και η ηλικία τους κυμαινόταν από 25 έως 55 ετών. Όλοι ήταν απόφοιτοι δημοτικού και οι περισσότεροι ήταν άνεργοι. Είχαν διδαχθεί κλάσματα, ποσοστά και σχέσεις αναλογίας. Η διδασκαλία στηρίχθηκε σε φύλλα εργασίας, τα οποία σχεδιάστηκαν από τους συγγραφείς της εισήγησης. Στόχος ήταν οι δραστηριότητες να: (α) συνδέονται με την καθημερινή ζωή των εκπαιδευομένων, (β) επικεντρώνονται στην ανάπτυξη της κατανόησης των στατιστικών εννοιών παρά στην στείρα παρουσίαση αλγορίθμων και διαδικασιών και (γ) να προωθούν την ανάπτυξη μίας επιχειρηματολογίας που θα στηρίζεται σε στατιστικές έννοιες (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

Οι συνολικές ώρες διδασκαλίας στο κάθε τμήμα ήταν 9 (τρεις εβδομάδες) με το μάθημα στο οποίο επικεντρωνόμαστε να έχει διάρκεια δύο διδακτικών ωρών και θέμα την ανάγνωση γραφημάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτά. Οι εκπαιδευόμενοι είχαν ήδη διδαχθεί τα πιο συνηθισμένα γραφήματα: ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα και χρονόγραμμα. Γενικά χρησιμοποιήσαμε απλά γραφήματα, χωρίς αναφορές σε προβοκατόρικα θέματα (π.χ. ανεργία) με σκοπό να αποφευχθεί η εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση προσωπικές απόψεις (Friel, Curcio & Bright, 2001). Επιπλέον επιλέξαμε κυρίως παραπλανητικά γραφήματα, αφού αυτά αποτελούν ιδανικό μέσο για την διδασκαλία της ερμηνείας των γραφημάτων αλλά μπορούν να αποτελέσουν και βάση για την αξιολόγηση των μαθητών (Monteiro & Ainley, 2007). Τα ερευνητικά μας ερωτήματα διαμορφώθηκαν ως εξής: (α) Σε ποια στοιχεία των γραφημάτων εστιάζουν οι εκπαιδευόμενοι κατά την ανάγνωση και την ερμηνεία τους; (β) Σε τι επίπεδο οι εκπαιδευόμενοι κατανοούν τα γραφήματα; και (γ) Κρατούν οι εκπαιδευόμενοι κριτική στάση απέναντι στις στατιστικές πληροφορίες που εκφράζονται μέσω των γραφημάτων;

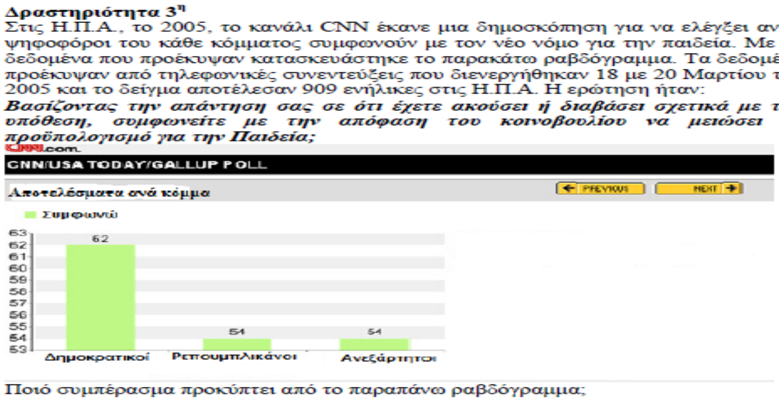
Για την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδεύομενων στηριχτήκαμε στους άξονες που προτείνουν οι Friel κ.ά. (2001) και Curcio (1987). Σύμφωνα με αυτούς οι μαθητές κατά την ερμηνεία των γραφημάτων θα πρέπει να:

- διαβάζουν τα δεδομένα: ικανότητα εντοπισμού μόνο των αριθμητικών πληροφοριών που δίνονται στο γράφημα,
- διαβάζουν μεταξύ των δεδομένων: ικανότητα σύγκρισης δύο ή περισσοτέρων σημείων του γραφήματος. Αυτό απαιτεί την σύνδεση των κατασκευαστικών στοιχείων του γραφήματος με τους αριθμούς στα οποία αυτά αντιστοιχούν. Σε αυτή τη διάσταση εντάξαμε και την ικανότητα εντοπισμού λαθών.

- διαβάζουν πέρα από τα δεδομένα: ικανότητα επέκτασης, πρόβλεψης και εξαγωγής συμπερασμάτων. Σε αυτόν τον άξονα περιλαμβάνεται και η ικανότητα αμφισβήτησης της αξιοπιστίας του γραφήματος αν δεν είναι σωστά κατασκευασμένο αλλά και η ικανότητα πρότασης τρόπων ανακατασκευής του.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Εξαιτίας του περιορισμένου χώρου θα αναφερθούμε σε δύο δραστηριότητες.



Δραστηριότητα 3η
Στις Η.Π.Α., το 2005, το κανάλι CNN έκανε μια δημοσκόπηση για να ελέγξει αν οι ψηφοφόροι του κάθε κόμματος συμφωνούν με τον νέο νόμο για την παιδεία. Με τα δεδομένα που προέκυψαν κατασκευάστηκε το παρακάτω ραβδόγραμμα. Τα δεδομένα προέκυψαν από τηλεφωνικές συνεντεύξεις που διενεργήθηκαν 18 με 20 Μαρτίου του 2005 και το δείγμα αποτέλεσαν 909 ενήλικες στις Η.Π.Α. Η ερώτηση ήταν:
Βασίζοντας την απάντηση σας σε ότι έχετε ακούσει ή διαβάσει σχετικά με την υπόθεση, συμφωνείτε με την απόφαση του κοινοβουλίου να μειώσει το προϋπολογισμό για την Παιδεία;

Ποιό συμπέρασμα προκύπτει από το παραπάνω ραβδόγραμμα;

Εικόνα 1: Η 3η δραστηριότητα (Media Matters, 2005)

Στόχος της συγκεκριμένης δραστηριότητας (η οποία προσαρμόστηκε για τις ανάγκες του μαθήματος) ήταν να διερευνηθεί η ικανότητα των εκπαιδευομένων να εντοπίζουν τις αριθμητικές πληροφορίες που δίνονται με το γράφημα αλλά και η ικανότητά τους να το αξιολογούν ως προς την κατασκευή του. Οι πρώτες απαντήσεις στην ερώτηση δίνονται στα παρακάτω αποσπάσματα τα οποία προέρχονται από τα τρία τμήματα τα οποία συμμετείχαν στην έρευνα:

Απόσπασμα	**Σχολιασμός**
Γιάννης: Όχι. Εκπαιδεύτρια: Γιατί; Γιάννης: Είναι παραπάνω από το 100. Εκπαιδεύτρια: Ρωτήσαμε 909. Λένα: Όχι, από τα 900 άτομα, τι είναι 170; Γρηγόρης: Μήπως είναι λίγο το ποσοστό που ρωτήσανε; Σοφία: 170 συμφωνούν. Γρηγόρης: Μήπως είναι λίγο το ποσοστό που ρωτήσανε και δεν έχουμε καλά συμπεράσματα;	Οι εκπαιδευόμενοι εντοπίζουν τις αριθμητικές πληροφορίες που δίνονται στο γράφημα αλλά και στο κείμενο που το συνοδεύει και εστιάζουν μόνο σε αυτές για την απάντηση τους. Ο Γιάννης υποστηρίζει ότι είναι πάνω από 100 αθροίζοντας τους αριθμούς που δίνονται με τις τρείς ράβδους ενώ οι υπόλοιποι σχολιάζουν τον αριθμό (909) που δίνεται στο κείμενο. Ο Γρηγόρης χωρίς να ελέγξει το γράφημα προσπαθεί να βγάλει κάποιο συμπέρασμα στηριζόμενος μόνο στους αριθμούς.
Αναστασία και Λευτέρης: Όχι. Εκπαιδεύτρια: Γιατί; Βασίλης: Γιατί δεν βγαίνει αυτά αν τα προσθέσεις 909	Όμοια με προηγουμένως ο Βασίλης προσθέτει τους αριθμούς των ράβδων και συγκρίνει με τον αριθμό που δίνεται στο κείμενο.

άτομα.	
Χαρίλαος: Το συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε πέρα από το ότι δεν είναι σωστό αυτό το γράφημα είναι ότι 170 μας είπαν ότι συμφωνούν. Πόσοι δεν συμφωνούν δεν μας το λέει πουθενά.	Ο Χαρίλαος προσθέτει τους αριθμούς των ράβδων και καταλήγει σε ένα συμπέρασμα που το έχει στηρίξει μόνο στα αριθμητικά στοιχεία και όχι στο ίδιο το γράφημα.

Πίνακας 1: Διαβάζοντας τα δεδομένα

Στα παραπάνω αποσπάσματα οι εκπαιδευόμενοι δεν σχολιάζουν τα κατασκευαστικά στοιχεία του γραφήματος (ράβδοι) αλλά περιορίζονται στους αριθμούς. Η κατανόησή τους επομένως βρίσκεται στον πρώτο άξονα κατανόησης του «διαβάζοντας τα δεδομένα».

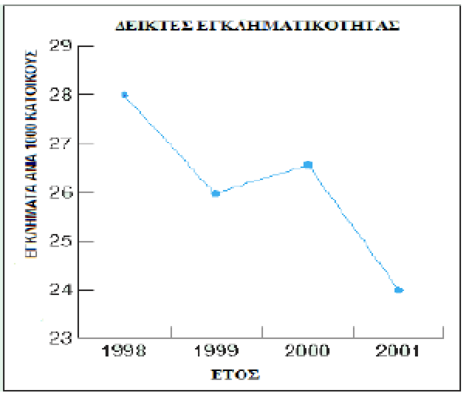
Στη συνέχεια της διδασκαλίας σε ένα δεύτερο επίπεδο, «διαβάζουν μεταξύ των δεδομένων» συγκρίνοντας τους αριθμούς και τις ράβδους στις οποίες αυτοί αντιστοιχούν όπως φαίνεται στο παρακάτω αποσπάσμα. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουν στο λάθος εντοπίζοντας την αναντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ του μεγέθους των ράβδων και των αριθμών τους οποίους αυτές αντιπροσωπεύουν.

Απόσπασμα	**Σχολιασμός**
Γιώργος και Χαρίλαος: (συζητούν) Δεν είναι έτσι όμως στην ουσία. Εκπαιδεύτρια: Γιατί δεν είναι έτσι στην ουσία; Χαρίλαος: Γιατί στην ουσία έχουμε 10...ναι 10.. Γιώργος: Ναι 10 γραμμές. Στην ουσία αν το δούμε έτσι, πιστεύω εγώ αν δεν είχε αριθμούς αν το παίρναμε από το 0 για να πάμε επάνω δείχνει πολύ μεγαλύτερο από το 62. Το 54 δεν έχει καμία σχέση με το 62.	Επικεντρώνονται στα στοιχεία του γραφήματος μετρώντας τις γραμμές και συνδέοντας τους αριθμούς με το μήκος των αντίστοιχων ράβδων.
Παρασκευή: Αυτό ξεκινάει από την μέση το 53, αν ξεκίναγε από το 0 δεν θα έβγαινε μεγαλύτερο το ποσοστό; Ή όχι; Χαρίλαος: Όχι δεν θα έβγαινε. Απλά το γράφημα θα ήταν μεγαλύτερο.	Συγχέουν τους αριθμούς με ποσοστά.
Γιώργος: Το γράφημα όπως μας δίνει, τι μπορούμε να φανταστούμε… Ότι η πρώτη στήλη δείχνει πολύ μεγαλύτερη από το 54 δεν είναι τόση η διαφορά, έπρεπε να είναι πιο μεγάλες. (Μιλούν όλοι μαζί και προσπαθούν να βρουν την λύση). Γιώργος: Φαίνεται 10%, 12% με 80% Παρασκευή: Άρα το γράφημα που ξεκινάει από το 53 ενώ έπρεπε να ξεκινάει από το 0 για να το βρούμε σωστά και εμείς. Άρα είναι λάθος έτσι όπως το έχει.	Καταλήγουν στο να αξιολογήσουν το γράφημα ως προς την ορθότητα του εντοπίζοντας το λάθος στην κατασκευή του.

Πίνακας 2: Διαβάζοντας μεταξύ των δεδομένων σε δεύτερο επίπεδο ανάγνωσης

Ένα γράφημα μπορεί να είναι παραπλανητικό αν ο άξονας των συχνοτήτων δεν ξεκινά από το 0 ή αν έχει επιλεγεί λανθασμένη κλίμακα. Στη δραστηριότητα που ακολουθεί δίνεται ένα χρονόγραμμα στο οποίο ο άξονας των συχνοτήτων δεν ξεκινά από το 0. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα κατασκευάστηκε για τις ανάγκες του μαθήματος και στηρίχτηκε σε σε αντίστοιχο ερώτημα που έχει χρησιμοποιηθεί από την Harper (2004) με θέμα την κατανόηση των παραπλανητικών γραφικών αναπαραστάσεων από μαθητές.

Δραστηριότητα 6η
Σε μία τοπική εφημερίδα του 2001 βρήκαμε το παρακάτω γράφημα για την εγκληματικότητα στην περιοχή από το 1998 έως το 2001. Το άρθρο κατέληγε στο συμπέρασμα ότι η εγκληματικότητα είχε μειωθεί σε έναν μεγάλο βαθμό. Συμφωνείτε με αυτό; Δικαιολογήστε την απαντησή σας.



Εικόνα 2: Η 6η δραστηριότητα.

Οι εκπαιδευόμενοι περνούν στο επόμενο επίπεδο κατανόησης σε πολύ λιγότερο χρόνο καθώς εντοπίζουν το λάθος που είναι το ίδιο με την πρώτη δραστηριότητα. Δεν περιορίζονται μόνο στην εντύπωση που δημιουργεί το γράφημα αλλά συγκρίνουν μεταξύ των αριθμών που παρουσιάζονται σε αυτό. Είναι σε θέση επομένως να «διαβάζουν μεταξύ των δεδομένων».

Απόσπασμα	Σχολιασμός
Γιάννης: Κοίταξε, εδώ τώρα από το 28 πήγε στο 24 δηλαδή; Είναι μεγάλος αριθμός αυτός;	
Λένα: Με τέσσερις μονάδες;	Δεν περιορίζονται μόνο στους αριθμούς που δίνονται στο γράφημα αλλά τους συσχετίζουν με την εντύπωση που δημιουργεί.
Εκπαιδεύτρια: Είναι τέσσερις μονάδες αλλά λέει στον κάθετο άξονα εγκλήματα ανά 1000 κατοίκους δηλαδή η μείωσή τους ήταν 4 στα 1000 (από 28 στους 1000 έγινε 24 στους 1000).	
Θωμάς: 4 στους 1000, δεν ήταν μεγάλη μείωση.	
Εκπαιδεύτρια: Γιατί όμως δημιουργείται αυτή η εντύπωση, πού πιστεύετε ότι οφείλεται αυτό;	Χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους από την προηγούμενη δραστηριότητα και εντοπίζουν το λάθος στην κατασκευή του.
Λένα: Λάθος σχεδιάγραμμα.	
Εκπαιδεύτρια: Είναι λάθος αλλά γιατί;	
Γιάννης: Εντυπωσιασμός.	
Εκπαιδεύτρια: Πέρα από αυτό, γιατί είναι λανθασμένο; Πού βλέπετε ότι οφείλεται το λάθος;	
Λένα: Δεν αρχινάει από το 0, πάει 23, 24, 29.	

Πίνακας 3: Διαβάζοντας μεταξύ των δεδομένων σε πρώτο επίπεδο ανάγνωσης

Κάποιοι άλλοι εκπαιδευόμενοι «διαβάζουν πέρα από τα δεδομένα» καθώς προτείνουν την ανακατασκευή του γραφήματος και την μετατροπή του σε ραβδόγραμμα. Επιλέγουν την κατάλληλη κλίμακα και καταλήγουν στην εξαγωγή συμπερασμάτων για τα δεδομένα που αναπαρίστανται στο γράφημα.

Απόσπασμα	**Σχολιασμός**
Παρασκευή: Άμα βάζαμε ράβδους δεν θα φαινόταν καλύτερα; Θάνος: Εδώ φαίνεται ότι έπεσε κατακόρυφα το σχεδιάγραμμα. Έλενα: Αλλά η διαφορά δεν είναι τεράστια όπως φαίνεται εδώ γιατί ανεβαίνει κατά 1. Ενώ αν ανέβαινε κατά 10 δεν θα είχε και...	Προτείνουν την αντικατάσταση του λανθασμένου γραφήματος από ένα ραβδόγραμμα.
Παρασκευή: Αν βάλεις ράβδους από το 28 στο 24 πάλι δεν θα φαίνεται η διαφορά. Εκπαιδεύτρια: Αν πάω να το ξαναφτιάξω αυτό και πάω από το 0, κατά πόσο να ανεβαίνω; Έλενα.: Ανά 5.	Υποδεικνύουν τον τρόπο κατασκευής του ραβδογράμματος.
Εκπαιδεύτρια: (Σχεδιάζει στον πίνακα με τις υποδείξεις των εκπαιδευόμενων) Επομένως τώρα έτσι όπως είναι; Παρασκευή: Τώρα δεν φαίνεται μεγάλη διαφορά, το σχεδιάγραμμα αυτό (της δραστηριότητας) φαίνεται ότι έχει πέσει μεγάλη, κατακόρυφα ενώ έτσι φαίνεται ότι είναι...	Επικεντρώνονται στην κλίμακα που θα επιλεγεί για να είναι αξιόπιστα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτό.

Πίνακας 4: Διαβάζοντας πέρα από τα δεδομένα

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα που περιγράφονται παραπάνω προέρχονται από ένα μικρό δείγμα εκπαιδευομένων σε ένα ΣΔΕ, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να γενικευθούν για τον πληθυσμό των εκπαιδευομένων σε όλα τα ΣΔΕ της χώρας. Αποτελούν όμως μία πρώτη ένδειξη για το πώς οι συγκεκριμένοι εκπαιδευόμενοι κατανοούν τα γραφήματα στο πλαίσιο της διδασκαλίας βασικών στατιστικών εννοιών και προσθέτουν χρήσιμα στοιχεία για την εκπαίδευση των ενηλίκων στο πλαίσιο του στατιστικού γραμματισμού.

Κατά την πρώτη ανάγνωση των γραφημάτων οι εκπαιδευόμενοι περιοριζόταν στο να εστιάζουν στους αριθμούς που δινόταν και να στηρίζουν τα συμπεράσματά τους μόνο σε αυτούς. Η κατανόησή τους, επομένως, αντιστοιχούσε στο να «διαβάζουν τα δεδομένα». Στη συνέχεια όμως της διδασκαλίας και μέσα από τις κατάλληλες ερωτήσεις οι εκπαιδευόμενοι περνούσαν στο επόμενο στάδιο της κατανόησης, «διαβάζοντας μεταξύ των δεδομένων», καθώς έκαναν συγκρίσεις και συνέδεαν τους αριθμούς με τα κατασκευαστικά στοιχεία του κάθε γραφήματος (π.χ. στο ραβδόγραμμα οι ράβδοι) αλλά και με την εικόνα που δημιουργούσε το εκάστοτε γράφημα. Λίγοι από αυτούς, και αφού είχαν προηγηθεί άλλες δραστηριότητες, έφτασαν στο να κατανοήσουν τα γραφήματα σε μεγαλύτερο βάθος και να «διαβάσουν πέρα από τα δεδομένα», ανακατασκευάζοντας το γράφημα και επιλέγοντας την κατάλληλη κλίμακα.

Ανακατασκευάζοντας το γράφημα μπόρεσαν να εξάγουν συμπεράσματα και να αντικρούσουν τον αρχικό ισχυρισμό, χρησιμοποιώντας το νέο γράφημα. Αυτό αποτελεί μία ένδειξη ότι άλλαξε η κριτική στάση των εκπαιδευομένων απέναντι στις στατιστικές πληροφορίες που εκφράζονται μέσω των γραφημάτων. Δεδομένου ότι αρχικά δεχόταν αυτές τις πληροφορίες εστιάζοντας μόνο στους αριθμούς ενώ σταδιακά μαθαίνοντας να παρατηρούν και να συνδέουν και τα υπόλοιπα στοιχεία του γραφήματος αμφισβητούν τους ισχυρισμούς που συνδέονται με αυτό.

Εξαιτίας των ιδιαιτέρων χαρακτηριστικών των εκπαιδευομένων στο ΣΔΕ τα παραπάνω αποτελέσματα δεν μπορούν να αντιπαραβληθούν, απόλυτα, με άλλα αντίστοιχων ερευνών σε μαθητές ή σε ενήλικες. Αυτό οφείλεται στην διαφοροποίηση των εκπαιδευομένων ως προς τους μαθητές της αντίστοιχης βαθμίδας εκπαίδευσης ως προς την ηλικία αλλά και ως προς τους ενήλικες στην τριτοβάθμια ή επαγγελματική εκπαίδευση ως προς το γνωστικό υπόβαθρο. Ωστόσο, σε μια προσπάθεια να αντιπαραβάλλουμε τα αποτελέσματά μας θα λέγαμε ότι οι περισσότεροι εκπαιδευόμενοι σε ένα πρώτο επίπεδο ανάγνωσης των γραφημάτων, επικεντρώθηκαν στο πλαίσιο που συνόδευε τα γραφήματα σε αντιστοιχία με την πλειονότητα των υποψήφιων δασκάλων στην έρευνα των Monteiro & Ainley (2007). Σε ένα ανώτερο επίπεδο ανάγνωσης κάποιοι από τους εκπαιδεύομενους ασχολήθηκαν ενεργά με την ανάλυση και την παρουσίαση των δεδομένων καθώς πρότειναν τρόπους ανακατασκευής του λανθασμένου γραφήματος. Δεν περιορίστηκαν συνεπώς μόνο στον ρόλο τους ως καταναλωτές αλλά μετατράπηκαν σε ένα πρώιμο στάδιο σε παραγωγούς των στατιστικών πληροφοριών (Gal, 2002).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστίες προς τους εκπαιδευόμενους του ΣΔΕ οι οποίοι συμμετείχαν στην έρευνα, τον Διευθυντή του ΣΔΕ κ.κ. Ανδρέου και τους εκπαιδευτικούς σε αυτό για την συνεργασία καθώς και την Ομάδα Έργου ΣΔΕ του ΙΝΕΔΙΒΙΜ για την χορήγηση διεξαγωγής της έρευνας

ΒΙΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anestakis, P., & Lemonidis, C. (2014). Computational Estimation in an Adult Secondary School: A Teaching Experiment. *MENON: Journal of Educational Research*. http://www.edu.uowm.gr/site/menon

Bakker, A., Groenveld, D. J. G., Wijers, M., Akkerman, S. F., & Gravemeijer, K. P. E. (2014). Proportional reasoning in the laboratory: An intervention study in vocational education. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 211-221.

Batanero, C., Arteaga, P., & Ruiz, B. (2010). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6*. Lyon: ERME.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Ehmke, T., Wild, E., Müller-Kalhoff, T. (2005). Comparing adult mathematical literacy with PISA students: results of a pilot study, *ZDM, 37*, 159-167.

Evans, J. (2014). New PIAAC results: Care is needed in reading reports of international surveys. *Adults Learning Mathematics: An International Journal, 9*(1), 37-52

Friel S. N., Curcio F. R., & Bright G. W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Math. Education, 32*, 124-158.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: Needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. *Proceedings of ICME 12, Seoul, Korea*, 1-7.

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.

Harper, S. R., (2004) , 'Students' interpretations of misleading graphs', *Mathematics teaching in the middle school*, 9, 6, 340-343.

Λεμονίδης, Χ. (2002). *Αριθμητισμός ή Μαθηματικός Γραμματισμός. Κείμενο Προδιαγραφών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας*. Έκδοση του Ινστιτούτου Διαρκούς Εκπαίδευσης Ενηλίκων (Ι.Δ.Ε.Κ.Ε.).

Λεμονίδης, Χ. (2003). Η Επιρροή των Σχολείων Δεύτερης Ευκαιρίας στον Τρόπο Διδασκαλίας των Καθηγητών των Μαθηματικών. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνέδριου Σχολείων Δεύτερης Ευκαιρίας*, Πάντειο Πανεπιστήμιο Αθήνα 28-29 Ιουνίου, 2003.

Media Matters (2005, March 22). CNN.com Posted Misleading Graph Showing Poll Results on Schiavo case. Ανακτήθηκε από: www.mediamatters.org/items/200503220005

Monteiro, C., & Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 188–207.

PIAAC Numeracy Expert Group. (2009). *PIAAC numeracy: A conceptual framework.* Paris, France: Organisation for Economic Co-operation and Development.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ: ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γιώργος Κόσυβας[1], Θεοδόσης Παπανικολάου[2], Κώστας Στουραΐτης[3]
[1]Σχολικός Σύμβουλος κλ. ΠΕ3 Α΄ Αθήνας, [2]Σχολικός Σύμβουλος κλ. ΠΕ3 Α΄ Αθήνας,[3]Εκπαιδευτικός κλ. ΠΕ3 4ου ΓΕΛ Γαλατσίου
[1]gkosyvas@gmail.com [2]paptheo1951@hotmail.com
[3]kstouraitis@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την εργασία, εξετάζουμε τρία προβλήματα της άλγεβρας του ημερολογίου, τα οποία δοκιμάσαμε σε 4 σχολικές τάξεις εισάγοντας μια «κουλτούρα απόδειξης» στη διδασκαλία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ειδικότερα ερευνούμε τη σχέση ανάμεσα στην επαγωγική επιχειρηματολογία, την εικασία και την αλγεβρική απόδειξη. Από την περιγραφή και ανάλυση των αλληλεπιδράσεων προέκυψε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται στη μετάβαση από την αριθμητική επιχειρηματολογία στην παραγωγική απόδειξη. Με τη διδακτική μας πρόταση δείχνουμε πώς μπορούν να ξεπεραστούν οι δυσκολίες των μαθητών στον αποδεικτικό συλλογισμό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σε γενικές γραμμές, οι ερευνητές συμφωνούν ότι η επιχειρηματολογία και η απόδειξη αποτελούν τα θεμέλια της μαθηματικής κατανόησης και ότι η μάθηση της αιτιολόγησης έχει βαρύνουσα σημασία για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης (Stylianides, 2007; Mueller, Yankelewitz & Maher, 2010). Στα μαθηματικά, η απόδειξη είναι ένα συγκεκριμένο είδος επιχειρηματολογίας: είναι η εξήγηση που δείχνει *γιατί* μια πρόταση είναι αληθής. Η μαθηματική απόδειξη είναι ένας ισχυρός τρόπος επιβεβαίωσης ή διάψευσης εικασιών και αποδοχής της αλήθειας (Potari, Zachariades & Zaslavsky, 2010). Στην περίπτωση αυτή ένα ή περισσότερα επιχειρήματα, συνδέονται λογικά μεταξύ τους στη διαδικασία παραγωγής προτάσεων που επικεντρώνονται στη σύνθεση της απόδειξης. Οι σχέσεις μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης είναι πολύπλοκες (Pedemonte, 2007). Ορισμένοι ερευνητές υπογράμμισαν τις επιστημολογικές και γνωστικές διαστάσεις, ενώ άλλοι έστρεψαν την προσοχή τους στην ενότητα επιχειρηματολογίας και απόδειξης.

Κατά την εξέταση της διαδικασίας παραγωγής επιχειρημάτων και τη σύνθεση της απόδειξης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη δύο συμπληρωματικές διαστάσεις: το αναφορικό σύστημα και η δομή. Το αναφορικό σύστημα περιλαμβάνει το αναπαραστατικό σύστημα της αριθμητικής, της άλγεβρας, ή της γεωμετρίας (π.χ. γλώσσα, σύμβολα, σχήματα, κ.λπ.) και το σύστημα γνώσης της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης (Martinez & Pedemonte, 2014). Για παράδειγμα, υπάρχει συνέχεια στο αναφορικό σύστημα μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης αν κάποιες λέξεις, σχήματα και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη έχουν χρησιμοποιηθεί στη διαδικασία της επιχειρηματολογίας. Αντιθέτως, λαμβάνοντας υπόψη το αναφορικό σύστημα, αν τα επιχειρήματα και οι αποδείξεις αντλούνται από διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς (π.χ., αριθμητική στην επιχειρηματολογία και άλγεβρα στην απόδειξη), τότε υπάρχει ασυνέχεια. Η δομή είτε της επιχειρηματολογίας είτε της απόδειξης παραπέμπει στους τρόπους λογικής σύνδεσης των προτάσεων, όπως είναι η εξηγητική υπόθεση του Pierce (abduction), ο εύλογος συλλογισμός του Polya (plausible reasoning), η επαγωγή (induction) και η παραγωγή (deduction). Η δομική συνέχεια ή ασυνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, μπορεί να εξηγήσει ορισμένες από τις δυσκολίες των μαθητών κατά την οικοδόμηση μιας απόδειξης (Pedemonte, 2007).

Η δομική συνέχεια / ασυνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης δεν αποτελεί πάντα πρόκληση για τους μαθητές. Πράγματι, στην επίλυση ανοιχτών προβλημάτων που απαιτείται η επινόηση μιας αλγεβρικής απόδειξης, φαίνεται ότι ακόμη και αν οι μαθητές παράγουν βήματα εξηγητικής υπόθεσης κατά τη φάση της επιχειρηματολογίας, δεν τα χρησιμοποιούν στην απόδειξη, διότι η παραγωγική δομή είναι πολύ ισχυρή μέσα σε μια αλγεβρική απόδειξη. Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση, φαίνεται ότι τα βήματα εξηγητικής υπόθεσης στην επιχειρηματολογία μπορούν να είναι χρήσιμα για την σύνθεση της απόδειξης επειδή μπορούν να ευνοήσουν τη συνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης στο αναφορικό σύστημα (Pedemonte, 2007; Martinez & Pedemonte, 2014).

Η απόδειξη ως μέθοδος παραγωγής και εξακρίβωσης μαθηματικών προτάσεων, έχει προνομιακό πεδίο εφαρμογής στην ευκλείδεια γεωμετρία, εδραιώνοντας ίσως μια μονομερή και παραμορφωμένη εικόνα στους μαθητές. Η άλγεβρα παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να καταγίνονται με την απόδειξη σε ένα πλαίσιο διαφορετικό από τη γεωμετρία. Οι μελέτες για τη μάθηση της άλγεβρας έχουν τεκμηριώσει τις δυσκολίες των μαθητών στον αλγεβρικό συλλογισμό και την αιτιολόγηση (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006). Συχνά οι μαθητές βασίζονται σε παραδείγματα ή αριθμητικές περιπτώσεις για να αιτιολογήσουν τις εικασίες τους. Επειδή υπάρχουν δυσκολίες στην απόδειξη, αρκετές έρευνες εμφανίζονται τελευταία, που αφορούν τους τρόπους με τους οποίους η διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την κατανόησή της και την υπέρβαση των δυσκολιών.

Σε αυτή την εργασία, μελετούμε τη σχέση διατύπωσης εικασίας, επιχειρηματολογίας και αλγεβρικής απόδειξης. Η ανάλυσή μας έχει ως στόχο να συνεισφέρει στην έρευνα για την περίπτωση κατά την οποία η επιχειρηματολογία είναι επαγωγική και κατασκευάζεται στην αριθμητική και η απόδειξη είναι παραγωγική και ανάγεται στην άλγεβρα. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε πώς ο εκπαιδευτικός μέσω τριών προβλημάτων από την άλγεβρα του ημερολογίου μπορεί να αναπτύξει τον συλλογισμό και την αιτιολόγηση των μαθητών, πώς μπορεί να αναδείξει τις δυνατότητές τους και να βοηθήσει στην υπέρβαση των δυσκολιών κατά τη διδασκαλία της άλγεβρας. Τα προβλήματα αυτά έχουν ως στόχο να προωθήσουν τη διατύπωση εικασιών, τη διερεύνηση κανονικοτήτων στο ημερολόγιο και τις αντίστοιχες αποδείξεις τους και έχουν χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές εκτός Ελλάδας (Martinez & Pedemonte, 2014).

Βασικά ερευνητικά ερωτήματα αυτής της εργασίας είναι:

(α) Η επαγωγική επιχειρηματολογία διευκολύνει ή εμποδίζει τη συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας της απόδειξης από τους μαθητές;

(β) Πώς οι μαθητές μαθαίνουν να ξεπερνούν τις δυσκολίες κατά την ενασχόλησή τους με τη διερεύνηση και τη λύση των τριών προβλημάτων;

ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οργανώσαμε 4 πειραματικές διδασκαλίες (2 στην Γ΄ γυμνασίου / Γ1, Γ2 και 2 στην Α΄ λυκείου/Λ1, Λ2), σε ισάριθμα τμήματα διαφορετικών σχολικών μονάδων του κέντρου της Αθήνας (Μάρτιος 2015). Σε όλα τα σχολικά τμήματα ανατέθηκαν 3 ίδια προβλήματα του ημερολογίου, με στόχο τη διερεύνησή τους από τους μαθητές, τη διατύπωση εικασιών και την απόδειξή τους. Η απόδειξη δεν απέβλεπε στην επιβεβαίωση ενός συμπεράσματος που είναι ήδη γνωστό εκ των προτέρων. Οι μαθητές δεν είχαν εμπλακεί σε άλλες διδασκαλίες, πέραν των τυπικών μαθημάτων που προβλέπονται από το πρόγραμμα σπουδών. Οι διδασκαλίες μαγνητοφωνήθηκαν ή λήφθηκαν δεδομένα από τους παρατηρητές εκπαιδευτικούς με τη μορφή γραπτών σημειώσεων. Η ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και αφορά κυρίως την παρατήρηση των μαθηματικών αλληλεπιδράσεων εκπαιδευτικού-μαθητών και μαθητών-μαθητών (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Από τις σημειώσεις των παρατηρητών και τα μαγνητοφωνημένα μαθήματα ταυτοποιήθηκαν κρίσιμα στοιχεία σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα και αποτέλεσαν τη βάση για την ανάλυση περιεχομένου.

Πρόβλημα: *Θεωρούμε 2×2-τετράγωνα ενός ημερολογίου, όπως στο ακόλουθο σχήμα (αντίστοιχα 3×3, 4×4):* ***(α)*** *Να υπολογίσετε τις διαφορές των χιαστί γινομένων των 2×2-τετραγώνων ημερολογίου (π.χ. 7×15-14×8 και αντίστοιχα για τα 3×3, 4×4).*

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2015						
ΔΕΥ	ΤΡΙ	ΤΕΤ	ΠΕΜ	ΠΑΡ	ΣΑΒ	ΚΥΡ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Χρησιμοποιώντας τετράγωνα από οποιονδήποτε μήνα του έτους ή από άλλα έτη να βρείτε το 2×2-τετράγωνο ημερολογίου με το μέγιστο και το ελάχιστο αποτέλεσμα (3×3, 4×4).

(β) *Να διατυπώσετε μια εικασία και να την αποδείξετε.*

Οι μαθητές όλων των ομάδων τόσο της Γ΄ γυμνασίου όσο της Α΄ λυκείου εξέτασαν πολλά παραδείγματα με τις διαφορές των χιαστί γινομένων των τριών τετραγώνων ημερολογίου (2×2, 3×3, 4×4) π.χ. 7×15-14×8=105-112=-7, 17×25-24×18=425-432=-7…, και οδηγήθηκαν στις αντίστοιχες εικασίες.

Με βάση τα παραδείγματα οι μαθητές βρήκαν ότι το αποτέλεσμα για τα 2×2 τετράγωνα είναι πάντοτε -7, για τα 3×3 είναι -28 και για τα 4×4 είναι -63. Μετά από συζήτηση στην ομάδα τους κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει ελάχιστο ή μέγιστο αποτέλεσμα, εκδηλώνοντας βεβαιότητα, η οποία παραπέμπει σε αυτό που εμείς λέμε "εικασία". Ορισμένοι δεσμεύτηκαν για πολλή ώρα στην επαγωγική αριθμητική επιχειρηματολογία από την οποία δυσκολεύτηκαν να αποκολληθούν. Επιβεβαίωσαν την εικασία με λίγα παραδείγματα συμπεραίνοντας ότι είναι αληθής. Ακολουθεί ο διάλογος στο εσωτερικό μιας ομάδας μαθητών λυκείου (Λ2, Ομάδα Ε), που ασχολήθηκαν με τετράγωνα 4x4.

Σωτήρης: Απίστευτο! Πάντοτε βρίσκουμε -63. Είναι ένα πραγματικό γεγονός! Να αποδείξουμε κάτι φανερό;

Ευγενία: Δοκίμασα έξι τετράγωνα του 4×4-ημερολογίου με διαφορετικούς συνδυασμούς και βρήκα -63.

Μαριγώ: Και εγώ το ίδιο βρήκα. Έκανα δοκιμές στο ημερολόγιο του Φεβρουαρίου. Δεν υπάρχει ούτε μέγιστος ούτε ελάχιστος αριθμός.

Στην ομάδα τους πίστευαν ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι απόδειξη. Η πεποίθησή τους για την αριθμητική επαλήθευση είναι ισχυρή και δεν χρειάζεται να αποδείξουν κάτι φανερό. Μεταξύ άλλων στο συλλογικό χαρτόνι της ομάδας Ε είχαν γράψει: «*Απόδειξη: Παίρνουμε ένα τυχαίο ημερολόγιο και υπολογίζουμε τις διαφορές των χιαστί γινομένων που τελικά έχουν ως αποτέλεσμα -63. Αφού ισχύει για ένα τυχαίο ημερολόγιο, η εικασία αποδεικνύεται*». Το επιχείρημά τους υποστηρίζεται αποκλειστικά με την αριθμητική. Οι μαθητές δυσκολεύονταν να αντιληφθούν ότι λίγα ή πολλά παραδείγματα δεν αποτελούν απόδειξη και δέχονταν τα εμπειρικά παραδείγματα ως αποδείξεις των μαθηματικών γενικεύσεων.

Όταν παρουσίασαν την εργασία τους στην ολομέλεια οι άλλες ομάδες αμφισβήτησαν τη θεμελίωση της απόδειξης σε αριθμητικά παραδείγματα που λαμβάνονται από ένα τυχαίο ημερολόγιο. Στη συνέχεια παρουσίασαν την εργασία τους οι μαθητές μιας άλλης ομάδας του ίδιου λυκείου (Λ2, Ομάδα Γ). Βρήκαν: $x(x+24)-(x+21)(x+3)$. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν αλγεβρικό συμβολισμό, παρέστησαν τις μεταβλητές του προβλήματος και επικεντρώθηκαν στο μετασχηματισμό της αλγεβρικής παράστασης βρίσκοντας την αριθμητική τιμή -63.

Όταν οι μαθητές της ομάδας Ε παρακολούθησαν την εργασία της ομάδας Γ προβληματίστηκαν, άλλαξαν τις αρχικές ιδέες τους και έδειξαν να κατανοούν την ανάγκη της αλγεβρικής απόδειξης. Η Ευγενία είπε: «*Ποτέ δεν θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε όλες τις διαφορές. Αρκεί να βάλουμε x και θα βρούμε τη γενική εξήγηση*». Η Ευγενία ανακάλυψε ότι η αριθμητική επαλήθευση δεν αρκεί. Τα μέλη της ομάδας αποδέχτηκαν ότι η συγκέντρωση και εξέταση περιπτώσεων, η οποία δεν μπορεί να είναι πλήρως εξαντλητική, είναι χρήσιμη για τη διερεύνηση του προβλήματος, όμως αυτό δεν αποτελεί μια έγκυρη απόδειξη.

Αξίζει να τονιστεί ότι, οι περισσότεροι μαθητές των τεσσάρων τμημάτων πίστευαν ότι ένα σύνολο αριθμητικών παραδειγμάτων δεν είναι απόδειξη και επικεντρώθηκαν στην εύρεση ενός γενικού τρόπου, γι’ αυτό χρησιμοποίησαν μεταβλητές. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του Παναγιώτη (Γ1), ο οποίος αφού πρώτα παρατήρησε ότι «*πάντα βγαίνει αποτέλεσμα –7*», συνειδητοποίησε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των στοιχείων γειτονικών σειρών του ημερολογίου και πρότεινε τον ακόλουθο συμβολισμό για ένα γενικό τετράγωνο 2×2:

$$\begin{matrix} x & x+1 \\ x+7 & x+8 \end{matrix}$$

Στη συνέχεια πρότεινε την εκτέλεση πράξεων στην εξίσωση

$$x(x+8)-(x+7)(x+1)=-7$$

και διαπίστωσε ότι προκύπτει ταυτότητα:

Παναγιώτης (Γ1, Ομάδα Α): Αφού συμβαίνει σε όλα τα τετράγωνα 2x2, που αλλάζουν οι αριθμοί και βρίσκουμε ίδιο αποτέλεσμα, έχουμε μια ταυτότητα.

Όμως η χρήση της μεταβλητής δεν οδήγησε όλους τους μαθητές να επινοήσουν με την ίδια ευκολία μια αλγεβρική απόδειξη. Το ακόλουθο απόσπασμα προέρχεται από την παρουσίαση της εργασίας μιας ομάδας μαθητών λυκείου σε ολόκληρη την τάξη. Σχετικά με την εύρεση και την απόδειξη της εικασίας τους ακολούθησε ο διάλογος:

Χρήστος (Λ1, Ομάδα ΣΤ): Το x(x+8)–(x+1)(x+7) θα βγάζει πάντα –7. Όποιο νούμερο κι αν βάλουμε για x θα μας βγάλει πάντα –7.

Εκπαιδευτικός: Το αποδείξατε ότι κάνει –7;

Χρήστος: Ναι το αποδείξαμε. Γιατί μετά είπα στον Αντώνη να μου πει τρία νούμερα και βάλαμε το 3, το 16 και το 23, εντελώς τυχαία νούμερα, το βάλαμε παντού αυτό και βγήκε.

[Κάτι λέει ο Αργύρης]

Εκπαιδευτικός: Για πες αυτή την ιδέα.

Αργύρης: Άμα δεν βάλουμε νούμερα και κάνουμε εκείνες τις πράξεις, θα βγάλει –7, άρα αυτή είναι η απόδειξη, άρα έτσι θα το λύσουμε. Το έχω κάνει εγώ στο χαρτί [χειροκροτήματα από όλη την τάξη]

Ο Χρήστος κάνει χρήση μεταβλητής και καταλήγει στη γενίκευση με την επινόηση της αλγεβρικής παράστασης $x(x+8)–(x+1)(x+7)$, αλλά εκλαμβάνει ως απόδειξη την επαλήθευση του αλγεβρικού τύπου με τυχαία αριθμητικά παραδείγματα χωρίς να εξετάζει γιατί ισχύει ο τύπος. Ο Αργύρης αντιπροτείνει ότι η απόδειξη απαιτεί αλγεβρικές πράξεις. Αυτό είναι ένα κρίσιμο βήμα για τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, από την επαγωγική επιχειρηματολογία στην παραγωγική απόδειξη, το οποίο αναδεικνύει την αναγκαιότητα κατασκευής της απόδειξης. Κάνοντας χρήση μεταβλητών και μετασχηματισμών της παράστασης κατέληξε στην ανεύρεση μιας αλγεβρικής απόδειξης. Η αλγεβρική γλώσσα λειτουργεί ως εργαλείο απόδειξης. Η γραπτή απόδειξη που προσκόμισε είναι λιτή:

$$x(x+8)-(x+1)(x+7)=(x^2+8x)-(x^2+7x+x+7)$$
$$=x^2+8x-x^2-7x-x-7=-7$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι δεν κατάφεραν όλοι οι μαθητές να γεφυρώσουν με επιτυχία την αριθμητική επαγωγική επιχειρηματολογία με την αλγεβρική απόδειξη.

Μαίρη Λ2, Ομάδα Α): […] Δεν μπορεί να ισχύει $x(x+8)-(x+1)(x+7)=-7$.

Εκπαιδευτικός: Γιατί δεν γίνεται;

Μαίρη: Δεν είναι ίδια πράγματα. Από εδώ υπάρχουν τα x, εκεί -7, που βγήκε από πολλές διαφορές των χιαστί γινομένων.

Όταν η μαθήτρια εξίσωσε την αλγεβρική παράσταση $x(x+8)-(x+1)(x+7)$ με -7, συνέδεσε δύο αντικείμενα διαφορετικής φύσης χωρίς να αντιλαμβάνεται τη σημασία της εκτέλεσης των πράξεων στη μετάβαση από τη γενίκευση του τύπου στην αλγεβρική απόδειξη. Η απόσταση ανάμεσα στην αριθμητική επιχειρηματολογία και την αλγεβρική απόδειξη και η αδυναμία χρήσης μετασχηματισμών αποτελούσαν δυσκολίες για την κατασκευή της απόδειξης. Στη συνέχεια τα άλλα μέλη της ομάδας με εφαρμογή διαδικασιών επίλυσης βρήκαν: -7 =-7 και ανέφεραν ότι αυτό ισχύει. Αυτή ήταν μια εμπειρία των μαθητών στην παραγωγική απόδειξη με γόνιμη αξιοποίηση της μετασχηματιστικής δύναμης της άλγεβρας. Ανάλογη αλγεβρική απόδειξη έδωσε μια μαθήτρια της Γ΄ γυμνασίου (Γ1).

Κωνσταντίνα (Γ1, Ομάδα Β): έκανα εγώ τις πράξεις και βρήκα ότι ισχύει:

$x^2+8x-(x^2+x+7x+7)=-7$ ή $x^2+8x-x^2-x-7x-7=-7$ ή $-7=-7$ που ισχύει.

Στο γυμνάσιο (Γ2) ένας μαθητής έθεσε ως μεταβλητές τις α, β. Μετά από πράξεις βρήκε: α(β+1)-β(α+1)=αβ+α-βα-β=α-β. Όμως δεν προέκυψε το -7. Κάποιος από την ομάδα είπε ότι «*ο β έχει μάλλον κάποια σχέση με τον α, γιατί ανήκει στην επόμενη εβδομάδα*». Ήταν εμφανής η δυσκολία αποδοτικής χρήσης των μεταβλητών στην αλγεβρική απόδειξη. Την προηγούμενη στρατηγική επίλυσης με τον ίδιο συμβολισμό, πλήρως αιτιολογημένη έδωσαν οι μαθητές του λυκείου (Λ2, Ομάδα Ζ). Ένα μέλος της ομάδας εξήγησε ότι από την κατασκευή του ημερολογίου ισχύει α-β=-7 ή β=α+7.

Τέλος, ενδιαφέρουσα είναι η ακόλουθη στιχομυθία στο εσωτερικό μιας ομάδας μαθητών λυκείου (Λ1, Ομάδα Δ), που ασχολήθηκαν με πίνακες 3x3:

Μαρία: Το αποτέλεσμα είναι σταθερό, πάντα αυτό βγαίνει [–28].

Άγγελος: Πρέπει να είναι με τύπο η απόδειξη, αναγκαστικά;

Εκπαιδευτικός: Εσείς θα αποφασίσετε. Μπορεί να είναι διαφορετικά;

Άγγελος: Μπορεί να είναι και με λόγια, αλλά δεν το αποδεικνύουμε με λόγια, πρέπει να στηρίζεται, να έχει μια [δεν ακούγεται, αλλά εννοεί μια διαδικασία με σχέσεις], ενδεχομένως τα λόγια είναι περιττά.

Μαρία: Καταρχάς να εξηγήσουμε με λόγια πώς καταλήγουμε στον τύπο…

Εκπαιδευτικός: Με τα λόγια πώς εννοούσες ότι μπορεί να είναι η απόδειξη;

Άγγελος: Ότι αν κάνουμε χιαστί μας βγαίνει πάντα το σταθερό –28; Λάθος;

Εκπαιδευτικός: Κι αυτό είναι απόδειξη;

Άγγελος: Όχι, αυτό είναι λόγια. Η απόδειξη είναι με … απόδειξη, συμπέρασμα … όπως στη γεωμετρία τώρα κύριε, καταλάβατε. …

Ο Άγγελος αμφισβητεί ότι τα «λόγια» της καθημερινής γλώσσας και η επαγωγική επιχειρηματολογία αποτελούν τεκμηριωμένη μαθηματική απόδειξη και η "εικόνα" που έχει διαμορφώσει για την απόδειξη είναι ίσως κάτι που περιέχει κάποιες ιεροτελεστίες. Η Μαρία προτιμά να εξηγήσουν με λόγια πώς βρήκαν τον αλγεβρικό τύπο. Στο χαρτόνι τους οι μαθητές της ομάδας Δ έγραψαν: «*Εικασία: αν χρησιμοποιήσουμε 3×3 τετράγωνα σε οποιοδήποτε ημερολόγιο, η διαφορά των χιαστί γινομένων που προκύπτει ΠΑΝΤΑ είναι το -28. Απόδειξη: x(x+16)–(x+14)(x+2)= π.χ. i) [2(2+16)]–[(2+14)(2+2)]=(4+32)–[(16)(4)]=36-64=-28*».

Οι μαθητές μετακινήθηκαν από την αριθμητική στην άλγεβρα και επινόησαν ορθά τον αλγεβρικό τύπο. Ως επεξήγηση της απόδειξής τους προσκόμισαν ένα παράδειγμα αριθμητικής αντικατάστασης. Έτσι, η απόδειξή τους δεν είναι αλγεβρική, είναι μια αριθμητική επαλήθευση αλγεβρικού τύπου. Κατά τη μαθηματική συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης, καταγράψαμε τα ακόλουθα:

Αργύρης (Λ1, Ομάδα Δ): Δεν έχουμε την απόδειξη.

Εκπαιδευτικός: Δεν έχουμε απόδειξη. Και μετά τι έχουμε εδώ πέρα; [δείχνει στο χαρτόνι τους την αριθμητική αντικατάσταση]

Αργύρης: Απλά αντικαταστήσαμε το x, δεν είναι απόδειξη.

Μαρία: Εσύ ήθελες να κάτσουμε να λύσουμε τον τύπο και να βρούμε ότι όντως βγαίνει –28 χωρίς να αντικαταστήσουμε το x.

Εκπαιδευτικός: Εσείς τι κάνατε;

Μαρία: Εμείς, παρόλο που το σκεφτήκαμε αυτό, προτιμήσαμε, ουσιαστικά για να δείξουμε ότι όντως ισχύει, ότι όντως επαληθεύεται το –28, τον ονομάσαμε τύπο. […].

Άγγελος: Ωραία, δεν είναι απόδειξη, είναι ένας τύπος.

Στη δημόσια συζήτηση ο Αργύρης δεν θεωρεί απόδειξη την αριθμητική αντικατάσταση, ενώ για τη Μαρία η επαλήθευση του τύπου με αριθμητικά παραδείγματα αρκεί για την εξασφάλιση επεξήγησης και βεβαιότητας. Οι εκφράσεις της όπως "όντως", "σε κάθε περίπτωση", "πάντοτε" δείχνουν να πιστεύει ότι σε πειστικότητα προεξάρχει το αριθμητικό από το αλγεβρικό επιχείρημα. Αν είναι έτσι, η άλγεβρα λειτουργεί περισσότερο ως μια ιεροτελεστία επιβεβλημένη έξωθεν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εξερεύνηση κανονικοτήτων στο ημερολόγιο ήταν ιδανική πρόκληση για την εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα και την υπέρβαση των δυσκολιών που παρουσιάστηκαν κατά τη διαδικασία της απόδειξης. Δοκιμάσαμε τρία προβλήματα με τετράγωνα 2×2, 3×3 και 4×4 από το μηνιαίο ημερολόγιο. Οι μαθητές διατύπωσαν μια εικασία για κάθε τετράγωνο τεσσάρων αριθμών. Τα αποτελέσματα για κάθε μήνα οποιουδήποτε έτους ήταν αντίστοιχα στα τρία προβλήματα: -7, -28 και -63.

Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση, για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η επαγωγική επιχειρηματολογία διευκόλυνε τη συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας της απόδειξης στους περισσότερους μαθητές. Στις ποικίλες απόψεις των μαθητών για τη φύση της απόδειξης υπερίσχυσε η αναγκαιότητα της αλγεβρικής απόδειξης. Όμως υπήρξαν και μαθητές που υποστήριξαν την αριθμητική επαλήθευση (αριθμητική γενίκευση) ή τη μεικτή "απόδειξη" (αριθμητική αντικατάσταση σε τύπο). Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι τα προβλήματα της άλγεβρας του ημερολογίου έδωσαν την ευκαιρία στην πλειονότητα των μαθητικών ομάδων γυμνασίου-λυκείου να παραγάγουν μια εικασία με επαγωγικό συλλογισμό χρησιμοποιώντας αριθμητικά παραδείγματα και να δημιουργήσουν μια παραγωγική απόδειξη. Αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών για μαθητές παρόμοιας ηλικίας (Martinez & Pedemonte, 2014).

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, όπως στοιχειοθετείται από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων οι αντιστάσεις των μαθητών στην κατασκευή μιας απόδειξης μπορούν να ξεπεραστούν σε ένα περιβάλλον μαθηματικής επικοινωνίας, ανταλλαγής επιχειρημάτων και αναστοχαστικού διαλόγου. Οι μαθητές εισάγοντας στο ημερολόγιο αλγεβρικά σύμβολα κατασκεύασαν μια επιτυχή γέφυρα ανάμεσα στην αριθμητική και την άλγεβρα, ανάμεσα στην αριθμητική επαγωγική επιχειρηματολογία και την παραγωγική απόδειξη. Ορισμένοι μαθητές δεν έθεσαν γράμματα στο ημερολόγιο και δεν ήταν ικανοί να μεταβούν στην παραγωγική απόδειξη πριν από τη μαθηματική συζήτηση στην ολομέλεια. Ορισμένοι είχαν δυσκολίες στο μετασχηματισμό της αλγεβρικής παράστασης. Με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού όλοι οι μαθητές ξεπέρασαν τη απόσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη σε όλα προβλήματα. Όταν οι μαθητές παράγουν επαγωγική επιχειρηματολογία και στηρίζονται στη διαδικασία γενίκευσης μοτίβων είναι ικανοί να συνθέσουν μια παραγωγική απόδειξη, όπως διαπιστώσαμε κατά την επίλυση των τριών προβλημάτων.

Επιπλέον, θα πρέπει να επισημανθεί ότι αυτή η γενίκευση μπορεί να κατασκευαστεί τόσο στην αριθμητική όσο και στην άλγεβρα προκειμένου να μειωθεί η γνωστική απόσταση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη. Όπως διαπιστώσαμε η συνύπαρξη της αριθμητικής και της άλγεβρας στην προβολή των επιχειρημάτων των μαθητών εμφανίζεται με διάφορους τρόπους. Αυτή η συνύπαρξη διευκολύνεται από το γεγονός ότι οι αριθμοί αντικαθίστανται με γράμματα που παριστάνουν αριθμούς στο ημερολόγιο, όμως χωρίς να τους εξαλείφουν. Αυτό το γεγονός υποστηρίζει τη συνέχεια ανάμεσα στην αριθμητική επιχειρηματολογία και την αλγεβρική απόδειξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: discussing a “successful” mathematical discussion. *Proceedings of CERME 7*, Rzészow, Poland.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Martinez, M. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 125–149.

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2010). Promoting student reasoning through careful task design: A comparison of three studies. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 3(1), 135–156.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.

Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2010). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Proceedings of CERME 6*, (pp 281-290).

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*, 289-321.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 11, 100-114.

ΓΟΝΙΚΗ ΕΜΠΛΟΚΗ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος & Ελένη Λεοντίου
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
moutsiosrent@math.uoa.gr, lenaleon@math.uoa.gr

Στην παρούσα έρευνα υιοθετείται μια συστημική προσέγγιση για την μελέτη της γονικής εμπλοκής στα μαθηματικά στο γυμνάσιο, όπως αυτή κατασκευάζεται τόσο από τους γονείς (δηλούμενη), όσο και από τα παιδιά (αντιλαμβανόμενη). Για την μελέτη της σχέσης αυτών των κατασκευών διερευνήθηκε ο ρόλος κοινωνικό-αναπτυξιακών (τάξη γυμνασίου, φύλο παιδιών, φύλο γονέων, μορφωτικό κεφάλαιο γονέων, μαθηματική επίδοση παιδιών). Τα αποτελέσματα της έρευνας υποστηρίζουν την προτεινόμενη συστημική οπτική, καθώς φανέρωσαν αχαρτογράφητες έως τώρα δομικές συγκλίσεις των δύο κατασκευών και της σχέσης τους, καθώς και ποιοτικές και ποσοτικές διαφοροποιήσεις ανάμεσα στον πατέρα και στην μητέρα και στα τρία επίπεδα της υπό μελέτη γονικής εμπλοκής (δηλούμενη, παρατηρούμενη, συστημική σύγκριση).

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η γονική εμπλοκή στη σχολική μαθηματική εκπαίδευση έχει συχνά απασχολήσει τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, αλλά και τους πρωταγωνιστές του εκπαιδευτικού συστήματος και την πολιτική ηγεσία που ασχολείται με θέματα παιδείας (Campbell & Mandel, 1990· Cooper, Robinson & Patall, 2006). Για παράδειγμα, έχει αναδειχθεί η σημασία της οικογένειας και των ποιοτικών χαρακτηριστικών της στις στάσεις και επιδόσεις των παιδιών για τα μαθηματικά, μέσω τόσο των εργασιών στα Μαθηματικά που πραγματοποιεί το παιδί στο σπίτι, όσο και μέσω των πρακτικών που αναπτύσσουν τα μέλη της οικογένειας (Cao, Bishop & Forgasz, 2006· Cobb & Yang, 1995· Λεμονίδης, Μαρκάδας & Τσακιρίδου, 2011· Μούτσιος-Ρέντζος, Χαβιάρης & Καφούση, 2014). Ο ρόλος της οικογένειας στην μαθηματική εκπαίδευση αποτέλεσε το θέμα του 3ου συνεδρίου της ΕνΕΔιΜ στη Ρόδο τονίζοντας τη σημασία του πεδίου και για την ελλαδική ερευνητική κοινότητα.

Στην παρούσα εργασία, υιοθετούμε μια συστημική ερευνητική οπτική με στόχο την ανάδειξη των συγκλίσεων και των αποκλίσεων μεταξύ των κατασκευών γονέων και παιδιών σχετικά με την γονική εμπλοκή: *Ποια η σχέση μεταξύ της αντιλαμβανόμενης από τα παιδιά γονικής εμπλοκής και της δηλούμενης από τους γονείς γονικής εμπλοκής για τα μαθηματικά στο γυμνάσιο;*

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, ΓΟΝΙΚΗ ΕΜΠΛΟΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διαστάσεις γονικής εμπλοκής

Η Epstein (1995) αναγνώρισε πέντε βασικές διαστάσεις *γονικής εμπλοκής*: α) προσδοκίες γονέων, β) διαδικασίες που επιλέγει η οικογένεια για να υποβοηθήσει τη μάθηση, γ) επικοινωνία μεταξύ γονέα-σχολείου-μαθητή, δ) συμμετοχή των γονέων στις σχολικές δραστηριότητες, και ε) συμμετοχή των γονέων στις αποφάσεις που λαμβάνονται από το σχολείο. Παράλληλα, οι Cai, Moyer και Wang (1997) διαφοροποίησαν την *άμεση γονική εμπλοκή* από την *έμμεση γονική εμπλοκή*. Διαπίστωσαν ότι η άμεση εμπλοκή (όπως η βοήθεια στα παιδιά όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά και η συμμετοχή των γονέων σε σχολικές δραστηριότητες και αποφάσεις) έχει λιγότερη επίδραση στην απόδοση τους από την έμμεση (η οποία περιλαμβάνει τις προσδοκίες της οικογένειας για τη μαθηματική επίδοση του παιδιού, την ενθάρρυνση των παιδιών, τις στάσεις των γονέων απέναντι στα μαθηματικά, καθώς και την ευρύτερη υποστήριξη μέσω βιβλίων ή άλλων μέσων).

Σε έρευνα των Cao κ.ά. (2006) σχετικά με την αντιλαμβανόμενη από τα παιδιά γονική εμπλοκή, καταγράφηκαν διαφορετικές απόψεις τόσο στην άμεση, όσο και στην έμμεση γονική εμπλοκή στα μαθηματικά. Το ερωτηματολόγιο που κατασκεύασαν περιλάμβανε ερωτήματα για την αντιλαμβανόμενη εμπλοκή της μητέρας και του πατέρα, αναγνωρίζοντας τον ενδεχομενικά διαφορετικό τρόπο εμπλοκής των δύο γονέων. Έτσι, αναδείχθηκαν τέσσερις συνιστώσες αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής (βλ. Πίνακα 1): δύο κοινές για την μητέρα και τον πατέρα (*Γονική ενθάρρυνση* και *Γονική προσδοκία επίδοσης*), και δύο διακριτές για τους δύο γονείς ως προς τη στάση και τη βοήθεια (*Στάση και Βοήθεια Μητέρας* και *Στάση και Βοήθεια Πατέρα*).

Παρόλο που οι έρευνες έχουν αναδείξει τις διαφορετικές διαστάσεις γονικής εμπλοκής και διαφοροποίησης των κατασκευών μητέρας και πατέρα, δεν φαίνεται να υπάρχει εμπειρική έρευνα που να ασχολείται με τη σχέση της αντιλαμβανόμενης από τα παιδιά γονικής εμπλοκής με την αντίστοιχη δηλούμενη από τους γονείς με στόχο τη συγκριτική διερεύνησή τους.

Σύστημα

Η συστημική θεωρία (Bertalanffy, 1968) έχει βρει εφαρμογή σε πολλές επιστήμες και στο χώρο της ψυχοθεραπείας, αντιμετωπίζοντας τις ανθρώπινες δυσκολίες ως δυναμικές ιδιότητες των κοινωνικών συστημάτων και ιδιαίτερα της οικογένειας. Ως *σύστημα* ορίζουμε μια ολότητα της οποίας τα μέρη βρίσκονται σε σχέση μεταξύ τους για συγκεκριμένο σκοπό. Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από συμπεριφορά, δομή και διασύνδεση (Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2014). Η δομή ενός συστήματος καθορίζεται σύμφωνα με την οπτική του παρατηρητή (Τσαμπαρλή, 2009).

Το σύστημα χαρακτηρίζεται από την υπερ-άθροιση (καθώς δεδομένων των σχέσεων των μερών του υπερβαίνει το απλό άθροισμά τους), αλλά και από την υπο-άθροιση (αφού η δέσμευση των μερών σε αυτές τις σχέσεις συνιστά σημειακή προβολή της πολύπλοκης ενδεχομενικότητας των σχετίσεων των μερών στην συγκεκριμένη πραγμάτωση· Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2014).

Το παιδί λειτουργεί σε τρία τουλάχιστον δυναμικά αλληλοεπιδρώντα συστήματα: την οικογένεια, το σχολείο και την ευρύτερη κοινότητα. Η αρμονική κατά το δυνατόν αλληλεπίδραση των τριών αυτών συστημάτων βοηθάει τα παιδιά να αναπτύξουν θετικές στάσεις για τη μάθηση και να βελτιώσουν την αυτοεικόνα τους (Dowling & Osborne, 2001· Epstein, 1995).

Παράγοντες που επηρεάζουν τη γονική εμπλοκή

Η γονική εμπλοκή στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών φαίνεται να σχετίζεται με πολλούς παράγοντες, όπως: το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον, το υψηλό μορφωτικό επίπεδο των γονέων, η συχνότητα βοήθειας στο σπίτι, ο τρόπος χρήσης του εξωσχολικού υλικού, αλλά και η ενημέρωση από τους εκπαιδευτικούς της τάξης (Cao κ.ά., 2006· Hyde, Else-Quest, Alibali, Knuth & Romberg, 2006). Συγκεκριμένα, οι προσδοκίες των γονέων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι μεγαλύτερες και επηρεάζουν καθοριστικά την ακαδημαϊκή πορεία των παιδιών τους, ενώ οι γονείς με υψηλότερο κοινωνικοοικονομικό επίπεδο παρουσιάζουν μεγαλύτερη συμμετοχή στις σχολικές δραστηριότητες και συχνότερη βοήθεια για τα μαθηματικά στο σπίτι (Ho & Willms, 1996). Επιπροσθέτως, η αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή είναι λιγότερο έντονη καθώς αυξάνεται η ηλικία των παιδιών, ενώ οι μητέρες φαίνεται να έχουν πιο ενεργό ρόλο στην ενίσχυση της αυτοεκτίμησης των παιδιών (Cao κ.ά., 2006· Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά., 2014). Οι Σκουμπουρδή, Τάτσης και Καφούση (2009) επισημαίνουν ότι στο δημοτικό η γονική εμπλοκή γίνεται πιο αισθητή στις μικρότερες τάξεις, καθώς μεγαλώνοντας τα παιδιά είτε αρνούνται να βοηθηθούν, είτε οι ίδιοι οι γονείς δεν είναι σε θέση να βοηθήσουν λόγω της δυσκολίας του γνωστικού αντικειμένου.

Σε αυτή την έρευνα

Συμφωνώντας με ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών που υποστηρίζουν τη συστημική προσέγγιση για τη διερεύνηση της σχέσης της οικογένειας με τη μάθηση των μαθηματικών (Καρκαζή & Νικολαντωνάκης, 2014), σε αυτή την εμπειρική έρευνα βασιζόμαστε στο πλαίσιο των Cao κ.ά. (2006) και επιλέγουμε μια συστημική προσέγγιση για να διερευνήσουμε τη γονική εμπλοκή στα μαθηματικά, όπως αυτή βιώνεται από μαθητές και μαθήτριες όλων των τάξεων Γυμνασίου μιας σχολικής μονάδας, αλλά και όπως δηλώνεται αντίστοιχα από τους γονείς τους (αντίστοιχα ερωτηματολόγια σε παιδιά και γονείς· Τσαμπαρλή, 2009). Σε αυτή τη διερεύνηση λαμβάνεται υπόψη ο βαθμός επηρεασμού των παρατηρούμενων σχέσεων από: τάξη παρακολούθησης, φύλο γονέα και παιδιού, μαθηματική επίδοση παιδιού (βαθμός διαγωνίσματος και τριμήνου), μορφωτικό κεφάλαιο γονέα.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Μάρτιο του 2015 με όλα τα τμήματα των τριών τάξεων του γυμνασίου μιας σχολικής μονάδας στην Αθήνα ($N_{Παιδιά}$=292, $N_{Γονείς}$=109). Η γονική εμπλοκή αναγνωρίστηκε σύμφωνα με μια μεταφρασμένη στα ελληνικά εκδοχή της *Κλίμακας Αντιλαμβανόμενης Γονικής Εμπλοκής* (Perceived Parental Influence, PPI· Cao κ.ά., 2006) η οποία χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα των Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά. (2014). Η κλίμακα (Gr-PPI) αποτελείται από 16 ερωτήματα τύπου Likert τεσσάρων σημείων (οκτώ για την μητέρα και οκτώ για τον πατέρα), τα οποία συγκροτούν τέσσερις υπο-κλίμακες: α) *Γονική ενθάρρυνση*, β) *Στάση και βοήθεια μητέρας*, γ) *Στάση και βοήθεια πατέρα* και δ) *Γονική προσδοκία επίδοσης*. Επιπλέον, βάσει της Gr-PPI κατασκευάστηκε η κλίμακα *Δηλούμενης Γονικής Εμπλοκής* (Gr-ParPPI) με αναδιατύπωση μόνο των οκτώ ερωτημάτων (αφού εστιαζόμαστε στη δηλούμενη εμπλοκή του συμμετέχοντα γονέα). Το ερωτηματολόγιο της έρευνας συμπληρώθηκε με ερωτήσεις για την μαθηματική επίδοση των παιδιών και το μορφωτικό κεφάλαιο των γονέων.

Αντιλαμβανόμενη Γονική Εμπλοκή (Gr-PPI)	
Η μητέρα μου είναι καλή στα μαθηματικά	ΣΒΜ
Η μητέρα μου ελέγχει συχνά την εργασία στα μαθηματικά που κάνω στο σπίτι	ΣΒΜ
Η μητέρα μου με ρωτά για τα αποτελέσματα της αξιολόγησής μου στα μαθηματικά	ΣΒΜ
Η μητέρα μου με βοηθά σε μερικά δύσκολα μαθηματικά προβλήματα	ΣΒΜ
Η μητέρα μου με βοηθά να νιώθω ότι μπορώ να τα καταφέρω στα μαθηματικά	ΣΒΜ
Η μητέρα μου λέει ότι κάποιος πρέπει να κάνει κάτι προσεκτικά ώστε να το κάνει καλά	ΓΕ
Η μητέρα μου λέει ότι κάποιος πρέπει να δουλεύει σκληρά ώστε να κάνει κάτι καλά	ΓΕ
Η μητέρα μου προσδοκά να είμαι ο/η καλύτερος/η μαθητής/τρια στα μαθηματικά και στα άλλα μαθήματα στην τάξη μου	ΓΠΕ
Ο πατέρας μου είναι καλός στα μαθηματικά	ΣΒΠ
Ο πατέρας μου ελέγχει συχνά την εργασία στα μαθηματικά που κάνω στο σπίτι	ΣΒΠ
Ο πατέρας μου με ρωτά για τα αποτελέσματα της αξιολόγησής μου στα μαθηματικά	ΣΒΠ
Ο πατέρας μου με βοηθά σε μερικά δύσκολα μαθηματικά προβλήματα	ΣΒΠ

Ο πατέρας μου με βοηθά να νιώθω ότι μπορώ να τα καταφέρω στα μαθηματικά	ΣΒΠ
Ο πατέρας μου λέει ότι κάποιος πρέπει να κάνει κάτι προσεκτικά ώστε να το κάνει καλά	ΓΕ
Ο πατέρας μου λέει ότι κάποιος πρέπει να δουλεύει σκληρά ώστε να κάνει κάτι καλά	ΓΕ
Ο πατέρας μου προσδοκά να είμαι ο/η καλύτερος/η μαθητής/τρια στα μαθηματικά και στα άλλα μαθήματα στην τάξη μου	ΓΠΕ
Δηλούμενη Γονική Εμπλοκή (Gr-ParPPI)	
Είμαι καλός/-ή στα μαθηματικά	ΣΒΓ
Ελέγχω συχνά την εργασία των μαθηματικών που κάνει το παιδί μου στο σπίτι	ΣΒΓ
Ρωτάω τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του παιδιού μου στα μαθηματικά	ΣΒΓ
Βοηθάω το παιδί μου σε μερικά δύσκολα προβλήματα μαθηματικών	ΣΒΓ
Βοηθάω το παιδί μου ώστε να νιώθει ότι μπορώ να τα καταφέρει στα μαθηματικά.	ΣΒΓ
Λέω στο παιδί μου ότι κάποιος πρέπει να κάνει κάτι προσεκτικά ώστε να το κάνει καλά	ΓΕΠΕ
Λέω στο παιδί μου ότι κάποιος πρέπει να δουλεύει σκληρά ώστε να κάνει κάτι καλά	ΓΕΠΕ
Προσδοκώ το παιδί μου να είναι ο/η καλύτερος/η μαθητής/-τρια στα μαθηματικά και στα άλλα μαθήματα στην τάξη του/της.	ΓΕΠΕ

Σημειώσεις. ΣΒΜ ‘Στάση & Βοήθεια Μητέρας’, ΣΒΠ ‘Στάση & Βοήθεια Πατέρα’, ΓΕ ‘Γονική Ενθάρρυνση’, ΓΠΕ ‘Γονική Προσδοκία Επίδοσης’, ΣΒΓ ‘Στάση & Βοήθεια Γονέα’, ΓΕΠΕ ‘Γονική Ενθάρρυνση & Προσδοκία Επίδοσης’. Οι τιμές 1 (‘έντονη διαφωνία’) έως 4 (‘έντονη συμφωνία’).

Πίνακας 1: Κλίμακες Αντιλαμβανόμενης και Δηλούμενη Γονικής Εμπλοκής.

Τέλος, για τους σκοπούς της συστημικής διερεύνησης, υπολογίστηκαν τρεις νέες μεταβλητές με βάση τη διαφορά των αντιλαμβανόμενων κλιμάκων και υποκλιμάκων γονικής εμπλοκής από τις αντίστοιχες δηλούμενες: α) συνολικά (PPI_ΣΥΓΚΡ), β) μόνο για μητέρες (ΣΒΜ_ΣΥΓΚΡ), και γ) μόνο για πατέρες (ΣΒΠ_ΣΥΓΚΡ). Σημειώνεται ότι στις αναλύσεις συστημική οπτική γίνεται αναφορά μόνο σε οικογένειες που οι γονείς συμπλήρωσαν ερωτηματολόγια.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 2 συνοψίζονται η δηλούμενη και αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή και η συστημική σύγκρισή τους (κλίμακες και υποκλίμακες), όπως εξελίσσονται στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου. Σχετικά με τις σχέσεις γονικής εμπλοκής και την τάξη παρακολούθησης, βρέθηκε στατιστικώς σημαντική αρνητική συσχέτιση με όλες τις κλίμακες και υποκλίμακες δηλούμενης και αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής, εκτός από τη δηλούμενη ΣΒΓ_Π ‘Στάση και βοήθεια γονέα-πατέρα’ η οποία ήταν στατιστικώς μη σημαντική.

	Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ		Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Gr-PPI	2,98	0,49	2,92	0,45	2,60	0,52
Gr-PPI_Γ	2,89	0,39	2,88	0,45	2,89	0,57
Gr-ParPPI	3,24	0,48	3,19	0,44	3,02	0,45
PPI_ΣΥΓΚΡ	-0,36	0,49	-0,31	0,52	-0,33	0,44
ΣΒΜ	2,85	0,71	2,67	0,69	2,41	0,59
ΣΒΜ_Μ	2,79	0,68	2,58	0,82	2,49	0,66
ΣΒΓ_Μ	3,07	0,63	2,88	0,70	2,69	0,53
ΣΒΜ_ΣΥΓΚΡ	-0,27	0,70	-0,30	0,68	-0,20	0,58
ΣΒΠ	2,83	0,75	2,93	0,71	2,44	0,82
ΣΒΠ_Π	2,91	0,78	3,19	0,68	3,11	0,80
ΣΒΓ_Π	3,29	0,45	3,31	0,40	3,11	0,68
ΣΒΠ_ΣΥΓΚΡ	-0,38	0,69	-0,13	0,65	0,00	0,46

Σημειώσεις. ΣΒΜ ‘Στάση & Βοήθεια Μητέρας’, ΣΒΠ ‘Στάση & Βοήθεια Πατέρα’, ΣΒΜ_Μ ‘ΣΒΜ-Μητέρες’, ΣΒΠ_Π ‘ΣΒΠ-Πατέρες’. ΣΒΓ_Μ ‘Στάση & Βοήθεια Γονέα-Μητέρες’, ΣΒΓ_Π ‘Στάση & Βοήθεια Γονέα-Πατέρες’. Οι τιμές 1 (‘έντονη διαφωνία’) έως 4 (‘έντονη συμφωνία’). PPI_ΣΥΓΚΡ = Gr-PPI_Γ – Gr-ParPPI, ΣΒΜ_ΣΥΓΚΡ = ΣΒΜ_Μ – ΣΒΓ_Μ, ΣΒΠ_ΣΥΓΚΡ = ΣΒΠ_Π – ΣΒΓ_Π.

Πίνακας 2: Αντιλαμβανόμενη και δηλούμενη γονική εμπλοκή ανά τάξη.

Η συστημική οπτική φανερώνει ότι η αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή είναι ασθενέστερη από τη δηλούμενη. Δεν βρέθηκε στατιστικώς σημαντική συσχέτιση μεταξύ τάξης παρακολούθησης και των κλιμάκων και υποκλιμάκων των συστημικών συγκρίσεων. Οι διαφορές αντιλαμβανόμενης-δηλούμενης είναι σχετικά σταθερές στις τρεις τάξεις, με εξαίρεση την πατρική γονική εμπλοκή για την οποία η διαφορά μεταξύ των κατασκευών παιδιών και πατέρων φαίνεται να μειώνεται και να μηδενίζεται στην τρίτη γυμνασίου.

Στον Πίνακα 3 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά του δείγματος σχετικά με τους υπό μελέτη παράγοντες διαφοροποίησης γονικής εμπλοκής.

Σχετικά με το μορφωτικό κεφάλαιο των γονέων, βρέθηκε στατιστικώς σημαντική θετική συσχέτιση με όλες τις κλίμακες και υποκλίμακες δηλούμενης και αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής, εκτός αυτών σχετικά με τον πατέρα (αντίστοιχα, ΣΒΠ και ΣΒΓ_Π) οι οποίες ήταν στατιστικώς μη σημαντικές. Δεν βρέθηκε στατιστικώς σημαντική συσχέτιση με τις κλίμακες και υποκλίμακες των συστημικών συγκρίσεων.

		N	%	*M*	*SD*
Φύλο παιδιού	Αγόρι	139	48,9%		
	Κορίτσι	145	51,1%		
Βαθμός διαγωνίσματος στα μαθηματικά				12,6	5,2
Βαθμός τριμήνου στα μαθηματικά				14,1	3,5
Φύλο γονέα	Άνδρας	36	33,3%		
	Γυναίκα	72	66,7%		

Γραμματικές γνώσεις γονέα	Υποχρεωτική	13	12,1%
	Λυκείου	54	50,5%
	ΑΕΙ/ΤΕΙ	40	37,4%

Πίνακας 3: Οι υπό μελέτη παράγοντες διαφοροποίησης γονικής εμπλοκής.

Σχετικά με το φύλο των παιδιών, δεν βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις εκτός από την συστημική σύγκριση διαφοράς αντιλαμβανόμενης μητρικής εμπλοκής σε σχέση με τη δηλούμενη ήταν στατιστικώς σημαντικά μικρότερης στα κορίτσια από ότι στα αγόρια (Mdn_A=-0,4, Mdn_K=-0,0· U=345,0, P=0,001, r=-0,38). Σχετικά με το φύλο των γονέων, η αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή για τον πατέρα στα παιδιά των οποίων ο πατέρας που συμπλήρωσε το ερωτηματολόγιο ήταν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη από εκείνα που το συμπλήρωσε η μητέρα (ΣΒΠ· Mdn_A=3,0, $Mdn_Γ$=2,6, U=753,5, P<0,001, r=-0,34). Επιπλέον, τόσο η κλίμακα δηλούμενης γονικής εμπλοκής (GrParPPI), όσο και η δηλούμενη στάση και βοήθεια του γονέα (ΣΒΓ) βρέθηκε στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη στους πατέρες (αντίστοιχα, Mdn_A=3,25, $Mdn_Γ$=3,0, U=960,5, P=0,046, r=-0,19, και Mdn_A=3,3, $Mdn_Γ$=3,0, U=897,5, P=0,015, r=-0,23).

Τέλος, σχετικά με την μαθηματική επίδοση, δεν βρέθηκε στατιστικώς σημαντική συσχέτιση του βαθμού τριμήνου με την αντιλαμβανόμενη και δηλούμενη γονική εμπλοκή, ενώ βρέθηκε στατιστικώς σημαντική θετική συσχέτιση με την αντιλαμβανόμενη συνολική γονική εμπλοκή (Gr-PPI· $τ$=0,119, P=0,004) και του πατέρα ΣΒΠ ($τ$=0,108, P<0,011).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Στην παρούσα μελέτη βασιζόμενοι στις έρευνες των Cao κ.ά. (2006) και των Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά. (2014) μελετήσαμε την αντιλαμβανόμενη από μαθητές και μαθήτριες γυμνασίου γονική εμπλοκή στα Μαθηματικά σε σχέση με την δηλούμενη από τους γονείς τους, εισάγοντας μια συστημική οπτική για τη διερεύνηση των κατασκευών.

Αρχικά, δεδομένου ότι η έρευνα των Μούτσιος-Ρέντζος κ.ά. (2014) πραγματοποιήθηκε με παιδιά του δημοτικού, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν την εγκυρότητα του εργαλείου για την αναγνώριση της αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής για έρευνες στον Ελλαδικό χώρο και σε παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας. Επιπροσθέτως, η Κλίμακα Δηλούμενης Γονικής Εμπλοκής φαίνεται να διατηρεί μέρος της δομής της Κλίμακας Αντιλαμβανόμενης Εμπλοκής από την οποία προήλθε. Υποστηρίζεται ότι οι κατασκευές των γονέων και των παιδιών φαίνεται να είναι δομικά συγγενείς, αν και περαιτέρω έρευνα χρειάζεται για την μελέτη των συγκλίσεων και των αποκλίσεων των δύο κατασκευών, ενδεχομένως λαμβάνοντας υπόψη παραμέτρους σχετικά με την δομή και λειτουργία της οικογένειας (για παράδειγμα, ακέραιες οικογένειες, μονογονεϊκές οικογένειες, οικογένειες με διαφορετική συνοχή και προσαρμοστικότητα κ.ά.).

Σχετικά με την αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή, επιβεβαιώθηκαν τα ευρήματα της βιβλιογραφίας αναφορικά με την αρνητική της συσχέτιση με τις μεγαλύτερες σχολικές τάξεις και με τη θετική της συσχέτιση με το μορφωτικό κεφάλαιο των γονέων.

Ειδικά σε αυτή την έρευνα, οι γονείς δηλώνουν εντονότερη γονική εμπλοκή από αυτή που βιώνουν τα παιδιά τους. Επίσης, η σχέση της δηλούμενης από τους γονείς εμπλοκή με την τάξη και με το μορφωτικό κεφάλαιο είναι αντίστοιχη με της αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής. Από την άλλη, η συστημική σύγκριση φανέρωσε ότι η σχέση αντιλαμβανόμενης και δηλούμενης γονικής εμπλοκής παραμένει σχετικά σταθερή στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου και ανεξάρτητα των γραμματικών γνώσεων των γονέων. Συνεπώς, αν και υπάρχει διαφοροποίηση σχετικά με την τάξη και το μορφωτικό κεφάλαιο ως προς τη γονική εμπλοκή, αυτή δεν επηρεάζει τις αποκλίσεις των δύο κατασκευών. Αξιοσημείωτη διαφορά σε αυτό το μοτίβο αποτελεί η πτωτική έως μηδενισμού διαφορά στις δύο κατασκευές για την πατρική γονική εμπλοκή.

Με αφορμή αυτό το εύρημα φανερώνεται μια έμφυλη διαφοροποίηση σε σχέση με τη γονική εμπλοκή του πατέρα. Φαίνεται ότι η πατρική γονική εμπλοκή είναι εντονότερη τόσο ως δηλούμενη, όσο και ως αντιλαμβανόμενη. Βάσει των προαναφερθέντων, του γεγονότος ότι οι συστημικές διερευνήσεις αφορούν μόνο τον γονέα που συμπλήρωσε το ερωτηματολόγιο, καθώς και της υπόθεσης ότι ο γονέας που συμπλήρωσε το ερωτηματολόγιο συνιστά τον γονέα που εμπλέκεται περισσότερο στην μάθηση για τα μαθηματικά, υποστηρίζεται ότι υπάρχει ποιοτική και ποσοτική διαφοροποίηση στην πατρική γονική εμπλοκή: καταγράφεται ως εντονότερη και με μεγαλύτερο βαθμό επηρεασμού στις κατασκευές των παιδιών. Επιπροσθέτως, οι στατιστικώς σημαντικές θετικές συσχετίσεις του βαθμού του διαγωνίσματος με τη συνολική αντιλαμβανόμενης γονική εμπλοκή και μόνο με του πατέρα, ενισχύει τη διαφοροποίηση ως προς τους δύο γονείς. Τέλος, οι μη στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις ως προς το φύλο του παιδιού σε συνδυασμό με τη σύγκλιση των κατασκευών των κοριτσιών και των μητέρων σε σχέση με τη στάση και τη βοήθεια της μητέρας (εν αντιθέσει με τα αγόρια), φαίνεται να ενισχύει την προηγούμενη υπόθεσή μας, τονίζοντας τη σημασία της συστημικής διερεύνησης των έμφυλων διαφοροποιήσεων σε παιδιά *και* γονείς.

Συμπερασματικά, η προτεινόμενη συστημική οπτική ενίσχυσε τα περιγραφικά και επεξηγηματικά ερευνητικά μας εργαλεία, αποκαλύπτοντας ταυτόχρονα την πολυπλοκότητα των σχέσεων και των μεταβάσεων που ενυπάρχουν. Ιδιαίτερα ενισχύθηκε ο ισχυρισμός για ποιοτικές και ποσοτικές διαφοροποιήσεις στους τρόπους που κατασκευάζεται η εμπλοκή του πατέρα και της μητέρας από τους γονείς και από παιδιά. Συνεπώς, προτείνεται η περαιτέρω συστημική διερεύνηση αυτών των σχέσεων με στόχο τη βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης του παιδιού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bertalanffy, L. V. (1968). *General System Theory: Foundations, Development, Applications*. NY: George Braziller.

Cai, J.· Moyer, J., & Wang, N. (1997, March), *Parental Roles in Students' Learning of Mathematics: An Exploratory Study*. Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, USA. Retrieved from ERIC database. (ED 412187)

Campbell, J., & Mandel, F. (1990). Connecting math achievement to parental influences. *Contemporary Educational Psychology, 15*, 64-74.

Cao, Z., Bishop, A., & Forgasz, H. (2006). Perceived parental influence on mathematics learning: A comparison among students in China and Australia. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 85-106.

Cooper, H., Robinson, J. C., & Patall, E. A. (2006). Does homework improve academic achievement? A synthesis of research, 1987-2003. *Review of Educational Research, 76*(1), 1-62.

Dowling, E., & Osborne, E. (2001). *Η οικογένεια και το σχολείο*. Αθήνα: Gutenberg.

Epstein, J. (1995). School, family, community partnerships: caring for the children we share. *Phi Delta Kappan, 76*, 701-712.

Galindo,C. & Sheldon,S.(2012). School and home connections and children's kindergarten achievement gains: The mediating role of family involvement. *Early Childhood Research Quarterly, 27*, 90-103.

Ho Sui-Chu, E. & Willms, J. D. (1996). Effects of parental involvement on eighth-grade achievement. *Sociology of Education, 69*, 126-141.

Hyde, J. S., Else-Quest, N. M., Alibali, M. W., Knuth, E., & Romberg, T. (2006). Mathematics in the home: Homework practices and mother-child interactions doing mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 136-152.

Καρκαζή, Ε., & Νικολαντωνάκης, Κ., (2014). Σχολείο, μαθηματικά, οικογένεια υπό το πρίσμα της συστημικής προσέγγισης: μια μελέτη περίπτωσης. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 7*, 51-66.

Kline, P. (1999). *The handbook of psychological testing*. London: Routledge.

Λεμονίδης, Χ., Μαρκάδας, Σ., & Τσακιρίδου, Ε. (2011). Ένα μοντέλο για τον προσδιορισμό της γονεϊκής εμπλοκής των Ελλήνων γονέων στην εκπαίδευση των παιδιών τους στα μαθηματικά. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 6*, 61-80.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., Χαβιάρης, Π., & Καφούση, Σ. (2014). Οι αντιλήψεις μαθητών δημοτικών σχολίων για τη γονική εμπλοκή στα μαθηματικά σε διαφορετικές σχολικές κοινότητες. *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*. Φλώρινα, Ελλάδα: ΕνΕΔιΜ.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Καλαβάσης, Φ. (2014). *Ένα συν-αναπτυσσόμενο μεθοδολογικό-θεωρητικό πλαίσιο διασυστημικής πολυεστιακής οπτικής για τη διερεύνηση των σχέσεων Διδακτικής Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης*. Διάλεξη στο Ερευνητικό Συμπόσιο ‘Η σχέση Διδακτικής των Μαθηματικών με τη Μαθηματική Εκπαίδευση - Συστημικές Διερευνήσεις’, 30 Μαΐου, Αθήνα.

Σκουμπουρδή, Χ., Τάτσης, Κ., & Καφούση, Σ. (2009). Απόψεις γονέων, παιδιών νηπιαγωγείου, για την εμπλοκή των Μαθηματικών σε καθημερινές δραστηριότητες και παιχνίδια. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 131-140). Ρόδος, Ελλάδα: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Τσαμπαρλή, Α. (2009). Τα μεταβλητά σύνορα του συστήματος της οικογένειας με την εκπαίδευση. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 3-16). Ρόδος, Ελλάδα: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΩΣ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ· ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΥΟ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

Διονυσία Μπακογιάννη, Βασίλης Καραγιάννης, Μιχάλης Κασκαντάμης, Αριστείδης Φαλαγκάρας, Αρετή Ευσταθίου, Πέρυ Πάσχου, Αθανασία Ιγγλέζου

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

dbakogianni@math.uoa.gr, vasilis_karagiannis@yahoo.gr, mijalis.atenas@gmail.com, afalagaras@gmail.com, ma7888th@yahoo.gr, colomba_pr@hotmail.com, igglezou88@yahoo.com

Η έννοια της μέσης τιμής αποτελεί κεντρική έννοια της στατιστικής στα σχολικά μαθηματικά. Σχετικές έρευνες έχουν δείξει ότι η προσέγγιση της έννοιας μέσα από τη σύνδεσή της με το σημείο ισορροπίας, ευνοεί τον εννοιολογικό σχηματισμό της. Στην παρούσα μελέτη εφαρμόσαμε αυτήν την προσέγγιση σε μαθητές Γυμνασίου, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά διδακτικά εργαλεία, έναν χάρακα και γόμες και ένα ψηφιακό εργαλείο που προσομοιώνει τη δοκό ισορροπίας. Στα αποτελέσματα παρουσιάζονται διαφοροποιήσεις σχετικά με τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας στην οποία ενεπλάκησαν οι μαθητές στις δύο περιπτώσεις και συζητιούνται πλεονεκτήματα αλλά και περιορισμοί από τη χρήση αυτών των εργαλείων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέση τιμή αποτελεί κεντρική έννοια για την ανάλυση δεδομένων και τη λήψη αποφάσεων. Πέρα από τη σημασία της για τη στατιστική, η έννοια της μέσης τιμής είναι επίσης κυρίαρχη στην καθημερινή ζωή και αποτελεί βασική έννοια σε όλα τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα (π.χ. NCTM, 2000). Παρά το γεγονός ότι η έννοια φαίνεται απλή στην κατανόησή της, μεγάλος όγκος ερευνών στη διεθνή βιβλιογραφία έχει αναδείξει δυσκολίες μαθητών που σχετίζονται με την έννοια της μέσης τιμής (π.χ. Cai, 2000; Makar & Rubin, 2007). Η έμφαση που δίνεται στην ικανότητα εφαρμογής του αλγορίθμου, φαίνεται να λειτουργεί περιοριστικά για την βαθύτερη κατανόησης της έννοιας και τη χρήση της σε καταστάσεις προβλημάτων. Από την άλλη, η εννοιολογική κατανόηση της μέσης τιμής φαίνεται να ενισχύεται από τη σύνδεση της έννοιας με την έννοια του σημείου ισορροπίας (*balance point*) (π.χ. Mokros & Russel, 1995; Flores, 2008; O'Dell, 2012).

Στόχος της παρούσης εργασίας είναι να μελετήσει την ανάπτυξη της σύνδεσης της μέσης τιμής με το σημείο ισορροπίας σε μαθητές Γυμνασίου μέσα από δύο διαφορετικά εργαλεία: ένα φυσικό μοντέλο με χάρακα και γόμες και ένα ψηφιακό εργαλείο. Συγκεκριμένα εξετάζουμε:

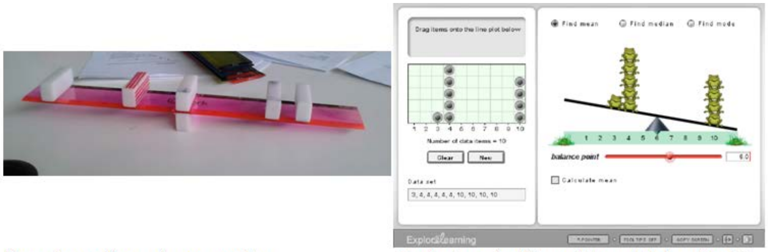
(i) πως διαφοροποιούνται τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας στην οποία ενεπλάκησαν οι μαθητές στις δύο περιπτώσεις και
(ii) πλεονεκτήματα και περιορισμούς των δύο αυτών εργαλείων στην διαδικασία ανάπτυξης της έννοιας της μέσης τιμής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι Pollatsek, Lima και Well (1981), βασιζόμενοι στο διαχωρισμό του Skemp (1979) για την *εργαλειακή* και τη *σχεσιακή* κατανόηση μίας έννοιας, προτείνουν ότι η έννοια της μέσης τιμής εκπροσωπείται από τρεις τύπους γνώσης: την *υπολογιστική* (*computational*), την *αναλογική* (*analog*) και τη *λειτουργική* (*functional*). Η *υπολογιστική* γνώση συνίσταται στο να γνωρίζει ο μαθητής τον αλγεβρικό τύπο της μέσης τιμής και να είναι σε θέση να τον εφαρμόσει με ορθό τρόπο. Η *αναλογική* γνώση περιλαμβάνει την κιναισθητική εικόνα της μέσης τιμής ως σημείο ισορροπίας, όπου η μέση τιμή αναπαριστά αναλογικά την τιμή όπου τα δεδομένα 'ισορροπούν' ή πιο αφηρημένα το σημείο γύρω από το οποίο οι αποστάσεις των δεδομένων αλληλοεξουδετερώνονται. Η *λειτουργική* γνώση συνίσταται στην κατανόηση της μέσης τιμής μέσα σε ένα πραγματικό πλαίσιο προβλήματος, όπου χρειάζεται κανείς να λάβει υπόψη τους περιορισμούς που καθορίζονται από το πλαίσιο του προβλήματος. Στο σχήμα που προτείνουν οι Pollatsek et.al. γίνεται εμφανές ότι η υπολογιστική γνώση της μέσης τιμής, είναι αρκετά περιοριστική για την σχεσιακή κατανόηση της έννοιας καθώς δεν βοηθάει το μαθητή να εμβαθύνει στις ιδιότητές της, αλλά ούτε και να την χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά μέσα σε ένα πραγματικό πλαίσιο.

Ο Flores (2008) συσχετίζει πέντε ιδιότητες της μέσης τιμής με ιδιότητες που προκύπτουν σε ένα σύστημα ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα: (α) Η μέση τιμή τοποθετείται ανάμεσα στις ακραίες τιμές/Το σημείο ισορροπίας τοποθετείται ανάμεσα στα ακραία βάρη (β) Το άθροισμα των προσημασμένων αποστάσεων από τη μέση τιμή είναι μηδέν/Το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται με αναφορά το σημείο ισορροπίας είναι μηδέν (γ) Η μέση τιμή επηρεάζεται από τιμές που διαφέρουν από αυτήν/Το σημείο ισορροπίας αλλάζει όταν προστεθεί κάποιο βάρος σε σημείο διαφορετικό από το σημείο ισορροπίας (δ) Η μέση τιμή δεν ισούται κατ' ανάγκη με κάποιο από τα δεδομένα που συμμετέχουν στον υπολογισμό της/Το σημείο ισορροπίας δεν ταυτίζεται απαραίτητα με τη θέση στην οποία βρίσκεται κάποιο από τα βάρη (ε) Η μέση τιμή αντιπροσωπεύει τις τιμές του συνόλου των δεδομένων/Οποιαδήποτε δράση στο σημείο ισορροπίας ισοδυναμεί με δράση σε όλο το σύστημα ισορροπίας (Flores, 2008, σελ. 747-748). Σύμφωνα με τον Flores η ανάπτυξη αυτής της αναλογίας υποστηρίζει την κατανόηση των ιδιοτήτων της μέσης τιμής και αποτελεί βασική προϋπόθεση για τη μεταφορά σε πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα σταθμισμένων μέσων.

Στη διεθνή βιβλιογραφία η προσέγγιση αυτή υποστηρίζεται με διάφορα διδακτικά εργαλεία (στατικές εικόνες, φυσικά μοντέλα, ψηφιακά εργαλεία). Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιήθηκαν δύο διδακτικά εργαλεία. Το ένα είναι ένα φυσικό μοντέλο με χάρακα και γόμες κατ' αντιστοιχία με το μοντέλο που προτείνει ο O' Dell (2012) ενώ στην άλλη περίπτωση χρησιμοποιήθηκε το ψηφιακό εργαλείο Explore Learning Gizmos 'Mean, Median and Mode' (Explore Learning, 2014) που προσομοιώνει τη δοκό ισορροπίας σε διάφορες θέσεις της οποίας μπορούν να τοποθετηθούν βατραχάκια (βλ. Εικόνα 1.). Το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε πλεονεκτήματα και περιορισμούς των δύο εργαλείων, αλλά και σε διαφοροποιήσεις σε σχέση με τη δραστηριότητα των μαθητών στην τάξη. Στο εξής θα αναφερόμαστε στην παρέμβαση όπου χρησιμοποιήθηκε ο χάρακας και οι γόμες ως παρέμβαση Ι και στην παρέμβαση όπου χρησιμοποιήθηκε το ψηφιακό εργαλείο ως παρέμβαση ΙΙ.



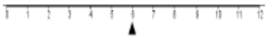
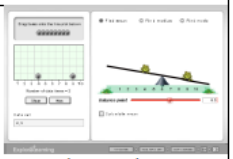
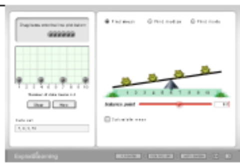
Φυσικό μοντέλο με χάρακα και γόμες

ExploreLearning Gizmos 'Mean, Median, Mode'

Εικόνα 1. Τα δύο εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στις παρεμβάσεις που έγιναν

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας στο πλαίσιο μιας *ομάδας μελέτης* (*study group*) (Arbaugh, 2003), η οποία διερευνά το περιεχόμενο και τη διδασκαλία της στατιστικής. Στο παρόν εστιάζουμε σε ένα μέρος αυτής της έρευνας, όπου η ομάδα πειραματίστηκε με την ιδέα της σύνδεσης της μέσης τιμής με την έννοια του σημείου ισορροπίας. Στη μελέτη αυτή συμμετείχαν έξι μαθηματικοί με μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική των Μαθηματικών, εκ των οποίων οι τρεις υπηρετούν στη δημόσια εκπαίδευση για περισσότερα από 10 χρόνια, καθώς και μία ερευνήτρια της Διδακτικής των Μαθηματικών (βλ. συγγραφική ομάδα). Ο σχεδιασμός των δύο παρεμβάσεων ήταν αποτέλεσμα συνεργασίας όλων των μελών της ομάδας. Η εφαρμογή έγινε σε μαθητές Γυμνασίου και συγκεκριμένα η παρέμβαση Ι πραγματοποιήθηκε σε όλα τα τμήματα της Β' Γυμνασίου (85 μαθητές) στα οποία δίδασκε ο 2ος συγγραφέας (διάρ. 2 ώρες στο κάθε τμήμα) και η παρέμβαση ΙΙ πραγματοποιήθηκε σε Τμήμα Α' Γυμνασίου (26 μαθητές) στο οποίο δίδασκε ο 4ος συγγραφέας (διάρ. 3 ώρες). Οι παρεμβάσεις ηχογραφήθηκαν ενώ παράλληλα κρατήθηκαν και σημειώσεις πεδίου από τα μέλη της ομάδας που συμμετείχαν ως παρατηρητές (βλ. υπόλ. συγ. ομάδα). Η διαφοροποίηση στο εκπαιδευτικό επίπεδο των μαθητών θεωρούμε ότι δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της έρευνάς μας καθώς το υπόβαθρο των μαθητών σε στατιστικές έννοιες είναι ίδιο στις δύο περιπτώσεις.

Κατηγορία ερωτημάτων	Παραδείγματα ερωτημάτων στα δύο φύλλα εργασίας των μαθητών	
	Μοντέλο χάρακα	ExploreLearning Gizmos
(α)	Τοποθετήστε τρεις γόμες επάνω στο χάρακα, όχι στο σημείο ισορροπίας, ώστε ο χάρακας να ισορροπεί. Καταγράψτε τους τρεις αριθμούς: …………………… Σημειώστε τους με μια τελεία επάνω στον άξονα:  Τι νομίζετε ότι είναι ο αριθμός 6 γι' αυτούς τους τρεις αριθμούς; …………………………	Γιατί δεν ισορροπεί η διπλανή δοκός; Τι πρέπει να κάνουμε για να ισορροπήσει; *(με την προϋπόθεση ότι έχουμε μόνο δύο αριθμούς)* ……………………………………  Στην περίπτωση που ισορροπεί η δοκός , τι σχέση έχει το σημείο ισορροπίας της δοκού με τη μέση τιμή των δύο αριθμών; …………….
(β)	Τοποθετήστε δύο γόμες επάνω στο χάρακα ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία του. Τοποθετήστε άλλες δύο γόμες ώστε και πάλι να διατηρηθεί η ισορροπία του. Γράψτε τους τέσσερις αριθμούς: ………………………… Σημειώστε τους με μια τελεία επάνω στον άξονα: 	Στην περίπτωση που ισορροπεί η δοκός, προτείνετε δύο αριθμούς ώστε να διατηρείται η ισορροπία……………………………………………………………………
(γ)	Τοποθετήστε τέσσερις λευκές γόμες στους αριθμούς 2, 5, 6 και 11 και διαπιστώστε ότι ο χάρακας ισορροπεί. Βάλτε την κόκκινη γόμα στον αριθμό 8. Ο χάρακας δεν ισορροπεί πλέον. Μετακινήστε **μόνο μία** από τις τέσσερις λευκές γόμες ώστε να επανέλθει η ισορροπία και σημειώστε τη μετακίνηση που κάνατε επάνω στον άξονα: 	 Προσπαθήστε να δημιουργήσετε ισορροπία στο σημείο 6, αλλάζοντας μόνο ένα από τα δεδομένα που σημειώνονται.
(δ)	Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εκτιμήσετε σε ποιο σημείο του άξονα βρίσκεται η μέση τιμή των δεδομένων και να τη σημειώσετε με ▲ (κοινή και στα δύο φύλλα) 	

Πίνακας 1. Παραδείγματα ερωτημάτων από τα φύλλα εργασίας

Οι δύο παρεμβάσεις. Στην παρέμβαση Ι οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων και κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της ένα χάρακα, έξι λευκές γόμες και μία κόκκινη ίδιου μεγέθους, καθώς και ένα φύλλο εργασίας στο οποίο απαντούσαν οι μαθητές ως ομάδα. Στην παρέμβαση ΙΙ οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε ομάδες των πέντε ατόμων. Οι μαθητές απαντούσαν ως ομάδα στο φύλλο εργασίας που τους είχε δοθεί και στη συνέχεια ο διδάσκων, χρησιμοποιώντας το ψηφιακό εργαλείο σε διαδραστικό πίνακα, επιβεβαίωνε ή διέψευδε την ορθότητα της απάντησης κάθε φορά. Δεδομένου ότι τα δύο εργαλεία διαφέρουν ως προς τις δυνατότητες που παρέχουν, τα ερωτήματα στα φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές δεν ήταν ακριβώς τα ίδια στις δύο περιπτώσεις (για το λόγο αυτό υπάρχει και διαφοροποίηση στη διάρκεια των δύο παρεμβάσεων). Η δομή και των δύο φύλλων εργασίας βασίστηκε στους εξής τύπους ερωτήσεων: (α) ερωτήματα που αφορούν τη σύνδεση της τιμής που αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή με την τιμή που αντιπροσωπεύει το σημείο ισορροπίας (β) ερωτήματα όπου τα βάρη (γόμες/βατραχάκια) ήταν ή μπορούσαν να τοποθετηθούν συμμετρικά γύρω από το σημείο ισορροπίας (γ) ερωτήματα όπου τα βάρη δεν ήταν ή δεν μπορούσαν να τοποθετηθούν συμμετρικά γύρω από το σημείο ισορροπίας (δ) ερωτήματα όπου οι μαθητές καλούνταν να χρησιμοποιήσουν την ιδέα της ισορροπίας προκειμένου να βγάλουν συμπεράσματα για τη μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται παραδείγματα για τους διάφορους τύπους ερωτήσεων.

Δεδομένα και πορεία ανάλυσης. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την παρούσα μελέτη είναι τα φύλλα εργασίας που διαμορφώθηκαν από την ομάδα συγγραφέων, οι ηχογραφήσεις και οι σημειώσεις πεδίου που αφορούν στη δουλειά που έγινε με τους μαθητές καθώς και τα απαντητικά φύλλα που συμπλήρωσαν οι ομάδες των μαθητών.

Τα δεδομένα αναλύθηκαν ποιοτικά ως εξής: (i) αρχικά προσδιορίσαμε τα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες των δύο διδακτικών εργαλείων, (ii) στη συνέχεια αναλύσαμε τις δράσεις των μαθητών και προσπαθήσαμε να διακρίνουμε διαφοροποιήσεις που υπήρχαν στις δύο παρεμβάσεις (π.χ. διαφορές στον βαθμό πειραματισμού τους με το μοντέλο ή στις στρατηγικές που ανέπτυξαν) (iii) τέλος αναλύσαμε τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές προσπαθώντας να προσδιορίσουμε συνδέσεις ή κατανοήσεις που φαίνεται να αναπτύσσονται και να εντοπίσουμε περιορισμούς που φαίνεται να υπάρχουν στην εννοιολογική ανάπτυξη της έννοιας της μέσης τιμής στις δύο περιπτώσεις.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διαφοροποιήσεις στη δραστηριότητα των μαθητών

Οι βασικές διαφοροποιήσεις που προσδιορίστηκαν σε σχέση με τη δραστηριότητα των μαθητών συνοψίζονται στον Πίνακα 2. ακολούθως.

Βασικά σημεία διαφοροποίησης στα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας	Περιγραφή της δράσης των μαθητών σε κάθε περίπτωση	
	Μοντέλο Χάρακα	ExploreLearning Gizmos
Πειραματισμός με το μοντέλο	Άμεσα, τοποθετώντας γόμες σε διάφορες θέσεις και διερευνώντας τις αλλαγές στο σύστημα ισορροπίας	Έμμεσα, αναπτύσσοντας μία εικασία σχετικά με την αλλαγή που μπορεί να φέρει στο σύστημα ισορροπίας η επιλεγμένη αλλαγή στη θέση κάποιου βατράχου
Βαθμός διαπραγμάτευσης μέσα στις ομάδες των μαθητών	Περιορισμένη διαπραγμάτευση καθώς η ισορροπία στο χάρακα ήταν πολύ ισχυρή, δεν υπήρχε ανάγκη για περαιτέρω αιτιολόγηση	Υψηλός βαθμός διαπραγμάτευσης. Το γεγονός ότι η ομάδα έπρεπε να συμφωνήσει σε μία απάντηση χωρίς να μπορεί να ελέγξει πειραματικά τις εικασίες της ευνοούσε το διάλογο και τη διαπραγμάτευση μέσα στην ομάδα
Κυρίαρχες στρατηγικές	Πειραματισμός / Αιτιολόγηση με προσημασμένες αποστάσεις	Χρήση του αλγεβρικού τύπου/Αιτιολόγηση με προσημασμένες αποστάσεις

Πίνακας 2. Διαφοροποιήσεις σε σχέση με τη δραστηριότητα των μαθητών

Ο πειραματισμός των μαθητών με το σύστημα ισορροπίας αποτέλεσε κυρίαρχη επιδίωξη και στις δύο παρεμβάσεις. Στην παρέμβαση Ι οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να πειραματιστούν άμεσα με το μοντέλο, ενώ στην παρέμβαση ΙΙ έμμεσα. Ο βαθμός πειραματισμού με το μοντέλο της ισορροπίας συντέλεσε στη διαφοροποίηση σε σχέση με το βαθμό διαπραγμάτευσης μέσα στις ομάδες των μαθητών αλλά και τις στρατηγικές τις οποίες ακολούθησαν προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτήματα του φύλλου εργασίας.

Συγκεκριμένα στην παρέμβαση Ι το επίπεδο διαπραγμάτευσης μέσα στις ομάδες ήταν περιορισμένο καθώς από τη στιγμή που αποκαθιστούσαν οι μαθητές την ισορροπία στο σύστημα δεν υπήρχε η ανάγκη για περαιτέρω αιτιολόγηση. Ο παρακάτω διάλογος, πάνω στο ερώτημα (γ) της Παρέμβασης Ι που φαίνεται στον Πίνακα 1 είναι χαρακτηριστικός:

Μ1: Λέει αλλάξτε μόνο μία λευκή γόμα ώστε να επανέλθει η ισορροπία.

Μ2: Αυτή πρέπει από εδώ (*από το 11 στο 9*).

Μ3: Ωπ, ωπ.. (*προσπαθεί να σταθεροποιήσει το χάρακα*). Ναι, αλλά μπορείς να μετακινήσεις αυτό από εδώ.. (*δείχνει το 2*)

Μ2: Εντάξει, ισορροπεί ισορροπεί. (*δεν προσέχει τι είπε ο συμμαθητής της, κοιτάει αν η επιλογή που έκαναν επιβεβαιώθηκε*)

Μ3: Ωραία. (*πείθεται ότι είναι σωστό και παραιτείται*)

Από την άλλη πλευρά, στην παρέμβαση ΙΙ, οι μαθητές δεν είχαν τη δυνατότητα να πειραματιστούν με το μοντέλο άμεσα. Έτσι προκειμένου να απαντήσουν σε μία ερώτηση χρειαζόταν να προβλέψουν τις μεταβολές του συστήματος ισορροπίας και η συμφωνία σε μία απάντηση δημιουργούσε διαπραγμάτευση και συζήτηση μέσα στις ομάδες των μαθητών. Χαρακτηριστικός είναι ο διάλογος των μαθητών μίας ομάδας σε σχέση με το ερώτημα (α) του Πίνακα 1.

Μ1: Είναι σε λάθος σημείο η ισορροπία. Πρέπει να μετακινήσουμε το σ.ι. στο 5,5.

Μ2: Στο 5,5 θα ισορροπεί?.

Μ1: Ναι γιατί θα είναι 1,2,3,4 (*μετράει τις θέσεις*) από εδώ και 4 από την άλλη.

Μ2: Να μεταφέρουμε το βατραχάκι (εννοεί αυτό που είναι στη θέση 9) στο 8.

Μ3: Αφού το σ.ι. πρέπει να είναι στη μέση.

Μ4: Κοίτα από εδώ είναι 1,2,3 (*μετράει τις θέσεις*) από την άλλη είναι 2, αν το μετακινήσουμε στο 5,5..

Μ5: Μη γράφεις ακόμα, να είμαστε σίγουροι.

Μ4: Αφού το ένα είναι στο 4, αν βάλουμε το άλλο στο 8 θα γυρίσει έτσι (*δείχνει προς τα αριστερά*) και θα προκύψει ισορροπία. Ποιος συμφωνεί με εμένα. Να ψηφίσουμε.

Η συζήτηση των μαθητών συνεχίζεται για λίγα λεπτά, οι κυρίαρχες απόψεις σε διαπραγμάτευση είναι αυτές των Μ1 και Μ4 και τελικά η ομάδα συμφωνεί στην άποψη του Μ4 και καταγράφεται στο φύλλο εργασίας.

Επιπλέον, μια διαφοροποίηση που παρατηρήθηκε ήταν σε σχέση με τις στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές. Στην παρέμβαση Ι, αρχικά όλες οι ομάδες δούλευαν πειραματιζόμενοι πάνω στο χάρακα καταλήγοντας σε απαντήσεις που δικαιολογούσαν είτε εμπειρικά, είτε χρησιμοποιώντας την έννοια της συμμετρίας. Από το σημείο της παρέμβασης όπου δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η συμμετρία, η στρατηγική που βαθμιαία κυριάρχησε σε όλες τις ομάδες ήταν ο υπολογισμός των αποστάσεων εκατέρωθεν του σημείου ισορροπίας. Ενδιαφέρον είχε η αιτιολόγηση ενός μαθητή ο οποίος δικαιολογώντας το σκεπτικό του είπε: "*εγώ σκέφτηκα ότι ο χάρακας έτσι όπως είναι κέντρο το 6 θα το κάνουμε 0, όπως είναι οι αρνητικοί με τους θετικούς*". Στην παρέμβαση ΙΙ οι μαθητές δεν είχαν τη δυνατότητα να επιβεβαιώσουν πειραματικά αν η απάντησή τους ήταν ορθή ή λανθασμένη προτού την αναγγείλουν στην ολομέλεια. Σε αυτήν την περίπτωση οι ομάδες κατέφευγαν κυρίως στον αλγεβρικό τύπο της μέσης τιμής, είτε για να βρουν την απάντηση είτε για να επαληθεύσουν το αποτέλεσμα που βρήκαν χρησιμοποιώντας προσημασμένες αποστάσεις. Μία ομάδα μαθητών δούλεψε αποκλειστικά με προσημασμένες αποστάσεις, ενώ σε μία άλλη ομάδα προσπαθούσαν να βρουν την απάντηση δουλεύοντας με συμμετρικά ζευγάρια. Οι τελευταίοι όταν διαπίστωσαν ότι δεν μπορούν να δουλέψουν με συμμετρία σε κάποια ερωτήματα κατέφυγαν στην χρήση του αλγεβρικού τύπου.

Αναπτύσσοντας *αναλογική γνώση* για τη μέση τιμή

Ένα κρίσιμο σημείο στις δύο παρεμβάσεις ήταν η μετάβαση από συμμετρικές διατάξεις σε μη συμμετρικές. Οι μαθητές εύκολα τοποθετούσαν τα αντικείμενα σε συμμετρικές θέσεις και δούλευαν με συμμετρικά ζευγάρια, έχοντας στο μυαλό τους περισσότερο το μοντέλο της ζυγαριάς παρά ένα σύστημα ισορροπίας. Στα ερωτήματα όμως όπου δεν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τη συμμετρία, έπρεπε να χρησιμοποιήσουν διαφορετικά εργαλεία. Στην αρχή, η μετάβαση αυτή φάνηκε να δημιουργεί δυσκολία, έτσι αρκετοί μαθητές στο σημείο αυτό εργάστηκαν με πειραματισμό οδηγούμενοι σε εμπειρικό αποτέλεσμα (κυρίως στην παρέμβαση Ι όπου είχαν τη δυνατότητα άμεσου πειραματισμού) ή επέμειναν στη συμμετρική διάταξη οδηγούμενοι σε λανθασμένη απάντηση (κυρίως στην παρέμβαση ΙΙ όπου δεν μπορούσαν να διαπιστώσουν την ορθότητα ή μη της απάντησης). Παρόλα αυτά, στην πορεία του φύλλου εργασίας και στις δύο περιπτώσεις οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να αναπτύξουν κάποια στρατηγική προκειμένου να απαντήσουν ορθά και φάνηκε να μεταβαίνουν σταδιακά από το συμμετρικό μοντέλο της ζυγαριάς στο πιο σύνθετο μοντέλο της ισορροπίας.

Και οι δύο παρεμβάσεις φάνηκε να βοηθούν στο να προσδιορίσουν οι μαθητές τις ιδιότητες της μέσης τιμής όπως παρουσιάζονται στο θεωρητικό πλαίσιο του παρόντος (βλ. Flores, 2008). Ολοκληρώνοντας μάλιστα το φύλλο εργασίας στην παρέμβαση ΙΙ και συνοψίζοντας το συμπέρασμα με τις προσημασμένες αποστάσεις, μία μαθήτρια επεμβαίνει και λέει: "*Έχουμε κι άλλο συμπέρασμα κύριε, ότι οι ακραίες τιμές μπορούν να επηρεάσουν κατά πολύ την ισορροπία της δοκού και ότι η μέση τιμή να είναι ίδια με το σημείο ισορροπίας*" δείχνοντας ότι έχει κατανοήσει τόσο την επιθυμητή σύνδεση, όσο και τον τρόπο που επιδρούν οι ακραίες τιμές σε μία κατανομή δεδομένων. Η σύνδεση αυτή φάνηκε να βοηθά την πλειοψηφία των μαθητών να αναπτύξουν ένα νέο εργαλείο, πέρα από τον αλγεβρικό τύπο, προκειμένου να μπορούν να εκτιμήσουν τη μέση τιμή σε μία κατανομή δεδομένων. Χαρακτηριστικά, στο ερώτημα (δ) του Πίνακα 1 όλοι οι μαθητές, και στις δύο παρεμβάσεις, απάντησαν σωστά δουλεύοντας με προσημασμένες αποστάσεις.

Και τα δύο εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν φάνηκε να είναι ισχυρά στο να υποστηρίξουν την σύνδεση της μέσης τιμής με το σημείο ισορροπίας. Ειδικότερα όμως το εργαλείο με το χάρακα και τις γόμες φάνηκε να είναι καθοριστικό στον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές κάτι που δεν ήταν τόσο έντονο στην περίπτωση με το ψηφιακό εργαλείο. Συγκεκριμένα, η επίδραση του βάρους της γόμας επάνω στον χάρακα και ταυτόχρονα η απόσταση από το σημείο ισορροπίας, αποτελούσε κυρίαρχο σχήμα στο μυαλό των μαθητών οι οποίοι κατά κύριο λόγο αιτιολογούσαν με γλώσσα επηρεασμένη από το φυσικό μοντέλο, χαρακτηριστικές είναι οι εκφράσεις "*από εδώ είναι πιο βαρύ*", "*όσο πιο μακριά είναι η γόμα τόσο πιο βαριά γίνεται*" (εννοώντας ότι επιδρά ισχυρότερα).

Περιορισμοί

Μέσα από την ανάλυση αναδείχθηκαν κάποιοι περιορισμοί που σχετίζονται κυρίως με τα χαρακτηριστικά και τις δυνατότητες που έχουν τα δύο εργαλεία (βλ. Πίνακα 2). Συγκεκριμένα στην παρέμβαση Ι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς το γεγονός ότι το σημείο ισορροπίας ταυτίζεται πάντα με το κέντρο του χάρακα, χωρίς να μπορεί να μετακινηθεί, μπορεί να δημιουργήσει στους μαθητές την εσφαλμένη εντύπωση ότι η μέση τιμή βρίσκεται στο μέσο του εύρους των τιμών. Από την άλλη στην παρέμβαση ΙΙ, αν και μπορεί να μετακινηθεί το σημείο ισορροπίας σε οποιοδήποτε σημείο της δοκού, εντούτοις υπάρχει μία ομοιομορφία στον τρόπο που παρουσιάζεται κάποια μεταβολή στο σύστημα ισορροπίας. Για παράδειγμα αν η δοκός ισορροπεί στο 6 τότε, είτε τοποθετηθεί κάποιο βατραχάκι στο 6,5 είτε τοποθετηθεί στο 10, η δοκός θα κινηθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Το σημείο αυτό χρειάζεται προσοχή καθώς δεν βοηθά το μαθητή να κατανοήσει τον τρόπο που επιδρά στη μέση τιμή, μια τιμή κοντά σε αυτήν ή μία ακραία τιμή.

	Μοντέλο Χάρακα	**ExploreLearning Gizmos**
Εύρος τιμών	0-12	1-10
Αριθμός δεδομένων	μέχρι 6 γόμες ίδιου μεγέθους	μέχρι 10 βατραχάκια
Τοποθέτηση των τιμών	πάνω στο χάρακα	πάνω σε δοκό με δυνατότητα αρίθμησης
Χαρακτηριστικό του σημείου ισορροπίας	μένει σταθερό στο 6	μπορεί να μετακινηθεί σε οποιοδήποτε σημείο της δοκού
Φυσικά χαρακτηριστικά της δοκού	ο χάρακας έχει βάρος και η ομοιογένεια στο μήκος του υπόκειται σε σφάλματα	η δοκός δεν έχει βάρος και είναι ομοιογενής σε όλο το μήκος
Φυσικά χαρακτηριστικά των βαρών	η ομοιότητα των γομών σε μέγεθος και βάρος υπόκειται σε σφάλματα	τα βατραχάκια είναι όμοια σε βάρος και μέγεθος
Μέγιστος αριθμός βαρών που μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα σημείο	2	10

Πίνακας 2. Χαρακτηριστικά και δυνατότητες των δύο εργαλείων

Ένας επιπλέον περιορισμός που εντοπίστηκε και στις δύο παρεμβάσεις είναι ότι το πλήθος των τιμών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι αρκετά μικρό. Στην περίπτωση του χάρακα, λόγω της ευαισθησίας του μοντέλου στα βάρη που προστίθενται, αλλά και στην ανομοιόμορφη κατασκευή του ίδιου του χάρακα, ο αριθμός γομών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να λειτουργήσει το σύστημα ισορροπίας είναι πολύ μικρός. Ομοίως, στο ψηφιακό εργαλείο μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέχρι 10 τιμές. Με τον μικρό αριθμό δεδομένων δεν είναι εύκολο να αναπτύξει κανείς την έννοια της κατανομής των δεδομένων και να εστιάσει σε ζητήματα συγκέντρωσης ή απομάκρυνσης των τιμών από δεδομένο σημείο. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι τιμές είναι λίγες και ότι δεν αντιστοιχούν σε κάποιο πραγματικό πλαίσιο δεν δημιουργεί την ανάγκη για ερμηνεία της μέσης τιμής.

ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στη μελέτη αυτή χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικά διδακτικά εργαλεία προκειμένου να πετύχουμε τη σύνδεση της έννοιας της μέσης τιμής με το σημείο ισορροπίας. Στόχος μας ήταν να εντοπίσουμε διαφοροποιήσεις και περιορισμούς των δύο εργαλείων σε σχέση με την επιθυμητή εννοιολογική σύνδεση και γενικότερα με τη σχεσιακή ανάπτυξη της έννοιας της μέσης τιμής.

Η διδασκαλία της μέσης τιμής στα σχολικά μαθηματικά εστιάζεται κυρίως στην ανάπτυξη της *υπολογιστικής γνώσης* (Pollatsek, 1981) για την έννοια. Τα δύο διδακτικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν στις παρεμβάσεις της παρούσας εργασίας φάνηκε να υποστηρίζουν τη σύνδεση της μέσης τιμής με το σημείο ισορροπίας. Το ψηφιακό εργαλείο φάνηκε να έχει περισσότερες δυνατότητες, όπως μετακίνηση του κέντρου ισορροπίας, περισσότερα σημεία-βάρη, πολλαπλές αναπαραστάσεις (δοκός-σημειόγραμμα) που μπορούν να αξιοποιηθούν για την βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της μέσης τιμής. Από την άλλη, το φυσικό μοντέλο με το χάρακα και τις γόμες φάνηκε να είναι πολύ ισχυρό εργαλείο στη σύνδεση της μέσης τιμής με το σύστημα ισορροπίας και την βαθύτερη κατανόηση των κανόνων λειτουργίας αυτού του συστήματος. Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές φαίνεται να αναπτύσσουν ένα νέο εργαλείο για την έννοια της μέσης τιμής, το οποίο φάνηκε να τους βοηθά να κατανοήσουν τις ιδιότητές της αλλά και να μεταβούν από το μοντέλο της συμμετρίας, που είναι κυρίαρχο στο μυαλό των μαθητών(O’Dell, 2012), στο μοντέλο της ισορροπίας. Και στις δύο περιπτώσεις οι μαθητές φαίνεται να αναπτύσσουν *αναλογική γνώση* για τη μέση τιμή (Pollatsek, 1981) αποκτώντας ένα νέο εργαλείο για την έννοια το οποίο φάνηκε να τους βοηθά να κατανοήσουν τις ιδιότητες της μέσης τιμής αλλά και να μεταβούν από το μοντέλο της συμμετρίας, που είναι κυρίαρχο στο μυαλό των μαθητών, στο μοντέλο της ισορροπίας (O’Dell, 2012).

Η σχεσιακή ανάπτυξη της έννοιας της μέσης τιμής, όπως προτείνουν οι Pollatsek et.al. (1981), περιλαμβάνει επιπλέον την ανάπτυξη της *λειτουργικής* *γνώσης* για τη μέση τιμή. Λόγω των περιορισμών που αναδείχθηκαν μέσα από την παρούσα μελέτη, η προσέγγιση αυτή, τόσο στην περίπτωση με το χάρακα αλλά και στην περίπτωση με το ψηφιακό εργαλείο, φαίνεται να μην επαρκεί για την ανάπτυξη της λειτουργικής γνώσης, η οποία υποστηρίζεται μέσα από τη διαχείριση πραγματικών δεδομένων, την ερμηνεία της έννοιας μέσα σε ένα πραγματικό πλαίσιο και την κατανόηση της μεταβλητότητας των δεδομένων. Παρόλα αυτά, η δημιουργία της σύνδεσης που επιτεύχθηκε με τα δύο διδακτικά εργαλεία, διευρύνει την εικόνα της μέσης τιμής, προσθέτοντας νέες αναπαραστάσεις και εννοιολογικές συνδέσεις, διαμορφώνοντας μία βάση για τη σχεσιακή ανάπτυξη της έννοιας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arbaugh, F. (2003). Study groups as a form of professional development for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(2), 139-163.

Cai, J. (2000). Understanding and representing the arithmetic averaging algorithm: An analysis and comparison of U.S. and Chinese students' responses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 839-855.

Explore Learning. (2014). *Lesson info: Mean, Median and Mode*. Retrieved from http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspDetail&ResourceID=262

Flores, A. (2008). The mean as the balance point: thought experiments with measuring sticks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(6), 741–748.

Makar, K., Rubin, A. (2007). Beyond the bar graph: Teaching informal statistical inference in primary school. Paper presented at the *Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy* (SRTL-5), Warwick, UK.

Mokros, J., Russell, S. J. (1995). Children’s concept of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 20-39.

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

O’Dell, R. S. (2012). The Mean as Balance Point. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(3), 148-155.

Pollatsek, A., Lima, S., Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics* 12, 191-204.

Skemp, R.R., 1979. *Intelligence, Learning and Action*, Wiley, Chichester.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΒΑΘΙΑΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΤΙ ΚΑΝΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΟΥ ΞΕΧΩΡΙΖΟΥΝ

Μαρία Μπεμπένη, Μαρία Καλδρυμίδου, & Ξένια Βαμβακούση
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

mbempeni@cc.uoi.gr, mkaldrim@uoi.gr, xvamvak@cc.uoi.gr

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσει τις συνιστώσες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών. Πραγματοποιήθηκε μελέτη περίπτωσης δύο μαθητών με εξαιρετική επίδοση και βαθιά εννοιολογική γνώση στα μαθηματικά. Παρουσιάζονται δείκτες της βαθιάς προσέγγισης στους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης, Στοιχεία Αυτορρύθμισης και Κίνητρα, οι οποίοι μπορούν να αξιοποιηθούν στο σχεδιασμό εργαλείου μέτρησης για τις προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εδώ και αρκετά χρόνια είναι γνωστό ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τη μάθηση ενός αντικειμένου. Μια κεντρική διάκριση είναι αυτή της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση (Enwistle & McCune, 2004). Η επιφανειακή προσέγγιση (surface approach) σχετίζεται με την πρόθεση του υποκειμένου να μπορεί να αναπαραγάγει το περιεχόμενο, όταν του ζητηθεί. Αντίθετα, η βαθιά προσέγγιση (deep approach) στη μάθηση συνδέεται με την πρόθεση του υποκειμένου να κατανοήσει το αντικείμενο της μάθησης.

Ένα βασικό ζητούμενο σε αυτό το χώρο έρευνας είναι ο προσδιορισμός των συνιστωσών της κάθε μιας προσέγγισης, ιδιαίτερα της βαθιάς, και των δεικτών τους (Enwistle & McCune, 2004). Ο κύριος όγκος των ερευνητικών δεδομένων προέρχεται από το χώρο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, στον οποίο έχουν αναπτυχθεί και εργαλεία για ποσοτικές μελέτες (π.χ. Entwistle, McCune, & Tait, 2013). Η ανάπτυξη των εργαλείων βασίστηκε σε ποιοτικές μελέτες που εξέτασαν κυρίως την κατανόηση κειμένου. Όπως επισημαίνουν και οι Entwistle και McCune (2004), η χρήση των εργαλείων σε άλλες ηλικιακές ομάδες και για άλλα αντικείμενα δεν μπορεί να γίνει άμεσα.

Οι έρευνες που έχουν γίνει με μαθητές της δευτεροβάθμιας αφορούν κυρίως τις φυσικές επιστήμες. Τα αποτελέσματά τους συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με το επίπεδο κατανόησης του αντικειμένου (Chin & Brown, 2000; Stathopoulou & Vosniadou, 2007). Αντίστοιχα αποτελέσματα είχαμε σε προηγούμενη μελέτη (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), στην οποία βρήκαμε ότι οι μαθητές με φτωχή εννοιολογική γνώση στα κλάσματα ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση, ενώ οι μαθητές με προχωρημένη εννοιολογική γνώση ακολουθούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Στη μελέτη αυτή υιοθετήσαμε το ερευνητικό εργαλείο των Stathopoulou & Vosniadou (2007), στο οποίο προτάσσονται τρεις άξονες: στόχοι, στρατηγικές μάθησης και επίγνωση για την κατανόηση. Τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι οι μαθητές που ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση έχουν ως στόχο την επίδοση στο σχολείο, υιοθετούν την απομνημόνευση και την επανάληψη ως στρατηγικές μάθησης, και παρουσιάζουν χαμηλή επίγνωση για την κατανόησή τους και για την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών μάθησης. Αντίθετα, οι μαθητές που ακολουθούν βαθιά προσέγγιση έχουν ως στόχο την κατανόηση, υιοθετούν ως στρατηγικές μάθησης το συνδυασμό θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων και τη συστηματική επένδυση χρόνου και παρουσιάζουν υψηλή επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών μελέτης τους. Από την ανάλυση των δεδομένων μας, ωστόσο, αναδείχθηκαν χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων που δεν ανήκαν στις κατηγορίες που είχαμε προβλέψει, όπως τα κίνητρα (π.χ., η βαθιά προσέγγιση συνδέθηκε με το ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση). Επιπλέον, τα δεδομένα μας για τις στρατηγικές μάθησης όσον αφορά τη βαθιά προσέγγιση ήταν φτωχά, πιθανόν γιατί οι ερωτήσεις μας ήταν πολύ γενικές.

Στην παρούσα εργασία αποπειραθήκαμε να εντοπίσουμε και να περιγράψουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, μελετώντας παιδιά με εξαιρετική σχολική επίδοση στα μαθηματικά. Αυτό αποτελεί ένα πρώτο βήμα για το σχεδιασμό εργαλείων για τη διερεύνηση προσεγγίσεων στη μάθηση των μαθηματικών σε μεγαλύτερη κλίμακα. Η έρευνα είχε δύο φάσεις. Δεδομένου ότι η σχολική επίδοση δε συμβαδίζει απαραίτητα με την εννοιολογική κατανόηση (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Stathopoulou & Vosniadou, 2007), στην πρώτη φάση εξετάσαμε την εννοιολογική γνώση των συμμετεχόντων στα μαθηματικά, επικεντρώνοντας στους ρητούς αριθμούς. Στη δεύτερη φάση εξετάσαμε την προσέγγιση στη μάθηση. Προσαρμόσαμε κατάλληλα το προηγούμενο εργαλείο μας και το εμπλουτίσαμε, ώστε να συμπεριλάβουμε τους άξονες Κίνητρα και Αυτορρύθμιση, οι οποίοι αποτελούν σημαντικές όψεις της προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle et al., 2013).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν δύο μαθητές, μία μαθήτρια της ΣΤ’ Δημοτικού (M_1) και ένας μαθητής της Γ’ Γυμνασίου (M_2), με εξαιρετική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών που όμως, σύμφωνα με μαρτυρίες των καθηγητών τους, απέκλινε από την τυπική άριστη σχολική επίδοση.

Ερευνητικά Εργαλεία

Για την πρώτη φάση της έρευνας, σχεδιάσαμε ένα δοκίμιο που περιλάμβανε 25 έργα, με στόχο την εννοιολογική γνώση για τους ρητούς, τα οποία εντάσσονταν στις κατηγορίες των Rittle-Johnson και Schneider (in press): α) αξιολόγηση μη οικείων διαδικασιών, β) αξιολόγηση παραδείγματος σχετικά με την έννοια γ) αξιολόγηση απαντήσεων που έχουν δοθεί από άλλους, δ) αναπαράσταση κλασμάτων και πράξεων με κλάσματα, ε) σύγκριση κλασμάτων χωρίς χαρτί και μολύβι, στ) απλοποίηση διαδικασιών με βάση κάποια αρχή, ζ) διατύπωση ορισμού και η) επεξήγηση διαδικασιών.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν 29 ερωτήσεις, διατυπωμένες με τη μορφή σεναρίου που περιέγραφε μία κατάσταση για σχολιασμό (π.χ. *Αν έπρεπε να συμβουλεύσεις ένα μικρότερο παιδί πώς πρέπει να διαβάζει μαθηματικά, τι θα θεωρούσες πολύ σημαντικό να του πεις; Φέρε ένα παράδειγμα άσκησης που σε δυσκόλεψε. Τι έκανες για να τη λύσεις;).*

Διαδικασία

Τα παιδιά συμμετείχαν σε δύο ημιδομημένες συνεντεύξεις διάρκειας περίπου μιάμισης ώρας η καθεμία. Στην πρώτη αντιμετώπισαν τα έργα του πρώτου δοκιμίου. Στη δεύτερη, τρεις μέρες αργότερα, απάντησαν τα ερωτήματα σχετικά με την προσέγγιση που ακολουθούν στη μάθηση των μαθηματικών. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση είχε ως σημείο εκκίνησης τους άξονες α) Στόχοι, β) Στρατηγικές μάθησης/μελέτης, γ) Επίγνωση, δ) Αυτορρύθμιση και ε) Κίνητρα. Οι δείκτες για κάθε άξονα ήταν: α) Κατανόηση - προσωπική κατασκευή νοήματος, β) Τεκμηρίωση, Συνδυασμός θεωρίας και εξάσκησης, Επένδυση χρόνου, Συνδέσεις, γ) Υψηλή, δ) Παρακολούθηση, Ρύθμιση, Έλεγχος της νόησης και των συναισθημάτων και ε) Μαθηματική πρόκληση, αντίστοιχα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Entwistle et al., 2013). Εξετάσαμε όλα τα αποσπάσματα και τα εντάξαμε σε κάποιο άξονα, όταν αυτό ήταν εφικτό. Επιλέξαμε προτάσεις ως μονάδα ανάλυσης, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις, και ολόκληρες παραγράφους, έτσι ώστε να αποκτηθεί μία συνολική αίσθηση του νοήματος. Αναζητήσαμε προτάσεις που περιείχαν λέξεις κλειδιά (π.χ. κατανοώ, καταλαβαίνω, νόημα κ.α. για το δείκτη Κατασκευή νοήματος). Τοποθετήσαμε τις προτάσεις στους αρχικούς δείκτες και δημιουργήσαμε καινούργιους όπου χρειαζόταν. Οι άξονες και οι αντίστοιχοι δείκτες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Σημειώνουμε ότι προέκυψαν νέοι δείκτες για τους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μελέτης, Αυτορρύθμιση και Κίνητρα. Τα δεδομένα στους άξονες Επίγνωση και Αυτορρύθμιση παρουσίαζαν μεγάλη συνάφεια, επομένως συγχωνεύσαμε τους άξονες Επίγνωση και Αυτορρύθμιση σε έναν άξονα (Στοιχεία Αυτορρύθμισης).

Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών	
Άξονες	**Δείκτες**
Στόχοι	Ακαδημαϊκή επιτυχία Κατανόηση – προσωπική κατασκευή νοήματος
Στρατηγικές μάθησης/μελέτης	Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα Τεκμηρίωση Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων Συστηματική επένδυση χρόνου – Επίλυση μη οικείων προβλημάτων Συνδέσεις
Στοιχεία Αυτορρύθμισης	Παρακολούθηση/ έλεγχος της κατανόησης Ρύθμιση της συμπεριφοράς και του πλαισίου στη μελέτη Ρύθμιση των συναισθημάτων στην εξέταση Επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών Ευελιξία στη χρήση στρατηγικών
Κίνητρα	Ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αποτελέσματα από τη δεύτερη φάση της έρευνας. Σημειώνουμε ότι οι δύο μαθητές απάντησαν σωστά σε όλα σχεδόν τα εννοιολογικά έργα της πρώτης φάσης, κάποια από τα οποία ήταν ιδιαίτερα απαιτητικά. Οι απαντήσεις τους ήταν ενδεικτικές της βαθιάς εννοιολογικής τους γνώσης για τους ρητούς, αλλά και του υψηλού επιπέδου της μαθηματικής τους σκέψης.

Στόχοι

Και τα δύο παιδιά δήλωσαν ότι ενδιαφέρονται για τη βαθμολογία, αλλά και για τη γνώμη του εκπαιδευτικού και των συμμαθητών τους. Ωστόσο, τόνισαν τη σημασία της κατανόησης στα μαθηματικά, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην προσωπική κατασκευή νοήματος.

> [*Τα μαθηματικά*] δεν είναι να ξέρεις κάτι παπαγαλία, απ'έξω. Το θέμα είναι να προσπαθούμε οι ίδιοι και να καταλαβαίνουμε. Αν δεν τα κατάφερνα και [*ο δάσκαλος*] μου έβαζε, πιο υψηλό βαθμό απ'ό,τι νόμιζα, θα προσπαθούσα κι

άλλο. [*Τα μαθηματικά*] θα μου χρειαστούν στη ζωή μου και πρέπει να τα καταλάβω. Το κάνω για μένα και όχι για το δάσκαλο. […] Τα κλάσματα δεν έχουν να κάνουν μόνο με τους κανόνες της σύγκρισης. Καταρχάς, θα έπρεπε να καταλάβεις τι είναι κλάσμα. Όταν τα έχεις όλα στο μυαλό σου και ξέρεις, όταν έχεις μπροστά σου ένα κλάσμα και ξέρεις τι συμβολίζει αυτό που βλέπεις, σίγουρα σε βοηθάει στο να λύσεις αυτά που σου ζητούνται και γενικά να τα θεωρήσεις πιο εύκολα και πιο οικεία. (M_1)

[*Τα μαθηματικά δεν είναι σαν την ιστορία, όπου*] τα μαθαίνεις απέξω και πας και τα γράφεις - πρέπει να βάλεις το μυαλό σου να δουλέψει λογικά. [*Προτιμώ να ανακαλύπτω μόνος μου*], γιατί τότε δεν τα ξεχνάω ποτέ. […] [*Για να συγκρίνεις κλάσματα*] υπάρχουν κι άλλοι τρόποι εκτός από τους κανόνες. Πρέπει να καταλαβαίνεις το κλάσμα ως ποσότητα, να το αναπαριστάς με σχήματα. Στο περίπου το κάνεις, με τη λογική. (M_2)

Στρατηγικές μάθησης

Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα. Και τα δύο παιδιά ανέφεραν ότι δε τους χρειάζεται να μελετήσουν τη θεωρία στο σπίτι, γιατί τη μαθαίνουν στην τάξη. Φαίνεται ότι συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα των μαθηματικών: αναγνωρίζουν τι δεν καταλαβαίνουν, δε διστάζουν να εκφράσουν τις απορίες τους και αξιολογούν τις πληροφορίες που παίρνουν από τον εκπαιδευτικό:

[*Ένας καλός μαθητής*] όταν έχει μία απορία δε θα ντραπεί να την εκφράσει και θα υποστηρίξει την άποψή του. […] Πολλές φορές έχω υπάρξει αντίθετη με τη γνώμη της κυρίας μας και γενικά θα της το πω. Για παράδειγμα δεν μπορούσα να καταλάβω γιατί δεν πρέπει να βάζουμε δεκαδικούς σε κλάσματα. Δεν μπορούσα να το αποδεχτώ. Αφού παριστάνει μια διαίρεση, γιατί να μη βάζουμε δεκαδικούς; Δηλαδή, οι δεκαδικοί δε διαιρούνται; (M_1).

Πολλές φορές (*έχει τύχει να προβληματιστώ με κάτι που είπε ο καθηγητής*). Σηκώθηκα πάνω στον πίνακα και του το είπα. Κάναμε επιστημονική κουβέντα. Όταν ήμουν σίγουρος ότι είχα λάθος και ότι είναι σωστό αυτό που λέει, τότε τα παράτησα. Μου έχει τύχει όμως να αποδειχθεί ότι είχα δίκιο. (M_2)

Τεκμηρίωση. Όπως είναι φανερό από τα αμέσως προηγούμενα αποσπάσματα, στο πλαίσιο των μαθηματικών, τα δύο παιδιά δεν είναι διατεθειμένα να αποδεχτούν κάτι, αν δεν είναι επαρκώς τεκμηριωμένο. Σε πολλά διαφορετικά σημεία της συνέντευξης δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν τη «λογική τους» για να ελέγξουν τα αποτελέσματά τους, ή τα βήματα στην επίλυση προβλήματος (βλ. και αποσπάσματα στην ενότητα «Στοιχεία Αυτορρύθμισης). Σημειώνουμε επίσης ότι κατά την επίλυση των έργων για τους ρητούς, και τα δύο παιδιά τεκμηρίωναν συστηματικά τις ενέργειές τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι και τα δύο χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα.

Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων. Τα δύο παιδιά τόνισαν ότι είναι απαραίτητος ο συνδυασμός κατανόησης της θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων.

> Τα μαθηματικά είναι και θεωρία, χωρίς τη θεωρία δε μπορείς να λύνεις τα προβλήματα. Πάντα κρύβεται κάποια θεωρία από πίσω. Πώς θα λύσεις ένα πρόβλημα με ανάλογα ποσά αν δεν ξέρεις τι είναι ανάλογα ποσά; *[Πρέπει κανείς*] να λύνει και πολλές ασκήσεις. [...] Το να λέω τους κανόνες απ'έξω δε βοηθάει. Μετά στα προβλήματα, πού θα μου χρησιμεύσουν; Θα πάω να γράψω τον κανόνα; Πώς θα λύσω το πρόβλημα; (M_1)

> Και η θεωρία χρειάζεται, και οι ασκήσεις χρειάζονται. Αν δε διαβάζεις θεωρία, μένεις στάσιμος σε ένα επίπεδο. Δε μπορείς να αντιμετωπίσεις όλες τις ασκήσεις. [*Πρέπει να προσέχει κανείς*] τη θεωρία, γιατί στις λεπτομέρειες κρίνονται τα πράγματα. (M_2)

Συστηματική επένδυση χρόνου – επίλυση μη οικείων προβλημάτων. Και τα δύο παιδιά τόνισαν τη σημασία του να επενδύει κανείς συστηματικά χρόνο στα μαθηματικά και δήλωσαν ότι αναζητούν και επιλύουν προβλήματα που δεν έχουν λύσει στο σχολείο. Γι' αυτά τα παιδιά, η εξάσκηση δεν περιορίζεται στη μελέτη λυμένων ή τη λύση παρόμοιων ασκήσεων.

> Εγώ πάντως δε θα καθόμουν ποτέ να λύσω ένα εκατομμύριο παρόμοιες ασκήσεις. Αυτό δε βοηθάει *[τον μαθητή]*- μετά αν δε δει κάτι παρόμοιο δε θα μπορούσε να το λύσει γιατί τις ασκήσεις αυτές τις λύνει μηχανικά, ξέρει ένα τρόπο και είναι όλες ίδιες, απλά με άλλους αριθμούς. Αν δεν κατανοήσει κάποιος την ύλη και δεν αφήσει το μυαλό του να πάει λίγο παραπέρα, να μη μαθαίνει μηχανικά να λύνει το πρόβλημα με ένα κι μόνο τρόπο, δε θα μπορεί να προχωρήσει παρακάτω, να λύσει άλλα προβλήματα. (M_1)

> [*Η επίλυση πολλών παρόμοιων ασκήσεων*] δε μ' αρέσει. Καταντάει ένα πράγμα σαν ιστορία τα μαθηματικά. Αυτό που μαθαίνουν τα παιδιά πώς να λύνουν μια άσκηση και με το που την βλέπουν ξέρουν πώς να τη λύσουν, αυτό δεν πιστεύω πως είναι μαθηματικά. (M_2)

Συνδέσεις. Και οι δύο μαθητές αναφέρθηκαν στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών ενοτήτων στα μαθηματικά, τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα μαθήματα (Φυσική, Χημεία), και την καθημερινή ζωή.

> Ναι, [*συνδέονται τα προηγούμενα με τα επόμενα στα μαθηματικά*] για παράδειγμα είχαμε κάνει ανάλογα ποσά και μετά ποσοστά τα οποία λύνονταν πάλι με ανάλογα ποσά, με τον ίδιο τρόπο. Και για να ξέρεις καλά ανάλογα ποσά, πρέπει να ξέρεις καλά τα κλάσματα. (M_1)

> Την επιμεριστική ιδιότητα την είχαμε μάθει από την ΣΤ' Δημοτικού με αριθμούς, τώρα τη μάθαμε και με μεταβλητές, όπως και όλες τις ιδιότητες. (M_2)

Χαρακτηριστικό είναι ότι αναφέρθηκαν στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς και με την καθημερινή ζωή, ως κατάλληλη διδακτική πρακτική:

> Να τα παρουσιάζουμε στα παιδιά ζωντανά, έτσι για να μπορούν να το παρατηρήσουν και μέσα από τη ζωή τους. Δηλαδή όταν λέμε ¼ του κιλού γραβιέρα, πόσο είναι; (M_1)

> Τα παιδιά σε μικρή ηλικία δεν έχουν καταλάβει το κλάσμα σαν ποσότητα. [*Θα βοηθούσα ένα μικρότερο παιδί*] με τα σχέδια, τις αναπαραστάσεις. (M_2)

Στοιχεία αυτορρύθμισης

Και τα δύο παιδιά έδειξαν ότι παρακολουθούν, ελέγχουν και ρυθμίζουν τον εαυτό τους, στο επίπεδο της νόησης, των συναισθημάτων, και της συμπεριφοράς σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών.

> [*Όταν δυσκολεύομαι με ένα πρόβλημα*] προσπαθώ να δω το πρόβλημα από όλες τις μεριές και να φτιάξω στο μυαλό μου ένα πίνακα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα. [*Ξέρεις ότι τα πηγαίνεις καλά*] αν παρακολουθείς τη λύση σου και δεν το κάνεις μηχανικά. Κάνεις και επαλήθευση για να δεις αν όντως το έχεις κάνει σωστά. Επαληθεύω με το μυαλό μου όμως, όχι να κάνω πράξεις. Ναι, το αποτέλεσμα πρέπει να το παρακολουθείς, να είναι λογικό το αποτέλεσμα. (M_1)

> [*Είμαι σίγουρος ότι έχω καταλάβει την εκφώνηση ενός προβλήματος*] όταν ξέρω ακριβώς τι λέει και μπορώ να την πω με δικά μου λόγια, όταν την έχω στο μυαλό μου χωρίς να τη διαβάζω κάθε τρεις και λίγο. [*Όταν με δυσκολεύει μια εκφώνηση*] την απλοποιώ σε πιο μικρά κομμάτια, προσπαθώ να καταλάβω μήπως εννοεί κάτι που εγώ δεν έχω καταλάβει. Τη σπάω σε μικρά κομμάτια και το πάω σιγά σιγά μήπως εγώ κάνω κάτι λάθος ή δεν καταλαβαίνω κάτι. (M_2)

Ως αποτέλεσμα, τα δύο παιδιά φαίνεται να έχουν επίγνωση της κατανόησής τους και μάλιστα διαχωρίζουν τις δυσκολίες στην κατανόηση από τις απαιτήσεις του σχολικού πλαισίου:

> Ε, στην αρχή τα κλάσματα μου φάνηκαν λίγο δύσκολα. Βέβαια, το να κάνεις πράξεις και αυτά που μου ζητούσαν οι ασκήσεις ήταν εύκολα. (M_1)

> Αυτό με τις Πιθανότητες που κάναμε τελευταία, δεν τα κατάλαβα καλά γιατί ήταν λίγο αόριστα, κάθισα και τα είδα στο χαρτί. [*Έτσι είναι συνήθως με τα μαθηματικά*] μετά τα καταλαβαίνεις. Αυτά που έχεις μάθει στο Γυμνάσιο, τα καταλαβαίνεις καλά στο Λύκειο. Αυτό ας πούμε για το «χιαστί» γινόμενο, έχω μάθει και το χρησιμοποιώ. Αν το ψάξεις λίγο το καταλαβαίνεις κιόλας. (M_2)

Χαρακτηριστική είναι η αναφορά τους στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν ένα μη οικείο πρόβλημα στο πλαίσιο της εξέτασης:

> Μέχρι και την τελευταία στιγμή προσπαθείς. Αν από την αρχή που είδες την άσκηση πεις τα παράτησα και κατευθείαν πέσεις σε αρνητικές σκέψεις και να

ξέρεις να τη λύσεις, δεν πρόκειται. Αν έχεις χρόνο και μπορείς να προσπαθήσεις μέχρι το τέλος, γιατί να την παρατήσεις από την αρχή; (M_1)

Πρώτα λες, ωχ Παναγία μου, μετά αρχίζεις να βρίζεις τον καθηγητή και στο τέλος λες, δε βαριέσαι, διαγώνισμα τριμήνου είναι, ό,τι κάνω. (M_2)

Και τα δύο παιδιά φάνηκαν να αναγνωρίζουν ότι στην επίλυση προβλήματος απαιτείται ένας συνδυασμός επιμονής στην προσπάθεια και ευελιξίας:

Την είχα αφήσει αυτή την άσκηση. Μετά που το ξανασκέφτηκα το πήρα από άλλη πλευρά για να μπορέσω να βρω αυτό το δεδομένο που μου έλειπε. [*Όταν δεν έχει αποτελέσματα η μέθοδός μου*] δοκιμάζω κάτι άλλο από αυτά που έχω μάθει, ακόμη κι αν δεν είμαι σίγουρη. (M_1)

Απλά έκανα διάφορες σκέψεις. Κι όταν δε μου έβγαιναν οι σκέψεις, τις απέρριπτα. Σκεφτόμουν διάφορα πράγματα ως προς τη λύση της άσκησης και απέρριπτα όποια δε μου έβγαιναν. (M_2)

Σημειώνουμε ότι η M_1 δήλωσε ότι είναι πάντα συγκεντρωμένη όταν μελετά, ώστε να χρειάζεται λιγότερο χρόνο. Ο M_2 «αποκάλυψε» ότι ξεκίνησε ιδιαίτερα μαθήματα γιατί χρειαζόταν κάποιον να τον κινητοποιεί για να κάνει παραπάνω εξάσκηση. Και τα δύο παιδιά επέδειξαν αυτοπεποίθηση σε σχέση με τις τρέχουσες στρατηγικές μάθησής τους στα μαθηματικά. Ο M_2 ανέφερε ότι στο παρελθόν διαπίστωσε ότι δεν πρόσεχε αρκετά τη θεωρία, προσθέτοντας ότι *«μετά το κατάλαβα, αργά δεν πιστεύω ότι ήταν»*. Επιπλέον, αναφερόμενος στη στρατηγική του να επικεντρώνει περισσότερο στις ασκήσεις, δήλωσε:

Εγώ τα καταλαβαίνω με αυτόν τον τρόπο. Αν δω ότι δεν αποδίδει τα μετέπειτα χρόνια, θα το αλλάξω. (M_2)

Κίνητρα

Και τα δύο παιδιά κινητοποιούνται από τα μη τετριμμένα μαθηματικά προβλήματα.

Με ενδιαφέρουν περισσότερο τα προβλήματα που είναι δύσκολα και χρειάζεται να κάνεις κάτι παραπάνω για να το λύσεις, και όχι σαν τα άλλα που λύνονται με ένα συνηθισμένο τρόπο, μηχανικά. Βαρετές μου φαίνονται αυτές με τα πινακάκια και να κάνουμε όλη την ώρα «χιαστί», που λύνονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και κάνεις μόνο αυτό και είναι σαν να το κάνεις μηχανικά. (M_1)

Γενικά όσα έχω ξανακάνει [*μου φαίνονται βαρετά*], δηλ. όσα δεν πάνε το μυαλό σου να σκεφτεί παραπέρα. Κάτι που έχει πράξεις και κάνεις τα ίδια και τα ίδια. Γι’ αυτό η Γεωμετρία είναι πιο ενδιαφέρον κομμάτι. (M_2)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των συνεντεύξεων των δύο παιδιών ανάδειξε δείκτες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών στους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης, Στοιχεία Αυτορρύθμισης και Κίνητρα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Entwistle et al., 2013). Ειδικότερα, τα δύο παιδιά έχουν ως στόχο την ακαδημαϊκή επιτυχία, αλλά αποδίδουν ιδιαίτερη αξία στην προσωπική κατασκευή νοήματος. Επενδύουν χρόνο στη μελέτη των μαθηματικών, την οποία εκλαμβάνουν κυρίως ως επίλυση μη οικείων προβλημάτων. Παρά το γεγονός ότι αναγνωρίζουν την αξία της θεωρίας, δεν αφιερώνουν πολύ χρόνο στη μελέτη της. Αυτή η εκ πρώτης όψεως ασυνέπεια εξηγείται, αν λάβει κανείς υπόψη την ποιότητα της συμμετοχής τους στο σχολικό μάθημα, που αποτελεί κεντρική στρατηγική μάθησης γι' αυτά τα παιδιά. Επιπλέον, φαίνεται ότι τα παιδιά αυτά δεν αντιμετωπίζουν τη μαθηματική γνώση αποσπασματικά, αλλά δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, μαθηματικών ενοτήτων, διαφορετικών μαθημάτων, καθώς και με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Ιδιαίτερα σημαντικός για το χώρο των μαθηματικών είναι ο δείκτης Τεκμηρίωση: φαίνεται ότι τα παιδιά αυτά απαιτούν την τεκμηρίωση στο σχολικό πλαίσιο, παράγουν τεκμηριώσεις όταν επιλύουν προβλήματα και χρησιμοποιούν την τεκμηρίωση ως μέσο ελέγχου της μαθηματικής τους δραστηριότητας. Επιπλέον, τα δύο παιδιά παρακολουθούν, ρυθμίζουν και ελέγχουν τη νόηση, τα συναισθήματα και τη συμπεριφορά τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Ως αποτέλεσμα, έχουν υψηλή επίγνωση για την κατανόησή τους και τις στρατηγικές μάθησής τους και ευελιξία. Τέλος, κινητοποιούνται από τη μαθηματική πρόκληση.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δίνουν μία πιο λεπτομερή εικόνα των χαρακτηριστικών της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, και μπορούν να αποτελέσουν τη βάση σχεδιασμού ενός ερευνητικού εργαλείου που θα επιτρέψει τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών σε μεγαλύτερη κλίμακα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research, 3*, 17-34.

Chin, C. & Brown, D. (2000). Learning in Science: A comparison of Deep and Surface Approaches. *Journal of Research in Science Teaching, 37*, 109-138.

Entwisle, N. & McCune V. (2004). The conceptual bases of study strategy inventories. *Educational Psychology Review, 16*, 325-345.

Entwistle, N., McCune, V., & Tait, H. (2013). *Approaches and Study Skills Inventory for Students* (ASSIST) (3rd edition). Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/50390092

Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (in press). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition.* Oxford Press.

Stathopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Conceptual change in physics and physics-related epistemological beliefs: A relationship under scrutiny. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 145-163). Oxford, UK: Elsevier.

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΚΑΙ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙπΤΩΣΗΣ ΔΥΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Σοφία Νταλαπέρα **Κωνσταντίνα Παναγιωτοπούλου** **Ελένη Ροδίτη**
ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ
sofia_dal@hotmail.com konstantina.panagiotopoulou@gmail.com
eleniroditi@yahoo.gr

Η παρούσα ποιοτική έρευνα εξετάζει τις πεποιθήσεις Ελλήνων εκπαιδευτικών γύρω από τα μαθηματικά και τη διδακτική τους. Βασικός άξονας είναι ο θεσμός του φροντιστηρίου, με στόχο να διαπιστωθούν ομοιότητες και διαφορές με το ελληνικό δημόσιο σχολείο. Πραγματοποιήθηκε μελέτη περίπτωσης δύο εκπαιδευτικών, έναν από κάθε χώρο εργασίας και ως εργαλείο χρησιμοποιήθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις. Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τη μέθοδο της ανοιχτής και της αξονικής κωδικοποίησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως για αυτούς τα μαθηματικά είναι λογική, η μάθηση είναι κατασκευή της γνώσης και η πρακτική διαμορφώνεται με βάση το περιβάλλον εργασίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η πολυπλοκότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών καθιστά εμφανή την ανάγκη η έρευνα να βγει από το μικρόκοσμο της τάξης και να εστιάσει σε παράγοντες που μπορεί να την επηρεάζουν (Potari 2012, Valero 2010). Στη διαδικασία της μάθησης βασικός είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού, συνεπώς κρίνεται αναγκαίο να στρέψουμε το ενδιαφέρον μας προς τον τρόπο σκέψης, στις πεποιθήσεις του καθώς και στη σχέση αυτών με τις πρακτικές του στην τάξη.

Ο Gates (Gates, 2001) ορίζει τις πεποιθήσεις ως τις αυθόρμητες αλήθειες του καθενός οι οποίες πηγάζουν από την εμπειρία ή τη φαντασία και επηρεάζουν αισθητά τις δράσεις του. Ως επιστημολογικές πεποιθήσεις ορίζονται οι θεμελιώδεις παραδοχές σχετικά με τη φύση της γνώσης και της μάθησης (Chan & Elliott, 2002), ενώ οι παιδαγωγικές πεποιθήσεις αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί. Οι παιδαγωγικές πεποιθήσεις διακρίνονται σε αυτές που αντιλαμβάνονται ***παραδοσιακά*** το μοντέλο της διδασκαλίας, με δασκαλοκεντρική προσέγγιση όπου ο μαθητής ακούει και δέχεται παθητικά τη γνώση, έχοντας τις ρίζες της σε μια πλατωνική διάθεση για τη φύση των μαθηματικών (Cross, 2009). Από την άλλη συναντάμε την εκδοχή της ***κονστρουκτιβιστικής*** προσέγγισης της μάθησης, όπου ο μαθητής αποτελεί το επίκεντρο και η γνώση κατασκευάζεται με την ενεργή συμμετοχή του (scaffolding) (Chai, 2010, Barkatsas & Malone 2005). Στην πρώτη περίπτωση το έργο της επιστήμης της διδακτικής είναι βοηθητικό και περιορίζεται στη βελτιστοποίηση της μεταφοράς της γνώσης, ενώ στη δεύτερη είναι καθοριστικό καθώς συμβάλλει με τη δημιουργία ενεργητικών μεθόδων μάθησης.

Η διδασκαλία δέχεται επιρροές από τις αρχικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών ως προς τη φύση αλλά και τη μάθηση των μαθηματικών, με αυτές να αλληλεπιδρούν και να καθορίζουν η μία την άλλη (Cross, 2009, Beswick, 2012, Belbase 2012). Βασική αιτία των διαφοροποιήσεων μεταξύ πεποιθήσεων και πρακτικής του μπορεί να θεωρηθεί η *πραγματικότητα του σχολείου*, καθώς οι απαιτήσεις του εκπαιδευτικού συστήματος δείχνουν να προκαθορίζουν τη δράση του, δημιουργώντας αποκλίσεις από τις αρχικές του πεποιθήσεις (Barkatsas & Malone, 2005). Ο Raymond (1997) πρότεινε ένα μοντέλο που περιγράφει τις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και της διδακτικής τους πρακτικής λαμβάνοντας υπόψη συγκεκριμένους παράγοντες και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η διαφοροποίηση τελικά μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών οφείλεται κυρίως στην επιρροή του σχολικού περιβάλλοντος, των πρακτικών στην τάξη καθώς και στις εμπειρίες τους από την δική τους σχολική κυρίως αλλά και ακαδημαική πορεία.

Στη σημερινή Ελληνική πραγματικότητα υπάρχουν δύο διαφορετικά περιβάλλοντα διδασκαλίας, το σχολείο και το φροντιστήριο. Η εξεταστική μορφή του εκπαιδευτικού συστήματος επηρεάζει και διαμορφώνει τον τρόπο που δρα ο εκπαιδευτικός μέσα σε αυτό. Κύριο χαρακτηριστικό της φροντιστηριακής εκπαίδευσης, η οποία εντοπίζεται σε εκπαιδευτικά συστήματα διαφόρων χωρών, είναι ότι συμπληρώνει την παραδοσιακή διδασκαλία στην τάξη για τους μαθητές που χρειάζονται βοήθεια και εκείνους που επιθυμούν να γίνουν περισσότερο ανταγωνιστικοί στα πλαίσια σημαντικών εξετάσεων. (Mischo & Haag, 2002, Sobhy 2011). Στην Ελλάδα, όπως και σε άλλες χώρες (Αίγυπτος), διαπιστώνεται πως παραπάνω από το 80% των μαθητών λαμβάνουν φροντιστηριακά μαθήματα καθώς δεν μπορούν να εμπιστευτούν το θεσμικό όργανο τόσο για την *μάθηση* όσο και για την καλή *προετοιμασία στις προαγωγικές εξετάσεις* (Sobhy, 2011). Η ύπαρξη του θεσμού αυτού είναι τόσο ισχυρή που κρίνεται λογικό να επηρεάζει τη διαδικασία της μάθησης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στον τρόπο σκέψης του εκπαιδευτικού, στις πεποιθήσεις του καθώς και στη σχέση αυτών με τις πρακτικές του στην τάξη. Επιπλέον μελετάται ο εκπαιδευτικός τόσο στο περιβάλλον του σχολείου όσο και σε αυτό του φροντιστηρίου. Η ποιοτική έρευνα που διεξήχθει αφορά τη μελέτη περίπτωσης εκπαιδευτικών σε διαφορετικά περιβάλλοντα και καθοδηγείται από τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι πεποιθήσεις των καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τα μαθηματικά, τη διδασκαλία και τη μάθηση;
- Αν και κατά πόσο διαφοροποιούνται οι πεποιθήσεις και οι πρακτικές των εκπαιδευτικών του δημοσίου σχολείου και του φροντιστηρίου στην Ελλάδα.

Συμμετέχοντες

Επιλέχθηκαν για τη διεξαγωγή της έρευνας δύο εκπαιδευτικοί ηλικίας 55 – 58 ετών ως αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις, ο ένας από το χώρο του δημοσίου σχολείου και ο άλλος του φροντιστηρίου. Ο πρώτος εκπαιδευτικός ΚΣ (καθηγητής σχολείου) εργάστηκε για δέκα χρόνια σε φροντιστήρια και ιδιαίτερα μαθήματα και το 1992 διορίστηκε σε δημόσιο σχολείο. Ο δεύτερος εκπαιδευτικός ΚΦ (καθηγητής φροντιστηρίου) παρέδιδε για τέσσερα χρόνια ιδιαίτερα μαθήματα και από το 1985 διατηρεί φροντιστήριο στην Αθήνα. Και των δύο εκπαιδευτικών η διδασκαλία επικεντρώνεται στις τελευταίες τάξεις του λυκείου.

Συλλογή δεδομένων και ανάλυση

Κύρια μέθοδος για τη συλλογή δεδομένων ήταν οι ημιδομημένες συνεντεύξεις και κάθε μία έγινε ατομικά στο χώρο εργασίας των συμμετεχόντων. Και οι δύο απάντησαν σε είκοσι ερωτήσεις σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα και τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που είχε προηγηθεί. Μέρος των ερωτήσεων στηρίχθηκε σε αντίστοιχη έρευνα του Beswick (2006). Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν, απομαγνητοφωνήθηκαν και κατόπιν αναλύθηκαν αρχικά με ανοιχτή κωδικοποίηση φράση με φράση στα πλαίσια της grounded theory (Strauss & Corbin, 1998), όπου και σχηματίστηκαν οι κατηγορίες. Στη συνέχεια, ανακαλύφθηκαν οι σχέσεις μεταξύ των κωδικών και κατηγοριών με τη βοήθεια ενός γενικού σχήματος αξονικής κωδικοποίησης. Προκειμένου να εξασφαλισθεί η ποιότητα της συγκεκριμένης έρευνας υιοθετήθηκαν κριτήρια που έχουν ορισθεί από τον J. Kilpatrick (Kilpatrick, 1992). Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε πιλοτική έρευνα ενισχύοντας την αξιοπιστία του ερευνητικού εργαλείου. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα δείγμα των ερωτήσεων που κλήθηκαν να απαντήσουν οι εκπαιδευτικοί:

Άξονες	Ερωτήσεις
Εξέλιξη εκπαιδευτικού	Μπορείτε να συγκρίνετε τη μαθηματική γνώση που αποκτήσατε από το πανεπιστήμιο με αυτή που αποκτήσατε από τη διδακτική σας εμπειρία;
Επιστημολογικές πεποιθήσεις	Τι σημαίνουν για εσάς τα μαθηματικά; Τι σας έρχεται στο μυαλό με τη λέξη μαθηματικά;
Παιδαγωγικές πεποιθήσεις–Διδακτική πρακτική	Τι σημαίνει για εσάς καλή διδασκαλία των Μαθηματικών; Νομίζετε ότι κάτι τέτοιο γίνεται σήμερα στο ελληνικό σχολείο;
	Υπάρχουν περιορισμοί που επηρεάζουν τη διδασκαλία σας (χρόνος, αναλυτικό πρόγραμμα, εξετάσεις..);
Φροντιστήριο	Ποια είναι η γνώμη σας για το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα και για το θεσμό του φροντιστηρίου;
	Αν διδάσκατε στο σχολείο – φροντιστήριο θα αλλάζατε κάτι;

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται σε τρεις ενότητες, τις επιστημολογικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, τις παιδαγωγικές πεποιθήσεις και στις πεποιθήσεις τους σχετικά με το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα και το θεσμό του φροντιστηρίου.

Επιστημολογικές πεποιθήσεις

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι και οι δύο εκπαιδευτικοί θεωρούν τα μαθηματικά μία λογική λειτουργία του ανθρώπινου νου και ανθρώπινη ανάγκη, συνδέοντάς τα με τις άλλες νοητικές λειτουργίες. Η φύση τους έχει άμεση σχέση με την πραγματική ζωή και το περιεχόμενό τους αφορά επιχειρήματα με τα οποία μέσα από λογικές και αποδεικτικές διαδικασίες οδηγούν σε συμπεράσματα.

Χαρακτηριστικά οι δύο εκπαιδευτικοί αναφέρουν για τη φύση των μαθηματικών:

> ΚΣ: «Μου έρχεται ότι είναι σύμφυτο με τη **λογική** των ανθρώπων συνεπώς δεν πρέπει να ανεξάρτητοποιείται από τα άλλα αντικείμενα δηλαδή δεν είναι αριθμοί όπως το έχουν σχηματοποιήσει ή λογαριασμοί ή οτιδήποτε άλλο. Είναι **λειτουργία του μυαλού** μας.»

ΚΦ: «Για μένα τα μαθηματικά είναι οι κυριότερες κατακτήσεις του ανθρώπινου πνεύματος. Θεωρώ ότι σε πραγματώνουν ως λογικό ον, το πιστεύω αυτό που σας λέω. Ο μαθηματικός τρόπος σκέψης θεωρώ ότι μπορεί να εφαρμοστεί, όχι θεωρώ είμαι βέβαιος, και σε τομείς έξω από τα μαθηματικά, μπορεί να γίνει και τρόπος ζωής.»

Παιδαγωγικές πεποιθήσεις

Μάθηση

Τα αποτελέσματα σχετικά με τη μάθηση διακρίνονται σε επιμέρους άξονες, ως προς τη μαθηματική γνώση και τη διαδικασία της μάθησης καθώς και ως προς το ρόλο του εκπαιδευτικού σε αυτή τη διαδικασία (παραδοσιακό-κονστρουκτιβιστικό μοντέλο διδασκαλίας).

Όσον αφορά τη μαθηματική γνώση και οι δύο εκπαιδευτικοί τονίζουν ότι ταυτίζεται με το μαθηματικό τρόπο σκέψης. Σχετικά με τον τρόπο μάθησης και οι δύο θεωρούν βασικό στοιχείο την αγάπη προς τα μαθηματικά και την ενασχόληση από μικρή ηλικία. Σημαντικό και για τους δύο εκπαιδευτικούς είναι η ύπαρξη κινήτρου από τον εκπαιδευτικό με εφαρμογή ενεργητικών μεθόδων μάθησης, καθώς και η αφιέρωση προσωπικού χρόνου από το μαθητή. Χαρακτηριστικά αποσπάσματα που τεκμηριώνουν τις παραπάνω θέσεις είναι :

ΚΦ: «Για να τα μάθει ένας μαθητής θα πρέπει πρώτα να τα αγαπήσει δεύτερον να τα διδαχθεί με τρόπο που να γίνουν κατανοητά και να μην είναι παρερμηνεύσιμα και στη συνέχεια να ασχοληθεί με αυτά να δώσει κομμάτι από τη ζωή του ο μαθητής»

ΚΣ: «Δεν μαθαίνονται αν μάθεις τύπους, φόρμες, διαδικασίες. Ένα παιδί που δεν έχει μάθει να δουλεύει δεν έχει αποκτήσει βασικές δεξιότητες σε μικρές τάξεις δε μπορεί να παρακολουθήσει τα αναλυτικά προγράμματα».

Ο δεύτερος άξονας αφορά το ρόλο του εκπαιδευτικού στην παραπάνω διαδικασία, κι εδώ εμφανίζονται διαφορετικές προσεγγίσεις από τους συμμετέχοντες. Ο ΚΣ θεωρεί πως ο ρόλος του είναι περιορισμένος καθώς στη διαδικασία της μάθησης το μεγαλύτερο βάρος το φέρει ο μαθητής, με τη στάση του και τις εμπειρίες του. Συγκεκριμένα στο ερώτημα «αν και πώς μπορεί ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει το μαθητή;» απαντάει:

«Πρέπει να πειστεί για να ασχοληθεί μόνο του.»

ενώ ο ΚΦ υποστηρίζει τον καθοριστικό του ρόλο:

«Πρώτον να πυροδοτήσω το ενδιαφέρον του μαθητή και δεύτερον να του εξηγήσω έννοιες ώστε να μη παρερμηνεύονται και να κερδίζει χρόνο από τη διδασκαλία».

Πεποιθήσεις για τη διδασκαλία - Πρακτική

Τόσο ο ΚΣ όσο και ο ΚΦ θεωρούν πως η μαθητική εμπειρία είναι αυτή που διαμόρφωσε τη μετέπειτα πεποίθησή τους ως προς τη διδασκαλία και την πρακτική και κυρίως οι καθηγητές των ιδίων κι όχι η γνώση και οι εμπειρίες από το Πανεπιστήμιο ενώ και οι επαγγελματικές τους εμπειρίες καθόρισαν τη μετέπειτα πορεία τους. Παρακάτω παρατίθενται απαντήσεις τους σε σχετική ερώτηση:

> ΚΦ: «Οι σπουδές με έχουν επηρρεάσει καθοριστικά γιατί ακριβώς όλοι μιμούμαστε κάποιους καθηγητές που ήταν καλοί… Άρα δεν έχεις να πάρεις κάτι από το πανεπιστήμιο για τη μετέπειτα δουλειά σου, η μετέπειτα δουλειά σου είναι εντελώς διαφορετική.»

> ΚΣ: «Το πανεπιστήμιο χωρίς να προσπαθώ να βρω αναλογιές πιθανό να προσέφερε σε κάποιους στην εποχή μου σε μενα όχι σχεδόν καθόλου ιδίως παιδαγωγικά».

Ο ΚΣ θεωρεί ως καλή διδασκαλία την αποτελεσματική διδασκαλία και σχετικά με την πρακτική του αναφέρει ότι δεν ακολουθεί φόρμες αλλά θέτει τους μαθητές στη διαδικασία να ανακαλύψουν μόνοι τους νέα πράγματα, ενώ στο επίκεντρο τοποθετεί το φιλικό κλίμα. Δηλώνει ότι δίνει μεγαλύτερη σημασία στην έννοια και μικρή στην εξάσκηση και προσπαθεί να ενθαρρύνει κάθε μαθητή όσο γίνεται. Τέλος, γι αυτόν ένας καλός καθηγητής έχει γνωστική επάρκεια του αντικειμένου και συνειδητή επιλογή του επάγγελμάτος του. Για τον ΚΦ καλή διδασκαλία είναι εκείνη που περιέχει έμπνευση του μαθητή και γνωστική πληρότητα του καθηγητή. Όσον αφορά την πρακτική του, θεωρεί σημαντική την αποδοχή από το μαθητή και την ανάπτυξη της εμπιστοσύνης. Μέρος της πρακτικής του αποτελεί και η εξεταστική διαδικασία. Επιπλέον, επισημαίνει ότι πολύ σημαντικό για ένα μαθητή είναι να καλυφθούν τα κενά του και να προσαρμοστεί η διδασκαλία με βάση τις δυνατότητές του με αποτέλεσμα να τους χωρίζει σε ομοιογενή τμήματα για να περιορίσει την ανομοιομορφία στις τάξεις.

Εκπαιδευτικό σύστημα - Φροντιστήριο

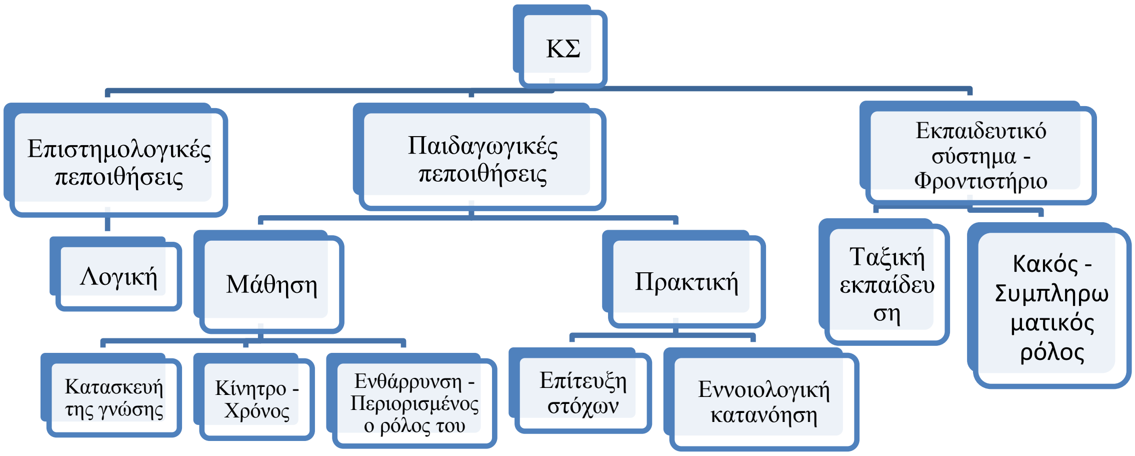
Στο πεδίο αυτό ο ΚΣ χαρακτηρίζει την εκπαίδευση στην Ελλάδα ταξική καθώς η επιτυχία των μαθητών εξαρτάται από την οικονομική δυνατότητα, γεγονός που ενισχύει το αίσθημα ευθύνης του απέναντι στους μαθητές. Γι αυτό το επίπεδο του σχολείου είναι υψηλό και το φροντιστήριο υπάρχει αναγκαστικά χωρίς να προσφέρει εννοιολογική γνώση, αλλά αναγνωρίζει οτι λειτουργεί ως χώρος εξάσκησης. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

> ΚΣ: «Είναι ψευδαίσθηση ότι είναι το σχολείο ανοικτό σε όλους. Ότι είναι δωρεάν η εκπαίδευση. Δεν είναι. Μπορεί να είναι, και γι αυτό το καυχιέμαι

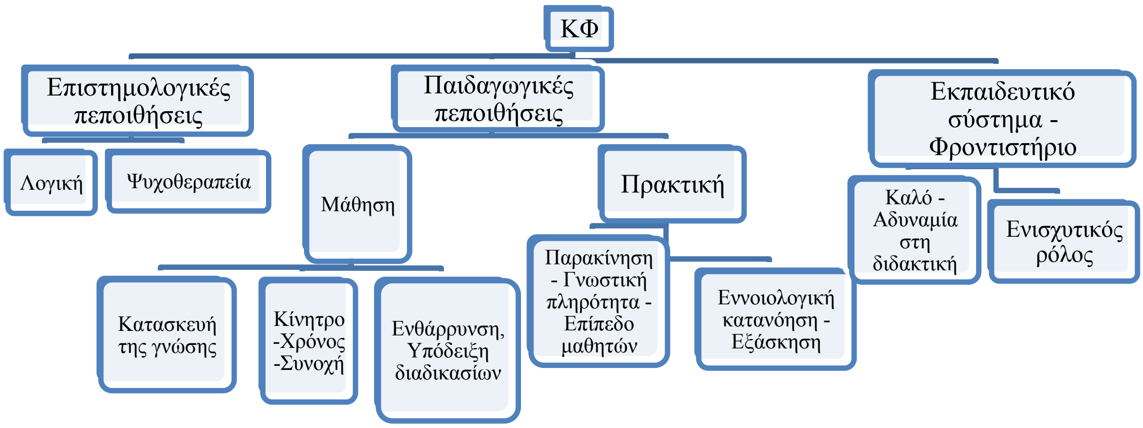
υψηλής ποιότητας, και καλύτερο από πολλά φροντιστήρια όταν υπάρχει η συνειδητότητα των συναδέλφων».

Ο ΚΦ από την άλλη είναι ευχαριστημένος από το εκπαιδευτικό σύστημα, αναγνωρίζοντας ότι κυριαρχεί η θεωρία και όχι η πρακτική και το φροντιστήριο ενισχύει και συμπληρώνει το δημόσιο σχολείο.

Ακολουθούν σχηματικά συνοπτικά οι πεποιθήσεις των δύο εκπαιδευτικών:



Σχήμα 1: Πεποιθήσεις εκπαιδευτικού δημοσίου σχολείου



Σχήμα 2: Πεποιθήσεις εκπαιδευτικού φροντιστηρίου

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τα αποτελέσματα της έρευνας αναγνωρίζονται τόσο επιστημολογικές όσο και παιδαγωγικές πεποιθήσεις των δύο εκπαιδευτικών. Παρατηρήθηκε πρώτον, ότι και οι δύο αναφέρονται στα μαθηματικά ως κάτι ανώτερο το οποίο συνδέεται με έμφυτες νοητικές λειτουργίες και δεύτερον ταυτίζουν τα μαθηματικά με την ανθρώπινη λογική (Chan & Elliott, 2002). Όσον αφορά τις παιδαγωγικές πεποιθήσεις και των δύο, κατευθύνονται προς το κονστρουκτιβιστικό μοντέλο διδασκαλίας (Chai, 2010, Barkatsas & Malone 2005). Αξιοσημείωτο είναι ότι είχαν πλήρη ταύτιση απόψεων ως προς τη διαδικασία της μάθησης αλλά και στους περιορισμούς που αντιμετωπίζουν, στοιχεία τα οποία δεν εντοπίστηκαν σε ήδη υπάρχουσες έρευνες και στη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Οι δύο εκπαιδευτικοί που μελετήθηκαν δρουν σε διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης πάραυτα και οι δύο περιπτώσεις στο επίκεντρο της πρακτικής τους τοποθετούν ως στόχο την εννοιολογική κατανόηση του μαθητή. Παρουσιάζονται, ωστόσο, διαφοροποιήσεις απόψεων για το θεσμό του φροντιστηρίου αλλά και για το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα όπως παρουσιάστηκε στα αποτελέσματα. Όλα τα παραπάνω έχουν τις ρίζες τους στις εμπειρίες των εκπαιδευτικών κατά τη διάρκεια των σχολικών τους χρόνων κυρίως και λιγότερο στις πανεπιστημιακές σπουδές τους συμπέρασμα το οποίο επιβεβαιώνουν και οι υπάρχουσες έρευνες (Cross, 2009, Beswick, 2012, Belbase 2012).

Συνοψίζοντας, ανάμεσα στις δυο διαφορετικές κατηγορίες εκπαιδευτικών (εκπαιδευτικός σχολείου – εκπαιδευτικός φροντιστηρίου) παρατηρείται ταύτιση και παρόμοιες απόψεις-συμπεριφορές, αλλά, σαφώς, και διαφοροποιήσεις. Υπάρχει η κοινή άποψη σχετικά με τη μάθηση των μαθηματικών πως τα απαραίτητα στοιχεία είναι η αγάπη προς το αντικείμενο και η ενασχόληση με αυτό, καθώς και σχετικά με τη διδασκαλία, η ανάγκη δημιουργίας κινήτρων από τον εκπαιδευτικό. Η βασική διαφορά μεταξύ των δυο περιπτώσεων αφορά στο ρόλο του εκπαιδευτικού κατά τη διαδικασία της μάθησης. Από τη μια, ο εκπαιδευτικός σχολείου θεωρεί πως ο ρόλος του είναι περιορισμένος, και από την άλλη ο εκπαιδευτικός φροντιστηρίου βρίσκεται σε μια συνεχή προσπάθεια πυροδότησης ενδιαφέροντος και επίτευξης στόχων, στόχων των μαθητών οι οποίοι γίνονται και προσωπικοί στόχοι του εκπαιδευτικού. Αξιοσημείωτη διαφοροποίηση είναι και η άποψη της κάθε περίπτωσης εκπαιδευτικού ως προς το κάθε περιβάλλον μάθησης (σχολείο-φροντιστήριο). Η πρώτη περίπτωση, εκπαιδευτικού σχολείου, αναφέρεται στο φρονιστήριο ως αναγκαίο κακό, προσφέροντας επιφανειακή γνώση, εν αντιθέση με την περίπτωση εκπαιδευτικού φροντιστηρίου όπου υποστηρίζει την παρούσα εκπαιδευτική μορφή. Οι διαφοροποιήσεις αυτές οφείλονται στις εμπειρίες, στο χαρακτήρα αλλά και στο περιβάλλον εργασίας του κάθε εκπαιδευτικού, γεγονός το οποίο αναμενόταν σύμφωνα με το μοντέλο το Raymond (1997).

Με τη συγκεκριμένη μελέτη η ερευνητική ομάδα ελπίζει ότι θα καταφέρει να απεικονίσει την πολυπλοκότητα μεταξύ των πιστεύω του εκπαιδευτικού και του πλαισίου διδασκαλίας από την οπτική των εκπαιδευτικών. Αξίζει να σημειωθεί πως έρευνα σχετικά με τα δύο διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης και τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών μέσα σε αυτά, δεν προσφέρεται. Η παρούσα έρευνα χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία ως προς τον συγκεκριμένο άξονα, ωστόσο, προτεινεται για περεταίρω διερεύνηση ώστε να επιτευχθεί γενίκευση. Επίσης, προτείνεται για περεταίρω διερεύνηση η έρευνα να προσαρμοστεί συμπεριλαμβάνοντας πέρα από τις συνεντεύξεις και παρατήρηση ώστε να διερευνηθούν σε βάθος οι σχέσεις και οι διαφοροποιήσεις πεποιθήσεων και πρακτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barkatsas, A. & Malone, J. (2005). A Typology of Mathematics Teachers' Beliefs about Teaching and Learning Mathematics and Instructional Practices. *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), 69-90.

Belbase, S. (2012) Teacher Belief, Knowledge, and Practice: A Trichotomy of Mathematics Teacher Education. *Online Submission.*

Beswick, K. (2006). The Importance of Mathematics Teachers' Beliefs. *Australian Mathematics Teacher*, *62*(4), 17-22.

Chai, C. S. (2010). Teachers' Epistemic Beliefs and Their Pedagogical Beliefs: A Qualitative Case Study among Singaporean Teachers in the Context of ICT-Supported Reforms. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 9(4) , 128-139.

Chan, K. W., & Elliott, R. G. (2002). Exploratory study of Hong Kong teacher education students' epistemological beliefs: Cultural perspectives and implications on beliefs research. *Contemporary Educational Psychology*, 27(3), 392-414.

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 12(5), 325-246.

Gates, P. (2001). Mathematics teacher belief systems: exploring the social foundations. In *PME CONFERENCE* (Vol. 3, pp. 3-17).

Kilpatrick, J. (1992). Beyond face value: Assessing Research in mathematics education. *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics.Gilleleje*, Denmark. April 27 – May 2

Mischo, C. & Haag, L. (2002). Expansion and effectiveness of private tutoring *European Journal of Psychology of Education*, 17(3), 263-273.

Potari, D. (2012). The complexity of mathematics teaching and learning in mathematics teacher education and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(2), 97-101.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for research in mathematics education*, 550-576.

Sobhy, H. (2012). The de-facto privatization of secondary education in Egypt: A study of private tutoring in technical and general schools. *Compare: A Journal of Comparative and International Education*, 42(1), 47-67.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics Qualitative Research.Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. United States of America, California: Sage Publications, Inc

Valero, P. (2010). Mathematics education as a network of social practices. In *Proceedings of CERME 6, January 28th–February 1st 2009*. Lyon: France

‘ΤΟ ΤΕΝΤΩΝΩ ΚΑΙ ΒΛΕΠΩ ΠΟΣΟ ΨΗΛΟΣ ΕΙΜΑΙ!’ ΠΑΙΔΙΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ ΑΝΑΠΑΡΙΣΤΟΥΝ ΓΡΑΦΙΚΑ ΤΙΣ ΙΔΕΕΣ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΟ ‘ΜΕΤΡΟ’ ΚΑΙ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ[15]

Μαρία Παπανδρέου, Ιωάννα Σοφιανοπούλου, Αναστασία Καλογιαννίδου, Μαρία Μπιρμπίλη

Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, ΑΠΘ

44ο Νηπιαγωγείο Θεσσαλονίκης

12ο Νηπιαγωγείο Καλαμαριάς

Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης, ΑΠΘ

mpapan@nured.auth.gr, nsofianopoulou@gmail.com, anastasiakalogiannidou@gmail.com, mmpirmpi@nured.auth.gr

Η διερεύνηση των αναπαραστάσεών των μικρών παιδιών για τα συμβατικά εργαλεία γραμμικής μέτρησης αποτελεί μια διάσταση που έχει μελετηθεί μέχρι σήμερα ελάχιστα. Η εργασία αυτή μελετά, υπό το πρίσμα της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης, τις εμπειρίες μέτρησης μήκους που έχουν τα παιδιά στην καθημερινή τους ζωή με τα συμβατικά εργαλεία, χρησιμοποιώντας τη σχεδιαστική δραστηριότητα ως ερευνητικό εργαλείο. Η ανάλυση 82 σχεδίων και των αντίστοιχων περιγραφών παιδιών νηπιαγωγείου για το ‘μέτρο’ και τη χρήση του αναδεικνύει τους τρόπους με τους οποίους αναπαριστούν γραφικά τα εργαλεία γραμμικής μέτρησης, τα είδη των εμπειριών μέτρησης που έχουν, αλλά και το πως αντιλαμβάνονται τη διαδικασία μέτρησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα περισσότερα παιδιά φθάνουν στο Νηπιαγωγείο με ένα σημαντικό απόθεμα μαθηματικής γνώσης. Σήμερα υποστηρίζεται ευρέως ότι, όλες οι άτυπες μαθησιακές εμπειρίες και γνώσεις με μαθηματικό περιεχόμενο που τα παιδιά αποκτούν εκτός σχολείου, ακόμα και αν είναι αποσπασματικές και διαφέρουν αρκετά από την επίσημη μαθηματική γνώση, αποτελούν τις βάσεις πάνω στις οποίες μπορεί και πρέπει να στηρίζεται η μάθηση και η διδασκαλία στο σχολικό περιβάλλον (Clements & Sarama, 2009). Παρόλο που αυτή η άποψη είναι ευρέως αποδεκτή, η αξιοποίησή της στην μαθηματική εκπαίδευση συνεχίζει να αποτελεί πρόκληση για ερευνητές και εκπαιδευτικούς. Η παρούσα εργασία αναγνωρίζοντας τη σημασία αυτής της

[15]Κωδικός ερευνητικού έργου 91481, με τίτλο: *Η ανάπτυξη της σκέψης και της επικοινωνιακής ικανότητας στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης στο νηπιαγωγείο: Ερευνώντας τη σχεδιαστική δραστηριότητα των παιδιών καθώς επιλύουν αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα.* Φορέας χρηματοδότησης: ΕΛΚΕ, ΑΠΘ.

προοπτικής για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης, επικεντρώθηκε στην κατανόηση της γραμμικής μέτρησης και στις σχετικές εμπειρίες που έχουν τα μικρά παιδιά ηλικίας 4-6 ετών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατανόηση της μέτρησης του μήκους

Η διαδικασία κατανόησής της γραμμικής μέτρησης, η οποία αποτελεί τη βάση για τις μετρήσεις όλων των γεωμετρικών μεγεθών εμπεριέχει ένα αρκετά μεγάλο δίκτυο από αλληλοσυνδεόμενες έννοιες. Για να κατανοήσουμε το πώς εξελίσσεται αυτή η διαδικασία, θα πρέπει να την αντιμετωπίσουμε ως μια σειρά από συνεχείς αλλαγές αυτού του σύνθετου δικτύου εννοιών (Lehrer, 2003). Συγκεκριμένα, η μέτρηση συνδέεται με πολλές έννοιες, ιδέες και ιδιότητες, όπως είναι η αναγνώριση του μήκους ως ιδιότητα των φυσικών αντικειμένων, η διαμέριση (partitioning) του μήκους, η επανάληψη της μονάδας μέτρησης (unit iteration), η επικάλυψη (tiling) του αντικειμένου προς μέτρηση με μονάδες, η χρήση μονάδων ίδιου μεγέθους (identical units) για τη μέτρηση κάποιου μήκους, η αντίστροφη σχέση του μεγέθους της μονάδας μέτρησης με τον αριθμό των μονάδων, η διατήρηση του μήκους, η μεταβατική (transitivity) και προσθετική ιδιότητα (additivity), αλλά και η σχέση που έχει η μέτρηση με τον αριθμό, δηλαδή η διάκριση της αρίθμησης από τη μέτρηση φυσικών μεγεθών. Οι διαφορετικές ερευνητικές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία 40 χρόνια δίνουν διαφορετική βαρύτητα σε κάποιες από αυτές τις έννοιες, διαπιστώνουν πιο στενή ή πιο χαλαρή εξάρτηση μεταξύ τους ή διαφωνούν ως προς την αναπτυξιακή διαδοχή (e.g. Clements & Sarama, 2009, Lehrer, 2003). Ωστόσο σήμερα, οι περισσότεροι συμφωνούν ότι είναι απαραίτητο τα παιδιά να κατανοήσουν όχι μόνο το δίκτυο εννοιών, αλλά και τη διαδικασία χρήσης των συμβατικών μετρικών εργαλείων καθώς και τις μεταξύ τους αμοιβαίες σχέσεις (Lehrer 2003, Nunes & Bryant, 1996).

Σύμφωνα με την κοινωνικό-πολιτισμική προοπτική, ο χάρακας, η μετροταινία και η μεζούρα αποτελούν πολιτισμικά εργαλεία και η χρήση τους είναι μια δράση ενδιαφέρουσα και με νόημα για τα παιδιά, καθώς βρίσκεται κοντά στην καθημερινή ζωή και στις εμπειρίες τους (Nunes & Bryant 1996). Η χρήση τους αποτελεί γόνιμο έδαφος για την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης της μέτρησης, καθώς η αριθμητική αναπαράσταση των μονάδων πάνω σε ένα χάρακα διευκολύνει τα παιδιά να δουν στη πράξη τις ‘εφαρμογές’ της μέτρησης (MacDonald & Lowrie, 2011), σε αντίθεση με την χρήση μη συμβατικών εργαλείων, όπως ένα κομμάτι σκοινί ή μια κορδέλα (Papandreou, 2006). Παρόλα αυτά, τα εργαλεία μέτρησης δεν φαίνεται να έχουν κερδίσει την προσοχή που χρειάζεται στο σχολείο και συνήθως δεν αξιοποιούνται με ουσιαστικό τρόπο για τη κατανόηση των γεωμετρικών μεγεθών (Lowrie, Logan & Scriven, 2012).

Αν για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης χρειάζεται τα παιδιά να μπορούν να κάνουν συνδέσεις μεταξύ καθημερινής και επιστημονικής γνώσης, τότε για να διευκολύνουμε την ουσιαστική κατανόηση της γραμμικής μέτρησης πρέπει να γνωρίζουμε όχι μόνο την αναπτυξιακή πορεία των σχετικών εννοιών, αλλά και τις εμπειρίες που έχουν τα παιδιά εκτός σχολείου με συμβατικά εργαλεία μέτρησης. Όμως, αυτή η διάσταση της γραμμικής μέτρησης έχει μελετηθεί ελάχιστα και ειδικά στις μικρές ηλικίες. Έρευνα των MacDonald & Lowrie (2011) έδειξε ότι παιδιά ηλικίας 4-6 ετών κατέχουν ένα είδος άτυπων γνώσεων για το μήκος και τη μέτρησή του, οι οποίες προέρχονται από ποικίλες εμπειρίες μέτρησης που αποκτούν στο οικογενειακό ή κοινωνικό περιβάλλον τους. Όταν τα παιδιά κλήθηκαν να ζωγραφίσουν έναν χάρακα διαπιστώθηκε ότι αναγνώριζαν κάποια από τα χαρακτηριστικά της γραμμικής μέτρησης, την αριθμητική αναπαράσταση των μονάδων, την ακολουθία των αριθμών και ότι είχαν κάποια στοιχειώδη αντίληψη για τα όμοια χωρικά διαστήματα των μονάδων επάνω στα μετρικά εργαλεία. Επιπλέον βρέθηκε ότι, τα παιδιά που είχαν αρκετές εμπειρίες μέτρησης στην καθημερινή τους ζωή, εκδήλωσαν πιο επεξεργασμένες αντιλήψεις για τη γραμμική μέτρηση.

Αν και τα παραπάνω διευρύνουν τις γνώσεις μας για τις αντιλήψεις των παιδιών, υπάρχουν ζητήματα, όπως για παράδειγμα ο τρόπος που αντιλαμβάνονται τα χαρακτηριστικά και τη χρήση των εργαλείων μέτρησης, που δεν έχουν ακόμα διερευνηθεί. Υπό αυτή την προοπτική, ο στόχος αυτής της μελέτης ήταν να διερευνήσει τα ακόλουθα ερωτήματα.

1. Πως κατανοούν και ερμηνεύουν τα παιδιά νηπιαγωγείου τις εμπειρίες γραμμικής μέτρησης που έχουν με συμβατικά εργαλεία μέτρησης στην καθημερινότητά τους;

2. Πως αντιλαμβάνονται τα χαρακτηριστικά και τον τρόπο χρήσης αυτών των εργαλείων;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής μελέτης που βρίσκεται υπό εξέλιξη και μελετά τη πολυδιάστατη σχεδιαστική δραστηριότητα παιδιών νηπιαγωγείου κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (κωδικός έργου 91481, ΕΛΚΕ, ΑΠΘ). Το σχέδιο χρησιμοποιείται ως μέσο μάθησης, αλλά και ως ερευνητικό εργαλείο αξιολόγησης της σκέψης των παιδιών.

Το σχέδιο αποτελεί ένα ανοιχτό εργαλείο έρευνας που μας επιτρέπει πλησιάσουμε περισσότερο την δική τους οπτική καθώς μεταφέρει ένα μέρος του ελέγχου της ερευνητικής διαδικασίας στα ίδια τα παιδιά. Πρόκειται για μια ‘οπτική γλώσσα’ με την οποία τα παιδιά σκέφτονται και ‘μιλούν’ στον εαυτό τους και στους άλλους για τις εμπειρίες τους και τον τρόπο που αντιλαμβάνονται τον κόσμο γύρω τους (Papandreou, 2014). Η ολοκληρωμένη χρήση του, ως μέσο έκφρασης και επικοινωνίας στην έρευνα και στην εκπαίδευση, εμπεριέχει δυο φάσεις: την παραγωγή και την περιγραφή της εικόνας. Τα παιδιά εκφράζονται αρχικά γραφικά και στη συνέχεια, λόγω της μονιμότητας της εικόνας, μοιράζονται και προφορικά τις σκέψεις τους με τους άλλους (MacDonald & Lowrie, 2011). Έτσι, ακόμα και εκείνα που δεν εκφράζονται επαρκώς με τον προφορικό λόγο πολύ συχνά τα καταφέρουν μέσω του σχεδίου τους (Papandreou, 2014).

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

41 νήπια (5-6 ετών) συμμετείχαν σε αυτή την έρευνα η οποία υλοποιήθηκε σε δυο Νηπιαγωγεία, το 12ο Καλαμαριάς και το 44ο Θεσσαλονίκης με 20 και 21 παιδιά αντίστοιχα.

Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης μελέτης ζητήθηκε από τα παιδιά να παράγουν δυο σχέδια με το ίδιο θέμα: *‘Σχεδίασε ένα μέτρο και δείξε μας πως το χρησιμοποιούμε’*. Το πρώτο υλοποιήθηκε το Νοέμβριο (2014) και το δεύτερο τον Απρίλιο (2015). Μετά από κάθε σχέδιο οι εκπαιδευτικοί συζήτησαν με κάθε παιδί, διατυπώνοντας ερωτήσεις όπως: *Μπορείς να μου περιγράψεις τι έχεις ζωγραφίσει; Τι είναι αυτό; Γιατί έχει αριθμούς/γραμμές; Που/πως το χρησιμοποιούμε; Που το έχεις δει;* κλπ. Η συζήτηση παρόλο που στηρίχτηκε στις παραπάνω ερωτήσεις ήταν ανοιχτή και προσαρμόστηκε στο σχέδιο του κάθε παιδιού και τις απαντήσεις του.

Τα 82 σχέδια που ψηφιοποιήθηκαν και οι απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις με τα παιδιά, αποτέλεσαν τα δεδομένα της έρευνας. Από τα σχέδια καταγράφηκαν οι τρόποι αναπαράστασης του μέτρου και οι εμπειρίες χρήσης μετρικών εργαλείων. Η μελέτη των συζητήσεων ανέδειξε τον τρόπο χρήσης του μετρικού εργαλείου. Επιπλέον, εμπλούτισε τις αρχικές κατηγορίες που προέκυψαν από την ανάλυση των σχεδίων καθώς έγινε διασταύρωση των δεδομένων από τις δυο πηγές, και έτσι οριστικοποιήθηκαν οι τελικές κατηγορίες.

Κατηγορίες	Παραδείγματα
1. Ιδιοσυγκρασιακή αναπαράσταση Σκόρπιοι αριθμοί ή ακανόνιστο πλαίσιο χωρίς αριθμούς ή γραμμές	Νικόλας (12) Νοέμβριος  […] Ν: Δεν το έχω δει πουθενά Ε: Ο μπαμπάς έχει; Ν: Ναι Ε: Τι κάνει; Ν: Μας μετράει. Μας μετράει και με το θερμόμετρο.
2. Τυχαίοι αριθμοί ή γράμματα, ψευδο-αριθμοί/ γράμματα στη σειρά, συνήθως σε κάποιο πλαίσιο	Κωνσταντίνος (1) Νοέμβριος  Ε: Τι έγραψες εδώ; Κ: Γράμματα […] Ε: Πως το χρησιμοποιούμε; Κ: Για να δούμε αν είμαστε ψηλοί ή όχι. Ε: Που το χρησιμοποιούμε; Κ:Για κάποιες δουλειές για να μετράει.
3. Αριθμοί με σωστή διαδοχή, συνήθως σε κάποιο πλαίσιο ή πάνω σε μια κάθετη γραμμή	Χριστίνα (4) Νοέμβριος  Χρ: Ένα κοριτσάκι μετράει πόσο είναι Ε: Πώς το χρησιμοποιούμε το μέτρο; Χρ: μετράμε το κρεβάτι μας, το τραπέζι. Ε: Το έχεις χρησιμοποιήσει; Έχετε στο σπίτι; Χρ: Έχουμε, είναι της αδερφής μου, δε με αφήνει να το πειράζω
4. Γραμμές και αριθμοί με σωστή διαδοχή, συνήθως σε κάποιο πλαίσιο ή πάνω σε μια κάθετη γραμμή	Ελισάβετ (20) Απρίλιος  Ε: Πού τον χρησιμοποιούμε; Ελ: να μετράμε πράγματα. Ε: Πώς μετράμε; Ελ: Βάζουμε το χάρακα πάνω στα πράγματα και βλέπουμε πού σταματάει, τον αριθμό. […] Ε: Οι γραμμούλες τι σημαίνουν; Ελ: Οι μεγάλες σημαίνουν ότι είναι το μεγαλύτερο νούμερο και μικρές σημαίνουν ότι είναι το λιγότερο νούμερο.

Πίνακας 1. Οι κατηγορίες γραφικής αναπαράστασης του 'μέτρου'

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Α. Οι γραφικές αναπαραστάσεις των παιδιών για το 'μέτρο'

Στον πίνακα 1 περιγράφονται οι τέσσερεις κατηγορίες γραφικής αναπαράστασης του 'μέτρου' που εντοπίστηκαν από την ανάλυση των δεδομένων, ενώ στον πίνακα 2 παρουσιάζεται η κατανομή των σχεδίων ανά κατηγορία το Νοέμβριο και τον Απρίλιο. Όπως φαίνεται, σχεδόν όλα τα παιδιά ήδη από τον Νοέμβριο είχαν διαμορφώσει κάποια αντίληψη για το ‘μέτρο’. Μόνο έξι παιδιά το Νοέμβριο (τρία έκαναν ιδιοσυγκρασιακή αναπαράσταση του μέτρου και τρία δεν ζωγράφισαν) και ένα τον Μάιο δεν μπόρεσαν να το αναπαραστήσουν γραφικά.

	Ιδιοσυγκρα-σιακή	Τυχαίοι αριθμοί ή γράμματα	Διαδοχή αριθμών	Διαδοχή αριθμών & γραμμές	Ν
Νοε	9, 12, 14,	1, 7, 8, 13, 15, 16 17, 19, 21, 22, 23 26, 27, 28, 32, 35 39, 41	2, 3, 4, 5, 10, 18, 25, 29, 31, 33, 37, 38, 40	6, 30, 34, 36	
Ν	3(7%)	18 (44%)	13 (32%)	4 (10%)	38[16]
Απρ	14	16, 23, 24, 26, 39	1, 2, 3, 4, 5, 6,8 9, 10, 11, 13,15 17, 19, 21, 22, 27, 31, 32 33, 34, 37, 38, 41	2, 7,12, 18, 20, 25, 29, 30, 35, 35, 40	
Ν	1 (2%)	5 (12%)	24 (59%)	11 (27%)	41

Πίνακας 2: Οι γραφικές αναπαραστάσεις των παιδιών για το μέτρο ανά κατηγορία τον Νοέμβριο και τον Απρίλιο[17]

Οι αναπαραστάσεις των παιδιών δείχνουν μια σημαντική εξέλιξη μέσα στη διάρκεια των έξι μηνών, καθώς τα περισσότερα (24) τον Απρίλιο σχεδιάζουν το μέτρο με σωστή διαδοχή των αριθμών, ενώ αρκετά παιδιά (11) συμπεριλαμβάνουν και γραμμές στο μέτρο τους. Ακόμα κι αν δεν μπορούν να εξηγήσουν με σαφήνεια ποιος είναι ο ρόλος των γραμμών επάνω στο μέτρο, διαπιστώθηκε ότι έχουν κάποια αντίληψη για τη σημασία τους. Η εξήγηση της Ελισάβετ για παράδειγμα δείχνει να αντιλαμβάνεται, σε ένα πρώτο επίπεδο τις διαφορετικές υποδιαιρέσεις της μονάδας (πίνακας 1, κατηγορία 4). Βεβαίως τα περισσότερα παιδιά ξεκινούν τους αριθμούς στο ‘μέτρο’ από το 1 και όχι από το μηδέν (μόνο τρία παιδιά τον Απρίλιο).

[16]Τρία παιδιά (11, 20 & 24) δεν ζωγράφισαν τον Νοέμβριο ‘μέτρο’ διότι δεν ήξεραν τι είναι.

[17] Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν τα υποκείμενα της έρευνας.

B. Η χρήση του μέτρου

Α. Εμπειρίες μέτρησης 1. Δεν έχει ή δίνει ασαφή απάντηση 2. Απλή αναφορά σε πρόσωπο της οικογένειας, π.χ. *'ο μπαμπάς έχει'* (12) 3. Ζωγραφίζει & αναφέρει διάφορα αντικείμενα που μπορεί να μετρηθούν, π.χ. *'ένα κουτί […] ένα κρεβάτι, ένα τραπέζι, ότι θέλουμε'* (25), *'το λουλούδι κάνει 4 και ο κορμός του δέντρου 7'* (27) 4. Αναφέρεται σε προσωπικές εμπειρίες μέτρησης με άτομα της οικογένειας, συγκεκριμένα αντικείμενα & περιστάσεις, π.χ. *'εγώ που δεν είχα κρεβάτι μετρήσαμε εκεί με τη μαμά για το κρεβάτι'* (22), *'έτσι το αγόρασε ο μπαμπάς […]το βάλαμε κάτω στο μπαλκόνι, ήταν μεγάλο'* (28)
Β. Τρόπος χρήσης του 'μέτρου' (διαδικασία) I. Δεν ξέρει ή δίνει ασαφή απάντηση II. Περιγράφει τη διαδικασία με γενικό τρόπο π.χ. *'ανοίξαμε το μέτρο και είδαμε τους αριθμούς'*(22), *'…είδα όλους τους αριθμούς, το έβαλα από κάτω'*(30) *'…το βάζουμε γύρω γύρω και μετράμε αριθμούς'*(4), *'… ο μπαμπάς το κρατούσε από τη μια και εγώ από την άλλη'*(5) III. Δείχνει με πραγματικά αντικείμενα τη διαδικασία, π.χ. *παίρνει ένα τουβλάκι και το βάζει παράλληλα με το μέτρο που έχει ζωγραφίσει από το αρχικό σημείο, αναφέρει ως αποτέλεσμα της μέτρησης τον αριθμό που αντιστοιχεί στο τελικό σημείο του αντικειμένου* (15, 17) IV. Περιγράφει αναλυτικά τη διαδικασία ενώ την ίδια στιγμή μπορεί να δείχνει και στο σχέδιο του π.χ. *'θα βάλουμε το 1 στην αρχή του κουτιού και θα το μετρήσουμε εκεί που τελειώνει'* (25), *'…το βάζουμε από τη μια μεριά στην άλλη και βλέπουμε που σταματάει ο αριθμός'* (33), *'Μετά ο μπαμπάς βλέπει τον αριθμό […] που είναι στο κεφάλι μου'* (35)

Πίνακας 3: Οι κατηγορίες που αφορούν τις εμπειρίες μέτρησης και τον τρόπο χρήσης

Όσον αφορά στην χρήση του μέτρου δυο σημαντικά θέματα εντοπίστηκαν στις γραφικές αναπαραστάσεις και τις προφορικές περιγραφές των παιδιών, α. οι εμπειρίες μέτρησης που έχουν και β. ο τρόπος χρήσης του 'μέτρου'. Για κάθε ένα από αυτά τα θέματα προέκυψαν τέσσερις κατηγορίες απαντήσεων, οι οποίες περιγράφονται στον πίνακα 3. Στον πίνακα 4 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης κάθε κατηγορίας εμπειριών σε σχέση με τον τρόπο χρήσης του μέτρου. Γενικά, βλέπουμε ότι τα παιδιά έχουν πλούσιες εμπειρίες μέτρησης (κατηγορία γ και δ, ένα και 9 παιδιά αντίστοιχα το Νοέμβριο), οι οποίες δείχνουν να αυξάνονται προς το τέλος της σχολικής χρονιάς (Απρίλιος, 14 και 20 παιδιά αντίστοιχα). Επίσης, σε αυτή τη χρονική περίοδο φαίνεται να μπορούν περισσότερα παιδιά να δείξουν (κατηγορία III) ή να περιγράψουν με αρκετή ακρίβεια (κατηγορία.

IV) τον τρόπο χρήσης του μέτρου. Οι δυο πρώτες κατηγορίες απαντήσεων που αφορούν τις εμπειρίες μέτρησης δείχνουν απουσία εμπειριών (κατηγορία α) ή ελάχιστη εμπειρία (κατηγορία β). Βλέπουμε, επιπλέον, ότι τα παιδιά αυτά (που δεν αναφέρουν εμπειρίες) είτε δεν περιγράφουν καθόλου τον τρόπο χρήσης του μέτρου (κατηγορία I, πέντε παιδιά το Νοέμβριο και ένα τον Απρίλιο) είτε περιγράφουν τη χρήση του πολύ γενικά (κατηγορία II, τέσσερα παιδιά το Νοέμβριο και ένα τον Απρίλιο). Αντίθετα, τα παιδιά που περιγράφουν με πιο συγκεκριμένο τρόπο τη διαδικασία χρήσης του εργαλείου (κατηγορία III και IV) φαίνεται από τις απαντήσεις τους, ότι έχουν πιο πλούσιες εμπειρίες μέτρησης (κατηγορία γ και δ).

		Κατηγορίες	Τρόπος χρήσης του ‘μέτρου’ I.	II.	III.	IV.	N
Εμπειρίες μέτρησης	Νοε	1. Δεν αναφέρει	5	4	-	-	9 (22%)
		2. Οικογένεια	3	-	-	-	3 (7%)
		3. Αντικείμενα	2	5	1	5	13 (32%)
		4. Εαυτός, οικογ., αντικείμενα & περιστάσεις	5	7		4	16 (39%)
		N	15	16	1	9	41 (100%)
	Απρ	1. Δεν αναφέρει	1	1	1	-	3 (7%)
		2. Οικογένεια	-	-	-	-	0 (0%)
		3. Αντικείμενα	-	3	7	14	24 (59%)
		4. Εαυτός, οικογ., αντικείμενα & περιστάσεις	-	1	7	6	14 (34%)
		N	1(2%)	5 (12%)	15 (37%)	20(49%)	41 (100%)

Πίνακας 4: Το είδος των εμπειριών σε σχέση με τον τρόπο χρήσης του εργαλείου

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι όταν τα παιδιά έχουν εμπειρίες μέτρησης δεν είναι σίγουρο ότι μπορούν πάντα να περιγράψουν τη διαδικασία χρήσης, ενώ αντίθετα όλα τα παιδιά που περιγράφουν τον τρόπο χρήσης του εργαλείου του εργαλείου αναφέρουν και σχετικά πλούσιες εμπειρίες μέτρησης. Αυτό θα έλεγε κανείς ότι είναι αναμενόμενο, καθώς πως θα μπορούσαν να περιγράψουν τη χρήση ενός πολιτισμικού εργαλείου χωρίς προσωπικές εμπειρίες. Το εύρημα αυτό όμως είναι μια ένδειξη εγκυρότητας του ερευνητικού εργαλείου και υποστηρίζει το ρόλο της σχεδιαστικής δραστηριότητας ως μέσο για τη διερεύνηση των ιδεών των παιδιών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έρχονται να επιβεβαιώσουν, αλλά και να επεκτείνουν τα αποτελέσματα των Macdonald και Lowrie (2011). Πράγματι, διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά Νηπιαγωγείου κατέχουν ένα σημαντικό απόθεμα γνώσεων για τα εργαλεία μέτρησης όσο και τις μετρικές διαδικασίες, οι οποίες συνεχώς εμπλουτίζονται μέσα από τις καθημερινές εμπειρίες τους και την αλληλεπίδραση με τους ενήλικες. Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα, αναπαριστούν με μεγάλη ακρίβεια τη μορφή του μέτρου (βλ. Ελισάβετ πίνακας 1). Επιπλέον, με την παρούσα εργασία, αναλύοντας τις προσπάθειες τους να περιγράψουν με ποιο τρόπο γίνεται μια μέτρηση, κατανοούμε πώς τα παιδιά σε αυτήν την ηλικία ερμηνεύουν τις διάφορες μετρήσεις που παρακολουθούν να συμβαίνουν γύρω τους και πως τις μετασχηματίζουν όταν χρειάζεται τα ίδια να υλοποιήσουν μια μέτρηση (π.χ. όταν την δείχνουν στο σχέδιό τους).

Μέσα από αυτή τη μελέτη αναδεικνύεται και ένα μεθοδολογικό ζήτημα, η σημασία της σχεδιαστικής δραστηριότητας ως ερευνητικό εργαλείο για την προσέγγιση της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Τα παιδιά κατάφεραν με το σχέδιο να ανακαλέσουν και να απομονώσουν συγκεκριμένες εμπειρίες μέτρησης που είχαν, να δώσουν νόημα σε καθημερινές πρακτικές μέτρησης, που ίσως περνούν απαρατήρητες, και να τις συνειδητοποιήσουν.

Όλα τα παραπάνω έχουν σημαντικές προεκτάσεις για τη μάθηση και διδασκαλία των μετρήσεων, αλλά και γενικότερα των μαθηματικών στις μικρές ηλικίες. Μέσα από τέτοιου είδους διαδικασίες αξιολόγησης -όπως είναι το σχέδιο- ο ρόλος των συμβατικών εργαλείων μέτρησης στην εκπαίδευση, άλλοτε υπερτιμημένος κι άλλοτε υποτιμημένος, θα μπορούσε να καθοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια. Η προσεκτική ‘ακρόαση’ των παιδιών μέσω του σχεδίου μας δίνει περισσότερες ευκαιρίες να γνωρίσουμε τις ποικίλες γνώσεις που έχουν και να κατανοήσουμε πως ερμηνεύουν τις διαφορετικές εμπειρίες τους. Επιπλέον, η μελέτη αυτή έδειξε ότι τα παιδιά χρειάζονται ευκαιρίες ώστε να επεξεργάζονται αυθεντικά προβλήματα μέτρησης στο σχολικό περιβάλλον. Με αυτό τον τρόπο, ίσως να μπορούν να συνδέσουν αυτές τις εμπειρίες με καθημερινές εμπειρίες μέτρησης που έχουν εκτός σχολείου και να επεκτείνουν την κατανόηση τη γραμμικής μέτρησης και του μήκους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Leher, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G.Martin, &D.Schifter (Eds.), *A Research Companion to* *principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lowrie, T. Logan, T. & Scriven, B. (2012). Perspectives on Geometry and Measurement in the Australian Curriculum: Mathematics. In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen & D. Siemon, (Eds.), *Engaging the Australian national curriculum: mathematics – perspectives from the field* (pp. 71-88). Online Publication: Mathematics Education Research Group of Australasia.

MacDonald, A., & Lowrie, T. (2011). Developing measurement concepts within context: Children’s representations of length. *Mathematics Education Research Journal, 23*(1), 27–42.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

Papandreou, M. (2014). Communicating and thinking through drawing activity in early childhood. *Journal of Research in Childhood Education. 28*(1), 85-100.

Papandreou, M. (2009). Preschoolers’ semiotic activity: additive problem-solving and the representation of quantity. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis, (Eds.), *Proceedings of the 33th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 321-328). Thessaloniki, Greece: PME.

Papandreou, M. (2006). Measurement tools and the development of length concepts in early childhood education. *Themes in Education, 7*(1), 25-42.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έφη Παπαριστοδήμου[1], Μαρία Μελετίου-Μαυροθέρη[2], Anna Serrado Bayes[3]

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου[1], Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου[2], La Salle-Buen Consejo, Spain[3]

e.paparistodemou@cytanet.com.cy[1], m.mavrotheris@euc.ac.cy[2], ana.serrado@gm.uca.es[3]

Ο ρόλος της μοντελοποίησης των στατιστικών εννοιών και της χρήσης δυναμικών στατιστικών πακέτων για την κατανόηση και την εκτίμηση της πρακτικής αξίας των στατιστικών εννοιών κρίνεται μέσα στη σύγχρονη βιβλιογραφία ιδιαίτερα σημαντικός (π.χ., Gil & Ben-Zvi, 2011). Η παρούσα εργασία εστιάζεται στο πώς οι εκπαιδευτικοί ως μεταπτυχιακοί φοιτητές μοντελοποιούν προβλήματα στατιστικού συλλογισμού. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την τεχνολογία σε δραστηριότητες μοντελοποίησης στη λήψη αποφάσεων, κατανοώντας τη σχέση του μέρους και του όλου στα δεδομένα τους, την επίδραση των μεγάλων αριθμών και τη σύνδεση της θεωρητικής και της εμπειρικής πιθανότητας.

Λέξεις-κλειδιά: Μοντελοποίηση, Δυναμικά Στατιστικά Εργαλεία, Επαγωγική Στατιστική

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η επαγωγική στατιστική έχει ως στόχο να καταλήξει σε συμπεράσματα που εκτείνονται πέρα από τα άμεσα δεδομένα και βελτιώνει τη λήψη αποφάσεων σε μια ποικιλία από πραγματικές καταστάσεις, παρέχοντας εργαλεία που επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων ή συνέπειες για τους πληθυσμούς. Ενώ οι βασικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων της περιγραφικής στατιστικής φαίνεται να είναι κατανοητές από τους περισσότερους φοιτητές, στην επαγωγική στατιστική αντιμετωπίζουν δυσκολίες (π.χ., Rubin, Hammerman, & Konold, 2006). Η έρευνα στον τομέα της διδακτικής της στατιστικής αναφέρει ότι οι εκπαιδευόμενοι έχουν δυσκολίες στη χρήση της επαγωγικής μεθόδου. Για παράδειγμα, η έρευνα για την εισαγωγή μεταπτυχιακού επιπέδου μαθημάτων στατιστικής δείχνει ότι ακόμα και φοιτητές που μπορούν να εφαρμόσουν με επιτυχία τις διαδικασίες για τον έλεγχο της υπόθεσης και εκτίμησης των παραμέτρων, δεν είναι συχνά σε θέση να μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτές τις διαδικασίες κατάλληλα σε εφαρμογές καθημερινών καταστάσεων (π.χ., Gardner & Hudson, 1999).

Με την πρόοδο της τεχνολογίας έχουν τα τελευταία χρόνια αναπτυχθεί διδακτικές προσεγγίσεις που μπορούν να βοηθήσουν στην εννοιολογική κατανόηση της επαγωγικής στατιστικής. Η εμφάνιση ιδιαίτερα των δυναμικών στατιστικών περιβάλλοντων μάθησης, όπως το Fathom© (Finzer, 2001) και το TinkerPlots© (Konold & Miller, 2005), τα οποία έχουν σχεδιαστεί ειδικά για να στηρίξουν την ένταξη των προσεγγίσεων διερευνητικής ανάλυσης των δεδομένων και των πιθανολογικών μοντέλων, έδωσαν ένα εύχρηστο εργαλείο για την κατανόηση της επαγωγικής στατιστικής. Αρκετοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει αυτά τα εργαλεία για την προώθηση της ικανότητας των μαθητών και φοιτητών με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα (π.χ., Gil & Ben-Zvi, 2011; Konold & Lehrer, 2008; Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2008). Μερικές από τις μελέτες έχουν δείξει ότι ακόμη και τα μικρά παιδιά μπορούν να αναπτύξουν ισχυρές αντιλήψεις για συμπερασματολογία, όταν χρησιμοποιούν κατάλληλα εργαλεία οπτικοποίησης δεδομένων (π.χ., Meletiou-Mavrotheris & Paparistodemou, 2014).

Η παρούσα εργασία μοιράζεται τις εμπειρίες μέσα από τη μοντελοποίηση στατιστικών εννοιών στο πλαίσιο ενός μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών. Η μελέτη επιχείρησε να απαντήσει στα ακόλουθα ερωτήματα:

(i) Πώς οι εκπαιδευτικοί ως μεταπτυχιακοί φοιτητές χρησιμοποιούν την μοντελοποίηση σε προβλήματα στατιστικού συλλογισμού επαγωγικής στατιστικής;

(ii) Σε ποια σημεία οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι τους βοήθησε η μοντελοποίηση για την κατανόηση στατιστικών εννοιών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο και συμμετέχοντες

Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο μαθήματος του μεταπτυχιακού προγράμματος Επιστημών Αγωγής στο Ευρωπαϊκο Πανεπιστήμιο Κύπρου. Η διαδικασία ξεκίνησε τον Οκτώβριο του 2014 και ολοκληρώθηκε στα τέλη Ιανουαρίου του 2015. Στο μάθημα συμμετείχαν δεκαεννέα (n = 19) φοιτητές, οι οποίοι ήταν εκπαιδευτικοί και οι οποίοι είχαν πολυμορφία σε μια σειρά από παραμέτρους όπως τα χρόνια υπηρεσίας, την ηλικία, το ακαδημαϊκό υπόβαθρο. Η ηλικία τους κυμαίνονταν από 23 έως 42 χρονών. Μερικοί ήταν εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης ενώ οι υπόλοιποι ήταν εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε διαφορετικούς τομείς. Οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες δεν είχαν μελετήσει ποτέ επίσημα το θέμα, ενώ άλλοι είχαν παρακολουθήσει προηγουμένως κάποιο μάθημα στατιστικής. Ωστόσο, ακόμη και οι συμμετέχοντες που είχαν παρακολουθήσει μάθημα στατιστικής προηγουμένως, η εξοικείωσή τους στη χρήση της τεχνολογίας για την κατανόηση στατιστικών εννοιών ήταν περιορισμένη.

Η έμφαση στην μοντελοποίηση έγινε με τη χρήση του δυναμικού λογισμικού TinkerPlots© . Το συγκεκριμένο λογισμικό στηρίζει την ένταξη των προσεγγίσεων της διερευνητικής ανάλυσης των δεδομένων και πιθανολογικών μοντέλων και κάνει εφικτή τη δημιουργία δεδομένων (π.χ., τη λήψη δειγμάτων από ένα μοντέλο) και πειραματισμού (π.χ., βελτίωση των μοντέλων, τη διενέργεια προσομοιώσεων). Κατά τη διάρκεια του εξαμήνου, οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούσαν το TinkerPlots© και εργάστηκαν σε μια σειρά από ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες μοντελοποίησης (Lesh et al., 2000). Στις δραστηριότητες αυτές έπρεπε να δημιουργήσουν και να δοκιμάσουν στατιστικά μοντέλα για να λύσουν ένα πολύπλοκο, από την καθημερινή ζωή πρόβλημα και να δώσουν απαντήσεις σε ερωτήματα (Garfield, delMas & Zieffler, 2010). Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τρόπο που να υποστηρίζουν και να εξελίσσουν τις αντιλήψεις των φοιτητών-εκπαιδευτικών για θεμελιώδεις ιδέες που σχετίζονται με τη στατιστική συμπερασματολογία. Οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί σε μερικές από τις δραστηριότητες εργάστηκαν εξατομικευμένα και σε άλλες περιπτώσεις εργάστηκαν σε ομάδες των 3-4 ατόμων. Ένα τυπικό παράδειγμα δραστηριοτήτων που χρησιμοποιήθηκε ήταν η δραστηριότητα με τίτλο ‘Πόσα εισιτήρια πρέπει να πωληθούν;’ (προσαρμοσμένο από http://new.censusatschool.org.nz/resource/using-tinkerplots-for-probability-modelling/). Οι διάφορες κατανομές πιθανότητας παρουσιάστηκαν ως μοντέλα που βασίζονταν σε ορισμένες παραδοχές, οι οποίες όταν άλλαζαν οδηγούσαν σε αλλαγές στην κατανομή. Η έμφαση του μαθήματος σε όλη τη διάρκεια δόθηκε στις ομοιότητες και στις διαφορές μεταξύ αυτών των κατανομών μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής και στατιστικά μοντέλα που βασίζονται σε πειραματικά δεδομένα.

Μέθοδοι συλλογής δεδομένων

Χρησιμοποιώντας παρατήρηση στην τάξη, οπτικογραφήσεις, συνεντεύξεις φοιτητών και τα δείγματα της εργασίας τους, η μελέτη ερεύνησε τις αλληλεπιδράσεις του TinkerPlots© και τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί είχαν εμπλακεί σε δραστηριότητες μοντελοποίησης δεδομένων και πώς αυτό επηρέασε την κατανόηση των βασικών ιδεών που σχετίζονται με την επαγωγική στατιστική.

Σήμερα, βρισκόμαστε στο στάδιο της ανάλυσης των δεδομένων, προκειμένου να γίνει μια σε βάθος διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων των φοιτητών-εκπαιδευτικών με το εργαλείο και να τεκμηριωθούν οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους οι ιδέες που σχετίζονται με τα μοντέλα και τη μοντελοποίηση ήταν κατανοητές. Ταυτόχρονα, διερευνούμε τους τρόπους με τους οποίους η ανάπτυξη της συλλογιστικής των συμμετέχοντων σχετικά με τα μοντέλα και τη μοντελοποίηση επηρέασε τον στατιστικό συλλογισμό τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η προκαταρκτική ανάλυση των δεδομένων δείχνει ότι η προσέγγιση που υιοθέτησε η μελέτη προώθησε την ικανότητα των φοιτητών-εκπαιδευτικών να κρίνουν και έπειτα να προβούν στα κατάλληλα συμπεράσματα με βάση τα δεδομένα τους. Τα άτυπα συμπεράσματα που βασίζονταν σε δεδομένα στα οποία επικεντρώθηκαν οι οδηγίες στο πρώτο μέρος του μαθήματος, βοήθησε τους φοιτητές-εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν τον στατιστικό συλλογισμό τους (Ben-Zvi, 2006), ούτως ώστε να εμπλακούν σε δραστηριότητες επαγωγικής στατιστικής στο τελευταίο μέρος του μαθήματος.

Μέσα από τη συλλογή και την ανάλυση των πραγματικών δεδομένων ή / και την εκτέλεση προσομοιώσεων στο λογισμικό TinkerPlots©, οι συμμετέχοντες πειραματίστηκαν ενεργά με τις στατιστικές ιδέες και εξέτασαν την αλληλεπίδραση μεταξύ της ανάλυσης των δεδομένων και του θεωρητικού μοντέλου.

Φυσικά, όπως και σε άλλους ερευνητές, διακρίναμε διαφορετικά επίπεδα στατιστικού συλλογισμού των συμμετεχόντων, τα οποία διακρίνονται τόσο κατά την αλληλεπίδραση τους με τα δεδομένα όσο και με τον ίδιο τον αναστοχασμό που θέτουν οι ίδιοι στο τέλος (Konold, Harradine, & Kazak, 2007; Pratt, 2011; Zieffler, delMas, & Garfield, 2014).

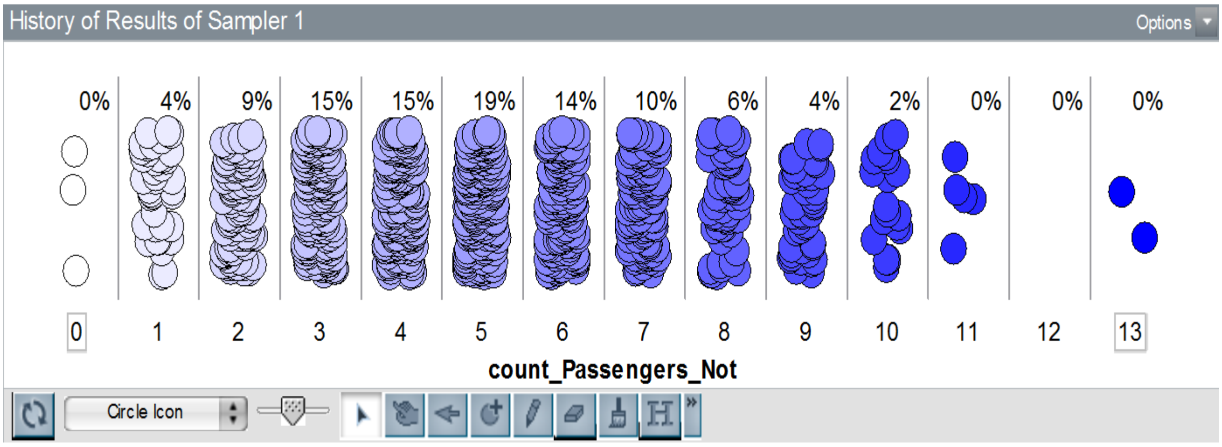
Στη συνέχεια, καταγράφουμε ακροθιγώς τους τρόπους με τους οποίους οι συμμετέχοντες προσέγγισαν το «Πόσα εισιτήρια να πωληθούν;" Η προκαταρκτική ανάλυση των δεδομένων που συλλέγονται σε αυτή τη δραστηριότητα, αποκάλυψε σημαντικές διαφορές στις προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών για το πρόβλημα - αυτές οι διαφορές θα είναι το επίκεντρο μιας πιο λεπτομερής ανάλυσης των δεδομένων που θα παρουσιαστεί στο συνέδριο.

Μοντελοποίηση δεδομένων

Οι συμμετέχοντες είχαν να αντιμετωπίσουν το πιο κάτω σενάριο:

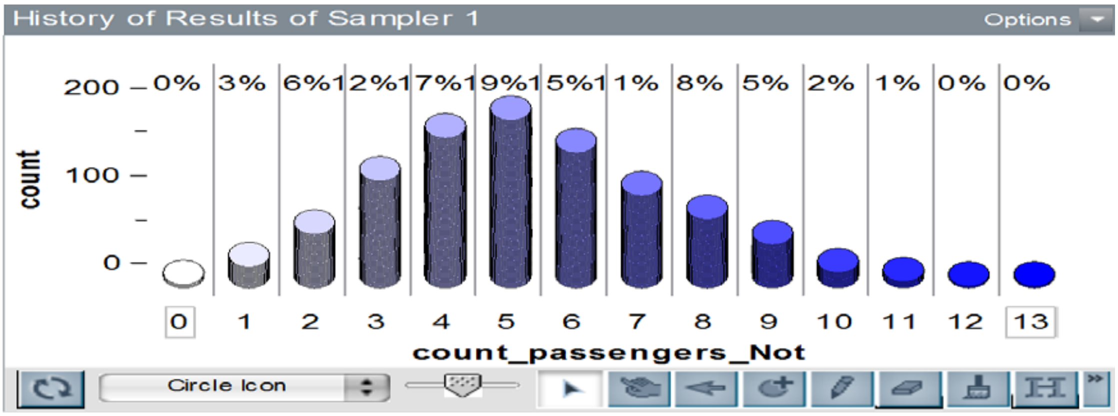
‘Η αεροπορική εταιρεία Air Zland έχει βρει ότι κατά μέσο όρο 2,9% των επιβατών της που αγοράζουν εισιτήρια για εσωτερικές πτήσεις δεν εμφανίζονται για να πάρουν την πτήση που έχουν κλείσει. Ως αποτέλεσμα του φαινομένου αυτού, η εταιρεία έχει αποφασίσει να εφαρμόσει την πρακτική της υπερκράτησης θέσεων (seat overbooking). Το Airbus A320, που χρησιμοποιείται στις εσωτερικές πτήσεις της εταιρείας, διαθέτει 171 θέσεις. Πόσα επιπλέον εισιτήρια θεωρείτε ότι πρέπει να εκδίδει η Air Zland στις πτήσεις της που είναι πλήρεις σε κρατήσεις (fully-booked), ούτως ώστε να αυξήσει τα κέρδη της, χωρίς όμως να προκαλεί ταλαιπωρία ή/και δυσαρέσκεια στο επιβατικό της κοινό;’

Αλληλεπιδρώντας με το λογισμικό TinkerPlots© δοκίμασαν διάφορα μοντέλα για να αποφασίσουν τον αριθμό των εισιτηρίων. Στην αρχή βρήκαν ότι το 2,9% των επιβατών που κράτησαν θέση στις εσωτερικές πτήσεις, δεν παρουσιάζονται τη μέρα της αναχώρησης. Στην Εικόνα 1 παρατηρούμε μία ανάλυση δεδομένων για την πώληση 176 εισητηρίων σε 1005 προσομοιώσεις.



Εικόνα 1: Αποτελέσματα των 1005 προσομοιώσεων για 176 εισιτήρια

Δοκιμάζοντας το πιο πάνω μοντέλο, οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν κατά πόσο θα ήθελαν να διαφοροποιήσουν το μοντέλο τους. Στην Εικόνα 2 παρατηρούμε την εργασία φοιτητών-εκπαιδευτικών για την πώληση 175 εισητηρίων σε 1005 προσομοιώσεις.



Εικόνα 2: Αποτελέσματα των 1005 προσομοιώσεων για 175 εισιτήρια

Βλέποντας την Εικόνα 2, οι συγκεκριμένοι φοιτητές-εκπαιδευτικοί απάντησαν:

Εκπαιδευτικός 1: ...Με τα πιο πάνω αποτελέσματα αποφασίσαμε να συμβουλέψουμε την AirZland να πωλεί 175 εισιτήρια, 4 εισιτήρια περισσότερα, ούτως ώστε να έχει μικρότερο ποσοστό παραπονεμένων επιβατών. Είναι σημαντικό η εταιρεία να βρει λύσεις για αυτούς τους επιβάτες, αν τελικά παρουσιαστούν τη μέρα της αναχώρησης, όπως να δοθεί διανυκτέρευση σε ξενοδοχείο, αναβάθμιση θέσης στην επόμενη πτήση, κτλ.’

Στο πιο πάνω απόσπασμα παρατηρούμε ότι οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί με βάση τα αποτελέσματα της προσομοίωσής τους με 175 εισιτήρια αποφάσισαν να πωλήσουν 4 περισσότερα εισιτήρια και να δώσουν λύσεις στην εταιρεία σε περίπτωση που οι επιβάτες εμφανιστούν.

Στην παρούσα εργασία οι συμμετέχοντες μελέτησαν διάφορα προβλήματα παρόμοιας φύσης με το ‘Πόσα εισιτήρια να πωληθούν;΄ ούτως ώστε με τη χρήση του λογισμικού TinkerPlots© να δημιουργήσουν μοντέλα του πραγματικού κόσμου για να εξετάσουν υποθέσεις και να εξαγάγουν συμπεράσματα. Με τον τρόπο αυτό είχαν εμπλακεί σε δραστηριότητες για την κατανόηση της λογικής του ελέγχου υποθέσεων και των άλλων στατιστικών εννοιών, όπως επίπεδο σημαντικότητας, p-value, μηδενική και εναλλακτική υπόθεση.

Στο τέλος του έργου, οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να αναστοχαστούν σχετικά με τη χρησιμότητα των μοντέλων. Συγκεκριμένα, έπρεπε να απαντήσουν στην ερώτηση: *«Ήταν χρήσιμο για εσάς η μοντελοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιώντας το TinkerPlots©; Να εξηγήσετε.»* Η πλειοψηφία των εκπαιδευομένων (n=15) θεώρησαν ότι η μοντελοποίηση του προβλήματος ήταν πολύ χρήσιμη. Ωστόσο, μερικοί (n=4) υποστήριξαν ότι η μοντελοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιώντας TinkerPlots© δεν ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού χρησιμοποίησαν απευθείας τον τύπο της διωνυμικής κατανομής.

Ενισχύοντας την κατανόηση στατιστικών εννοιών

Οι συμμετέχοντες που εκφράστηκαν θετικά στην όλη διαδικασία μοντελοποίησης με το λογισμικό TinkerPlots©, δικαιολόγησαν αυτό το γεγονός στην κατανόηση του μέρους και του όλου των δεδομένων τους, στην κατανόηση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών και στη σύνδεση της θεωρητικής και της εμπειρικής πιθανότητας.

Οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί έδωσαν ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση του ρόλου της κάθε περίπτωσης των δεδομένων και πώς η κάθε περίπτωση επηρέαζε το γενικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα κάποιοι αναφέρουν:

Εκπαιδευτικός 1: Οι διαδικασίες που έκανα στο TinkerPlots© με βοήθησαν να κατανοήσω τις παραμέτρους του προβλήματος και πώς κάθε περίπτωση επηρέασε το γενικό αποτέλεσμα. Έτσι, ήταν ευκολότερο για μένα να λύσω το πρόβλημα της διωνυμικής κατανομής.

Εκπαιδευτικός 2: Είναι σημαντικό ότι είδα πώς λειτουργούν τα γραφήματα. Είχα άμεση πρόσβαση στα δεδομένα και μπορούσα να κάνω αλλαγές και να *δω* πώς αυτές οι αλλαγές επηρέασαν τη γραφική παράσταση. Αυτό κάνει τα πράγματα ξεκάθαρα για μένα.

Οι πιο πάνω φοιτητές-εκπαιδευτικοί αναφέρονται στη χρησιμότητα που είχε το λογισμικό για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Είναι σημαντικό στο πώς εκφράστηκαν για την άμεση πρόσβαση που είχαν στα δεδομένα και στο πώς 'έβλεπαν' τις αλλαγές να επηρεάζουν τα γραφήματά τους.

Πολλοί συμμετέχοντες εκφράστηκαν για τη χρησιμότητα των μοντέλων παραπέμποντας στο Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.

Εκπαιδευτικός 3: [Το λογισμικό] προσομοίωνε περισσότερες από 3.000 πτήσεις σε λίγα λεπτά, έτσι πήραμε πολλά δεδομένα και καταλάβαμε πώς λειτουργεί η κατανομή.

Εκπαιδευτικός 4: Ήταν χρήσιμο για μένα, γιατί κατάλαβα πώς μια τυχαία διαδικασία, με μεγάλους αριθμούς μπορεί να λειτουργήσει. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση της πιθανότητας.

Είναι σημαντικό ότι οι ίδιοι οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται από μόνοι τους τη σημασία της σύνδεσης μεταξύ θεωρητικής και εμπειρικής πιθανότητας και πώς ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών βοηθά στη σύνδεση αυτή. Από την άλλη, οι εκπαιδευτικοί που δεν βρήκαν χρήσιμη τη μοντελοποίηση του προβλήματος, ήταν αυτοί που είχαν πλήρη εμπιστοσύνη στους τύπους των κατανομών.

Εκπαιδευτικός 10: Συνειδητοποιήσαμε σε μια πρώτη ματιά ότι είχαμε μια διωνυμική κατανομή εδώ, είχαμε «αφίξεις» και «no shows» και την ανεξαρτησία = 0.029. Έτσι, χρησιμοποιήσαμε τους τύπους και λύσαμε το πρόβλημα.

Είναι ενδιαφέρον το πώς οι φοιτητές-εκπαιδευτικοί επεξηγούν διαφορετικά την εμπειρία τους από τη χρήση μοντέλων. Στις εξηγήσεις τους, έδειξαν πώς η μοντελοποίηση λειτούργησε διαφορετικά για τον καθένα. Αυτό τους έδωσε την ευκαιρία να πάνε πέρα από τα δεδομένα που είχαν στη διάθεσή τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρκετές μελέτες (π.χ., delMas, Garfield, Ooms & Chance, 2007) που εξετάζουν τα μαθησιακά αποτελέσματα έδειξαν μια ανησυχητική έλλειψη στατιστικού συλλογισμού ακόμη και σε φοιτητές που έχουν ολοκληρώσει τα μαθήματα της στατιστικής. Επιπλέον, έρευνες έδειξαν ότι ακόμη και οι φοιτητές που μπορούν να εφαρμόσουν με επιτυχία τις διαδικασίες για τον έλεγχο της υπόθεσης και εκτίμησης των παραμέτρων μπορεί να μην είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν αυτές τις διαδικασίες κατάλληλα σε εφαρμογές (π.χ., Gardner & Hudson, 1999). Έτσι, υπάρχει μεγάλο περιθώριο για βελτίωση της διδασκαλίας και της εκμάθησης των στατιστικών εννοιών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Garfield et al., 2012). Η παρούσα μελέτη παρέχει μερικές χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους η μοντελοποίηση, η γενίκευση και η αιτιολόγηση μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν την εκτίμηση του σημαντικού ρόλου των μοντέλων και της μοντελοποίησης στη στατιστική συμπερασματολογία καθώς επίσης και πόσο σημαντική θεωρούν οι ίδιοι τη διαδικασία αυτή. Η μοντελοποίηση έχει μπει αρκετά στις νέες διδακτικές προσεγγίσεις. Ένα σημαντικό βήμα είναι οι εκπαιδευτικοί να βιώσουν την εμπειρία και να κατανοήσουν τη σημασία της σε ό,τι αφορά στην κατανόηση εννοιών, ούτως ώστε να τη χρησιμοποιούν και στη δική τους επιμόρφωση αλλά και στη δική τους διδασκαλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding Students' Informal Inference and Argumentation. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), Working Cooperatively in Statistics Education: *Proceedings of the Seventh International Conference of Teaching Statistics* (ICOTS-7), Salvador, Brazil.

delMas, R. C., Garfield, J., Ooms, A., & Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 28-58.

Finzer, W. (2001). *Fathom Dynamic Statistics (v1.0) [Current version is 2.1]*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Gardner, H., & Hudson, I. (1999). University Students' Ability to Apply Statistical Procedures. *Journal of Statistics Education*, *7*(1). Online: www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n1/gardner.cfm

Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2010). Developing tertiary-level students' statistical thinking through the use of model-eliciting activities. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2012). Developing statistical modelers and thinking in an introductory, tertiary - level statistics course. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *44* (7), 883 – 898.

Gil, E., & Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*, 87–108.

Konold, C, Harradine, A. & Kazak, S. (2007). Understanding distribution by modelling them, *International Journal for Computers and Mathematical Learning*, *12*, 217-230.

Konold, C., & Lehrer, R. (2008). Technology and mathematics education: An essay in honor of Jim Kaput. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 49–72). New York, NY: Routledge.

Konold, C., & Miller, C. D. (2005). T*inkerPlots: Dynamic Data Exploration (v1.0) [Current version is 2.1]*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Meletiou-Mavrotheris, M., and Paparistodemou, E. (2015). Developing Young Learners' Reasoning about Samples and Sampling in the Context of Informal Inferences. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 385-404.

Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Enhancing reasoning about statistical inference in 8 year-old students. *Statistics Education Research Journal, 7* (2), 83–106.

Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. In *Proceedings of the 58th World Statistics Conference of the International Statistical Institute* (pp. 880-899), Dublin Ireland.

Rubin, A., Hammerman, J., & Konold, C. (2006). Exploring Informal Inference with Interactive Visualization Software. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), Working Cooperatively in Statistics Education: *Proceedings of the Seventh International Conference of Teaching Statistics* (ICOTS-7), Salvador, Brazil.

Zieffler, A., delMas, R., & Garfield, J. (2014). The symbiotic, mutualistic relationship between modelling and simulation in developing students' statistical reasoning about inference and uncertainty. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Online: www.iase-web.org.

Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΔΟΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μάριος Πιττάλης, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή & Κωνσταντίνος Χρίστου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

m.pittalis@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

Σε αυτή την ερευνητική εργασία εξετάσαμε τον ρυθμό ανάπτυξης των παραμέτρων της «αίσθησης του αριθμού» μαθητών Α΄ τάξης δημοτικού σχολείου και διερευνήσαμε τη σχέση μεταξύ του ρυθμού ανάπτυξης των παραμέτρων αυτών με την επίδοσή των μαθητών στα μαθηματικά στη Β΄ δημοτικού. Οι τρεις συνιστώσες της αίσθησης του αριθμού που χρησιμοποιήθηκαν είναι: (α) οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες, (β) ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός και (γ) ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο ρυθμός ανάπτυξης των τριών παραμέτρων είναι γραμμικός και ότι μόνο ο ρυθμός ανάπτυξης του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού προβλέπει την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σημασία της ανάπτυξης της «αίσθησης» του αριθμού (number sense) έχει τεκμηριωθεί από σημαντικούς οργανισμούς (National Council of Teachers of Mathematics, 2000· National Mathematics Advisory Panel, 2008) και από αριθμό ερευνητικών εργασιών (Jordan, Glutting, Ramineni, & Watkins, 2010·Yang, Li, & Lin, 2008). Για παράδειγμα, οι Yang, Li και Lin (2008) υποστήριξαν ότι η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού αποτελεί θεμελιώδη στόχο των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών και σημαντική προϋπόθεση για την κατανόηση πιο σύνθετων εννοιών στο δημοτικό σχολείο. Επιπρόσθετα, ερευνητικά αποτελέσματα υποστηρίζουν ότι η αίσθηση του αριθμού αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά και απαραίτητο συστατικό στοιχείο, για να επιτύχει κάποιος στα μαθηματικά (Malofeeva, Day, Saco, Young, & Ciancio, 2004).

Η παρούσα εργασία στηρίζεται σε προηγούμενες εργασίες (Pittalis, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013), με βάση τις οποίες η έννοια της αίσθησης του αριθμού αποτελείται από τρεις διακριτές, αλλά αλληλοσυμπληρούμενες διαστάσεις. Συγκεκριμένα, σε προηγούμενη εργασία επιβεβαιώθηκε εμπειρικά ένα θεωρητικό μοντέλο, με βάση το οποίο η αίσθηση του αριθμού αποτελεί σύνθεση των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού (Pitalis, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013). Ο παράγοντας βασικές αριθμητικές δεξιότητες εκφράζει τις βασικές αριθμητικές ικανότητες (δείτε Jordan, et al., 2007), όπως την αρίθμηση και τη γνώση των αριθμών. Ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός αναφέρεται σε ικανότητες που σχετίζονται με τις αριθμητικές πράξεις και τις αριθμητικές ιστορίες. Τέλος, ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός αναφέρεται στην κατανόηση της αλγεβρικής διάστασης της αριθμητικής, όπως τα αριθμητικά μοτίβα, τις συναρτήσεις και την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων σε διαφορετικές μορφές. Ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός αναδεικνύει την ικανότητα χειρισμού των σχέσεων μεταξύ των αριθμών και την κατανόηση της δομής του αριθμητικού συστήματος.

Στην παρούσα εργασία εξετάσαμε την ανάπτυξη των παραγόντων της αίσθησης του αριθμού μαθητών Α΄ δημοτικού, χρησιμοποιώντας διαχρονικά δεδομένα. Επιπρόσθετα, διερευνήσαμε τη σχέση μεταξύ των παραγόντων ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού και της επίδοσής των μαθητών στα μαθηματικά στη Β΄ δημοτικού. Οι στόχοι της εργασίας ήταν: (α) η επιβεβαίωση ενός ενιαίου μοντέλου ανάπτυξης που να περιγράφει την ανάπτυξη των τριών διαστάσεων της αίσθησης του αριθμού και (β) η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ του ρυθμού ανάπτυξης των βασικών αριθμητικών ικανοτήτων, του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού με την επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Ένας ευρέως αποδεκτός ορισμός για την αίσθηση του αριθμού αναφέρεται στη βαθειά κατανόηση της έννοιας του αριθμού, στην αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών και στην ικανότητα χειρισμού προβλημάτων που εμπλέκουν αριθμούς στην καθημερινή ζωή (Yang, 2005). Οι Pittalis, Pitta-Pantazi και Christou (2013) με βάση τη σύνθεση της βιβλιογραφίας, πρότειναν ένα μοντέλο μέτρησης της αίσθησης του αριθμού, με βάση το οποίο η αίσθηση του αριθμού αποτελεί δεύτερης τάξης άδηλο παράγοντα που σχηματίζεται από τη σύνθεση των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού. Η συμπερίληψη του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού στην έννοια της αίσθησης του αριθμού στηρίζεται σε ερευνητικά αποτελέσματα που κατέδειξαν την αναγκαιότητα της εισαγωγής των μαθητών στον αλγεβρικό συλλογισμό στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Lins & Kaput, 2004). Ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας μέσω της κατανόησης της λειτουργίας των αριθμητικών πράξεων, της γενίκευσης και της αιτιολόγησης, της επέκτασης του αριθμητικού συστήματος και της χρήσης άτυπων συμβόλων.

Ερευνητικά αποτελέσματα κατέδειξαν ότι η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού αποτελεί μία από τις σημαντικότερες παραμέτρους της μάθησης των μαθητών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Baroody, Eiland

& Thompson, 2009). Επιπρόσθετα, ο βαθμός ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού των μαθητών των μικρών τάξεων του δημοτικού σχολείου αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης τους στα μαθηματικά, βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα (Aunio & Niemivirta, 2010). Για παράδειγμα, ερευνητικά αποτελέσματα υποστηρίζουν η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού συμβάλει στην κατανόηση σύνθετων μαθηματικών εννοιών και ενισχύει την ευχέρεια στους αριθμητικούς υπολογισμούς (Baroody, et al, 2009· Jordan et al., 2010). Ερευνητικές εργασίες κατέδειξαν, επίσης, ότι ανεπαρκής ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου είναι δυνατόν να σχετίζεται με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Jordan et al, 2007). Επιπρόσθετα, η Jordan και συνεργάτες (2010) υποστήριξαν ότι η αίσθηση του αριθμού αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης των μαθητών στο τέλος της πρώτης και της τρίτης τάξης του δημοτικού σχολείου, ενώ το επίπεδο της αίσθησης του αριθμού μαθητών στην αρχή και στο τέλος της προδημοτικής είχε υψηλή συσχέτιση με την επίδοσή τους στα μαθηματικά στο τέλος της πρώτης δημοτικού (Jordan et al., 2007). Οι Locuniak και Jordan (2008) έδειξαν ότι η αίσθηση του αριθμού μαθητών προδημοτικής ήταν ισχυρός παράγοντας πρόβλεψης της ευχέρειάς στους υπολογισμούς στη δευτέρα δημοτικού, ενώ η Yang και συνεργάτες (2008) έδειξαν ότι η επίδοση μαθητών Ε΄ δημοτικού στα μαθηματικά συσχετίζεται με το βαθμό αντίληψης της αίσθησης του αριθμού. Επιπρόσθετα, υποστηρίζεται ότι μαθητές που ξεκινούν στην πρώτη δημοτικού με ισχυρή αίσθηση του αριθμού είναι πιο πιθανόν να επωφεληθούν σε μεγαλύτερο βαθμό από τη συστηματική διδασκαλία στο δημοτικό και ότι οι συνέπειες της χαμηλής αντίληψης της αίσθησης του αριθμού είναι δυνατόν να είναι αθροιστικές (Jordan et al., 2010).

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει τον τρόπο ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού και τη σχέση του ρυθμού ανάπτυξης των παραγόντων της αίσθησης του αριθμού με την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα οι στόχοι της εργασίας ήταν: (α) να διερευνήσει την ανάπτυξη των συνιστωσών της αίσθησης του αριθμού μέσω της επιβεβαίωσης ενός αναπτυξιακού μοντέλου και (β) να εξετάσει τη σχέση μεταξύ του ρυθμού ανάπτυξης των μαθητών Α΄ δημοτικού στους τρεις παράγοντες της αίσθησης του αριθμού με την επίδοσή τους στα μαθηματικά.

Εργαλεία Μέτρησης

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της αίσθησης του αριθμού υιοθετήθηκαν ή αναπτύχθηκαν με βάση προηγούμενες ερευνητικές εργασίες. Η πλειοψηφία των έργων προέρχεται από το πρόγραμμα Curriculum Based Measurement (Fernstrom & Powell, 2007). Για τη μέτρηση του παράγοντα που αναφέρεται στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες χρησιμοποιήθηκαν έξι είδη έργων: (α) αρίθμησης, (β) αναγνώρισης αριθμών, (γ) σύγκρισης αριθμών, (δ) γνώσης αριθμών, (ε) απαρίθμησης αντικειμένων και (στ) μη-λεκτικών υπολογισμών. Για τη μέτρηση του παράγοντα τυπικός αριθμητικός συλλογισμός χρησιμοποιήθηκαν τρία είδη έργων. Το πρώτο είδος αναφέρεται στην εκτέλεση υπολογισμών. Οι μαθητές έπρεπε να εκτελέσουν υπολογισμούς πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μέχρι το 20 καθώς και πράξεις με πολλαπλάσια του 10. Το δεύτερο είδος αφορούσε την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων, ενώ τα έργα του τρίτου τύπου αναφέρονταν στην κατανόηση της έννοιας των πράξεων. Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορούσε τον υπολογισμό της τιμής που λείπει σε μια εξίσωση (δείτε Πίνακα 1). Η δεύτερη κατηγορία έργων αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού περιλάμβανε αριθμητικές ισότητες σε μορφή ζυγαριών που ισορροπούν, στις οποίες χρειαζόταν να υπολογιστεί η αξία των σταθμών. Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει τα αριθμητικά μοτίβα στα οποία οι μαθητές επεκτείνουν ή συμπληρώνουν κάποιον όρο που λείπει. Η ικανότητα επίλυση αριθμητικών μοτίβων προϋποθέτει την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των όρων του. Η τέταρτη κατηγορία αφορούσε έργα τύπου συνάρτησης, στα οποία οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τη σχέση μεταξύ των αριθμών που εισάγονται και εξάγονται από μια αριθμομηχανή. Η επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά μετρήθηκε με τη χρήση του σταθμισμένου τεστ Screening Assessment for Gifted Elementary and Middle School Students (SAGES-2). Το εργαλείο αυτό αξιολογεί τη γενική επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά, ώστε να αναγνωρίσει χαρισματικούς μαθητές (Johnsen & Corn, 2001). Χρησιμοποιήσαμε τα έργα του τεστ που είναι κατάλληλα για μαθητές της Β΄ δημοτικού τα οποία αξιολογούν κυρίως κατανόηση και ικανότητα εφαρμογής μαθηματικών εννοιών

Πίνακας 1: Έργα Μέτρησης Αλγεβρικού Αριθμητικού Συλλογισμού

<table>
<tr><th>Παράμετρος</th><th>Παράδειγμα</th></tr>
<tr><td>Εξισώσεις</td><td>Να συμπληρώσεις:
$5+\square=6$ $\square-3=4$
$3+5=4+\square$ $2+4=3+\square$
$10+\square=20$ $8-\square=5$</td></tr>
<tr><td>Ζυγαριές</td><td>Να βρεις την αξία κάθε σχήματος.


■ = ...
▲ = ...</td></tr>
<tr><td>Αριθμητικά Μοτίβα</td><td>Να συμπληρώσεις:
4 __ 6 7   5 10 15__   8 10 12 __
1 4 7__   __ 5 6 7   7 8 __ 10</td></tr>
<tr><td>Συναρτήσεις</td><td>Να συμπληρώσεις:
<table><tr><th>ΕΙΣΟΔΟΣ</th><th>ΕΞΟΔΟΣ</th></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td></tr></table></td></tr>
</table>

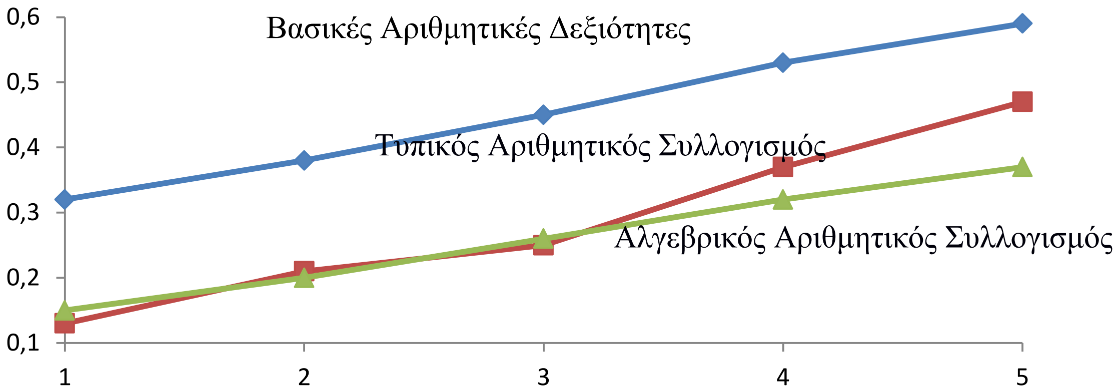
Υποκείμενα, Διαδικασία και Ανάλυση Δεδομένων

Τα υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 203 μαθητές πρώτης δημοτικού από έξι δημοτικά σχολεία. Ο κάθε μαθητής συμμετείχε σε δύο συνεντεύξεις που η καθεμία είχε διάρκεια περίπου 30 λεπτά. Για κάθε τύπο έργου υπήρχε χρονικός περιορισμός (ένα λεπτό για την πλειοψηφία των έργων). Οι τέσσερις μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο χρονικό διάστημα από τον Οκτώβριο μέχρι τον Ιούνιο ενώ η πέμπτη μέτρηση πραγματοποιήθηκε τον Οκτώβριο της επόμενης σχολικής χρονιάς. Ο κάθε μαθητής εξετάστηκε ατομικά στις πέντε μετρήσεις. Το δοκίμιο μέτρησης της επίδοσης στα μαθηματικά χορηγήθηκε τον Δεκέμβριο της σχολικής χρονιάς κατά την οποία οι μαθητές φοιτούσαν στη Β΄ δημοτικού.

Για την περιγραφή της διαχρονικής ανάπτυξης των παραγόντων της αίσθησης του αριθμού έγινε αξιολόγηση της εγκυρότητας ενός παράλληλου αναπτυξιακού μοντέλου (parallel process model) (δείτε Muthén & Muthén, 2007). Στην επιβεβαίωση αναπτυξιακών μοντέλων οι ατομικές διαφορές μεταξύ των υποκειμένων μοντελοποιούνται μέσω δύο άδηλων μεταβλητών, της άδηλης αρχικής τιμής (latent intercept) και του άδηλου ρυθμού ανάπτυξης (latent slope). Για τη διεξαγωγή των αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MPLUS (Muthén & Muthén, 2007). Για την επιβεβαίωση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι τρεις δείκτες: (α) Ο λόγος x^2/df (< 2), ο δείκτης Comparative Fit Index, CFI, (> .09) και (γ) ο δείκτης Root Mean-Square Error of Approximation, RMSEA, (< .08).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να εξετάσουμε την ανάπτυξη των τριών παραγόντων της αίσθησης του αριθμού, ελέγξαμε την εγκυρότητα ενός παράλληλου μοντέλου ανάπτυξης, υποθέτοντας ότι οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες, ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός και ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός ακολουθούν γραμμικό ρυθμό ανάπτυξης. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι δείκτες προσαρμογής του μοντέλου ήταν αποδεκτοί, αλλά όχι ικανοποιητικοί (χ^2/df=2.8, CF1=.94, RMSEA=.09). Για αυτό, λαμβάνοντας υπόψη την πορεία ανάπτυξης των τριών παραμέτρων της αίσθησης του αριθμού (δείτε Διάγραμμα 1), εξετάσαμε την εγκυρότητα ενός εναλλακτικού παράλληλου μοντέλου ανάπτυξης, το οποίο επέτρεπε τον ελεύθερο υπολογισμό του ρυθμού ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού υπολογισμού στις τρεις τελευταίες μετρήσεις. Η προσέγγιση αυτή είχε ως σκοπό τον ακριβή υπολογισμό του ρυθμού ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού, έστω και αν δεν ήταν εντελώς γραμμικός. Το εναλλακτικό αυτό μοντέλο έδωσε σημαντικά καλύτερους δείκτες προσαρμογής (μικρότερες τιμές AIC και BIC, χ^2/df=2.12, CFI=.97, και RMSEA=.07). Συνεπώς, η επιβεβαίωση του εναλλακτικού μοντέλου έδειξε ότι ο ρυθμός ανάπτυξης των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού είναι διαχρονικά σταθερός, ενώ ο ρυθμός ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού επιταχύνεται μετά τα πρώτο μισό της πρώτης τάξης (δείτε Διάγραμμα 1).



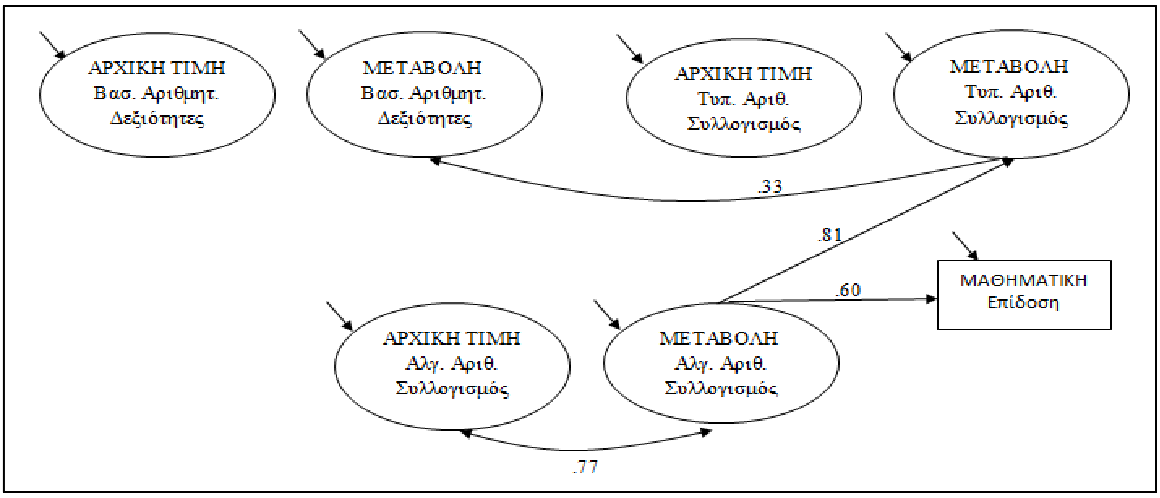
Διάγραμμα 1: Πορεία Ανάπτυξης Παραμέτρων Αίσθησης του Αριθμού.

Με βάση το μοντέλο υπολογίστηκαν δύο άδηλοι παράγοντες για κάθε παράμετρο της αίσθησης του αριθμού. Συγκριμένα, υπολογίστηκε η άδηλη αρχική τιμή (intercept) και ο ρυθμός μεταβολής (slope) για κάθε παράμετρο. Ο μέσος όρος και η διασπορά του κάθε παράγοντα και για τις τρεις παραμέτρους ήταν σημαντικά διαφορετικοί από το μηδέν. Με βάση τη μη-τυποποιημένη λύση του μοντέλου ο μέσος όρος της αρχικής τιμής των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων ήταν ο υψηλότερος (0.32, p<0.001). Η τιμή αυτή αντιστοιχεί ουσιαστικά στη μέση τιμή των υποκειμένων στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες κατά των πρώτη μέτρηση (δείτε Πίνακα 2). Ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός είχε τη δεύτερη υψηλότερη αρχική τιμή (0.15, p<0.001), ενώ ο μέσος όρος της αρχικής τιμής του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού ήταν ο χαμηλότερος (0.13, p<0.001). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η μέση τιμή του ρυθμού ανάπτυξης των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων ήταν 0.07, t=48.94, p<0.001, υποδηλώνοντας ότι οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες επέδειξαν διαχρονικά σταθερό ρυθμό ανάπτυξης. Ο μέσος όρος του ρυθμού ανάπτυξης ερμηνεύεται ως η μέση ανάπτυξη σε κάθε μονάδα χρόνου (0.07 × 4 = 0.28), και αντιστοιχεί στην πραγματική βελτίωση της μέσης τιμής των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων από την πρώτη στην πέμπτη μέτρηση (δείτε Πίνακα 2). Επιπρόσθετα, το γραμμικό μοντέλο ανάπτυξης κατέδειξε ότι ο μέσος όρος του ρυθμού ανάπτυξης του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού ήταν 0.06 (t=34.87, p<0.001) για κάθε μονάδα χρόνου. Επομένως, η συνολική βελτίωση της μέσης επίδοσης του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού (0.057 × 4 = 0.228) αντιστοιχεί στην πραγματική ανάπτυξη του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού μεταξύ της πρώτης και της τελευταίας χορήγησης (δείτε Πίνακα 2). Αντίστοιχα, ο μέσος ρυθμός ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού ήταν 0.075, (t=42.56, p<0.001) που μοντελοποιεί την πραγματική διαχρονική αύξηση της μέσης επίδοσής του (0.075 × 4 = 0.3).

Πίνακας 2: Μέσοι Όροι και Τυπικοί Αποκλίσεις

	Χορ. 1		Χορ. 2		Χορ. 3		Χορ. 4		Χορ. 5	
	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.	Μ.Ο.	Τ.Α.
Βασικές Αριθμητικές Δεξιότητες	.32	.09	.38	.09	.45	.09	.53	.11	.59	.10
Τυπικός Αριθμητικός Συλλογισμός	.13	.08	.21	.08	.25	.11	.37	.11	.47	.15
Αλγεβρικός Αριθμητικός Συλλογισμός	.15	.05	.20	.07	.26	.08	.32	.09	.37	.12

Για να εξεταστεί η σχέση μεταξύ των άδηλων παραγόντων του ρυθμού μεταβολής και της επίδοσης στα μαθηματικά, ελέγξαμε τον βαθμό προσαρμογής στα δεδομένα διαφορετικών δομικών μοντέλων. Το μοντέλο που είχε τους υψηλότερους δείκτες προσαρμογής (χ^2/df=2.33, CFI=.96, and RMSEA=.08) έδειξε ότι μόνο ο ρυθμός μεταβολής του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά στη Β΄ δημοτικού (r=.60). Επιπρόσθετα, ο ρυθμός μεταβολής του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού είχε άμεση επίδραση στον ρυθμό μεταβολής του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού (r=.81), ενώ ο ρυθμός μεταβολής του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού είχε άμεση επίδραση στον ρυθμό μεταβολής των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων (r=.33).



Διάγραμμα 2: Σχέση μεταξύ Ρυθμού Μεταβολής και Μαθηματικής Επίδοσης.

Το Διάγραμμα 2 δείχνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού είχε και έμμεση επίδραση στον ρυθμό μεταβολής των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων (r=.81*.33=.27). Τέλος, η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχει υψηλή θετική συσχέτιση μεταξύ της αρχικής τιμής και του ρυθμού μεταβολής του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού, γεγονός που υποδηλώνει ότι μαθητές με υψηλότερη αρχική τιμή επέδειξαν στη συνέχεια και υψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το καινοτόμο στοιχείο της εργασίας έγκειται στο γεγονός ότι εξετάστηκε η σχέση μεταξύ των παραγόντων του ρυθμού ανάπτυξης των συνιστωσών της αίσθησης του αριθμού και της επίδοσης στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο ρυθμός ανάπτυξης του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού των μαθητών στην Α΄ δημοτικού προβλέπει σε σημαντικό βαθμό την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Επιπρόσθετα, ο ρυθμός ανάπτυξης των μαθητών στον αλγεβρικό αριθμητικό συλλογισμό συσχετίζεται θετικά με την αρχική επίδοσή τους στην πρώτη δημοτικού. Ακόμη, ο ρυθμός ανάπτυξης των άλλων δυο παραμέτρων της αίσθησης του αριθμού δεν επηρεάζει την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα αυτά υπογραμμίζουν τον δυναμικό χαρακτήρα του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού και αναδεικνύουν την προσθετική αξία της ενσωμάτωσης δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν τον αλγεβρικό αριθμητικό συλλογισμό στο νηπιαγωγείο και στην πρώτη δημοτικού. Αυτού του τύπου οι δραστηριότητες είναι δυνατόν να είναι της μορφής απλών αριθμητικών μοτίβων, αριθμομηχανών και πολλαπλών μορφών εξισώσεων, κατάλληλα σχεδιασμένων για μαθητές αυτής της ηλικίας που ενισχύουν την κατανόηση των σχέσεων των αριθμών και την ευελιξία χειρισμού των αριθμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aunio, P., & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, *20*(5), 427-435.

Baroody, A. J., Eiland, M., & Thompson, B. (2009). Fostering at-risk preschoolers’ number sense. Early Education & Development, 20(1), 80-120.

Fernstrom, P., & Powell, S. (2007). *Using curriculum-based measurement for progress monitoring in Math*. National Center on Student Progress Monitoring.

Johnsen, S. K., & Corn, A. (2001). *Screening assessment for gifted elementary and middle school students*-(SAGES-2).

Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82-88.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*, *22*(1), 36-46.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study* (pp. 45-70). Springer Netherlands.

Locuniak, M. N., & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*,*41*(5), 451-459.

Malofeeva, E., Day, J., Saco, X., Young, L., & Ciancio, D. (2004). Construction and Evaluation of a Number Sense Test With Head Start Children. *Journal of Educational Psychology*, *96*(4), 648.

Muthén L. K, & Muthén, B. O (1998-2007). *Mplus user's guide* (5th ed.). Los Angeles: Authors.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).*Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. US Department of Education.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). A longitudinal study tracing the development of number sense components. In A. M. Lindmeijer & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41-48). Kiel, Germany: PME.

Yang, D. C., Li, M. N., & Lin, C. I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 789-807.

Yang, D.C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 31(3), 317–34.

“ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΣΗ, ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ, ΕΥΚΟΛΗ ΜΑΘΗΣΗ”...ΑΥΤΟΣ ΕΙΝΑΙ Ο (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ) ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ;

Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου,
kara@rhodes.aegean.gr

Στην παρούσα εργασία, διερευνήθηκαν και παρατίθενται οι οπτικές των μελλοντικών νηπιαγωγών για το παιχνίδι και τον εκπαιδευτικό του ρόλο, με σκοπό να ληφθούν υπόψη στον διδακτικό σχεδιασμό σχετικού προπτυχιακού μαθήματος. Από τις απαντήσεις τους φαίνεται να διαμορφώνεται μία νέα μορφή παιχνιδιού για τις τάξεις των μαθηματικών, ακόμα και στο νηπιαγωγείο. Παιχνίδι, το οποίο συχνά ταυτίζεται με την τυπική μαθηματική δραστηριότητα, προορίζεται κυρίως για την εκπλήρωση μαθηματικών στόχων και οδηγεί στη μάθηση με ευχάριστο, διασκεδαστικό και εύκολο τρόπο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι διαπιστώσεις των τελευταίων ετών αναδεικνύουν τις διαφορετικές ανάγκες που θα καλούνται να αντιμετωπίσουν τα μικρά παιδιά, ως πολίτες, στο μέλλον και άρα τη διαφορετικότητα των ικανοτήτων και δεξιοτήτων που απαιτείται να καλλιεργηθούν. Η εκτίμηση, η πρόβλεψη, η γρήγορη αντίληψη και οργάνωση των πληροφοριών, η κριτική και δημιουργική σκέψη, η επικοινωνία, η τεκμηριωμένη αιτιολόγηση, η λύση προβλήματος, η γενίκευση και η εννοιολογική κατανόηση (Sarama & Clements, 2009) είναι κάποιες από αυτές τις ικανότητες οι οποίες δεν μπορούν και δεν πρέπει να αναπτυχθούν μόνο μέσω τυπικών μαθηματικών δραστηριοτήτων[18], αλλά και μέσω άλλου τύπου δράσεων, όπως το παιχνίδι.

Όμως τι εννοούμε λέγοντας ‘παιχνίδι’; Το τι είναι παιχνίδι δεν είναι εύκολο, στην πραγματικότητα είναι αδύνατον, να οριστεί. Από έρευνες έχει καταγραφεί ότι οι εκπαιδευτικοί χαρακτηρίζουν, στις θεωρητικές τους τοποθετήσεις, ως παιχνίδι τις δραστηριότητες οι οποίες είναι διασκεδαστικές και δημιουργικές (Ceglowski, 1997). Αποδίδουν εκπαιδευτικό ρόλο στο παιχνίδι όταν είναι ελεγχόμενο και έχει στόχο να εξασκήσει συγκεκριμένες ικανότητες με σκοπό την απόκτηση συγκεκριμένης μαθησιακής εμπειρίας (Marland, 1986). Στην πράξη χρησιμοποιούν, συνήθως, ‘παιχνίδια’ ως τυπικές δραστηριότητες, για να διδάξουν κάποια έννοια και για να καλλιεργήσουν συγκεκριμένες μαθηματικές ικανότητες και δεξιότητες. Ωστόσο, τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται αυτές τις περιπτώσεις ‘παιχνιδιού’ ως παιχνίδι, αλλά ως μία δραστηριότητα η οποία έχει επιλεγεί και

[18] Τα ερευνητικά δεδομένα των τελευταίων ετών δείχνουν ότι η υπερβολική έμφαση στην ανάπτυξη εννοιολογικών ικανοτήτων, στις μικρές ηλικίες, δημιουργεί προβλήματα τόσο στα κίνητρα όσο και στη συμπεριφορά των παιδιών (Miller & Almon, 2009). Επίσης, ότι τα ακαδημαϊκά προσανατολισμένα προγράμματα σπουδών της προσχολικής εκπαίδευσης, δεν εγγυώνται απαραίτητα μελλοντική ακαδημαϊκή επιτυχία (Bodrova, 2008).

κατευθύνεται από τον εκπαιδευτικό. Για τους μαθητές, το παιχνίδι ορίζεται με βάση την εμπειρία τους και συχνά είναι μια δραστηριότητα μεταξύ πραγματικότητας και φαντασίας η οποία αποτελεί αυτοσκοπό. Δεν είναι σημαντικό για τους μαθητές να επιτύχουν με την παιγνιώδη δράση τον στόχο που έχει τεθεί από τον εκπαιδευτικό, αλλά είναι σημαντικό το παιχνίδι καθεαυτό, καθώς και η διαδικασία του όταν κατευθύνεται από τους ίδιους (Kostelnik, Soderman & Whiren, 1993˙ Vogel, 2013).

Στις προσπάθειες προσδιορισμού του παιχνιδιού, από θεωρητικούς και ερευνητές διακρίνονται συνήθως τέσσερα βασικά κοινά χαρακτηριστικά (Kwakkel-Scheffer, 2006 στο Van Der Aalsvoort, Prakke, Howard, König & Parkkinen, 2015): 1. Το παιχνίδι είναι διασκέδαση. Είναι, δηλαδή, μια δραστηριότητα που προκαλεί ευχαρίστηση, τα παιδιά απολαμβάνουν τη δραστηριότητα ή λαμβάνουν κάτι σαν ικανοποίηση από αυτήν. 2. Το παιχνίδι είναι εθελοντική δραστηριότητα, αυθόρμητη, επιλεγμένη από το άτομο που παίζει, άρα έχει νόημα για αυτό και προϋποθέτει την ενεργή συμμετοχή και εμπλοκή του. 3. Το παιχνίδι έχει κανόνες. Τα παιδιά διαχειρίζονται/εφαρμόζουν ευέλικτα αυτούς τους κανόνες κατά τη διάρκειά του, συσχετίζοντάς τους παράλληλα με τις επιθυμίες και τις ανάγκες τους. 4. Το παιχνίδι δεν περιλαμβάνει κανενός είδους εξωτερικό στόχο για τον παίκτη, δεν έχει συγκεκριμένο σκοπό, αλλά το κίνητρο βρίσκεται στην ίδια τη διαδικασία.

Η πολυδιάστατη συνεισφορά του παιχνιδιού, τόσο στην ολόπλευρη ανάπτυξη των παιδιών όσο και στη μάθησή τους υποστηρίζεται, θεωρητικά, όλο και περισσότερο τα τελευταία χρόνια. Τα ερευνητικά αποτελέσματα συνηγορούν στο ότι το παιχνίδι μπορεί να υποστηρίξει τις μαθηματικές δραστηριότητες των παιδιών ως άτυπο ή/και τυπικό πλαίσιο, αλλά και ως δραστηριότητα καθαυτή (Bishop, 1988˙ Bragg, 2012). Το ενδιαφέρον που προκαλείται μέσω του παιχνιδιού στα παιδιά, προσφέρει κίνητρο για συγκέντρωση και επιμονή σε μια δραστηριότητα, τόσο ώστε να κατακτηθεί η επιδιωκόμενη γνώση (Edwards, Gandini & Forman, 1998).

Παρόλη την ανάδειξη του εκπαιδευτικού ρόλου του παιχνιδιού, στα θεωρητικά και στα ερευνητικά δεδομένα, η πράξη διαφέρει. Υπάρχουν εκπαιδευτικά περιβάλλοντα τα οποία δεν δίνουν θέση στο παιχνίδι, στις τάξεις των μαθηματικών, θεωρώντας ότι η χρήση παιχνιδιών ως μαθησιακών καταστάσεων θα δημιουργήσει στα παιδιά λανθασμένη εικόνα για τη φύση των μαθηματικών (Wood & Attfield, 1996). Τα περισσότερα όμως εκπαιδευτικά περιβάλλοντα αποδέχονται τον σημαντικό ρόλο του παιχνιδιού στην εκπαιδευτική διαδικασία, παρόλο που διχάζονται όταν πρόκειται να το εντάξουν στην τάξη για διδασκαλία. Από αυτά τα περιβάλλοντα, άλλα το θέτουν ως βάση των εκπαιδευτικών τους προγραμμάτων (Perry & Dockett, 2007) ή του προσφέρουν σημαντική θέση ως υποστηρικτικό πλαίσιο των μαθηματικών τους δραστηριοτήτων

(Σκουμπουρδή, 2012), ενώ άλλα δυσκολεύονται να το εντάξουν στον διδακτικό σχεδιασμό τους, επηρεασμένα από διάφορους παράγοντες όπως η αλλαγή της ρουτίνας της τάξης και ο τρόπος επίτευξης της μάθησης μέσω του παιχνιδιού.

Πράγματι, η μάθηση μέσω παιχνιδιών, ιδιαίτερα μέσω παιχνιδιών που δεν έχουν ενσωματωμένα ή στο επίκεντρο τα μαθηματικά, δε γίνεται εύκολα αντιληπτή. Η δυσκολία αυτή έχει καταγραφεί και από έρευνες στις οποίες φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί δεν μπορούν να συνδέσουν, πολύ εύκολα, το παιχνίδι με τη μαθηματική σκέψη και να κατανοήσουν το παιχνίδι ως μαθηματική δραστηριότητα (Svensson, 2015). Ανάλογα διαμορφώνονται και οι πρακτικές που χρησιμοποιούν στην τάξη οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους γιατί επηρεάζονται από τις οπτικές τους και από τις θεωρίες που υιοθετούν. Έτσι διαφορετικοί εκπαιδευτικοί υιοθετούν διαφορετικό ρόλο κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού με διαφορετικό κάθε φορά μαθησιακό αποτέλεσμα. Αυτό φάνηκε σε έρευνα με υποψήφιους εκπαιδευτικούς, από διαφορετικές χώρες, με διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα και εκπαίδευση εκπαιδευτικών (Van Der Aalsvoort, Prakke, Howard, König & Parkkinen, 2015). Οι ρόλοι των εκπαιδευτικών που καταγράφηκαν ήταν τρεις: ο εκπαιδευτικός που προσφέρει στη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός που έχει ουδέτερη στάση κατά την πραγματοποίηση της δραστηριότητας και ο εκπαιδευτικός που ασκεί μεγάλο έλεγχο κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές αναδεικνύουν τη σημασία της εκπαίδευσης των υποψήφιων εκπαιδευτικών για την αντίληψη του ρόλου του παιχνιδιού στη μάθηση και την ανάπτυξη των παιδιών. Σε αυτό συνηγορεί και άλλη έρευνα (Sancar-Tokmak, 2015) στην οποία φάνηκε ότι η διδακτική αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, μπορεί να αυξηθεί αν στις προπτυχιακές τους σπουδές μάθουν να χρησιμοποιούν μεθόδους διδασκαλίας μέσω παιχνιδιού.

Το τι εννοούν οι εκπαιδευτικοί ‘παιχνίδι’, αν το εντάσσουν στον διδακτικό τους σχεδιασμό και με ποιο τρόπο, είναι θέματα τα οποία επηρεάζονται, εκτός των άλλων, από τη θεωρητική τους γνώση και κατανόηση για το παιχνίδι, καθώς και από τον τρόπο αντίληψης της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών γενικά και ειδικά μέσω του παιχνιδιού. Με αφορμή τους παραπάνω προβληματισμούς, στην παρούσα εργασία διερευνήθηκαν και παρατίθενται οι οπτικές των μελλοντικών νηπιαγωγών για το παιχνίδι και τον εκπαιδευτικό του ρόλο, με σκοπό να ληφθούν υπόψη στον διδακτικό σχεδιασμό σχετικού προπτυχιακού μαθήματος.

ΣΥΛΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Τα θέματα που διερευνήθηκαν, τα οποία προέκυψαν από τη θεωρητική μελέτη περί παιχνιδιού και από τα αποτελέσματα σχετικών ερευνών, αφορούσαν στο τι είναι παιχνίδι, σε τι διαφοροποιείται από μία τυπική δραστηριότητα, πώς χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς και στην αντίληψη της μάθησης μέσω παιχνιδιού. Τέσσερα ερωτήματα τέθηκαν σε πενήντα φοιτήτριες, μελλοντικές νηπιαγωγούς, με σκοπό να σκιαγραφηθούν οι οπτικές τους για το παιχνίδι και τον εκπαιδευτικό του ρόλο. Τα ερωτήματα ήταν: 1. «Τι είναι παιχνίδι;» 2. «Παιχνίδι-τυπική μαθηματική δραστηριότητα: ομοιότητες και διαφορές». 3. «Θα χρησιμοποιούσες παιχνίδια για τη διδασκαλία των μαθηματικών; Για ποιον λόγο; Ποιος θα ήταν ο ρόλος σου;» 4. «Μαθαίνουν τα παιδιά μαθηματικά μέσα από το παιχνίδι;».

Οι φοιτήτριες, οι οποίες προέρχονταν από όλα τα έτη, δεν είχαν παρακολουθήσει κάποιο εξειδικευμένο μάθημα για το παιχνίδι στη μαθηματική εκπαίδευση. Καλούνταν να απαντήσουν, με ελεύθερο κείμενο, στα παραπάνω ερωτήματα, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, στην πρώτη συνάντηση μαθήματος με τίτλο: «Εισαγωγή στη θεωρία και στην πρακτική του παιχνιδιού στη μαθηματική εκπαίδευση».

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων ακολουθεί τη σειρά των ερωτημάτων:

1ο ερώτημα: «Τι είναι παιχνίδι;»: Από τις αναφορές των φοιτητριών έγιναν διακριτές δύο κύριες κατηγορίες απαντήσεων. Απαντήσεις στις οποίες γινόταν φανερή η προσπάθεια να δοθεί ακριβής ορισμός του παιχνιδιού και απαντήσεις οι οποίες προσδιόριζαν το παιχνίδι μέσα από διάφορα χαρακτηριστικά του. Ο ορισμός του παιχνιδιού, στις περισσότερες περιπτώσεις (35/50), συμπεριλάμβανε τη μάθηση, την απόκτηση δεξιοτήτων και την ψυχαγωγία: «παιχνίδι είναι η ευχάριστη εκείνη διαδικασία η οποία συμβάλλει στην απόκτηση ποικίλων ικανοτήτων, δεξιοτήτων και γνώσεων και στη διασκέδαση».

Παράλληλα διευκρινιζόταν ότι η μάθηση προκύπτει αβίαστα μέσω του παιχνιδιού, συνειδητά ή όχι, αλλά σε κάθε περίπτωση, ευκολότερα από ότι στην τυπική δραστηριότητα: «(Παιχνίδι) είναι η ψυχαγωγική δραστηριότητα μέσω της οποίας μαθαίνουμε αβίαστα διάφορα πράγμα». Σε κάποιες απαντήσεις (5/50) το παιχνίδι παρουσιαζόταν ως να εκτυλίσσεται σε δύο φάσεις, οι οποίες διαχωρίζονται μεταξύ τους: τη φάση της διασκέδασης και τη φάση της μάθησης: «Χαρακτηρίζεται από δύο φάσεις: το παιχνίδι που απλά διασκεδάζει το παιδί, εκτονώνεται και το παιχνίδι που ψυχαγωγεί και μέσα από αυτό το παιδί μαθαίνει.».

Υπήρχαν και περιπτώσεις (10/50) στις οποίες το παιχνίδι οριζόταν ως το αντικείμενο ή η διαδικασία μέσα από την οποία ψυχαγωγείται ένα ή περισσότερα άτομα, αλλά και ως φορέας κοινωνικοποίησης και καλλιέργειας των συναισθημάτων χωρίς καμία αναφορά στη μάθηση ή απόκτηση άλλων ικανοτήτων και δεξιοτήτων: «(Παιχνίδι) είναι ένα αντικείμενο ή μία διαδικασία μέσα από την οποία ψυχαγωγείται ένα ή περισσότερα άτομα.», «Διαδικασία μέσα από την οποία ψυχαγωγείται το άτομο και στην οποία μπορεί να συμμετέχει μόνο του ή με άλλα άτομα.».

Ο προσδιορισμός του παιχνιδιού, μέσω των χαρακτηριστικών του (5/50), περιλάμβανε αναφορά στους κανόνες, στη διαδικασία και στην εκτέλεση εντολών ή δραστηριοτήτων με σκοπό τη νίκη: «Στο παιχνίδι υπάρχουν κανόνες και κάποιος στόχος που πρέπει να επιτευχθεί για να υπάρξει νικητής.».

<u>2ο ερώτημα: «Παιχνίδι–τυπική μαθηματική δραστηριότητα: ομοιότητες και διαφορές»</u>: Στη συγκεκριμένη ερώτηση, οι μισές φοιτήτριες (25/50) απλά προσδιόρισαν τι είναι παιχνίδι μέσω των χαρακτηριστικών του, χωρίς να κάνουν κάποιου είδους σύγκριση μεταξύ των δύο ειδών δραστηριότητας, με αποτέλεσμα οι απαντήσεις τους να ταυτίζονται με τις απαντήσεις της πρώτης ερώτησης. Οι άλλες μισές φοιτήτριες (25/50), ανέφεραν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ παιχνιδιού και τυπικής μαθηματικής δραστηριότητας. Στις περισσότερες απαντήσεις τους έγινε διακριτό ότι διαφορετικές φοιτήτριες χρησιμοποίησαν τα ίδια χαρακτηριστικά, οι μεν για να διαφοροποιήσουν το παιχνίδι από την τυπική δραστηριότητα, οι δε για να αναδείξουν την ομοιότητά τους. Ένα παράδειγμα ήταν οι κανόνες. Από τις αιτιολογήσεις τους, όπου υπήρχαν, φάνηκε ότι στο παιχνίδι χρεώνουν τους κανόνες διαδικασίας οι οποίοι μπορούν και να αλλάζουν και τους άγραφους κανόνες ηθικής, ενώ στην τυπική δραστηριότητα τους κανόνες των μαθηματικών ή τους κανόνες της τάξης.

Άλλα χαρακτηριστικά, τα οποία αναφέρθηκαν από κάποιες φοιτήτριες ως ομοιότητες και από άλλες ως διαφορές, ήταν η ύπαρξη στόχου και σκοπού. Στις περιπτώσεις της διαφοροποίησης ως στόχος αναφέρθηκε η ίδια η διαδικασία του παιχνιδιού για την επίτευξη της νίκης, ενώ για την τυπική δραστηριότητα η επίτευξη του γνωστικού στόχου με σκοπό τη μάθηση. Η επίτευξη του μαθησιακού στόχου αναφέρθηκε με απόλυτο τρόπο για την τυπική δραστηριότητα ενώ αμφισβητήθηκε για το παιχνίδι, στο οποίο αποδόθηκαν χαρακτηριστικά όπως ο αυθορμητισμός, η ελεύθερη δράση και έκφραση. Αρκετές ήταν οι απαντήσεις στις οποίες επισημάνθηκε ότι ο σκοπός και ο στόχος του παιχνιδιού και της τυπικής δραστηριότητας είναι οι ίδιοι, η παραγωγή της γνώσης και η επίτευξη της μαθηματικής διδασκαλίας, αλλά επιτυγχάνονται με διαφορετικό τρόπο στην κάθε περίπτωση. Στο παιχνίδι αναφέρθηκε ότι: «τα παιδιά μαθαίνουν εύκολα με ψυχαγωγικό και έμμεσο τρόπο καλλιεργώντας και άλλες ικανότητες και δεξιότητες και εκπληρώνοντας ποικίλους στόχους». Στην τυπική δραστηριότητα «τα παιδιά μαθαίνουν, μόνο μαθηματικά, δύσκολα με άμεσο, απόλυτο και διδακτικό τρόπο ο οποίος δεν αφήνει περιθώρια για ελεύθερη δράση και γίνεται κυρίως μέσω του εκπαιδευτικού, χωρίς την ιδιαίτερη συμμετοχή των παιδιών».

Από κάποιες φοιτήτριες, ως ομοιότητα των δύο ειδών δραστηριότητας, αναφέρθηκε η χρήση μαθηματικών εννοιών σε διαφορετικό βαθμό, η συμπερίληψη ενδιαφερόντων μαθηματικών θεμάτων, αλλά και η ύπαρξη μίας διαδικασίας, μίας σειράς και καλής οργάνωσης. Ταυτόχρονα, αναφέρθηκε, από άλλες ως ομοιότητα και από άλλες ως διαφορά, η καλλιέργεια της επικοινωνίας, η ομαδικότητα και η συνεργασία.

Συνοψίζοντας τις διαφοροποιήσεις που επισημάνθηκαν μεταξύ παιχνιδιού και τυπικής δραστηριότητας μπορούμε να αναφέρουμε: 1. τη συμμετοχή του εκπαιδευτικού, η οποία χαρακτηρίστηκε προαιρετική (μαθητοκεντρική) για το παιχνίδι και απαραίτητη (δασκαλοκεντρική) για την τυπική δραστηριότητα, 2. τον τρόπο σκέψης των παιδιών, ελεύθερος ανάλογα με τις δυνατότητες και ικανότητές τους για το παιχνίδι και δομημένος με βάση τους μαθηματικούς κανόνες για την τυπική δραστηριότητα, και αντίστοιχα τη συμμετοχή τους ως άμεση και ενεργητική στα παιχνίδια και ως παθητική στην τυπική δραστηριότητα, 3. το υλικό που χρησιμοποιείται, απαραίτητο για το παιχνίδι, προαιρετικό για την τυπική δραστηριότητα, 4. το κλίμα που δημιουργείται, χαλαρό, ψυχαγωγικό, ενδιαφέρον για το παιχνίδι και τυπικό, βαρετό, ανιαρό για την τυπική δραστηριότητα, 5. τη μάθηση, εύκολη μέσω παιχνιδιού και δύσκολη μέσω τυπικών δραστηριοτήτων, καθώς και 6. τη σχέση με τα μαθηματικά, άμεση και έμμεση για το παιχνίδι ενώ για την τυπική δραστηριότητα άμεση.

<u>3ο ερώτημα: «Θα χρησιμοποιούσες παιχνίδια για τη διδασκαλία των μαθηματικών; Για ποιον λόγο; Ποιος θα ήταν ο ρόλος σου;»</u>: Όλες οι φοιτήτριες (50/50) απάντησαν ότι θα χρησιμοποιούσαν παιχνίδια για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Όμως, οι μισές περίπου (23/50), απάντησαν αναφέροντας συγκεκριμένα παραδείγματα ‘παιχνιδιών’ τα οποία θα επέλεγαν. Εκτός από τα επιτραπέζια παιχνίδια, τα παιχνίδια ρόλων, τα πάζλ και το κυνήγι του θησαυρού, σε αρκετές απαντήσεις τους ανέφεραν ως παιχνίδια: «χρήση υλικού και σεναρίου», «μέτρηση φανερών και κρυμμένων αριθμών», «μέτρηση μήκους και ύψους με τούβλα» κλπ. Σε άλλες περιπτώσεις τοποθετήθηκαν πιο γενικά, αναφέροντας ότι θα επέλεγαν ή θα κατασκεύαζαν παιχνίδια κατάλληλα για την ηλικία των παιδιών και για την προς διδασκαλία έννοια. Υπήρχαν και απαντήσεις (7/50) οι οποίες απλά διευκρίνιζαν ως τι μέρος της διδασκαλίας θα χρησιμοποιούσαν παιχνίδια: ως αφόρμηση, ως κύρια διδασκαλία, την ώρα των ελεύθερων δραστηριοτήτων, αλλά και ως αξιολόγηση της διδασκαλίας.

Από τις φοιτήτριες οι οποίες ανέφεραν λόγους (20/50) για τη χρήση παιχνιδιού στη διδασκαλία των μαθηματικών, οι περισσότερες (14/50) εστίασαν στην ευχάριστη και εύκολη μάθηση που μπορεί να επιτευχθεί.

Αντιπροσωπευτικές είναι οι απαντήσεις: «(το παιχνίδι) εξυπηρετεί μαθηματικούς στόχους έμμεσα, με εύκολο και διασκεδαστικό τρόπο», «(το παιδί) μαθαίνει χωρίς να το αντιληφθεί», «εύκολος, ευχάριστος και δημιουργικός τρόπος να μεταδώσεις στα παιδιά γνώσεις», «οι κινήσεις των παιδιών (στο ταμπλό) μπορούν να οδηγήσουν σε μαθηματικό αποτέλεσμα». Οι υπόλοιπες (6/50) ανέδειξαν ικανότητες και δεξιότητες οι οποίες μπορούν να καλλιεργηθούν μέσω του παιχνιδιού όπως η επικοινωνία, ο διάλογος, η συνεργασία, η κοινωνικοποίηση, η φαντασία, η αυτοπεποίθηση, η κατανόηση κανόνων παιχνιδιού και κανόνων ηθικής, ο σεβασμός στους συμπαίκτες, η νίκη, η ήττα, η ταχύτητα αντίληψης καταστάσεων, το δίκαιο παιχνίδι και η βιωματική προσέγγιση της γνώσης.

Για να περιγράψουν οι φοιτήτριες τον ρόλο τους στο παιχνίδι κατά τη διδασκαλία χρησιμοποίησαν ποικίλα επίθετα: συμμετοχικός, παρακινητικός, εμψυχωτικός, βοηθητικός, καθοδηγητικός, οργανωτικός, συντονιστικός, υποστηρικτικός, παρεμβατικός, κατευθυντήριος, τα οποία στις περισσότερες περιπτώσεις αναδείκνυαν μεγάλο βαθμό ελέγχου της διαδικασίας του παιχνιδιού.

4ο ερώτημα: «Μαθαίνουν τα παιδιά μαθηματικά μέσα από το παιχνίδι;»: Οι περισσότερες απαντήσεις των φοιτητριών δεν ανέφεραν το πώς μαθαίνουν τα παιδιά μαθηματικά μέσω του παιχνιδιού, αλλά τα χαρακτηριστικά του ως ενδιαφέρουσας και ελκυστικής μεθόδου μέσα από την οποία τα παιδιά μαθαίνουν με διασκεδαστικό τρόπο, εύκολα, άκοπα, αβίαστα, έμμεσα. Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις: «Με το παιχνίδι τα παιδιά μαθαίνουν αυθόρμητα μέσω της χρήσης των υπαρχουσών γνώσεών τους καθώς δεν απαιτείται ένας μόνο τρόπος λύσης και το κλίμα είναι χαλαρό.», «Δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τις θεωρητικές τους γνώσεις σε πρακτικό επίπεδο. Όσα δηλαδή τους παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός σε θεωρητικό επίπεδο, τα εφαρμόζουν στην πράξη και έτσι φαίνεται αν κατανόησαν τις έννοιες.», «Μέσα από τους κανόνες και την όλη διαδικασία ενός καλά σχεδιασμένου παιχνιδιού τα παιδιά μπορούν να μάθουν χωρίς να βαριούνται με αυτό που κάνουν.». Σε μία απάντηση συνδέθηκε η μάθηση με τη διαδικασία παιχνιδιού το οποίο εμπεριέχει μαθηματικές δράσεις: «Μέσα από τις διάφορες δραστηριότητες που εμπεριέχει η διαδικασία του παιχνιδιού ο μαθητής χρειάζεται να μετρήσει, να αφαιρέσει ή να προσθέσει, οπότε σιγά-σιγά αρχίζει να εξοικειώνεται με κάποιες έννοιες των μαθηματικών μέσω του παιχνιδιού.».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με σκοπό την καταγραφή των οπτικών των μελλοντικών νηπιαγωγών για το παιχνίδι και τον εκπαιδευτικό του ρόλο, πραγματοποιήθηκε έρευνα τα αποτελέσματα της οποίας έδειξαν ότι η διερεύνηση των σχετικών θεμάτων, δεν πραγματοποιείται, πάντα, με σαφή και συνεπή τρόπο. Οι νηπιαγωγοί, προσδιόρισαν το παιχνίδι αναφέροντας μέρος των βασικών χαρακτηριστικών του, όπως οι περισσότερες προσπάθειες ορισμού του στη βιβλιογραφία, με τη διαφορά ότι η πλειοψηφία το συνέδεσε με τη μάθηση, κάτι το οποίο δεν περιλαμβάνεται στα βασικά χαρακτηριστικά του παιχνιδιού (Kwakkel-Scheffer, 2006 στο Van Der Aalsvoort, Prakke, Howard, König & Parkkinen, 2015). Επιπλέον, η σύνδεση αυτή έγινε με έναν υπερ-απλουστευτικό τρόπο (ευχάριστη, διασκεδαστική, εύκολη μάθηση κλπ.) ο οποίος παραπέμπει στην ακραία τάση που επικράτησε στη χρήση υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση ως πανάκεια, προκειμένου να αντιμετωπιστούν όλες οι δυσκολίες των παιδιών, κάτι το οποίο είχε μακροπρόθεσμα αρνητικές συνέπειες (Σκουμπουρδή, 2012).

Ο διαχωρισμός του παιχνιδιού από την τυπική μαθηματική δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε μέσω αναφοράς σε συγκεκριμένα στοιχεία όπως οι κανόνες, ο σκοπός και ο στόχος, η χρήση μαθηματικών εννοιών, η συμμετοχή του εκπαιδευτικού, ο τρόπος σκέψης των παιδιών, το εμπλεκόμενο υλικό, το κλίμα που δημιουργείται, καθώς και η επίτευξη της μάθησης. Για τα στοιχεία αυτά δεν υπήρξε ομοφωνία ως προς το αν αφορούν σε ομοιότητες ή σε διαφορές τους.

Η πολυδιάστατη συνεισφορά του παιχνιδιού σε ποικίλους τομείς, καθώς και το κίνητρο που προσφέρει στα παιδιά για μάθηση, αναδείχθηκε σε κάποιες από τις απαντήσεις των φοιτητριών. Επιπλέον, φάνηκε να αποδέχονται τον εκπαιδευτικό του ρόλο προσφέροντάς του θέση στην τάξη των μαθηματικών. Όμως ο τρόπος διαχείρισης που πρότειναν ανέδειξε μεγάλο βαθμό ελέγχου και σε πολλές περιπτώσεις ταύτιση με αυτόν της τυπικής δραστηριότητας, ανατρέποντας ουσιαστικά τα οφέλη του.

Η δυσκολία τους στον καθορισμό του πώς επιτυγχάνεται η μάθηση μέσω του παιχνιδιού έρχεται να επιβεβαιώσει τη δυσκολία η οποία έχει καταγραφεί σε ερευνητικά αποτελέσματα (Svensson, 2015˙ Van Der Aalsvoort, Prakke, Howard, König & Parkkinen, 2015). Σε καμία από τις απαντήσεις τους δεν αναφέρθηκαν στοιχεία όπως η μοντελοποίηση, η αφαίρεση και ο υποθετικός συλλογισμός (Bishop, 1988), αλλά και οι μεταγνωστικές λειτουργίες όπως η ανάκληση, η σκέψη πάνω στη δράση, η αποτίμηση, η οργάνωση της πληροφορίας, η επικοινωνία και ο σχεδιασμός (Wood & Attfield, 1996), στοιχεία τα οποία συνδέονται με τη μάθηση όταν εντοπιστούν σε ένα παιχνίδι.

Η συσχέτιση των απαντήσεων των υποψήφιων νηπιαγωγών, στα τέσσερα ερωτήματα, διαμορφώνει μία νέα μορφή παιχνιδιού για τις τάξεις των μαθηματικών, ακόμα και στο νηπιαγωγείο. Παιχνίδι, το οποίο συχνά ταυτίζεται με την τυπική μαθηματική δραστηριότητα, προορίζεται κυρίως για την εκπλήρωση μαθηματικών στόχων και οδηγεί στη μάθηση με ευχάριστο, διασκεδαστικό και εύκολο τρόπο. Χαρακτηρίζουν ως ‘παιχνίδι’ κάθε είδους δραστηριότητα στην οποία γίνεται χρήση υλικού ή παρέχεται κάποιος βαθμός ελευθερίας. Ωστόσο, η χρήση του όρου ‘παιχνίδι’, για όλων των ειδών τις δραστηριότητες, δημιουργεί λανθασμένη αναπαράσταση για το παιχνίδι και τον εκπαιδευτικό του ρόλο και αυτό μπορεί να έχει συνέπειες τόσο στην απόφαση ένταξής του στη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών, όσο και στα αναμενόμενα αποτελέσματα από αυτήν την ένταξη.

Για να μπορεί να συμβάλλει το παιχνίδι στη μάθηση και την ανάπτυξη των παιδιών, κάτι το οποίο δε θεωρείται αυτόματη διαδικασία, θα πρέπει να διαμορφωθούν οι παραπάνω οπτικές, γιατί ο εκπαιδευτικός ρόλος του παιχνιδιού δεν είναι απλά «η ευχαρίστηση, η διασκέδαση και η εύκολη μάθηση». Θα πρέπει το παιχνίδι να αναγνωρίζεται και να διαχωρίζεται από την τυπική δραστηριότητα, να γίνεται αντιληπτό πώς το παιχνίδι, με τις διαφορετικές όψεις και διαστάσεις του, συμβάλλει στη μάθηση και την ανάπτυξη των ικανοτήτων των παιδιών και να εντάσσεται μετά από σχεδιασμό στη διδακτική πράξη. Τα θέματα αυτά μπορούν να αναπτυχθούν με μαθήματα σε προπτυχιακό ή/και μεταπτυχιακό επίπεδο, αλλά και μέσω επιμορφωτικών προγραμμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bishop, A. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.

Bodrova, E. (2008). Make-believe play versus academic skills: A Vygotskian approach to today’s dilemma of early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal*, 16(3), 357-369.

Bragg, L. (2012). Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children’s learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 1445-1467.

Ceglowski, D. (1997). Understanding and building upon children’s perceptions of play activities in early childhood programs. *Early Childhood Education Journal*, 25(2), 107-112.

Edwards, C., Gandini. L. & Forman, G. (1998). *The hundred languages of children: The Reggio Emilia approach-advanced reflections*. Greenwood Publishing Group.

Kostelnik, M.J., Soderman, A.K. & Whiren, A.P. (1993). *Developmentally appropriate programs in early childhood education*. New York: Merril.

Marland, H. (1986). Cheating. *Mathematics in School*, 15(1), 30.

Miller, E. & Almon, J. (2009). *Crisis in kindergarten: Why children need to* *play in school*. College Park, MD: Alliance for Childhood.

Perry, B. & Dockett, S. (2007): *Play and Mathematics*. Adelaide: Australian Association of Mathematics Teachers.

Sancar-Tokmak, H. (2015). The effect of curriculum-generated play instruction on the mathematics teaching efficacies of early childhood education pre-service teachers. *European Early Childhood Education Research Journal*, 23(1), 5-20.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children* (pp. 159-247). N.Y.: Routledge.

Σκουμπουρδή, Χ. (2012). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση τω μικρών παιδιών*. Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.

Svensson, C. (2015). Preschool teachers' understanding of playing as a mathematical activity. *CERME 9*. (υπό έκδοση)

Van Der Aalsvoort, G., Prakke, B., Howard, J., König, A. & Parkkinen, T. (2015). Trainee teachers' perspectives on play characteristics and their role in children's play: an international comparative study amongst trainees in the Netherlands, Wales, Germany and Finland. *European Childhood Education Research Journal*, 23(2), 277-292.

Vogel, R. (2013). Mathematical situations of play and exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 84(2), 209-225.

Wood, E. & Attfield, J. (1996). *Play, Learning and the Early Childhood Curriculum*. London: Paul Chapman Publishing Ltd.

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΜΕΙΟΝΟΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ/-ΤΡΙΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στυλιανίδου Αγγελική*, Ειρήνη Μπιζά**
*Norwich Road Academy, **Πανεπιστήμιο του East Anglia
aggelastil13@yahoo.gr, I.Biza@uea.ac.uk

Ο σκοπός αυτής της έρευνας ήταν ο εντοπισμός γλωσσικών, πολιτισμικών και μαθηματικών δυσκολιών μειονοτικών (ως προς τη γλώσσα) μαθητών στα Μαθηματικά. Η συλλογή δεδομένων έγινε με 21 φυσικές χωρίς συμμετοχή παρατηρήσεις σε τμήματα Μαθηματικών τεσσάρων ελληνικών δημοτικών σχολείων, καθώς και με 5 ημιδομημένες συνεντεύξεις με ορισμένους από τους δασκάλους των παρατηρούμενων τάξεων. Οι μειονοτικοί μαθητές ανήκουν στη Μουσουλμανική Μειονότητα Θράκης και στην πληθυσμιακή ομάδα των Ελληνοπόντιων Ομογενών από τις χώρες της πρώην Σοβιετικής Ένωσης. Η ανάλυση αφορά γλωσσικές, μαθηματικές και πολιτισμικές δυσκολίες των μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το άρθρο αυτό βασίζεται στη διπλωματική μεταπτυχιακή εργασία της πρώτης συγγραφέως όπου διερευνήθηκαν οι δυσκολίες μειονοτικών μαθητών[1] πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στο μάθημα των Μαθηματικών, καθώς και οι τρόποι που αυτές αντιμετωπίστηκαν από τους δασκάλους. Στο άρθρο θα παρουσιαστεί μόνο το πρώτο κομμάτι, που αφορά τις δυσκολίες των μαθητών αυτών. Ο στόχος ήταν να διερευνηθεί, αν και κατά πόσο διάφορες ομάδες μειονοτικών μαθητών αντιμετωπίζουν στα Μαθηματικά γλωσσικές και πολιτισμικές δυσκολίες καθώς και δυσκολίες καθαρά μαθηματικές, σχετιζόμενες δηλαδή με τη συμβολική μαθηματική γλώσσα. Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε, αρχικά, μία σύντομη βιβλιογραφική επισκόπηση στα είδη δυσκολιών μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών. Στη συνέχεια, περιγράφουμε τη μεθοδολογία της παρούσας έρευνας η οποία ακολουθείται από τα βασικότερα αποτελέσματα. Το άρθρο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των κύριων συμπερασμάτων της έρευνας σε σχέση με αντίστοιχα πορίσματα από προηγούμενες μελέτες πάνω στις δυσκολίες μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Στην ενότητα αυτή αναφέρονται οι γλωσσικές και κοινωνικοπολιτισμικές δυσκολίες μειονοτικών παιδιών στο μάθημα των Μαθηματικών, όπως αυτές εντοπίστηκαν από σχετικές προηγούμενες έρευνες.

Γλωσσικές δυσκολίες

Ο όρος ‘κατάλογος’ (register) χρησιμοποιήθηκε από το Halliday (1978) ως «ένα σύνολο σημασιών που αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη λειτουργία της γλώσσας, μαζί με τις λέξεις και τις δομές που εκφράζουν αυτές τις σημασίες» (σελ. 195). Βασιζόμενος στον παραπάνω ορισμό, ο Halliday όρισε το ‘μαθηματικό κατάλογο’ (mathematics register) ως τις σημασίες που εντάσσονται στη γλώσσα των μαθηματικών, η οποία συνιστά τη μαθηματική χρησιμοποίηση της φυσικής γλώσσας. Έρευνες έδειξαν την ύπαρξη τριών ειδών γλωσσικών δυσκολιών των μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών. Το πρώτο είδος γλωσσικής δυσκολίας συναντάται σε λέξεις φυσικής γλώσσας (natural language words) οι οποίες είτε έχουν κοινή ερμηνεία στο γλωσσικό και μαθηματικό κατάλογο αλλά δεν είναι γνώριμες στους μειονοτικούς μαθητές είτε επαναπροσδιορίζονται/ερμηνεύονται με διαφορετικό τρόπο - σε σχέση με τη χρησιμοποίησή τους στο γλωσσικό κατάλογο (language register) - στον τομέα των Μαθηματικών. Η πρώτη περίπτωση δυσκολίας σε λέξεις φυσικής γλώσσας συνδέεται με τη δήλωση του Cuevas (1984) σχετικά με την εξειδίκευση των νοημάτων στο μαθηματικό κατάλογο, συγκριτικά με τις πολλαπλές σημασίες που οι ίδιες έννοιες-λέξεις έχουν στο γλωσσικό κατάλογο. Η δεύτερη περίπτωση δυσκολίας απαντάται σε λέξεις όπως “set”, “point”, “field”, “column” (Halliday, 1978) οι οποίες είναι λέξεις φυσικής γλώσσας που επαναπροσδιορίζονται στην επιστήμη των Μαθηματικών. Το δεύτερο είδος γλωσσικής δυσκολίας προκύπτει από τη συντακτική (syntactic) και σημασιολογική (semantic) δομή των Μαθηματικών, όπου υπάρχουν περισσότεροι από ένας λεκτικοί τρόποι για την έκφραση/απόδοση της ίδιας συμβολικής δήλωσης/παράστασης (symbolic statement) (Khisty, 1995). Όπως αναφέρει ο Pimm (1987), οι δάσκαλοι συχνά εναλλάσσουν τέτοιου είδους λεκτικές εκφράσεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας τους χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους το ενδεχόμενο σύγχυσης των μαθητών. Το τρίτο είδος γλωσσικής δυσκολίας έγκειται στην κατανόηση μαθηματικών όρων που έχουν μη μαθηματικές ομόηχες λέξεις. Οι Bresser, Melanese και Sphar (2009) αναφέρουν ως παραδείγματα τις λέξεις “sum” (άθροισμα) και “whole” (σύνολο). Η ύπαρξη μη μαθηματικών ομόηχων για αυτές τις λέξεις (“some” και “hole”, αντίστοιχα) μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές που δεν έχουν την αγγλική γλώσσα ως μητρική τους.

Κοινωνικοπολιτισμικές δυσκολίες

Η έρευνα των Gorgorió και Planas (2001) έχει επιδείξει σημαντική συσχέτιση της επίδοσης των μειονοτικών ως προς τη γλώσσα μαθητών στα Μαθηματικά με τις κοινωνικές και πολιτισμικές νόρμες που επικρατούν στην τάξη των Μαθηματικών. Οι μειονοτικοί μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες (social and sociomathematical norms) (Cobb and Yackel, 1996) διαφορετικές από εκείνες στις οποίες ήταν συνηθισμένοι[2]. Οι ασυνέχειες στην κατανόηση νέων λέξεων και σημασιών, με άλλα λόγια οι δυσκολίες που οι μειονοτικοί μαθητές αντιμετωπίζουν κατά τη διαδικασία μετάβασής τους – από το γνώριμο προς αυτούς κοινωνικό και εκπαιδευτικό πλαίσιο στο αντίστοιχο καινούριο – μπορεί να οδηγήσουν στην εκδήλωση πολιτισμικών συγκρούσεων (cultural conflicts) (Bishop, 1991). Ο Sapir (1970) τόνισε ότι η προσαρμογή των μαθητών στις κοινωνικές νόρμες της νέας προς αυτούς τάξης συνιστά ένα επιπρόσθετο βήμα, πέρα από την εξοικείωσή τους με την επίσημη γλώσσα της τάξης. Η διάκριση μεταξύ γλώσσας και κουλτούρας της τάξης (κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες) επιβεβαιώνεται μέσα από το παράδειγμα μιας μετανάστριας μαθήτριας στην έρευνα των Gorgorió και Planas (2001). Η έρευνα έδειξε ότι το κορίτσι, παρόλη την εύλογη κατανόηση που είχε στην επίσημη γλώσσα της τάξης, παρέμενε προσκολλημένο στις πολιτισμικές νόρμες της χώρας καταγωγής της – σύμφωνα με τις οποίες είναι αγενές το να εκφράζουν οι μαθητές τη μη κατανόησή τους στους δασκάλους τους – με αποτέλεσμα να αδυνατεί να συμμετάσχει στις εντός τάξης συζητήσεις. Δεν πρέπει, επομένως, να συγχέεται η επαρκής κατάρτιση των μειονοτικών μαθητών στην επίσημη γλώσσα της τάξης με την εξοικείωσή τους στις νόρμες της τάξης. Οι γλωσσικοί και κοινωνικοπολιτισμικοί παράγοντες είναι δύο ξεχωριστά είδη παραγόντων που επηρεάζουν την επίδοση των μειονοτικών μαθητών στα Μαθηματικά και δε θα πρέπει να αλληλοεπικαλύπτονται – δηλαδή δε θα πρέπει η απουσία δυσκολιών στο ένα πεδίο, π.χ. τη γλώσσα, να συνακολουθεί ταυτόχρονα την απουσία δυσκολιών και στο άλλο πεδίο, π.χ. την κοινωνική κουλτούρα της τάξης. Η παρατήρηση αυτή οδήγησε στο σχηματισμό του ερευνητικού ερωτήματος της παρούσας εργασίας: «Ποιες είναι οι γλωσσικές, πολιτισμικές και μαθηματικές δυσκολίες των μειονοτικών ως προς τη γλώσσα μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών;».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν με φυσικές και χωρίς συμμετοχή παρατηρήσεις (naturalistic non-participatory observations) (Newby, 2014) και ημι-δομημένες συνεντεύξεις με δασκάλους (semi-structured interviews) (Denscombe, 2010). Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν 21 διδακτικές ώρες παρατηρήσεων όλων των τάξεων δημοτικού στο μάθημα Μαθηματικών 17 τμημάτων 4 δημοτικών σχολείων της Ξάνθης, στα οποία υπήρχαν μειονοτικοί μαθητές τεσσάρων πληθυσμιακών ή εθνοτικών ομάδων: Ελληνοπόντιοι (επαναπατριζόμενοι Πόντιοι Ελληνικής καταγωγής με μητρική κυρίως Ελληνική σε Ποντιακή διάλεκτο ή/και Ρώσικα), Μειονοτικοί (με μητρική γλώσσα Τουρκικά), Μειονοτικοί[3] (με μητρική γλώσσα Πομακικά ή/και Τουρκικά) και Ρομά (με μητρική γλώσσα Ρομά ή Τουρκικά). Επίσης, πραγματοποιήθηκαν 5 συνεντεύξεις (ένας προς ένα) με τους παρατηρούμενους δασκάλους. Στόχος της συλλογής απόψεων δασκάλων ήταν ο πιθανός εμπλουτισμός της ποικιλότητας και της κατανόησης των δυσκολιών των μειονοτικών μαθητών στα Μαθηματικά όπως αυτές προέκυψαν από τις παρατηρήσεις. Η έρευνα εγκρίθηκε από την

Επιτροπή Ερευνητικής Δεοντολογίας του Πανεπιστημίου του East Anglia.

Τα δεδομένα από τις παρατηρήσεις αναλύθηκαν μέσω κωδικοποίησης των δυσκολιών που αντιμετώπιζαν οι μειονοτικοί μαθητές σύμφωνα με τις κατηγορίες: (α) *γλωσσικές δυσκολίες* (οι οποίες επηρέαζαν ή όχι τη μαθηματική επικοινωνία και επίδοση), (β) *μαθηματικές δυσκολίες* (σχετιζόμενες με τη μαθηματική γλώσσα και συμβολισμό), και (γ) *πολιτισμικές δυσκολίες* (αναφορικά με δυσκολίες των μαθητών οφειλόμενες στις πολιτισμικές διαφορές). Στη συνέχεια αναφέρονται παραδείγματα από κάθε κατηγορία δυσκολιών, τα οποία αντιμετωπίστηκαν σε περισσότερα από ένα τμήματα Μαθηματικών από συγκεκριμένες ομάδες μαθητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Γλωσσικές δυσκολίες

Οι επικρατέστερες γλωσσικές δυσκολίες που επηρεάζουν την επίδοση των μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών εντοπίστηκαν και καταχωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες: δυσκολίες στην κατανόηση καθημερινών λέξεων-εννοιών στα λεκτικά προβλήματα, δυσκολίες στην ειδική μαθηματική ορολογία καθώς επίσης δυσκολίες στην εναλλαγή μεταξύ της λεκτικής και της αριθμητικής μορφής των αριθμών. Παρακάτω αναφέρονται παραδείγματα από τις τρεις κατηγορίες γλωσσικών δυσκολιών.

Αναφορικά με τα λεκτικά προβλήματα και τις δυσκολίες με καθημερινές λέξεις-έννοιες, υπήρχαν έννοιες που είχαν την ίδια σημασία τόσο στο μαθηματικό όσο και στο γλωσσικό κατάλογο αλλά ήταν άγνωστες σε μειονοτικούς μαθητές. Έτσι, οι μαθητές είτε δε μπορούσαν να προχωρήσουν στην επίλυση (π.χ. με τις λέξεις «το ακριβότερο-το φτηνότερο» σε μια Μειονοτική μαθήτρια) είτε προχωρούσαν λανθασμένα εξαιτίας της παρερμήνευσης των μαθηματικών προβλημάτων (π.χ. «τον αμέσως μεγαλύτερο αριθμό» σε ένα Μειονοτικό μαθητή).

Αναφορικά με τις δυσκολίες στην ειδική μαθηματική ορολογία, αναφέρουμε το παράδειγμα της σύγχυσης των Ρομά μαθητών με τις έννοιες «μονάδες» και «δεκάδες» που παρατηρήθηκε σε δύο τμήματα (2Β[4] και 3Ε2). Συγκεκριμένα, στο 2Β, όταν ζητήθηκε από ένα μαθητή να εντοπίσει το ψηφίο των δεκάδων σε ένα δοσμένο τριψήφιο αριθμό, αυτός ανέφερε το ψηφίο που αντιπροσώπευε τις μονάδες. Παρόμοια, στο 3Ε2, όλοι οι μαθητές ανέφεραν το ψηφίο των δεκάδων ως απάντηση στην ερώτηση για τον εντοπισμό του ψηφίου των μονάδων. Στη δεύτερη περίπτωση, οι μαθητές απάντησαν σωστά ότι η μονάδα έχει τη μικρότερη θεσιακή αξία, συγκριτικά με τη δεκάδα και την εκατοντάδα. Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω παρατηρήσεων σχετικά με τους 3Ε2 μαθητές ενδέχεται να οδηγεί στη λανθασμένη θεώρηση των μαθητών ότι η μονάδα εκφράζεται πάντοτε από το μικρότερο – αριθμητικά – ψηφίο κάθε τριψήφιου αριθμού. Με άλλα λόγια, αυτοί οι μαθητές συνέχεαν τη θεσιακή αξία (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες) με την αριθμητική αξία.

Αναφορικά με δυσκολίες στην εναλλαγή μεταξύ της λεκτικής και της αριθμητικής μορφής των αριθμών, παραδείγματα εντοπίστηκαν σε πέντε τμήματα (1C1, 3B, 2E, 2A, 2B). Στα δύο πρώτα τμήματα, δύο μαθητές – ένας Μειονοτικός και ένας Ρομά, αντίστοιχα – χρησιμοποίησαν λανθασμένα αριθμητικά ψηφία για τη γραφή του αριθμού ενώ στο 2E το μόνο τμήμα του εξαψήφιου αριθμού που γράφτηκε λανθασμένα από ένα Μειονοτικό μαθητή ήταν αυτό των δεκάδων. Παρόμοιο είδος δυσκολίας συναντήθηκε στο 2A από τους Ρομά μαθητές και από ένα μαθητή με μητρική γλώσσα την Πομακική. Αυτοί οι μαθητές δε μπορούσαν να γράψουν την αριθμητική μορφή μονοψήφιων αθροισμάτων παρόλο που προφορικά τα έλεγαν σωστά (θα επανέλθουμε σε αυτήν την περίπτωση στα συμπεράσματα). Το αντίστροφο είδος δυσκολίας, που αναφέρεται στη μετάβαση από την αριθμητική στη λεκτική μορφή ενός αριθμού, εντοπίστηκε στο 2B, όταν ορισμένοι Τουρκόφωνοι[5] μαθητές διάβαζαν λανθασμένα τις αριθμητικές παραστάσεις, συγχέοντας αριθμητικά ψηφία (π.χ. ένας Μειονοτικός μαθητής απέδωσε τον αριθμό 79 ως «ενενήντα εννιά»). Στο 2A, οι Ρομά μαθητές είτε δε μπορούσαν να ονοματίσουν αριθμούς οι οποίοι δείχνονταν από το δάσκαλο πάνω στην αριθμογραμμή, είτε τους ονομάτιζαν λανθασμένα, π.χ. μπέρδευαν τον αριθμό 10 με τον αριθμό 1 διαβάζοντας το 10 ως «ένα».

Επιπλέον παρατηρήθηκαν γλωσσικές δυσκολίες εκφραστικού και συντακτικού τύπου οι οποίες όμως δεν επηρεάζουν την επίδοση των μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών. Μία δυσκολία τέτοιου τύπου η οποία εντοπίστηκε σε δύο τμήματα (1C2, 3ST2) είναι η αναντιστοιχία αριθμητικού επιθέτου και ουσιαστικού ως προς τον αριθμό (Ενικό-Πληθυντικό). Οι περισσότεροι Τουρκόφωνοι μαθητές χρησιμοποιούσαν Ενικό αριθμό για ουσιαστικό το οποίο συνόδευε αριθμητικό επίθετο μεγαλύτερο του ενός, π.χ. «δύο αριθμός» αντί για «δύο αριθμούς» και «τρία τέταρτο» αντί για «τρία τέταρτα». Στην Τουρκική γλώσσα, σε αντίθεση με την Ελληνική και την Αγγλική, το αριθμητικό επίθετο ακολουθείται πάντοτε από ουσιαστικό Ενικού αριθμού, επειδή δείχνει από μόνο του το πλήθος (plurality) (Lewis, 1989). Μια άλλη γλωσσική δυσκολία είναι η αναντιστοιχία μεταξύ του γένους είτε του άρθρου είτε του αριθμητικού επιθέτου, και του γένους του ουσιαστικού. Δύο Ρομά καθώς και δύο Μειονοτικοί μαθητές χρησιμοποίησαν άρθρο ή αριθμητικό επίθετο γένους ουδετέρου μαζί με ουσιαστικό γένους θηλυκού. Αυτή η γλωσσική δυσκολία αντιμετωπίστηκε επίσης από Ελληνοπόντιους μαθητές όταν, για παράδειγμα, ένας μαθητής (2D) διάβασε τον εξαψήφιο αριθμό 970.641 αντιστοιχίζοντας τον αριθμό του αριθμητικού επιθέτου «εννιακόσια» (πληθυντικός αριθμός ουδέτερου γένους) με τον αριθμό του ουσιαστικού «χιλιάδες» (πληθυντικός αριθμός αλλά θηλυκού γένους). Τέτοιου είδους λάθη είναι αναμενόμενο να γίνονται από Ελληνοπόντιους μαθητές διότι, στη Ρωσική γλώσσα, όλα τα επίθετα έχουν την ίδια κατάληξη στον Πληθυντικό αριθμό, χωρίς να ‘επηρεάζονται’ από το γένος του προσδιοριζόμενου ουσιαστικού (Master Russian, 2014).

Μαθηματικές δυσκολίες

Η συνηθέστερη περίπτωση μαθηματικής δυσκολίας, η οποία παρατηρήθηκε σε όλα τα σχολεία εκτός από το Σχολείο 1, ήταν η ακατάλληλη τοποθέτηση των αριθμών (ψηφίων) σε κάθετες προσθέσεις ή αφαιρέσεις. Συγκεκριμένα, στο 2Β, υπήρχε ένας Ρομά και ένας Ελληνοπόντιος μαθητής οι οποίοι δεν έγραψαν τα ψηφία του δεύτερου προσθετέου σε απόλυτη αντιστοιχία με τα αντίστοιχα (θεσιακά) του πρώτου προσθετέου, έτσι ώστε οι μονάδες και οι δεκάδες των δύο αριθμών να βρίσκονται στην ίδια κάθετη νοητή γραμμή. Υπήρχε, επίσης, ένας Ρομά μαθητής ο οποίος τοποθέτησε το δεύτερο, μονοψήφιο προσθετέο κάτω από τις δεκάδες του πρώτου προσθετέου. Η ίδια περίπτωση εντοπίστηκε και στο 3Β από Ρομά μαθητές. Στο 2C1, η λανθασμένη τοποθέτηση ψηφίων συναντήθηκε σε δεκαδικούς αριθμούς. Στο τμήμα αυτό, υπήρχαν Τουρκόφωνοι μαθητές που 'αντιστοίχισαν' τα ψηφία των δύο αριθμών είτε από την αριστερή είτε από τη δεξιά πλευρά. Για παράδειγμα, μια μαθήτρια τοποθέτησε το ψηφίο «0» που αντιπροσωπεύει τις μονάδες στον αριθμό «0,047» κάτω από το ψηφίο «2» το οποίο αντιπροσωπεύει τις δεκάδες στον αριθμό «24,3». Ένα αντίστοιχο παράδειγμα εντοπίστηκε στην αντιστοίχιση των ψηφίων από τη δεξιά πλευρά.

Μια άλλη μαθηματική δυσκολία εντοπίστηκε στον τρόπο πρόσθεσης ψηφίων σε κάθετες πράξεις. Δύο Ρομά μαθητές από το 3Β δεν ξεκίνησαν την πρόσθεση από τις μονάδες αλλά από τις δεκάδες. Μια παρόμοια δυσκολία συναντήθηκε στο 2Β, όπου ένας Ελληνοπόντιος μαθητής είπε ότι η διαδικασία υπολογισμού του αθροίσματος ξεκινά από το κρατούμενο.

Μια ακόμα μαθηματική δυσκολία είναι η σύγχυση Ρομά μαθητών μεταξύ πράξεων (πρόσθεσης–αφαίρεσης και πρόσθεσης-πολλαπλασιασμού). Στο 2Β, μια Ρομά μαθήτρια έκανε πρόσθεση αντί για αφαίρεση, παρόλο που έγραψε σωστά κάθετα τους δύο αριθμούς καθώς και το σύμβολο πλην. Στο 3C1, ορισμένοι Ρομά μαθητές έλυσαν ασκήσεις πολλαπλασιασμού σα να ήταν ασκήσεις πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, είπαν ότι 5x3=8 και ότι 4x4=8.

Πολιτισμικές δυσκολίες

Πολιτισμικές δυσκολίες στο μάθημα των Μαθηματικών παρατηρήθηκαν σε ορισμένους Ρομά μαθητές. Η στάση κατά τη διάρκεια του μαθήματος έδειξε την άγνοια και αδιαφορία τους προς τα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, στο 2Α, τα αγόρια έκαναν τατουάζ και ζωγραφιές, και τα κορίτσια μιλούσαν μεταξύ τους ή έβαφαν τα νύχια τους. Τα κορίτσια επίσης εξέφρασαν την απροθυμία τους να μάθουν Μαθηματικά. Στο 3Ε1, έπαιζαν ποδόσφαιρο, τραγουδούσαν και χόρευαν. Οι Ρομά μαθητές του Σχολείου 3 και του 2Α, οι οποίοι διδάσκονταν την ύλη Μαθηματικών μικρότερων τάξεων, απάντησαν λανθασμένα στις περισσότερες μαθηματικές ερωτήσεις, ακόμα και σε εκείνες που φαίνονταν εύκολες και είχαν μόλις συζητηθεί. Επιπρόσθετα, η φοίτησή τους στο σχολείο ήταν ανεπαρκής και, σύμφωνα με τους δασκάλους τους, οι περισσότεροι από αυτούς δεν έλαβαν προσχολική αγωγή και πήγαν απευθείας στο δημοτικό, έχοντας περιορισμένη γνώση της ελληνικής γλώσσας. Αυτή η αρνητική και/ή αδιάφορη στάση ως προς το σχολείο, μέρος του οποίου συνιστά το μάθημα των Μαθηματικών, πιθανότατα σχετίζεται με τη γενική στάση των Ρομά ως προς το σχολείο. Όπως ανέφεραν οι Stathopoulou και Kalabasis (2007), αυτοί οι πληθυσμοί ασχολούνται κυρίως με τις πρακτικές/εμπορικές δραστηριότητες της οικογένειάς τους και δεν ενδιαφέρονται για σχολική μάθηση και τυπική εκπαίδευση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπερασματικά, αναφορικά με τις γλωσσικές δυσκολίες, αυτές διακρίθηκαν σε δύο υποκατηγορίες ανάλογα με το αν επιδρούν ή όχι στη μαθηματική επιτυχία των μειονοτικών παιδιών. Οι γλωσσικές δυσκολίες που παρεμποδίζουν την επιτυχία αυτή αντιμετωπίζονται τόσο σε καθημερινές λέξεις του γλωσσικού καταλόγου οι οποίες χρησιμοποιούνται με την ίδια ερμηνεία και στο μαθηματικό κατάλογο, όσο και σε ειδική μαθηματική ορολογία. Συναντώνται τόσο κατά τη μετάβαση από λεκτικές σε αριθμητικές δραστηριότητες όσο και κατά την αντίστροφη περίπτωση μετάβασης. Με άλλα λόγια, η παρούσα έρευνα αποκάλυψε ότι οι γλωσσικές δυσκολίες δεν περιορίζονται σε λεκτικές μαθηματικές δραστηριότητες αλλά υφίστανται και σε αριθμητικές. Οι γλωσσικές δυσκολίες σε αριθμητικές δραστηριότητες αντιμετωπίστηκαν κυρίως από τους Ρομά μαθητές. Όπως δήλωσε στη συνέντευξή της μια δασκάλα Ρομά μαθητών, ακόμα και σε απλές μαθηματικές πράξεις, οι Ρομά μαθητές εκφράζονται πρώτα στη μητρική τους γλώσσα και έπειτα κάνουν τη μετάφραση στα ελληνικά. Μια άλλη δυσκολία που εντοπίστηκε σε γραπτές αριθμητικές παραστάσεις από Ρομά μαθητές αλλά και από ένα μαθητή με μητρική γλώσσα την Πομακική ήταν η αδυναμία τους να τις κατανοήσουν χωρίς τη βοήθεια του δασκάλου - προφορική έκφραση των συμβολικών ασκήσεων, χρησιμοποίηση απλοποιημένου λεξιλογίου, σύνταξης καθώς και χρήση των Τουρκικών**,** σε συνδυασμό με πρακτικούς μετρητές (μαρκαδόρους). Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι αυτοί οι μαθητές υπολόγιζαν σωστά τα αθροίσματα όταν οι ίδιες αριθμητικές παραστάσεις παρουσιάζονταν προφορικά αλλά παρόλα αυτά αδυνατούσαν να αποδώσουν τα αθροίσματα γραπτά στην αριθμητική τους μορφή. Η δυσκολία τους σε γραπτές μαθηματικές ασκήσεις μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι η Ρομά και η Πομακική γλώσσα συνιστούν προφορικές γλώσσες, και αυτό οδηγεί στη μη εξοικείωση των ομιλητών τους με το γραπτό κώδικα. Το γεγονός αυτό, όσον αφορά τους Ρομά μαθητές, εξηγείται από τους Stathopoulou και Kalabasis (2007) οι οποίοι αναφέρουν ότι η Ρομά είναι τυπικά μια προφορική γλώσσα που έχει υπάρξει κυρίως εκτός ακαδημαϊκού περιβάλλοντος. Οι ίδιοι ερευνητές τονίζουν, επίσης, ότι παρόλο που η προφορική παράδοση της γλώσσας Ρομά έχει θετικές επιδράσεις στην επίτευξη νοερών υπολογισμών καθώς και στην απομνημόνευση μεγάλου πλήθους πληροφοριών, η ταυτόχρονη έλλειψη μια γραπτής γλώσσας Ρομά, που έχει ως επακόλουθο την απουσία εξοικείωσης των μαθητών με το γραπτό κώδικα, συνεπάγεται τη δυσκολία στην κατανόηση συμβολικών μαθηματικών ασκήσεων, οι οποίες είναι κατανοητές όταν εκφράζονται προφορικά.

Οι γλωσσικές δυσκολίες που δε συνιστούν εμπόδιο στην επιτυχία των μειονοτικών μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών θα μπορούσαν να αποδοθούν στην τάση μειονοτικών μαθητών να ‘αφομοιώνουν’ τους συντακτικούς κανόνες της μητρικής τους γλώσσας σε αυτούς της επίσημης γλώσσας της τάξης και ήταν οι εξής: η αναντιστοιχία αριθμητικού επιθέτου και ουσιαστικού ως προς τον αριθμό, η οποία εντοπίστηκε σε Τουρκόφωνους μαθητές, και η αναντιστοιχία άρθρου ή αριθμητικού επιθέτου και ουσιαστικού ως προς το γένος, η οποία εντοπίστηκε σε όλες τις ομάδες των συμμετεχόντων μειονοτικών μαθητών. Οι μαθηματικές δυσκολίες αντιμετωπίστηκαν από όλες τις ομάδες μειονοτικών μαθητών. Είναι δε αξιοσημείωτο το γεγονός ότι όλες οι περιπτώσεις μαθηματικών δυσκολιών εντοπίστηκαν και σε Πλειονοτικούς μαθητές, πράγμα που σημαίνει ότι οι μαθηματικές δυσκολίες μπορεί και να είναι ανεξάρτητες του επιπέδου κατάκτησης της επίσημης γλώσσας και κουλτούρας της τάξης από τους μαθητές. Τέλος, αναφορικά με τις πολιτισμικές δυσκολίες των μειονοτικών παιδιών στο μάθημα των Μαθηματικών, σύμφωνα με τον Bishop (1991), ως αιτία ύπαρξής τους υποστηρίζεται ότι είναι η απουσία προσαρμογής των μειονοτικών μαθητών στις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες της τάξης η οποία οδηγεί στην εμφάνιση πολιτισμικών συγκρούσεων στους μαθητές αυτούς. Στην παρούσα έρευνα δεν παρατηρήθηκαν εκδηλώσεις πολιτισμικών συγκρούσεων σε καμία περίπτωση, πιθανότατα λόγω του ότι όλοι οι μειονοτικοί μαθητές έζησαν και μεγάλωσαν σύμφωνα με το πρότυπο του ελληνικού σχολείου, οπότε δε σημειώθηκε μετάβασή τους από σχολείο της δικής τους κουλτούρας σε σχολείο άλλης χώρας. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας θα μπορούσαν να αποδοθούν στη σχέση/στάση που έχουν κάποιοι Ρομά μαθητές ως προς το σχολείο και τα Μαθηματικά, οπτική που συνάδει με αυτή των Stathopoulou και Kalabasis (2007).

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Για ευκολία, αναφέρεται στην εργασία ο αρσενικός όρος «μαθητής» και «δάσκαλος» ο οποίος καλύπτει και το θηλυκό γένος των ονοματικών συνόλων. Σε περιπτώσεις ανάγκης διάκρισης αρσενικού και θηλυκού γένους, ο όρος χρησιμοποιείται με σαφήνεια στο αντίστοιχο γένος.
2. Σύμφωνα με τους Cobb και Yackel (1996), οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες διακρίνονται από τις γενικές κοινωνικές νόρμες της τάξης στο γεγονός ότι συγκεκριμενοποιούνται σε μαθηματικές συζητήσεις που

αφορούν μαθηματικές δραστηριότητες των μαθητών. Για παράδειγμα, η κατανόηση του ότι οι μαθητές αναμένεται να εξηγούν τις λύσεις τους και τους τρόπους σκέψης τους είναι κοινωνική νόρμα, ενώ η κατανόηση του τι ορίζεται ως αποδεκτή μαθηματική εξήγηση είναι κοινωνικομαθηματική νόρμα.

3. Παρόλο που στη Μουσουλμανική Μειονότητα της Θράκης υπάγονται και οι Ρομά, θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο ‘Μειονοτικοί’ μαθητές για να χαρακτηρίσουμε μόνο τους μαθητές με μητρική γλώσσα την Τουρκική και τους μαθητές με μητρική γλώσσα την Πομακική οι οποίοι κατά κύριο λόγο δεν παρουσίασαν διαφορές σε δυσκολίες στο μάθημα των Μαθηματικών, σε αντίθεση με τους Ρομά μαθητές για τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο ‘Ρομά’. Θα διαχωρίσουμε το χαρακτηρισμό, σε μαθητές με μητρική γλώσσα την Τουρκική/μαθητές με μητρική γλώσσα την Πομακική, για περιπτώσεις που παρατηρήθηκε διαφοροποίηση.

4. Ο κωδικός αποτελείται από τον αριθμό του σχολείου και το τμήμα. Στην περίπτωση που η ίδια τάξη είχε περισσότερα από ένα τμήματα, ακολουθεί αρίθμηση αυτών.

5. Με τον όρο ‘Τουρκόφωνοι’ αναφερόμαστε σε μαθητές με μητρική γλώσσα την Τουρκική, μαθητές με μητρική γλώσσα την Πομακική και σε μαθητές Ρομά, οι οποίοι μιλούσαν με ευφράδεια την Τουρκική γλώσσα, παρόλο που δεν είχαν όλοι τα Τουρκικά ως μητρική τους γλώσσα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bishop, A. J. (1991). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on Mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bresser, R., Melanese, K. and Sphar, C. (2009). *Supporting English language learners in math class, Grades K-2*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Cobb, P. and Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research, *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175-190.

Cuevas, G. J. (1984). Mathematics learning in English as a second language, *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(2), 134-144.

Denscombe, M. (2010). *The good research guide: For small-scale social research projects*. 4th edn. Maidenhead: Open University Press.

Gorgorió, N. and Planas, N. (2001). Teaching Mathematics in multilingual classrooms, *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 7-33.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.

Khisty, L. L. (1995). Making inequality: Issues of language and meanings in mathematics teaching with Hispanic students. In Secada, W. G., Fennema,

E. and Adajian, L. B. (Eds.) *New directions for equity in mathematics education*. Cambridge: Cambridge University Press in collaboration with the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 279-297.

Lewis, G. L. (1989). *Turkish*. 2nd edn. Sevenoaks: Teach Yourself Books.

Master Russian (2014). *Adjectives in Russian*. Available at: http://masterrussian.com/aa040801a.shtml. (Accessed: 31 August 2014).

Newby, P. (2014). *Research methods for education*. London: Routledge.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.

Sapir, E. (1970). *Language: An introduction to the Study of Speech*. 4th edn. London: Rupert Hart-Davis.

Stathopoulou, C. and Kalabasis, F. (2007). Language and culture in mathematics education: Reflections on observing a Romany class in a Greek school, *Educational Studies in Mathematics, 64*(2), 231-238.

ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟ ΜΙΑΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΙΘΟΥΣΑΣ: ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΕΚΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΓΙΑ ΧΩΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης
Αναπληρωτής Καθηγητής, ΠΤΔΕ Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ttriant@uth.gr

Στο παρόν κείμενο θα παρουσιάσω μέρος από τα στοιχεία μιας έρευνας που είχε ως στόχο τη μελέτη της διαδικασίας κατασκευής μιας πολυμεσικής ψηφιακής ξενάγησης ενός δημοτικού σχολείου από μαθητές της έκτης τάξης, με τη χρήση, χαρτών, διαδρομών, φωτογραφιών και αφηγήσεων. Στην πορεία προσέγγισης αυτού του στόχου οι μαθητές κατασκεύασαν κατόψεις των αιθουσών όπου έκαναν μάθημα. Η ανάλυση των αναπαραστάσεων αυτών εστιάζουν στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών για έννοιες που σχετίζονται με τη γωνία θέασης και την απόσταση θέασης ενός χάρτη και ιδιαίτερα με τη χρήση πλεγμάτων και συντεταγμένων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες, η διδασκαλία της γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση στη χώρα μας κι όχι μόνο, εστιάζει σε ψήγματα ταξινόμησης τετραπλεύρων, στην κατάρτιση ενός λεξικού ‘ορισμών’ των γεωμετρικών εννοιών, σε μετασχηματισμούς στο επίπεδο, σε τύπους και την ‘αριθμητικοποίηση’ των εννοιών αυτών μέσω της μέτρησή τους (Hansen 1998, p. 238). Όπως παρατηρεί η Τζεκάκη (2015), έννοιες του χώρου και δραστηριότητες παραστασιοποίησης χωρικών καταστάσεων, στοιχεία που αφορούν στο ‘αγκάλιασμα’ του χώρου που μας περιβάλλει και συμβάλλουν στην ανάπτυξη του χωρικού συλλογισμού, έχουν ισχνή παρουσία στα προγράμματα σπουδών. Το γεγονός ότι ο χωρικός συλλογισμός είναι ο ‘φτωχός’ συγγενής του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, δε συνάδει με την αξία που προσδίδει σε αυτόν ένα διαρκώς αυξανόμενο σώμα ερευνητικών δεδομένων. Εκτός από τον κεντρικό της ρόλο στην εξέλιξη, προσαρμογή και καθημερινή λειτουργικότητα του ανθρώπου, η χωρική γνώση σχετίζεται άμεσα με την ανθρώπινη νοημοσύνη και με μια γενικότερη επιτυχή πορεία στις πειθαρχίες των φυσικών επιστημών, της τεχνολογίας, της μηχανικής και των μαθηματικών (Newcombe, Uttal, & Sauter, 2013).

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσω μέρος των στοιχείων μιας έρευνα που εστιάζει στη μελέτη της διαδικασίας χαρτογράφησης του χώρου ενός δημόσιου δημοτικού σχολείου από τους μαθητές δύο τμημάτων έκτης τάξης. Η κατασκευή ενός χάρτη προϋποθέτει τη συλλογή, διαχείριση και παρουσίαση χωρικών πληροφοριών. Με άλλα λόγια, στηρίζεται σε αντιλήψεις για θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές μέσα στον χώρο, για συστήματα αναπαράστασης και συντεταγμένες—κατά περίπτωση βάσει του πλαισίου—, για γεωμετρικά σχήματα και μορφές, αλλά και για πολλαπλασιαστικές δομές, όπως αυτές εκφράζονται μέσα από λόγους, αναλογίες και κλίμακες. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά στοιχεία που θα παρουσιάσω αφορούν στις προσπάθειες αποτύπωσης του χώρου των σχολικών τους τάξεων σε λευκό και τετραγωνισμένο χαρτί (στο κείμενο η λέξη μαθητής αναφέρεται και στα δύο γένη).

ΧΩΡΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΕΣ

Ο χωρικός προσανατολισμός σχετίζεται με τη γνώση του σχήματος του χώρου που μας περιβάλλει. Ειδικότερα, ο χωρικός προσανατολισμός περιλαμβάνει την κατανόηση και διαχείριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων θέσεων στον χώρο, έχοντας αρχικά ως σημείο αναφοράς τη συγκεκριμένη θέση ή και την κίνηση κάποιου μέσα σε αυτόν κι αργότερα μια πιο αφαιρετική οπτική που εκφράζεται με χάρτες, συντεταγμένες και κλίμακες (Sarama & Clements, 2009). Το ισχύον πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών στη χώρα μας όμως, προσφέρει στους μαθητές περιορισμένες ευκαιρίες για να μαθηματικοποιήσουν τις καθημερινές τους εμπειρίες ώστε να αναπτύξουν την ικανότητα προσανατολισμού στον χώρο, αφού εστιάζει στις μικρές μόνο ηλικίες σε απλοϊκές έννοιες όπως πάνω-κάτω, μπροστά-πίσω, δεξιά-αριστερά, και στην περιγραφή διαδρομών στο φυσικό περιβάλλον και σε τετραγωνισμένο χαρτί (Τζεκάκη, 2015).

Ο χάρτης είναι ένας μοναδικός τρόπος συμβολικής αναπαράστασης, που επιτρέπει τη δημιουργία μιας αμφιμονοσήμαντης σχέσης με αρκετά—μα όχι με όλα—τα αντικείμενα ενός γεωγραφικού τοπίου. Μειώνοντας το μέγεθος των αντικειμένων αυτών, επιτρέπει στον θεατή να δει με μια ματιά πολύ περισσότερα από εκείνα που θα μπορούσε να δει βρισκόμενος στην επιφάνεια της γης. Οι άνθρωποι μέσω των χαρτών βρίσκουν τρόπους να οργανώσουν τις σκέψεις τους και να συνδεθούν με άλλους ανθρώπους στις περιπτώσεις όπου ο προφορικός και ο γραπτός λόγος καθίστανται ανεπαρκείς για να εξυπηρετήσουν αυτόν τον σκοπό, είτε γιατί ο λόγος γίνεται πολύπλοκος, είτε γιατί σε αυτόν συμμετέχουν πολλοί άνθρωποι, είτε γιατί τους ανθρώπους τους χωρίζει μεγάλη απόσταση και χρόνος, όπως συμβαίνει πάντοτε δηλαδή στα μοντέρνα κράτη (Wood, 2010).

Η ανάπτυξη της κατανόησης των χαρτών στην παιδική ηλικία προϋποθέτει τη δημιουργία αναπαραστατικών αντιστοιχίσεων μεταξύ των συμβόλων σε έναν χάρτη και των πληροφοριών στις οποίες αυτά αναφέρονται, όπως και τη δημιουργία γεωμετρικών αντιστοιχίσεων μεταξύ των χωρικών πληροφοφιών που προσφέρει ένας χάρτης και του αναφορικού, φυσικού χώρου στον οποίο αναφέρεται ο χάρτης. Η ανάπτυξη της κατανόησης των χαρτών οικοδομείται μέσα από τη σύνδεση των δύο προηγούμενων αντιστοιχίσεων, όπως αυτή εκφράζεται από τη σύνθεση των πληροφοριών που συλλέγονται από έναν περιηγητή και αφορούν στη θέση του στον αναπαραστατικό χώρο του χάρτη και στον αναφορικό, φυσικό χώρο που εξερευνά (Liben & Myers, 2007).

Το χωρικό νόημα που κομίζει ένας χάρτης και επομένως οι απαιτήσεις που προβάλλει για την κατανόησή του, εκφράζεται συνοπτικά μέσω των τριών στοιχείων του χαρτογραφικού ματιού: την απόσταση, τη γωνία και το αζιμούθιο θέασης. Η απόσταση θέασης σχετίζεται με το μέγεθος ενός χάρτη και περιλαμβάνει την κατανόηση της κλίμακας, των λόγων των αναλογιών, όπως και των μετρικών χαρακτηριστικών. Η γωνία θέασης σχετίζεται με την κλίση μέσω της οποίας κοιτάζουμε τον αναφορικό χώρο μέσω του χάρτη. Η γωνία θέασης 90^o οδηγεί σε έναν χάρτη–κάτοψη της περιοχής που αναπαριστά, ενώ η γωνία θέασης 0^o αναφέρεται στη θέαση από το επίπεδο των ματιών, ως να στεκόμαστε με άλλα λόγια όρθιοι μπρος από ένα κτίριο. Το αζιμούθιο θέασης αναφέρεται στη σχέση της κατεύθυνσης, όπως αυτή απεικονίζεται στον χάρτη καθώς και της κατεύθυνσης στον αναφορικό χώρο, και εκφράζεται ως το μέτρο της γωνίας της κατεύθυνσης στον χάρτη από τον γεωγραφικό Βορρά, κινούμενοι κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (Liben & Myers, 2007). Τα παιδιά από μικρή, προσχολική ακόμη ηλικία μπορούν να χρησιμοποιούν χάρτες για να προσανατολίζουν την πορεία τους σε απλές καταστάσεις, ενώ επιδεικνύουν θεμελιώδη, μάλλον περιορισμένη αντίληψη για τις σχέσεις που εκφράζουν οι κλίμακες όπως και για τη γωνία θέασης ενός χάρτη (Newcombe, Uttal, & Sauter, 2013).

Σημαντικό ρόλο στην κατανόηση και αργότερα στην κατασκευή χαρτών διαδραματίζει και το νόημα που προσδίδουν τα παιδιά στα συστήματα συντεταγμένων. Από τη στιγμή που μικροί και μεγάλοι δεν αποθηκεύουμε χάρτες στο μυαλό μας με τη μορφή νοερών εικόνων, η συνειδητή δόμηση του χώρου με τη βοήθεια πλεγμάτων και συντεταγμένων προϋποθέτει μια αφαιρετική πορεία που εδράζεται στην επιλογή, συγχρονισμό, καταγραφή και ενοποίηση νοερών αντικειμένων και δράσεων (Sarama & Clements, 2009). Πολλά παιδιά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση όμως, ερμηνεύουν το πλέγμα ως μια συλλογή από τετράγωνες περιοχές ή ως ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων ή γραμμών, με αποτέλεσμα να θεωρούν τις γραμμές ως διαστήματα μην αναγνωρίζοντας τον τρόπο με τον οποίο συμβάλλουν στην επίτευξη ακρίβειας στον εντοπισμό ή την αποτύπωση μιας θέσης. Τέλος τα παιδιά δυσκολεύονται να ακολουθήσουν οριζόντιες ή κατακόρυφες γραμμές που δεν είναι άξονες (Sarama, Clements, Swaminathan, McMillen, & González Gómez, 2003).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα ξεκίνησε τον Δεκέμβριο του 2013 και ολοκληρώθηκε τον Ιούνιο του 2014 στα δύο τμήματα της έκτης τάξης, δυναμικότητας 18 και 19 μαθητών, ενός 12θέσιου δημόσιου σχολείου με μακρόχρονη ιστορία που βρίσκεται στην καρδιά του αστικού ιστού της πρωτεύουσας ενός νομού της ηπειρωτικής Ελλάδας. Η έρευνα ακολουθεί το εθνογραφικό μεθοδολογικό παράδειγμα και είχε έντονα ανθρωπολογικό προσανατολισμό, μιας και μια ψηφιακή, πολυμεσική ξενάγηση σε έναν χώρο μπορεί να αποτελέσει έναν καμβά πάνω στον οποίο οι ξεναγοί θα έχουν την ευκαιρία να αποτυπώσουν ενσώματες εμπειρίες τους που μπορεί να περιλαμβάνουν ανθρώπινες σχέσεις, οπτικές γωνίες, οικείες διαδρομές, σημεία συνάθροισης ή αποφυγής, προσωπικές ιστορίες, κ.ά. Οι συναντήσεις της ερευνητικής ομάδας με τους μαθητές των δύο τμημάτων ήταν εβδομαδιαίες, ωριαίες και προγραμματισμένες σε συγκεκριμένες μέρες στο πλαίσιο της Ευέλικτης Ζώνης Διαθεματικών και Δημιουργικών Δραστηριοτήτων. Από τον τέταρτο μήνα της έρευνας ο εβδομαδιαίος χρόνος παραμονής των ερευνητών στο σχολείο αυξήθηκε στις δύο ώρες, καταλήγοντας στις τέσσερις ώρες τους μήνες Μάιο και Ιούνιο.

Στις επιτόπιες συναντήσεις με τα παιδιά των δύο τμημάτων συμμετείχαν τρεις ερευνητές, ενώ μια τέταρτη ερευνήτρια παρακολουθούσε την έρευνα μέσω των δεδομένων που παράγονταν. Τα παραχθέντα ερευνητικά δεδομένα περιλαμβάνουν τις ηχογραφήσεις στην ολομέλεια και στις επιμέρους ομάδες που σχηματίστηκαν στο κάθε τμήμα, τις σημειώσεις πεδίου των ερευνητών, τις άτυπες συζητήσεις με τον διευθυντή και τις δασκάλες του σχολείου, τις σημειώσεις των μαθητών και για περιστατικά που ξεχωρίζουν από τη σχολική τους ζωή στους χώρους του εν λόγω σχολείου, χάρτες της τάξης τους και του σχολείου, φωτογραφίες από γωνίες ιδιαίτερου ενδιαφέροντος του χώρου του σχολείου, αφηγήσεις για περιστατικά και συνήθειες που τις χαρακτηρίζουν, συνεντεύξεις που πραγματοποίησαν τα ίδια τα παιδιά με γονείς και άλλους συγγενείς τους που είχαν φοιτήσει στο ίδιο σχολείο, και τέλος δύο ψηφιακές ξαναγήσεις του σχολείου που δημιούργησαν τα παιδιά.

Για τις ανάγκες της χαρτογράφησης του χώρου του σχολείου χρησιμοποιήσαμε το ψηφιακό διαδικτυακό εργαλείο Mapwing (http://www.mapwing.com/). Το εν λόγω περιβάλλον επιτρέπει τη δημιουργία ξεναγήσεων σε χώρους, ανοιχτούς και κλειστούς, συνδυάζοντας κατόψεις κτιρίων, αποτυπώσεις διαδρομών, φωτογραφικές εικόνες και γραπτές αφηγήσεις για σημεία ενδιαφέροντος των χώρων, όπως τα επιλέγουν οι δημιουργοί των ξεναγήσεων. Σε ενδιάμεσο στάδιο της κατασκευής των ψηφιακών ξεναγήσεων του σχολείου από τους ίδιους τους μαθητές, ζητήσαμε να αποτυπώσουν τις αίθουσες όπου έκαναν μάθημα εκείνο το διάστημα, αρχικά σε μια λευκή σελίδα χαρτιού και ακολούθως σε καμβά με διάστικτο πλέγμα (κορυφές τετραγώνου πλευράς 0,5 εκ.).

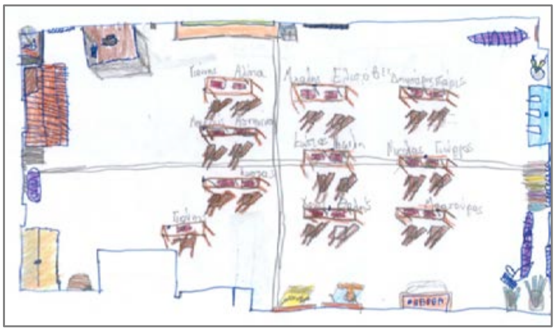
Αντίστοιχες επιλογές είχαν δοθεί κατά τη διάρκεια έρευνας του Watt (1998) στις ΗΠΑ σε παιδιά πέμπτης τάξης, με τη διαφορά ότι μετά την ελεύθερη αποτύπωση της κάτοψης της τάξης τους σε λευκό χαρτί, τα παιδιά είχαν εργαστεί σε ψηφιακό περιβάλλον χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα KidCAD. Αυτό το στάδιο διήρκεσε πέντε διδακτικές ώρες και σχεδιάστηκε ώστε να δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με την αναπαράσταση ενός μικρού χώρου συγκριτικά με εκείνον του σχολείου τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΑΝΑΛΥΣΗ

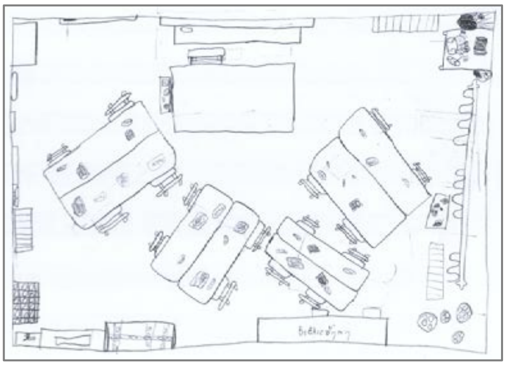
Στη συνάντηση κατά τη διάρκεια της οποίας είχαμε προγραμματίσει την ενασχόληση των μαθητών με το σχεδιασμό της κάτοψης της αίθουσάς τους, εξηγήσαμε στα παιδιά τους τρόπους με τους οποίους η εν λόγω δραστηριότητα θα εξυπηρετούσε τον κεντρικό στόχο της συνεργασίας μας, δηλαδή τη δημιουργία μιας ψηφιακής, πολυμεσικής ξενάγησης στους χώρους του σχολείου τους. Όπως υποστηρίζουν οι Liben, Moore και Golbeck (1982), τα παιδιά από την προσχολική ηλικία έχουν περισσότερη γνώση για ιδιαιτέρα οικείους χώρους, όπως η αίθουσα όπου κάνουν μάθημα, από αυτήν που κατορθώνουν να επιδείξουν σε αναπαραστατικές προκλήσεις όπως είναι ο σχεδιασμός του χώρου στο χαρτί ή η κατασκευή μοντέλων υπό κλίμακα. Περιμέναμε λοιπόν ότι οι μαθητές των δύο τμημάτων της έκτης θα μπορούσαν να ανταπεξέλθουν με σχετική ακρίβεια στην αποτύπωση της κάτοψης της αίθουσάς τους.

Οι μαθητές και των δύο τμημάτων, ελλείψει προηγούμενων εμπειριών κατασκευής χαρτών, δεν γνώριζαν τι είναι η κάτοψη ενός χώρου. Η μεταφορά που χρησιμοποιήσαμε για να εξηγήσουμε την έννοια της κάτοψης στα παιδιά, της κατασκευής δηλαδή ενός χάρτη με γωνία θέασης 90^o, ήταν αυτή της ματιάς ενός πουλιού (bird's eye view) που πετά πάνω από την περιοχή που θέλουμε να αναπαραστήσουμε. Τα παιδιά γρήγορα προσέθεσαν στη δική μας μεταφορά τις δικές τους εμπειρίες από τους ψηφιακούς χάρτες της Google, παρομοιάζοντας μάλιστα το πουλί της δικής μας μεταφοράς με το ανθρωπάκι της επιλογής street view. Παρά την οικειότητά τους προς το περιβάλλον των ψηφιακών χαρτών, ορισμένα από αυτά 'εγκλωβίστηκαν' στις προηγούμενες μεταφορές μη μπορώντας να αντιληφθούν πώς το ανθρωπάκι θα μπορούσε να δει κάτω από τα κεραμίδια της σκεπής του σχολείου.

Μετά από αυτή την εισαγωγική συζήτηση, μοιράσαμε στους μαθητές φωτοτυπίες από την αντίστοιχη προσπάθεια των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα του Watt (1998). Αφού μελέτησαν τα σχέδια, συζητήσαμε για τα στοιχεία της αίθουσας που επέλεξαν να αναπαραστήσουν οι μαθητές εκείνης της έρευνας. Σε αυτή τη φάση της συνεργασίας μας με τα δύο τμήματα δεν διερευνήσαμε τις αντιλήψεις τους για την κλίμακα, τους λόγους και τις αναλογίες, έννοιες με τις οποίες βάσει του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών είχαν ήδη ασχοληθεί. Η διάταξη των θρανίων στο ΣΤ1 τμήμα ήταν η συνήθης μετωπική διάταξη σε σειρές, ενώ στο ΣΤ2 η επίσης συνήθης σε ομάδες που δεν προκαταβάλλει ότι τα παιδιά εργάζονται ομαδικά. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε τέσσερις ολιγομελείς ομάδες σε κάθε τάξη για δύο σχεδόν διδακτικές ώρες, με κάθε ομάδα να κατασκευάζει και να επιμελείται ένα σχέδιο. Στις Εικόνες 1 και 2 που ακολουθούν φαίνονται χαρακτηριστικά παραδείγματα από την αναπαράσταση της κάτοψης των δύο αιθουσών από τα παιδιά.



Εικόνα 1. Σκαρίφημα της αίθουσας του ΣΤ1



Εικόνα 2. Σκαρίφημα της αίθουσας του ΣΤ2

Η συμμετρική ως ένα βαθμό διάταξη των θρανίων σε σειρές φάνηκε να βοήθησε τους μαθητές του ΣΤ1 στο σχεδιασμό της κάτοψης της τάξης τους, ενώ αντίθετα, η ασύμμετρη ομαδική διάταξη των θρανίων στην αίθουσα του ΣΤ2, φάνηκε ότι δυσκόλεψε τους αντιστοιχους μαθητές. Αυτή η παρατήρηση φαίνεται να συμφωνεί με τα ερευνητικά αποτελέσματα με παιδιά προσχολικής ηλικίας. Τα παιδιά, έχοντας μελετήσει χάρτες οικείων για αυτά χώρων στους οποίους είχε αποτυπωθεί ένας συγκεκριμένος σχηματισμός επίπλων, έπρεπε να ανακατασκευάσουν το δωμάτιο χρησιμοποιώντας φυσικά αντικείμενα (Uttal, 1996). Οι προσπάθειες των παιδιών για συμμετρικούς σχηματισμούς των επίπλων ήταν χαρακτηριστικά πιο πετυχημένες από ότι για τους μη συμμετρικούς σχηματισμούς.

Τα παιδιά έδειξαν να συγχέουν τη γωνία θέασης του σχεδίου τους. Στην Εικόνα 1 συγκεκριμένα, συνυπάρχουν τρεις γωνίες θέασης. Ο πίνακας, τα καλοριφέρ και διάφορα ερμάρια που εφάπτονται σε τοίχους της αίθουσας είναι σχεδιασμένα με γωνία 90^o. Μια ντουλάπα, η βιβλιοθήκη (κάτω και πάνω αριστερή γωνία αντιστοίχως), η πόρτα (πάνω δεξιά γωνία, με γαλάζιο χρώμα της οποίας φαίνονται οι τρεις μακρόστενες γυάλινες επιφάνειες), καθώς και τα ανθοδοχεία (κάτω δεξιά γωνία) είναι σχεδιασμένα με γωνία 0^o. Τέλος, τα θρανία και ο καρέκλες είναι σχεδιασμένες με γωνία 45^o.

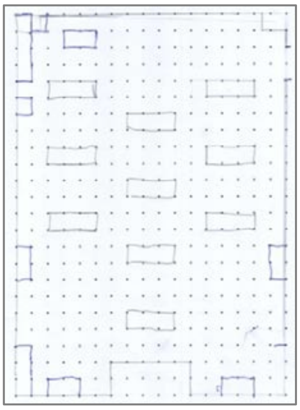
Εκτός από τη γωνία θέασης, ένα άλλο στοιχείο που φάνηκε ότι προβλημάτισε τα παιδιά ήταν οι τοποθεσίες των επίπλων. Στο σχέδιο της

Εικόνας 1 για παράδειγμα, η ομάδα επέλεξε να αποτυπώσει τις δύο κάθετα τεμνόμενες γραμμές του μωσαϊκού της αίθουσας, ωστόσο δε βοήθησε στην ακρίβεια αποτύπωσης, καθώς όπως φάνηκε μάλλον τυχαία χρησιμοποιήθηκε. Το γεγονός ότι η διάταξη των θρανίων και άλλων στοιχείων της αίθουσας προβλημάτισε τα παιδιά φαίνεται στην Εικόνα 2. Ο ιδιοσυγκρασιακός ή και τυχαίος τρόπος διάταξης των στοιχείων της αίθουσας φαίνεται από τις αποστάσεις μεταξύ των θρανίων τους όπως και από τους τοίχους, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις δεν επιτρέπει την κίνηση γύρω από αυτά.

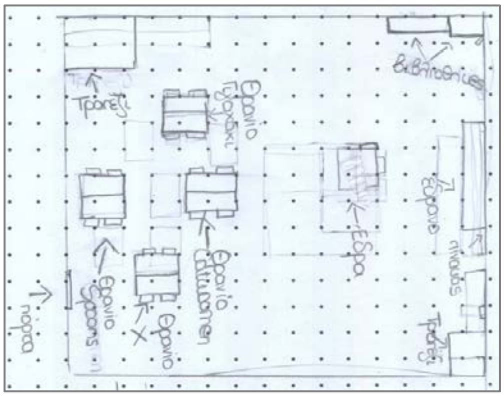
Τέλος, από τα σχέδια των παιδιών είναι σαφές ότι οι μαθητές δεν έλαβαν υπόψιν την απόσταση θέασης. Εκτός από δύο περιπτώσεις, οι χάρτες των παιδιών κατέλαβαν σχεδόν όλη την επιφάνεια μιας σελίδας διαστάσεων Α4. Η επιλογή αυτή προσέδωσε στις αναπαραστάσεις σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ενώ στην πραγματικότητα το σχήμα των αιθουσών πλησίαζε σε αυτό του τετραγώνου. Επίσης, η σχέση μεταξύ των διαστάσεων των στοιχείων του σχεδίου τους δεν φάνηκε να τους απασχόλησε, καθώς σε όλα τα σχέδια οι διαστάσεις των θρανίων είναι δυσανάλογες με εκείνες της έδρας της δασκάλας και φυσικά με τις πραγματικές διαστάσεις των αιθουσών.

Όταν ολοκληρώθηκε αυτή η φάση της συνεργασίας μας με τα παιδιά, συζητήσαμε κατά τη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας τα σχέδια που είχαν κατασκευάσει εστιάζοντας στα σημεία που σχετίζονταν με την απόσταση και τη γωνία θέασης. Ακολούθως, συγκρίναμε φωτογραφίες που τις είχαμε μεγεθύνει, σμικρύνει ή και παραμορφώσει αλλάζοντας μία από τις διαστάσεις τους. Κατά τη συζήτηση τα παιδιά συνέκριναν τις προηγούμενες καταστάσεις με τις αλλαγές που μπορούμε να επιφέρουμε σε μια εικόνα σε ψηφιακό περιβάλλον αν την ‘τραβήξουμε’ από μια πλευρά ή από μια κορυφή της. Επιπρόσθετα, σε αυτή την φάση, δουλέψαμε με τα παιδιά σε φύλλα εργασίας που περιείχαν έργα αναγνώρισης όμοιων σχημάτων, μεγέθυνσης και σμίκρυνσης ορθογωνίων, ενώ τέλος θυμηθήκαμε με τη βοήθεια των χαρτών που ήταν ανηρτημένοι στις αίθουσες την έννοια της κλίμακας.

Μετά την ενδιάμεση παρέμβαση, ακολούθησε η αποτύπωση της τάξης σε διάστικτο καμβά. Ξεκινήσαμε μετρώντας τις διαστάσεις της τάξης και όλων των στοιχείων που θα ήθελαν να παρουσιάσουν στο νέο τους σχέδιο. Τα παιδιά αυθόρμητα μετρούσαν και το ύψος ορισμένων ογκωδών επίπλων της αίθουσας, όπως των βιβλιοθηκών, και μετά από υπενθυμήσεις μας για τη γωνία θέασης, τα παιδιά συνειδητοποίησαν ότι δεν θα τους χρειαζόταν η τρίτη διάσταση. Έχοντας πλέον όλες τις μετρήσεις, συζητήσαμε για την κλίμακα που έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε. Οι αρχικές εκτιμήσεις των παιδιών, επηρεασμένες από τις κλίμακες που συναντούμε σε χάρτες, ήταν 1:10.000 ή ένα 1:1.000.000. Μετά από νοερούς υπολογισμούς και με τη βοήθειά μας, οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι θα χρειαζόντουσαν μικρότερη κλίμακα αφού η περιοχή που θέλαμε να αποτυπώσουμε ήταν και αυτή μικρή σε διαστάσεις. Αφού κατέληξαν στην κλίμακα 1:50, μετέτρεψαν όλες τις μετρήσεις και ξεκίνησαν τις νέες κατόψεις των αιθουσών. Η φάση αυτή διήρκεσε 3 περίπου διδακτικές ώρες. Χαρακτηριστικά παραδείγματα από τις προσπάθειες των μαθητών φαίνονται στις επόμενες εικόνες.



Εικόνα 3. Κάτοψη της αίθουσας του ΣΤ1



Εικόνα 4. Κάτοψη της αίθουσας του ΣΤ2

Οι δυσκολίες που είχαν συναντήσει και τα δύο τμήματα με τη γωνία θέασης που απαιτεί ο σχεδιασμός της κάτοψης της αίθουσάς τους δεν εκδηλώθηκαν σε αυτήν τη δεύτερη προσπάθεια. Παρέμειναν όμως οι δυσκολίες τοποθέτησης των θρανίων στην επιφάνεια των αιθουσών. Πιο συγκεκριμένα, παρότι τα παιδιά είχαν μετρήσει τις αποστάσεις μεταξύ των θρανίων, όπως και από σημεία αναφοράς (τοίχοι, γραφείο δασκάλας, πόρτα εισόδου), δεν πέτυχαν να αποτυπώσουν αυτές τις πληροφορίες (κατά μία έννοια καρτεσιανές συντεταγμένες) στα σχέδιο τους. Βασικός λόγος ήταν η προσπάθειά τους να ταιριάξουν τις αναπαραστάσεις των επίπλων, κυρίως των θρανίων, με τις κουκκίδες του πλέγματος, καταλήγοντας να στρογγυλοποιήσουν τις διαστάσεις ώστε να ακολουθήσουν τις νοητές οριζόντιες ή κατακόρυφες γραμμές που διέρχονται από τις κουκκίδες. Οι συνεχείς στρογγυλοποιήσεις των μετρήσεων κατά το σχεδιασμό των στοιχείων των αιθουσών οδήγησαν σε αντιφάσεις που αφορούσαν στο μέγεθος των στοιχείων. Τα παιδιά στο τελικό αποτέλεσμα, δέχθηκαν δέχθηκαν ότι κατά το σχεδιασμό μιας κάτοψης θα μπορούσε κανείς να μην χρησιμοποιήσει την ίδια κλίμακα για όλα τα στοιχεία της.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάπτυξη χωρικών εννοιών δεν είναι αυτονόητη ούτε εξελίσσεται από μόνη της ή με βάση την ηλικιακή ωρίμανση (Τζεκάκη, 2015). Παρά το ελπιδοφόρο ξεκίνημα όσον αφορά στην κατασκευή νοήματος που σχετίζεται με τη χρήση χαρτών κατά την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, τα μεγαλύτερα παιδιά στο δημοτικό σχολείο ή ακόμη και οι ενήλικοι επιδεικνύουν μια αφελή χαρτογραφική ματιά (Liben & Downs, 1997). Τα αναλυτικά προγράμματα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση προσφέρουν λιγοστές και διάσπαρτες γνώσεις, ενώ δεν επιτυγχάνουν τη σύνδεση των δεξιοτήτων που σχετίζονται με την ανάγνωση και την κατασκευή χαρτών με το πρόγραμμα σπουδών των σχολικών αντικειμένων και ιδιαίτερα των μαθηματικών (Muir & Cheek, 1986). Όπως φάνηκε από την ανάλυση των έργων τους, οι μαθητές της έκτης τάξης που συμμετείχαν στην έρευνα δεν κατόρθωσαν να ενσωματώσουν με επιτυχία τις γνώσεις τους από τα μαθηματικά και την τεχνολογία στην κατασκευή κατόψεων των αιθουσών όπου έκαναν μάθημα. Οι δυσκολίες που συνάντησαν αφορούσαν στη γωνία και την απόσταση θέασης των χαρτών τους, με αποκορύφωμα ίσως την αντίληψη για τη δυνατότητα χρήσης διαφορετικών κλιμάκων για στοιχεία του ίδιου χώρου, ενώ η χρήση πλεγμάτων και συντεταγμένων αποτέλεσε για αυτούς τη μεγαλύτερη πρόκληση.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ τη Γεωργία Μπαμπάτσικου, τη Ρωξάνθη Νίκου και την Νίκη Πέτση για την πολύτιμη βοήθεια τους στη διεξαγωγή της έρευνας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Hansen, V. L. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 235-242). Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Liben, L. S. & Downs, R. M. (1997). Can-ism and can'tianism: a straw child. *Annals of the Association of American Geographers*, *87*(1), 159-167.

Liben, L. S., Moore, M. L. & Golbeck, S. L. (1982). Preschoolers' Knowledge of Their Classroom Environment: Evidence from Small-Scale and Life-Size Spatial Tasks. *Child Development*, *53*(5), 1275-1284.

Liben, L. S. and Myers, L. J. (2007). Developmental Changes in Children's Understanding of Maps: What, When, and How? In J. M. Plumert & J. P. Spencer (Eds.), *The Emerging Spatial Mind* (pp. 193-218). New York: Oxford University Press.

Muir, P. S. & Cheek, H. N. (1986). Mathematics and the map skill curriculum. *School Science and Mathematics*, *86*(4): 284-291.

Newcombe, N. S., Uttal, D. H. & Sauter, M. (2013). Spatial development. In P. Zelazo (Ed.), *Oxford Handbook of Developmental Psychology, Vol. 1: Body and Mind* (pp. 564-590). New York: Oxford University Press.

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education: Research Learning Trajectories for Young Children*. New York: Routledge.

Sarama, J. Clements, D. S., Swaminathan, S., McMillen, S. & González Gómez, R. M. (2003). Development of Mathematical Concepts of Two-Dimensional Space in Grid Environments: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 21*(3), 285–324.

Τζεκάκη, Μ. (2015). Η αντίληψη του χώρου στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο Γερμανός, Δ., Λιάπη, Μ. (επιμ.) (2015). Ηλεκτρονικός τόμος Πρακτικών του Συμποσίου με Διεθνή Συμμετοχή: *Τόποι για Εμπειρίες Μάθησης. Έρευνα, Δημιουργία, Αλλαγή* (Θεσσαλονίκη, 9-10 Ιανουαρίου 2015) (pp. 138-146). Αθήνα: Εθνικό Κέντρο Τεκμηρίωσης.

Uttal, D. H. (1996). Angles and distances: children's and adults' reconstruction and sealing of spatial configurations. *Child Development*, 67, 2763-2779.

Watt, D. L. (1998). Mapping the classroom using a CAD program: geometry as applied mathematics. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 419-438). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, D. (2010). *Rethinking the Power of Maps*. New York: The Guilford Press.

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΟΤΑΝ ΑΝΑΣΚΕΥΑΖΟΥΝ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου & Βασιλική Σπηλιωτοπούλου
Παιδαγωγικό Τμήμα, Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε. Παράρτημα Πάτρας[19]
chrtriantafillou@gmail.com & spiliot@otenet.gr

Η εργασία διερευνά το πώς 42 εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (21 μαθηματικοί και 21 φυσικοί/μηχανικοί) περιγράφουν τις διδακτικές τους ενέργειες για να αντιμετωπίσουν δυο καταγεγραμμένες εναλλακτικές αντιλήψεις φοιτητών σχετικές με την έννοια της περιοδικότητας. Αν και ένα ποσοστό εκπαιδευτικών αποφεύγει να αποκαλύψει τις ενέργειές του, τέσσερα είδη πρακτικών αιτιολόγησης αποκαλύπτουν τον επιχειρηματολογικό λόγο των ομάδων των εκπαιδευτικών που μελετήθηκαν: Χρήση παραδειγμάτων/αντιπαραδειγμάτων, σύνδεση της πραγματικής κίνησης και της μαθηματικής της αναπαράστασης, ερμηνεία/σύγκριση μαθηματικών αναπαραστάσεων και αξιοποίηση ορισμών. Δεν καταγράφηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα σε μαθηματικούς και φυσικούς/ μηχανικούς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία έχει ως επίκεντρο την έννοια της περιοδικότητας και τη διαχείριση δύο καταγεγραμμένων εναλλακτικών αντιλήψεων των φοιτητών από τους εκπαιδευτικούς. Αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας τριών φάσεων, η οποία έχει στόχο τη διαμόρφωση μιας ευρείας θεώρησης του τρόπου που η έννοια της περιοδικότητας διδάσκεται και χρησιμοποιείται στη σχολική τάξη. Η έννοια της περιοδικότητας αποτελεί ένα σημαντικό εννοιολογικό πεδίο τόσο σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς διαπερνά διαφορετικές θεματικές περιοχές και γνωστικά αντικείμενα, όσο και σε επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης διότι τη συναντάμε στα επιστημονικά πεδία των Μαθηματικών, των Φυσικών επιστημών και των Εφαρμοσμένων Τεχνολογικών Επιστημών.

Στην πρώτη φάση του ερευνητικού σχεδίου αναλύσαμε ελληνικά σχολικά βιβλία των μαθηματικών, των φυσικών επιστημών (φυσικής, αστρονομίας) και των εφαρμοσμένων τεχνολογικών επιστημών (ηλεκτροτεχνίας) και μελετήσαμε τους συλλογισμούς των σχετικών κειμένων (Triantafillou, Spiliotopoulou & Potari, 2015). Στη δεύτερη φάση μελετήσαμε μέσα από τις

[19] Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της ερευνητικής πρότασης που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της Δράσης «Ενίσχυση Μεταδιδακτόρων Ερευνητών/τριών» του ΕΠΕΔΒΜ με Δικαιούχο τη ΓΓΕΤ και συγχρηματοδοτήθηκε από το ΕΚΤ και από Εθνικούς Πόρους.

απαντήσεις φοιτητών, που έχουν ολοκληρώσει τη φοίτησή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, πως αντιλαμβάνονται την έννοια της περιοδικότητας και τις αναπαραστάσεις της (Triantafillou, Spiliotopoulou & Potari, 2014). Στην τρίτη φάση εστιάσαμε το ερευνητικό μας ενδιαφέρον στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών που διδάσκουν πτυχές της έννοιας στη β/θμια εκπαίδευση. Δεδομένα από την τρίτη ερευνητική φάση παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία.

Παρότι η έννοια της περιοδικότητας αποτελεί αντικείμενο πολλών θεματικών ενοτήτων στο πρόγραμμα σπουδών, είναι περιορισμένες οι έρευνες που εστιάζουν στην κατανόησή της, ενώ ταυτόχρονα απουσιάζουν έρευνες αναφορικά με τις σχετικές διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών. Η δυσκολία των μαθητών να συνδέσουν τον αναλυτικό ορισμό της περιοδικής συνάρτησης με τις εφαρμογές της σε μη μαθηματικά πλαίσια έχει επισημανθεί (Kynigos & Gavrilis, 2006), ενώ έχει αναδειχθεί η δυσκολία αναγνώρισης διαφορών ανάμεσα σε περιοδικές συμπεριφορές και σε επαναλαμβανόμενες αλλά μη περιοδικές συμπεριφορές φαινομένων (Buendia & Cordero, 2005).

Οι διδακτικές πρακτικές και η συλλογιστική των εκπαιδευτικών αναφορικά με την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών σε σχέση με την έννοια της περιοδικότητας είναι, επομένως, κρίσιμα θέματα και αξίζει να μελετηθούν. Στην παρούσα εργασία σκοπό έχουμε να διερευνήσουμε τις διδακτικές ενέργειες που προτείνουν εκπαιδευτικοί δ/θμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι διδάσκουν θέματα περιοδικότητας, όταν χρειάζεται να αναθεωρήσουν δύο καταγεγραμμένες εναλλακτικές αντιλήψεις φοιτητών. Οι αντιλήψεις αυτές αφορούν τον ιδιαίτερο τρόπο τεκμηρίωσης ότι μια επαναλαμβανόμενη κίνηση είναι απαραίτητα και περιοδική.

Πιο συγκεκριμένα τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι τα ακόλουθα:

- Με ποιο τρόπο οι εκπαιδευτικοί περιγράφουν το πώς θα ανασκεύαζαν τους συλλογισμούς των φοιτητών αν προέκυπταν στην τάξη τους; Ποια είναι τα επιχειρήματά τους για τις ενέργειες που περιγράφουν;
- Υπάρχουν διαφορές στις πρακτικές αιτιολόγησης των μαθηματικών (Μ) και των εκπαιδευτικών που διδάσκουν φυσικές επιστήμες και εφαρμοσμένες τεχνολογικές επιστήμες (ΦΕΤ);

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Τα Μαθηματικά, οι Φυσικές και οι Εφαρμοσμένες Επιστήμες παρότι είναι διαφορετικά επιστημονικά πεδία μοιράζονται κοινές έννοιες όπως η έννοια της περιοδικότητας αλλά και κοινές αναπαραστάσεις της. Για παράδειγμα, η ημιτονοειδής καμπύλη περιγράφει την απλή αρμονική ταλάντωση στη Φυσική και την ένταση του εναλλασσόμενου ηλεκτρικού ρεύματος στην Ηλεκτροτεχνία. Επιπρόσθετα, τα Μαθηματικά και οι Φυσικές Επιστήμες μοιράζονται και κοινούς διδακτικούς στόχους όπως το να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αναπτύξουν δεξιότητες επιστημονικού συλλογισμού ή να κατανοήσουν με ποιο τρόπο ένας επιστημονικός ισχυρισμός επιβεβαιώνεται ή αναιρείται (Oehrtman & Lawson, 2008).

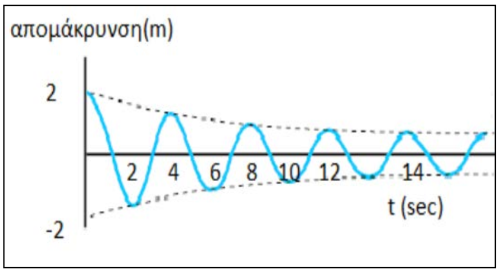
Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης μια σειρά ερευνών εστιάζει στο είδος της αιτιολόγησης που αναπτύσσουν οι εκπαιδευτικοί όταν χρειάζεται να ανασκευάσουν λανθασμένους συλλογισμούς των μαθητών. Για παράδειγμα, στην έρευνα των Potari, Zachariades και Zazlavsky (2010) οι εκπαιδευτικοί επέλεξαν είτε να χρησιμοποιήσουν γνωστά θεωρήματα είτε αντιπαραδείγματα για να αναθεωρήσουν τον λανθασμένο ισχυρισμό των μαθητών. Επιπλέον, στην έρευνα των Tabach et al. (2010) οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί σε μεγάλο βαθμό θεώρησαν λεκτικές ή πλαισιωμένες αιτιολογήσεις των μαθητών (όπως η χρήση παραδειγμάτων) ως ακατάλληλες διότι στερούνται γενίκευσης. Οι ερευνητές θεωρούν μια τέτοια αντίληψη προβληματική, καθώς έτσι περιορίζεται η ανάπτυξη επιχειρηματολογικού λόγου των μαθητών. Συμμεριζόμαστε την άποψή τους και θεωρούμε ότι η αξιολόγηση και η ανασκευή πλαισιωμένων αιτιολογήσεων ή συλλογισμών των μαθητών αποτελεί βασική πρακτική για τους εκπαιδευτικούς όλων των ειδικοτήτων.

Ταυτόχρονα, υιοθετούμε την άποψη ότι οι αναπαραστάσεις μιας έννοιας (μαθηματικές εκφράσεις, διαγράμματα, εικόνες) είναι κοινωνικό - πολιτισμικά εργαλεία που εκφράζουν σε συμπυκνωμένη μορφή επιστημονικά πρότυπα γνώσης (Pea, 1993). Αυτός ο πλαισιωμένος ανά επιστημονικό πεδίο χαρακτήρας των αναπαραστάσεων πιθανόν δημιουργεί δυσκολίες στο να αποκτήσουν οι μαθητές ή φοιτητές ολοκληρωμένη αντίληψη μιας έννοιας. Το ζήτημα αυτό διερευνούμε στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, κατά τη δεύτερη ερευνητική φάση διαπιστώσαμε ότι η μορφή ενός γραφήματος που αναπαριστά μια φθίνουσα ταλάντωση θεωρήθηκε από την πλειοψηφία προπτυχιακών φοιτητών Πανεπιστημιακών και Τεχνολογικών Ιδρυμάτων ως περιοδική κίνηση. Αυτή η αντίληψη είναι κρίσιμη για την κατανόηση της έννοιας της περιοδικότητας. Πώς όμως οι εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν μια τέτοια δυσκολία των μαθητών και πώς κατά τη γνώμη τους θα την διαχειρίζονταν αν προέκυπτε στην τάξη τους;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πλαίσιο της έρευνας και οι συμμετέχοντες

Το δείγμα της έρευνας είναι 42 εκπαιδευτικοί δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται σε Γυμνάσια, Γενικά και Επαγγελματικά Λύκεια της χώρας. Από τους συμμετέχοντες 21 είναι μαθηματικοί (Μ) και 21 εκπαιδευτικοί των φυσικών επιστημών και των εφαρμοσμένων τεχνολογικών επιστημών (ΦΕΤ). Στους συμμετέχοντες δόθηκε ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις ανοικτού τύπου που αφορούσαν την καταγραφή των πρακτικών τους όταν διδάσκουν την έννοια της περιοδικότητας. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε ένα μέρος του ερευνητικού μας έργου. Συγκεκριμένα, από τους εκπαιδευτικούς ζητήθηκε να αξιολογήσουν την εγκυρότητα δύο απαντήσεων προπτυχιακών φοιτητών Πανεπιστημιακών και Τεχνολογικών Ιδρυμάτων και να ανασκευάσουν τις εναλλακτικές αντιλήψεις τους αν αυτές προέκυπταν από μαθητές τους, αιτιολογώντας τη θέση τους με κάποιο τρόπο.

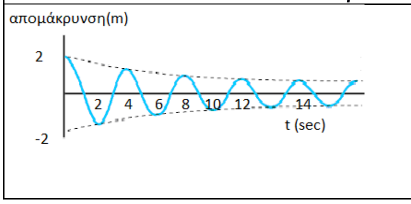


Εικόνα 1: Το γράφημα επαναλαμβανομένης μη περιοδικής κίνησης

Το γράφημα (Εικ. 1) που είχε δοθεί στους προπτυχιακούς φοιτητές αφορούσε την αναπαράσταση μιας φθίνουσας ταλάντωσης, δηλ. επαναλαμβανομένης, αλλά μη περιοδικής, κίνησης. Το γράφημα περιέχεται στο σχολικό βιβλίο Φυσικής Γ΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης. Ένα από τα ευρήματά μας ήταν ότι οι 7 στους 10 προπτυχιακοί φοιτητές θεώρησαν ότι το γράφημα αναπαριστά περιοδική κίνηση τεκμηριώνοντας παράλληλα αυτόν τον ισχυρισμό τους με κάποιο τρόπο. Δύο χαρακτηριστικές εναλλακτικές αιτιολογήσεις των φοιτητών ήταν οι εξής: Απ.1 *«Είναι περιοδική κίνηση διότι αναπαριστά την κίνηση της κούνιας»* και Απ. 2: *«είναι περιοδική κίνηση διότι κάθε ημιτονοειδής καμπύλη είναι περιοδική»*. Επιλέξαμε αυτές τις δύο απαντήσεις των φοιτητών διότι αναφέρονται σε δύο βασικές πτυχές της έννοιας που φαίνεται να αποτελούν την αφετηρία γνωστικών και επιστημολογικών αντιφάσεων ανάμεσα στα μαθηματικά και τη φυσική. Πιο συγκεκριμένα, η κίνηση της κούνιας παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας ως γενεσιουργό παράδειγμα του ορισμού της περιοδικής συνάρτησης. Στη φυσική παρόλα αυτά η κίνηση της κούνιας αποτελεί συνήθως παράδειγμα φθίνουσας ταλάντωσης. Ταυτόχρονα η ημιτονοειδής καμπύλη αποτελεί τη βασική αναπαράσταση της έννοιας στα σχολικά κείμενα. Συγκεκριμένα, το 20% των αναπαραστάσεων σε θεματικές ενότητες σχολικών βιβλίων μαθηματικών και φυσικής σχετικές με την έννοια της περιοδικότητας είναι γραφικές παραστάσεις ημιτονοειδών συναρτήσεων (Spiliotopoulou & Triantafillou, 2014).

Το υπό διερεύνηση γράφημα είναι της μορφής $f(x) = e^{-x}\sin(x)$ στο οποίο εμπλέκεται η ημιτονοειδής συνάρτηση αλλά χωρίς να διατηρεί τα περιοδικά χαρακτηριστικά της. Από τους εκπαιδευτικούς ζητήθηκε όχι μόνο να αξιολογήσουν την (υποτιθέμενη) αντίληψη των μαθητών τους, αλλά και να επιχειρηματολογήσουν για την αντιμετώπιση της ορθότητας ή μη ορθότητάς της. Παραθέτουμε το ερευνητικό έργο σε μορφή υποθετικού σεναρίου που απευθύναμε στους εκπαιδευτικούς.

Η παρακάτω δραστηριότητα δόθηκε σε προπτυχιακούς φοιτητές Πανεπιστημιακών και Τεχνολογικών ιδρυμάτων. Η δραστηριότητα βασίζεται στην ερμηνεία οπτικών αναπαραστάσεων σχολικών κειμένων και συνεπώς θα μπορούσε να είχε δοθεί και σε μαθητές Β/θμιας Εκπαίδευσης.

Η δραστηριότητα που δόθηκε στους φοιτητές	
 	Το γράφημα απεικονίζει τη χρονική απομάκρυνση ενός σώματος από ένα σημείο εκκίνησης.. Θεωρείτε ότι το γράφημα απεικονίζει περιοδική κίνηση; Δικαιολογείστε την άποψή σας.

Παρατίθενται δύο χαρακτηριστικές απαντήσεις των συμμετεχόντων στην έρευνα.

(ΑΠ1-κούνια)	(ΑΠ2-ημχ)
«Είναι περιοδική κίνηση διότι αναπαριστά την κίνηση της κούνιας»	«Είναι περιοδική κίνηση διότι κάθε ημιτονοειδής συνάρτηση είναι περιοδική»

Περιγράψτε σύντομα πώς θα διαχειριζόσασταν τις απαντήσεις αυτές αν προέκυπταν στην τάξη σας.

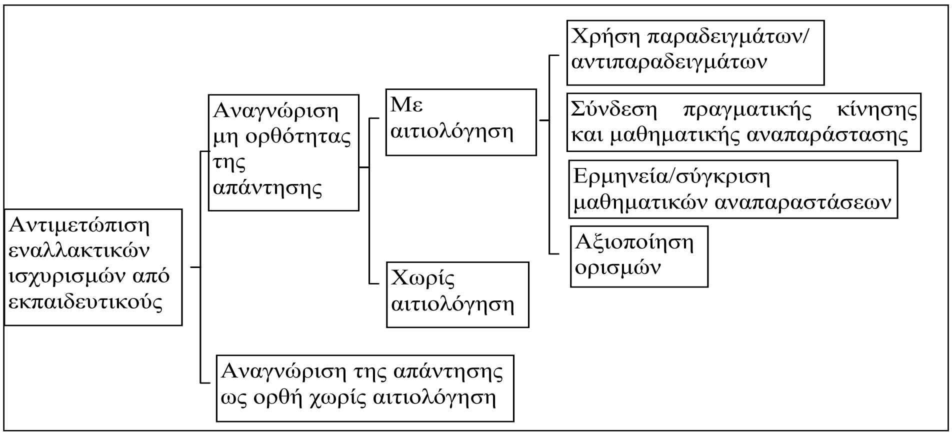
Οι γραπτές απαντήσεις των εκπαιδευτικών αποτελούν το αντικείμενο της παρούσας ανάλυσης.

Ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων

Για την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών υιοθετήθηκε η ποιοτική επαγωγική ανάλυση περιεχομένου (Mayring, 2000). Οι απαντήσεις όλων των εκπαιδευτικών αρχικά αναλύθηκαν ξεχωριστά για κάθε απάντηση (Απ1-κούνια και Απ2-ημχ) και στη συνέχεια αναζητήθηκαν παραλληλισμοί ανάμεσα στις δυο απαντήσεις. Ο κύριος στόχος μας δεν ήταν να εξετάσουμε την εγκυρότητα των αιτιολογήσεων των εκπαιδευτικών, αλλά να αναλύσουμε τις πρακτικές αιτιολόγησης αλλά και τις διδακτικές ιδέες που υιοθέτησαν για να ανασκευάσουν την αντίληψη που εκφράζει κάθε απάντηση. Οι κατηγορίες που προέκυψαν είναι κοινές και για τις δυο περιπτώσεις απαντήσεων και παρουσιάζονται με τη μορφή του συστημικού δικτύου στο Σχήμα 1. Με βάση το δίκτυο προχωρήσαμε και στην ποσοτική ανάλυση των δεδομένων μας. Τέλος, χρησιμοποιήσαμε στατιστικούς ελέγχους (έλεγχος καλής προσαρμογής χ^2, μη παραμετρικός έλεγχος Mann-Witney U test) για να ανιχνεύσουμε αν οι διαφορές στον τρόπο αιτιολόγησης των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά (Μ) και των εκπαιδευτικών των φυσικών επιστημών και των εφαρμοσμένων τεχνολογικών επιστημών (ΦΕΤ) είναι στατιστικά σημαντικές.

ΕΥΡΗΜΑΤΑ

Οι δυο αρχικές κατηγορίες (Σχ. 1) προέκυψαν από απαντήσεις όπου οι εκπαιδευτικοί αναγνωρίζουν την απάντηση ως ορθή, και από αυτές που αναγνωρίζουν την μη ορθότητα της απάντησης.



Σχήμα 1: Το συστημικό δίκτυο (Bliss, Monk & Ogborn, 1983).

Στην πρώτη κατηγορία οι συμμετέχοντες δεν προχώρησαν σε περαιτέρω αιτιολόγηση της θέσης τους. Στη δεύτερη κατηγορία κάποιοι αιτιολόγησαν τον ισχυρισμό τους και κάποιοι όχι. Σε αυτούς που αιτιολόγησαν τον ισχυρισμό τους διακρίναμε τις εξής υποκατηγορίες: *Χρήση παραδειγμάτων / αντιπαραδειγμάτων, σύνδεση πραγματικής κίνησης και της μαθηματικής της αναπαράστασης, ερμηνεία/σύγκριση μαθηματικών αναπαραστάσεων* και *αξιοποίηση ορισμών* όπως αυτοί παρουσιάζονται στα σχολικά κείμενα.

Από την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν τα αποτελέσματα για το σύνολο των εκπαιδευτικών που καταγράφονται στον Πίνακα 1. Συγκεκριμένα, ένα μικρό ποσοστό συμμετεχόντων θεώρησε την κάθε απάντηση ως ορθή (7% και 11%). Επίσης, ένα μικρό ποσοστό εκπαιδευτικών (10% και 7%) θεώρησαν την κάθε απάντηση ως μη ορθή αλλά χωρίς αιτιολόγηση. Χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι: ΑΠ1: «Δεν συγχέουμε το παράδειγμα με τον ορισμό» (Μ). ΑΠ2: «Δεν έχουμε ορίσει με αυτό τον τρόπο την ημιτονοειδή συνάρτηση» (ΦΕΤ). Υπάρχουν όμως εκπαιδευτικοί που αναπτύσσουν τα επιχειρήματά τους περιγράφοντας τις διδακτικές τους ενέργειες. Συγκεκριμένα, περίπου το 83% των συμμετεχόντων επέλεξαν να αιτιολογήσουν τη θέση τους για την μη ορθότητα των (υποτιθέμενων) δύο εναλλακτικών αντιλήψεων (Απ1-κούνια και Απ2-ημx) των μαθητών τους. Από αυτούς το 63% περίπου επέλεξε να ανασκευάσει τις αντιλήψεις των μαθητών ανατρέχοντας στις διδακτικές ή βιωματικές τους εμπειρίες.

Κατηγορίες			ΑΠ1-κούνια N = 30 (%)	ΑΠ2-ημχ N= 28 (%)
Αναγνώριση της απάντησης ως μη ορθή	Με αιτιολόγηση	Χρήση παραδειγμάτων/ αντιπαραδειγμάτων	23,3	17,9
		Σύνδεση της πραγματικής κίνησης με την μαθ.της αναπαράσταση	26,7	0,0
		Σύγκριση/ερμηνεία μαθημ. αναπαραστάσεων	13,3	43,0
		Αξιοποίηση ορισμών	20,0	21,4
	Χωρίς αιτιολόγηση		10,0	7,1
Αναγνώριση της απάντησης ως ορθή, χωρίς αιτιολόγηση			6,7	10,7

Πίνακας 1: Ποσοστά για κάθε κατηγορία του συστημικού δικτύου

Αναλυτικά, το 23,3% (Απ1) και 17,9% (Απ2) επέλεξε τη *χρήση παραδειγμάτων/αντιπαραδειγμάτων* όπως, για την Απ1: «Εδώ μπορεί να συζητηθεί η κίνηση σε ένα ρολόι εκκρεμές και η κίνηση της κούνιας και να γίνουν συγκρίσεις ώστε οι μαθητές να καταλάβουν ότι η κίνηση δεν είναι περιοδική» (ΦΕΤ) ή για την Απ2: «Θα έδινα αντιπαράδειγμα π.χ. την $\varphi(\chi) = \eta\mu\chi^2$ που είναι ημιτονοειδής συνάρτηση αλλά όχι περιοδική» (Μ). Το 26,7% και αποκλειστικά στην περίπτωση της Απ1 επέλεξαν να αιτιολογήσουν καλώντας τους μαθητές να συνδέσουν *την πραγματική κίνηση της κούνιας και του μαθηματικού της μοντέλου*. Σε αυτή την κατηγορία εντάσσονται οι εξής απαντήσεις: «Στην κίνηση της κούνιας έχουμε τριβές, άρα αυξανομένου του χρόνου αλλάζει το μέγιστο και το ελάχιστο της γραφικής παράστασης άρα δεν είναι περιοδική (Μ) ή «Θα συζητούσα το θέμα της σχέσης του φαινομένου όπως συμβαίνει στη φύση και των μοντέλων που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη τους»(ΦΕΤ). Η τεκμηρίωση μέσω της *σύγκρισης/ερμηνείας μαθηματικών αναπαραστάσεων* (περιοδικών ή μη περιοδικών κινήσεων) κυριάρχησε για την Απ2 (43%) σε σύγκριση με την Απ1 (13,3%). Παραθέτουμε δύο παραδείγματα: Απ1: «εδώ έχουμε γράφημα φθίνουσας ταλάντωσης. Δεν έχουμε επανάληψη του ίδιου ακριβώς μοτίβου, άρα στη συνάρτηση δεν υπάρχει περιοδικότητα» (Μ). Απ2: «Θα ζωγράφιζα ένα τυπικό παράδειγμα ημιτονοειδούς συνάρτησης ώστε να καταλάβουν οι μαθητές το λάθος τους» (ΦΕΤ).

Τέλος, το υπόλοιπο 20% περίπου των συμμετεχόντων υιοθέτησε μια πιο θεωρητική οπτική *αξιοποιώντας ορισμούς της έννοιας* όπως παρουσιάζονται στα σχολικά κείμενα (είτε μαθηματικών είτε φυσικών επιστημών). Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα: Για την ΑΠ1: «θα προσπαθούσα να αποδείξω ότι δεν ισχύει ο ορισμός» (Μ) ή «ας δούμε πάλι τον ορισμό της περιοδικής κίνησης. Ποια είναι η περίοδος; το φαινόμενο επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο;» (ΦΕΤ). Για την ΑΠ2: «η απάντηση είναι λάθος διότι $f(x+T) \neq f(x)$» (Μ).

Ο έλεγχος καλής προσαρμογής χ^2 για την Απ1–κούνια (p-value=0,274) και για την Απ2-ημx (p-value=0,289) για τις ειδικότητες Μαθηματικών (Μ) και Φυσικών/Μηχανικών (ΦΕΤ) δεν έδωσε στατιστικά σημαντικές διαφορές. Το ίδιο συμπέρασμα έδωσε και ο μη παραμετρικός έλεγχος Mann-Witney U test για την Απ1–κούνια (p-value=0,363) και για την Απ2-ημx (p-value=0,223). Είναι γνωστό ότι κάθε γνωστικό αντικείμενο έχει τα δικά του πρότυπα για το τι σημαίνει επιστημονικά αποδεκτή αιτιολόγηση (π.χ. οι φυσικές επιστήμες βασίζονται πιο πολύ στην εμπειρία η οποία ελέγχεται μέσα από το πρίσμα επιστημονικών θεωριών ενώ τα μαθηματικά ακολουθούν έναν αυστηρά παραγωγικό τρόπος τεκμηρίωσης). Αυτές οι διαφορές τους δεν αποτυπώθηκαν στην έρευνά μας. Αντίθετα, οι διδακτικές ενέργειες που υιοθέτησαν οι εκπαιδευτικοί στην περίπτωση ανασκευής μιας εσφαλμένης αντίληψης φάνηκε να στηρίχτηκε περισσότερο στις κοινές παιδαγωγικές τους πρακτικές παρά στις διαφορετικές επιστημονικές τους θεωρήσεις.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία διερευνήσαμε τις διδακτικές ενέργειες και τη συλλογιστική των εκπαιδευτικών που κλήθηκαν να ανασκευάσουν (υποτιθέμενους) εναλλακτικούς τρόπους αντίληψης των μαθητών τους σε σχέση με την έννοια της περιοδικότητας. Ένα μικρό ποσοστό των εκπαιδευτικών δεν έδωσε περαιτέρω περιγραφές των διδακτικών τους ενεργειών για την ορθότητα, ή για τη μη ορθότητα των αντιλήψεων των μαθητών τους. Από αυτούς που αιτιολόγησαν την μη ορθότητα της απάντησης προέκυψαν δύο είδη επιχειρηματολογικού λόγου: Ο πρώτος βασίστηκε στην χρήση παραδειγμάτων/αντιπαραδειγμάτων ή ανέδειξε διαφορές ανάμεσα στην πραγματικότητα και στη μαθηματική της μοντελοποίηση ή κάλεσε τον μαθητή να παρατηρήσει στοιχεία της γραφικής παράστασης (Εικ. 1) τα οποία αναδεικνύουν την μη περιοδικότητά της. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί ανέτρεξαν στην εμπειρία τους (προσωπική ή/και διδακτική). Ο δεύτερος επιχειρηματολογικός λόγος των εκπαιδευτικών βασίστηκε στην αξιοποίηση ορισμών της έννοιας από τα σχολικά κείμενα υιοθετώντας μια πιο θεωρητική οπτική αιτιολόγησης. Σε μεγάλο ποσοστό συναντήσαμε το πρώτο είδος του επιχειρηματολογικού λόγου (περίπου 63%) σε σχέση με τον δεύτερο (περίπου 20%) και για τις δυο καταγεγραμμένες εναλλακτικές αντιλήψεις. Θεωρούμε ότι όσοι επέλεξαν την αξιοποίηση ορισμών ανέδειξαν μεν επιστημολογικής φύσης πτυχές της έννοιας αλλά δεν προσπάθησαν να ανασκευάσουν τη γνωστική αντίφαση των μαθητών που τους οδήγησε στο λανθασμένο ισχυρισμό (π.χ. γιατί η κούνια δεν αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα περιοδικής κίνησης;). Για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι στην περίπτωσή μας η αξιοποίηση ενός ορισμού είναι μεν επιστημονικά ορθός τρόπος τεκμηρίωσης αλλά όχι παιδαγωγικά ολοκληρωμένος.

Επιπλέον, η έρευνα ανέδειξε κοινά στοιχεία στον επιχειρηματολογικό λόγο των εκπαιδευτικών που διδάσκουν συγγενή αλλά διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Όλα τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για να αναλύσουμε τα επιχειρήματα των εκπαιδευτικών δεν αρκεί να λάβουμε υπόψη μας μόνο τις επιστημονικές τους θεωρήσεις αλλά και τις διδακτικές τους αντιλήψεις και τις παιδαγωγικές τους προτεραιότητες (Nardi, Biza & Zachariades, 2012).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bliss, J., Monk, M., & Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for Educational Research. A guide to uses of systemic networks*. Croom Helm, London & Camberra.

Buendia G. & Cordero F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 299– 333.

Kynigos C., & Gavrilis, K. (2006). Constructing a sinusoidal periodic covariation, In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 9-16. Prague, PME.

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis [28 paragraphs]. Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: *Qualitative Social Research*, 1(2), Art. 20, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0002204.

Nardi, E., Biza, I. & Zachariades, T. (2012). ‘Warrant’ revisited: Integrating mathematics teachers’ pedagogical and epistemological considerations into Toulmin’s model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 157–173.

Oehrtman, M., & Lawson, A. E. (2008). Connecting science and mathematics: The nature of proof and disproof in science and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, 377- 403.

Pea, R. D. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions* (pp. 47–87). Cambridge, Cambridge University Press.

Potari, D., Zachariades, T. & Zazlavsky, O., (2010). Mathematics teachers’ reasoning for refuting students’ invalid claims. *Proceedings of the 6th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME*), (pp. 281-290). Lyon, France.

Spiliotopoulou, V. & Triantafillou, C. (2014). Visual Representations of the Concept of Periodicity across Subjects: Their Context and Genre. In C. P. Constantinou, N. Papadouris & A. Hadjigeorgiou (Eds.), *E-Book*

Proceedings of the ESERA 2013 Conference: Science Education Research For Evidence-based Teaching and Coherence in Learning. Part 2, (pp. 334-344) Nicosia, Cyprus: European Science Education Research Association. ISBN: 978-9963-700-77-6.

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tirosh, D. Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2010). Secondary school teachers' awareness of numerical examples as proof. *Research in Mathematics Education*, 12(*2*), 117-131.

Triantafillou, C., Spiliotopoulou, V. & Potari, D. (2014). How undergraduate students make sense out of graphs: the case of periodic motions. In Nicol, C., Oesterle, S., Liljedahl, P., & Allan, D. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* Vol. 5, pp. 273-280. Vancouver, Canada.

Triantafillou, C., Spiliotopoulou, V., & Potari, D. (2015). The Nature of Argumentation in School Mathematics and Physics Texts: The Case of Periodicity. *International Journal in Mathematics and Science Education*, DOI 10.1007/s10763-014-9609-y.

ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΛΥΝΟΥΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Αγγελική Τσαμπουράκη[1], Σόνια Καφούση[2]

[1] 12ο Δημοτικό Σχολείο Κορίνθου, aggelikitsampouraki29@gmail.com

[2]Πανεπιστήμιο Αιγαίου, kafoussi@aegean.gr

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε στοιχεία μιας έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου για τη μαθηματική έννοια του άπειρου. Σύμφωνα με το επίσημο πρόγραμμα σπουδών, οι μαθητές δεν έχουν ασχοληθεί με την έννοια του μαθηματικού άπειρου στη διάρκεια του χρόνου φοίτησής τους, από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τελευταία τάξη του δημοτικού. Σκοπός της έρευνας ήταν η καταγραφή των αντιλήψεών τους για το άπειρο, μέσα από την έκφραση των πεποιθήσεών τους, όπως υποβάλλονται από συνειδητούς ή και υποσυνείδητους κανόνες, ιδέες, γνώσεις, αναπαραστάσεις και ερμηνείες σε έμμεση ή άμεση σχέση με τη μαθηματική τους εμπειρία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το άπειρο υπήρξε πηγή πολλών διαφωνιών μεταξύ των φιλοσόφων και μεταξύ των μαθηματικών σε όλους τους αιώνες, γι’ αυτό κατά καιρούς αναγκάστηκαν να το ‘‘εξορίσουν’’ από τη σκέψη τους για να αποφύγουν τις δυσκολίες και τα παράδοξά του. Το άπειρο απασχολεί συνεχώς το ανθρώπινο πνεύμα και είναι η αιτία αρκετών από τα μαθηματικά σοφίσματα, παράδοξα και αντινομίες, χωρίς να είναι μαθηματικά παράλογα. Υπάρχει η τάση να θεωρείται το άπειρο ως ένας πολύ μεγάλος αριθμός, μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θα μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά, αν θελήσουμε να εμβαθύνουμε στην έννοια του άπειρου, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η διαφορά του από τους πεπερασμένους αριθμούς, δεν είναι μόνο ποσοτική αλλά και ποιοτική (Barrow, 2007). Σύμφωνα με τον Καντ η έννοια του πραγματικού απείρου λειτουργεί θαυμάσια στα πλαίσια του λογισμού μας, επομένως μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο μαθηματικής επεξεργασίας, στα πλαίσια μια γενικής μη-κατασκευαστικής μαθηματικής θεωρίας. Ο Cantor, ως ο δημιουργός της θεωρίας συνόλων, υπέδειξε με το θεώρημά του την ύπαρξη του άπειρου, άλλοτε μετρήσιμου και άλλοτε υπεραριθμήσιμου, προάγοντας τα μαθηματικά από επιστήμη του σχήματος και του αριθμού σε επιστήμη του απείρου.

Σκοπός της έρευνας που πραγματοποιήσαμε ήταν η διερεύνηση και καταγραφή των αντιλήψεων των μαθητών της ΣΤ δημοτικού για το άπειρο. Στα προβλήματα της έρευνας, παρουσιάζοντας μαθηματικά παράδοξες καταστάσεις, μελετήσαμε τη διαισθητική αντίληψη των μαθητών για την έννοια του μαθηματικού άπειρου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τον Monaghan (Monaghan, 1986, βλ. Monaghan, 2001), η διαισθητική αντίληψη βοηθά τους μαθητές να αναγνωρίζουν τη μαθηματική έννοια του άπειρου, πέρα από τις παρανοήσεις που δημιουργεί η εγγενώς αντιφατική και ασταθής αυτή έννοια. Τις γνώσεις των μαθητών, καθώς και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν για την προσέγγιση παρόμοιων ερωτημάτων, υποστηρίζει η κατανόηση των φυσικών αριθμών ως ένα αρχικό εννοιολογικό πλαίσιο, το οποίο ξεκινούν να διαμορφώνουν οι μαθητές πολύ πριν από την είσοδό τους στην τυπική εκπαίδευση. Η μέτρηση, η ύπαρξη του επόμενου αριθμού, η σύγκριση και η διάταξη των φυσικών αριθμών, αποτελούν ένα επεξηγηματικό πλαίσιο επάνω στο οποίο θα ενσωματωθούν, εμπλουτίζοντάς το, όλες οι νέες πληροφορίες για τους αριθμούς, μέχρι την οποιαδήποτε σταδιακή, εννοιολογική αλλαγή. Επιπλέον οι ιδιαίτερες εμπειρίες των μαθητών στο ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο συμμετέχουν καθώς και η προσωπική ερμηνεία των πολλαπλών σχετικών ακουσμάτων, συνθέτουν ένα πλέγμα γνώσεων για τους αριθμούς, ως βάση για κάθε περαιτέρω ανάπτυξη και επηρεάζουν τον τρόπο αντιμετώπισης των μαθηματικών προβλημάτων με τα οποία έρχονται σε επαφή (Καφούση & Χαβιάρης, 2013).

Ο Duval (1983) πραγματοποίησε μια έρευνα σε μαθητές 12-13 ετών, χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων όπως για παράδειγμα το σύνολο Α={1,2,3,4,5,…} των φυσικών αριθμών και το σύνολο Β={1,4,9,16,25,…} των τέλειων τετράγωνων και διαπίστωσε ότι οι αποφάσεις των μαθητών σχετικά με την ισοδυναμία δύο άπειρων συνόλων, επηρεάζονται από τον τρόπο παρουσίασης αυτών των συνόλων (Duval, 1983, βλ.Tsamir, 1999). Η οριζόντια αριθμητική αναπαράσταση (Α={1,2,3,4,5,…}, Β={1,4,9,16,25,…}) ενθάρρυνε το κριτήριο μέρος- όλο, ενώ η κάθετη αριθμητική αναπαράσταση,

(Α={1,2,3, 4, 5,…},
B={1,4,9,16,25,…}) , ενθάρρυνε την ένα προς ένα αντιστοιχία.

Παρόμοια ερωτήματα, σε παιγνιώδη μορφή, έθεσαν σε έρευνα που πραγματοποίησαν το 1986 οι Falk, Gassner, Ben Zoor, Ben Sinon σε παιδιά 5-12 ετών, όπως ποιος θα πει τον μεγαλύτερο αριθμό, τον μικρότερο φυσικό ή ρητό, με σκοπό να προξενήσουν μια συζήτηση για το αν τελειώνουν οι αριθμοί (Falk et al., 1986, βλ. Monaghan, 2001). Σημείωσαν γενικά μια αναπτυξιακή τάση, παρατηρώντας ότι τα μικρότερα παιδιά δεν μπορούν να συνεχίσουν το παιχνίδι γιατί δεν καταλαβαίνουν ότι οι ακέραιοι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, πόσο μάλλον οι φθίνοντες ακέραιοι, αφού αγνοούν τους αρνητικούς και τους ρητούς.

Οι Βαμβακούση και Βοσνιάδου σε έρευνα που πραγματοποίησαν το 2007 σε μαθητές της Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου με ερωτήσεις της μορφής «πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα, π.χ., σε δύο ρητούς αριθμούς» βρήκαν ότι τα αποτελέσματά τους ήταν σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής όπου η διεύρυνση των αρχικών επεξηγηματικών πλαισίων για τον αριθμό προϋποθέτει την κατανόηση των ρητών αριθμών.

Ο Núñez (1994) ερεύνησε το ‘‘μικρό άπειρο’’ εμπνεόμενος από το παράδοξο της διχοτομίας του Ζήνωνα. Η έρευνά του πραγματοποιήθηκε σε 32 μαθητές αγόρια και κορίτσια 8, 10, 12 και 14 ετών. Το πρόβλημα που τους δόθηκε ήταν το εξής: «Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάμε από την μια πλευρά του τραπεζιού στην άλλη και ότι μας δίνεται η οδηγία να καλύψουμε στην αρχή τη μισή απόσταση και στη συνέχεια τη μισή της υπολειπόμενης κ.ο.κ. Θα φτάσουμε τελικά στην άκρη του τραπεζιού;». Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των προσωπικών συνεντεύξεων στο πλαίσιο του μαθήματος της ψυχολογίας. Η προσέγγιση που έγινε από τους μαθητές εμφανίζει την τάση αλλαγής των συνθηκών του προβλήματος, χώρου ή δράσης, με απαντήσεις όπως θα φτάσουμε τελικά γιατί ο χώρος θα μικρύνει πολύ και δεν θα μπορέσουμε να κάνουμε ολόκληρο βήμα, ή θα φέρουμε το σημείο άφιξης πιο κοντά για να είμαστε σίγουροι ότι θα φτάσουμε, ή ότι η επανάληψη των βημάτων κάποτε θα τελειώσει γιατί θα κολλήσουμε, ή ότι με την φαντασία μας θα φτάσουμε κ.ά.. Εκφράζουν μια δυσκολία κατανόησης της παραδοξολογίας του θέματος όπου χάνεται η αυστηρότητα των μαθηματικών (ό,τι είναι παράδοξο για μας δεν αντιμετωπίζεται ως παράδοξο και από τους μαθητές).

Οι Mamolo και Zazkis (2008), διερεύνησαν τις αντιλήψεις φοιτητών για το άπειρο μέσω της εμπλοκής τους με παράδοξα όπως το «ξενοδοχείο του Χίλμπερτ». Απευθύνθηκαν σε 36 φοιτητές δημιουργώντας δύο ομάδες ανάλογα με τη διαφορετικού βαθμού εξοικείωσή τους με τα μαθηματικά. Η πρώτη ομάδα αποτελούνταν από 16 καθηγητές που δίδασκαν μαθηματικά στο γυμνάσιο και παρακολουθούσαν ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η δεύτερη ομάδα αποτελούνταν από 20 φοιτητές κοινωνικών επιστημών, των οποίων οι μαθηματικές γνώσεις είχαν εμπλουτιστεί στο πλαίσιο διαλέξεων γύρω από την έννοια του άπειρου. Ζητήθηκε από τους φοιτητές να μαγνητοφωνήσουν τις ιδέες τους ο καθένας ξεχωριστά και να συζητήσουν έπειτα σε ομάδες και στο τέλος όλοι μαζί. Οι δύο ομάδες είχαν παρόμοια αντιμετώπιση του προβλήματος και μεγάλη δυσκολία να δεχτούν την ιδέα ότι ένα άπειρων δωματίων ξενοδοχείο είναι γεμάτο. Μετά την παρουσίαση της σωστής μαθηματικά λύσης η δεύτερη ομάδα συνέχισε να έχει πρόβλημα στην αποδοχή της.

Οι Fischbein et al. (1979), έθεσαν το ακόλουθο πρόβλημα: «Έστω ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Μπορούμε χωρίζοντάς το στο μέσον του να έχουμε δύο ίσα, μικρότερα από το αρχικό, ευθύγραμμα τμήματα. Έπειτα μπορούμε να χωρίσουμε καθένα από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα στο μέσον τους και να έχουμε 4 μικρότερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Αυτή η διαδικασία θα σταματούσε κάπου;» σε έρευνα που πραγματοποίησαν σε 470 μαθητές ηλικίας 10-15 ετών. Μετά τις απαντήσεις τους οι μαθητές χωρίστηκαν στους περατοκράτες (finitist) που θεωρούν ότι δεν μπορεί ένα ευθύγραμμο τμήμα να διαιρείται επ’ άπειρο ή ότι το όλο δε μπορεί να είναι ίσο με το μέρος του, και τους απειριστές (non finitist), που θεωρούν ότι η επ’ άπειρο διαίρεση είναι εφικτή και ότι κάθε άπειρο υποσύνολο ενός απειροσύνολου είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύνολο, με τους περατοκράτες να υπερτερούν ανεξάρτητα από ηλικία και επίπεδο μαθηματικής επίδοσης.

Το παρακάτω πρόβλημα δόθηκε από τις Tirosh και Tsamir (1996), ως μια δραστηριότητα τριών σταδίων όπου χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές αναπαραστάσεις απειροσυνόλων: «Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά ενός μέτρου, (οπότε το εμβαδόν του θα είναι 1^2=1τ.μ.). Αν αυξάνουμε κάθε φορά την πλευρά του τετραγώνου κατά ένα μέτρο, τότε θα έχουμε τετράγωνα με εμβαδά 2^2τ.μ., 3^2τ.μ., 4^2τ.μ., …κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία θα σταματήσει κάποτε;». Η διάρκεια ήταν 40 λεπτά και συμμετείχαν 32 μαθητές ηλικίας 16-18 ετών. Η δεύτερη δραστηριότητα περιελάμβανε μια γεωμετρική αναπαράσταση με το ερώτημα: «Σκεφτείτε ένα σύνολο τετραγώνων κάθε στοιχείο του οποίου είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1εκ., 2εκ., 3εκ., κ.ο.κ., αντίστοιχα. Είναι το πλήθος των τετραγώνων ίσο με το πλήθος των τμημάτων»; Οι απαντήσεις των περισσότερων μαθητών ήταν αντιφατικές και γενικά μπροστά στις διαφορετικές αναπαραστάσεις οδηγήθηκαν σε διαφορετικά συμπεράσματα.

Στην έρευνά μας μελετήσαμε τη διαισθητική αντίληψη των μαθητών της ΣΤ τάξης για την έννοια του μαθηματικού άπειρου ως αριθμό, ως διαδικασία, ως αντικείμενο, τα απειροελάχιστα, το άπειρο του χρόνου και του χώρου, τη μαθηματική γλώσσα και τις ιδιότητες των απειροσύνολων. Χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων, όπως οριζόντια, κάθετη, με αναλυτική αριθμητική ή γεωμετρική μορφή (Duval, 1983, Tirosh & Tsamir, 1996). Σύμφωνα με το επίσημο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, οι μαθητές δεν έχουν ασχοληθεί με την έννοια του μαθηματικού άπειρου στη διάρκεια του χρόνου φοίτησής τους, από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τελευταία τάξη του δημοτικού σχολείου. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα ενός μέρους της συνολικής μας έρευνας που αφορούν στην επίλυση προβλημάτων σχετικών με το άπειρο από τους μαθητές. Με τα προβλήματα αυτά διερευνήσαμε αν το άπειρο οδηγεί σε αντιφάσεις την εμπειρία τους, τη μεταφορά της εμπειρίας τους από τους φυσικούς αριθμούς για το χειρισμό απειροσύνολων, το απειροελάχιστο και τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός απειροσύνολου καθώς και το άπειρο του χώρου.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε πέντε δημόσια δημοτικά σχολεία, διαφορετικών περιοχών της πόλης της Κορίνθου. Συνολικά χορηγήθηκαν 140 ερωτηματολόγια σε μαθητές της έκτης τάξης, από τους οποίους 73 ήταν αγόρια και 67 κορίτσια. Η συλλογή των δεδομένων στηρίχτηκε στην συμπλήρωση ενός ερωτηματολογίου, το οποίο διαμορφώθηκε σε τρία μέρη: α) ερωτήσεις, β) προβλήματα και γ) αναγνώριση εκφράσεων – εννοιών σχετικές με το άπειρο. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το Φεβρουάριο του 2012.

Στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε στο δεύτερο μέρος όπου τέθηκαν τα παρακάτω προβλήματα:

Πρόβλημα 1: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να πάμε από τη μια πλευρά του δωματίου στην άλλη. Μας δίνεται η οδηγία να καλύψουμε στην αρχή τη μισή απόσταση και στη συνέχεια τη μισή της υπολειπόμενης κ.ο.κ. Θα φτάσουμε τελικά στην άλλη πλευρά του δωματίου; α) Θα φτάσουμε διότι…, β) Δεν θα φτάσουμε διότι… .

Πρόβλημα 2: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια και είναι όλα γεμάτα, δηλαδή έχει άπειρους πελάτες. Έτσι κανένα δωμάτιο από τα άπειρα που διαθέτει δεν είναι άδειο. Έστω ότι έρχονται σε αυτό το ξενοδοχείο ακόμη 10 πελάτες. Θα μπορούσαν να φιλοξενηθούν, και με ποιο τρόπο θα γινόταν αυτό; α) Ναι, και ο τρόπος θα ήταν…, β) Όχι, διότι….

Πρόβλημα 3: Έστω ότι έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Μπορούμε χωρίζοντάς το στο μέσον του να έχουμε δύο ίσα, μικρότερα από το αρχικό, ευθύγραμμα τμήματα. Έπειτα μπορούμε να χωρίσουμε καθένα από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα στο μέσον τους και να έχουμε 4 μικρότερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Αυτή η διαδικασία θα σταματούσε κάπου; Εξήγησε τη σκέψη σου (στα παιδιά δόθηκε σχετική εικόνα).

Πρόβλημα 4: Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά ενός μέτρου, (οπότε το εμβαδόν του θα είναι 1^2=1τ.μ.). Αν αυξάνουμε κάθε φορά την πλευρά του τετραγώνου κατά ένα μέτρο, τότε θα έχουμε τετράγωνα με εμβαδά 2^2τ.μ. , 3^2τ.μ., 4^2τ.μ. , …κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία θα σταματήσει κάποτε; Εξήγησε τη σκέψη σου (στα παιδιά δόθηκε σχετική εικόνα).

Τα παραπάνω προβλήματα διαμορφώθηκαν με βάση τα προβλήματα που έχουν δοθεί από άλλους ερευνητές, όπως παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας. Το πρώτο πρόβλημα μελετά μια παραλλαγή του παράδοξου της διχοτομίας του Ζήνωνα και οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν παράλογα σχετικά με την εμπειρία τους αποτελέσματα, όπως ότι δεν θα φτάσουν ποτέ στην άλλη άκρη ενός δωματίου ή ότι μένουμε πρακτικά ακίνητοι, λόγω της επαναλαμβανόμενης επ’ άπειρο διαδικασίας. Το δεύτερο πρόβλημα μελετά την αλληλεπίδραση πρακτικών και μαθηματικών εμπειριών και τη χρήση ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στους υπερπεπερασμένους. Επίσης το ίδιο το ξενοδοχείο το ‘‘άπειρο’’ αντιστοιχεί στο ενεργεία άπειρο που είναι μια ολοκληρωμένη άπειρη οντότητα. Το τρίτο πρόβλημα μελετά με τη βοήθεια μιας γεωμετρικής αναπαράστασης τη σύγκριση ενός απειροσύνολου με μέρος του που είναι επίσης απειροσύνολο, το άπειρο ως διαδικασία, και ως αντικείμενο, αφού το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα άπειρο σύνολο σημείων και το απειροελάχιστο όπου σταδιακά οδηγούμαστε. Το τέταρτο πρόβλημα μελετά την αναπαράσταση του ίδιου απειροσύνολου των τετραγώνων των φυσικών αριθμών με αναλυτική αριθμητική και γεωμετρική αναπαράσταση, το άπειρο του χώρου και τη συνέπεια ενός σχήματος ως προς τις χαρακτηριστικές του ιδιότητες καθώς εκτείνεται στον άπειρο χώρο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει συνοπτικά τις απαντήσεις των μαθητών σε κάθε πρόβλημα.

Προβλήματα	Απαντήσεις	10ο Δ.Σ. Κορίνθου	1ο&13ο Δ.Σ. Κορίνθου	4ο & 12ο Δ.Σ. Κορίνθου
Πρόβλ. 1ο (το δωμάτιο)	Διασχίζουμε το δωμάτιο	27	22	36
	Δεν το διασχίζουμε	12	19	15
Πρόβλ. 2ο (το άπειρο ξεν.)	Θα φιλοξενηθούν	19	25	28
	Δεν θα φιλοξενηθούν	19	17	25
Πρόβλ. 3ο (το ευθ.τμήμα)	Η διαδικασία σταματά	22	22	25
	Δεν θα σταματήσει	15	17	25
Πρόβλ. 4ο (το τετράγωνο)	Η διαδικασία σταματά	2	6	6
	Δεν θα σταματήσει	38	36	46

Πίνακας 1

Στο πρώτο πρόβλημα *‘‘της μετακίνησης από την μια άκρη ενός δωματίου στην άλλη’’*, 85 μαθητές (61%) απαντούν σύμφωνα με την εμπειρία τους: *‘‘με όποιο τρόπο και να το κάνουμε κάποτε θα φτάσουμε στην άλλη άκρη του δωματίου’’*. Πρακτικά κάπου υπάρχει το ‘‘τέλος’’ του δωματίου, και κάποια στιγμή η ‘‘υπολειπόμενη απόσταση’’ θα είναι τόσο μικρή που πιθανά δεν θα χωρά καν το πόδι μας και ήδη θα ακουμπάμε τον απέναντι τοίχο. Αφού μας δίνονται ‘‘άπειρες ευκαιρίες’’ ενώ το δωμάτιο δεν είναι ‘‘άπειρο’’, η απόσταση δεν είναι ‘‘ανεξάντλητη’’ και θα φτάσουμε στην άλλη άκρη χωρίς να μπορούμε να υπολογίσουμε σε πόσο χρόνο και με την προϋπόθεση ότι δεν θα *‘‘χαθούμε στο μέτρημα’’* και ότι *‘‘δεν θα πάμε προς τα πίσω’’*. Οι 46 μαθητές (33%) που ισχυρίζονται ότι δεν θα φτάσουμε ποτέ στην άλλη άκρη επιχειρηματολογούν ότι *‘‘το μισό και το μισό του μισού κ.λπ. ποτέ δεν θα φτάσει να είναι ολόκληρο’’* και δίνουν σειρές αριθμών για την απόσταση που πάντα θα περισσεύει (π.χ. αν το δωμάτιο είναι μήκους 100, τότε έχουμε αρχική απόσταση 100 και στη συνέχεια 50, 75, 87,5, …) . Ενδιαφέρουσα είναι η σκέψη ότι καθώς μειώνεται το διάστημα μειώνεται και ο απαιτούμενος χρόνος άρα και η ταχύτητα κίνησης και επομένως βαίνουμε προς μια ‘‘ακινησία’’. Εκτός και αν η ταχύτητα δεν αλλάζει, επομένως κάποια στιγμή, μέσα στον χρόνο, θα εξαντληθεί το δεδομένο διάστημα.

Στο πρόβλημα του ξενοδοχείου, 72 μαθητές (51%) ξεκινούν από τη βασική σκέψη που επιβάλλει η εμπειρία, ότι από τους άπειρους πελάτες κάποιοι θα φύγουν, θα αναχωρήσουν, εκτός αν μείνουν περισσότεροι από τους προβλεπόμενους σε κάποια δωμάτια, ή εκτός και αν χρησιμοποιηθούν και άλλοι χώροι όπως σαλόνια, διάδρομοι, κ.ά. Φαίνεται να ψάχνουν να δημιουργήσουν προϋποθέσεις, ώστε να οριοθετήσουν ένα πλαίσιο ‘‘γνωστού προβλήματος’’ (π.χ. τα μέλη μιας οικογένειας μένουν στο ίδιο δωμάτιο ή δύο φίλοι που θα μείνουν μαζί). Κάποιοι καταφεύγουν στις παράξενες ιδιότητες του άπειρου, όπως για παράδειγμα ότι ο αριθμός των δωματίων δεν είναι συγκεκριμένος, είναι άπειρος, επομένως αυτή η αοριστία αφήνει περιθώριο για να τακτοποιηθούν και ‘‘άλλοι πελάτες’’ να μπουν στο χώρο και άλλοι αριθμοί, διότι *‘‘το άπειρο δεν τελειώνει ποτέ, απλά θα γίνει μεγαλύτερο’’*, *‘‘άπειρα δωμάτια και δέκα δωμάτια χωρούν άπειρους πελάτες και δέκα πελάτες’’*. Οι 61 μαθητές (44%) που απαντούν αρνητικά, δηλώνουν ότι αφού δεν υπάρχουν κενά δωμάτια, δεν χωρούν άλλοι πελάτες. Δυσκολεύονται να δώσουν μια μαθηματική λύση στο ποιος θα ήταν ο τρόπος, και απορρίπτουν το πρόβλημα ως αδύνατο.

Στο τρίτο πρόβλημα, σχετικά με το *‘‘χωρισμό ενός ευθυγράμμου τμήματος στο μέσον του, και τη διαρκή επανάληψη της διαδικασίας για κάθε ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει’’*, 69 μαθητές (49%) προτείνουν ότι η διαδικασία θα σταματήσει, γιατί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα συγκεκριμένο μήκος, κατά μήκος της κόλλας αναφοράς, οπότε ο χώρος θα τελειώσει ή θα γίνει τόσο μικρός που ούτε τις τελίτσες που χρησιμοποιούμε για το χωρισμό στη μέση των συνεχόμενων ευθυγράμμων τμημάτων που προκύπτουν, δεν θα χωρά: *‘‘θα τελειώσει γιατί το μήκος της γραμμής δεν είναι ανεξάντλητο, και κάποια στιγμή δεν θα έχουμε χώρο για να χωρίσουμε* *στη μέση'' ή ''γιατί αυτό το ευθύγραμμο τμήμα κάποια στιγμή θα έχει γίνει τόσο μικρό (μια κουκίδα) ώστε να μην μπορεί να διακοπεί άλλο''.*

Λιγότεροι μαθητές (57, 41%), σκέφτονται ότι αυτή η διαδικασία δεν θα σταματήσει γιατί ψάχνοντας το μισό του μισού οδηγούμαστε σε μια διαδικασία συνεχή, άπειρη, ατέλειωτη ή *''γιατί δημιουργούνται άπειρα ευθύγραμμα τμήματα και χωρίζουμε άπειρες φορές''*. Οι μαθητές σκέφτονται ότι δεν υπάρχει ένα ''όριο'' (όπως όλοι οι αριθμοί έχουν μισό και διπλάσιο), επομένως όσο μικρό και να μας φαίνεται *''με γυμνό μάτι'',* το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που προκύπτουν, θα δούμε στο μικροσκόπιο ότι *'' η διαδικασία του τεμαχισμού δεν θα σταματάει ποτέ γιατί όλα τα κομμάτια θα έχουν μια μέση''*. Κάποιοι μαθητές σκέφτονται με αριθμητικά δεδομένα: *''το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων συνεχίζει να μικραίνει γιατί υπάρχουν άπειροι αριθμοί όπως: 0,5 ή 0,333 ή 0,888…''* .

Στο τελευταίο πρόβλημα *''σχετικά με το συνεχώς αυξανόμενο εμβαδόν ενός τετραγώνου''*, η συντριπτική πλειοψηφία (120 μαθητές, 86%), απάντησε ότι αυτή η διαδικασία δεν θα τελειώσει ποτέ, γιατί οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι και δημιουργούνται άπειρα εμβαδά (*''αυτή η διαδικασία δεν θα σταματήσει ποτέ γιατί θα φτάσει μέχρι το άπειρο^2 , ή το ∞^2 τ.μ.''*). Επίσης, αναφερόμενοι στο χώρο θεωρούν ότι το τετράγωνό μας *''για παράδειγμα θα μπορεί να φτάσει όσο μια πόλη ή σε όλο τον κόσμο και ακόμη πιο πέρα, θα μπορεί να γίνει ένα γιγαντιαίο τετράγωνο γιατί είναι ένα άπειρο σχήμα''*. Οι 14 μαθητές (10%) που θεωρούν ότι αυτή η διαδικασία θα τελειώσει θέτουν ως όριο το άπειρο ή το αδύνατο της εποπτείας ενός τόσο ''ατέλειωτου σχήματος'' το οποίο χάνει τελικά το χαρακτήρα του (*''γιατί αν αυτό το συνεχίσουμε κάποια στιγμή το τετράγωνο θα μεγαλώσει τόσο πολύ που δεν θα το βλέπουμε ολόκληρο άρα δεν θα είναι τετράγωνο''*).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην έρευνα που πραγματοποιήσαμε τέθηκαν διαφορετικά προβλήματα που έχουν δοθεί σχετικά με την έννοια του μαθηματικού άπειρου σε διάφορες ηλικίες, σε μαθητές ηλικίας 11-12 ετών. Το κύριο συμπέρασμα στο οποίο οδηγούμαστε είναι ότι το μαθηματικό άπειρο μπορούν διαισθητικά να το διαπραγματευτούν οι μαθητές φτάνοντας πολλές φορές σε σωστά συμπεράσματα και ανακαλύπτοντας ιδιότητες των απειροσυνόλων. Η παρουσίαση της έννοιας του άπειρου με τη μορφή προβλημάτων βοηθά περισσότερο τους μαθητές να εκφραστούν με δεδομένο ότι η έννοια του άπειρου δεν υπάρχει στον πραγματικό κόσμο των παιδιών και οι ερευνητές δυσκολεύονται να αναπτύξουν παραδείγματα μέσα από την εμπειρία των μαθητών (Monaghan, 2001).

Παρατηρούμε ότι η εμπειρία βοηθά τους μαθητές να προσανατολιστούν σε λύσεις στα δύο πρώτα προβλήματα (*της διάσχισης δωματίου και του ξενοδοχείο το άπειρο*), ενώ στα δύο επόμενα (*του χωρισμού ευθυγράμμου* *τμήματος και του αυξανόμενου τετραγώνου*), όπου υπάρχει καθαρά μαθηματική απεικόνιση, δεν αντλούν στοιχεία άμεσα από την εμπειρία τους, αλλά βοηθούνται με την αναφορά σε αριθμητικά δεδομένα, όπως ότι κάθε αριθμός έχει το μισό του και ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι. Επίσης στο πρώτο και τρίτο πρόβλημα (που είναι ουσιαστικά η μαθηματική αναπαράστασή του πρώτου), τους προβληματίζει ο περιορισμός του χώρου, του δωματίου από τη μία και της σελίδας από την άλλη, ενώ αντίθετα στο τελευταίο πρόβλημα αναφέρονται στον απεριόριστο χώρο όπου προεκτείνεται συνεχώς το τετράγωνο.

Κλείνοντας θεωρούμε ότι μελλοντικές έρευνες μπορούν να εστιάσουν στη διερεύνηση των χαρακτηριστικών στοιχείων αποτελεσματικών μαθησιακών δραστηριοτήτων για μαθητές αυτής της ηλικίας μέσα στη σχολική τάξη (Τσαμπουράκη & Καφούση, 2014). Η διερεύνηση αυτών των στοιχείων μπορεί να επιτρέψει τη διατύπωση προτάσεων για τη βελτίωση του σχεδιασμού της μαθηματικής εκπαίδευσης και της εμπλοκής των μαθητών με την έννοια του άπειρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barrow, J.D. (2007). *Άπειρο: Τα μαθηματικά της αθανασίας*. Εκδόσεις Τραυλός. Αθήνα.

Duval, R. (1983). L'Obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385- 414.

Falk, R., Gassner, D., Ben Zoor, F., & Ben Simon, K. (1986). How do children cope with the infinity of numbers? *Proceeding of the 10th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 13-18). London.

Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40

Καφούση, Σ. & Χαβιάρης, Π. (2013). *Σχολική τάξη, οικογένεια, κοινωνία και μαθηματική εκπαίδευση*. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα.

Mamolo, A. & Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education*, 10, 2, 167-182

Monaghan, J. (1986) *Adolescents' understanding of limits and infinity*. PhD thesis, University of Warwick.

Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239-257.

Núñez, R. (1994). Cognitive Development and Infinity in the Small: Paradoxes and Consensus *http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/publications.html*

Tirosh, D. & Tsamir, P. (1996). The role of representations in student's intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 33-40.

Tsamir, P. (1999). When 'the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 1-3, 209-34.

Τσαμπουράκη, Α. & Καφούση, Σ. (2014). Η έννοια του απείρου-Σκέψεις και προσεγγίσεις από μαθητές της Στ τάξης Δημοτικού. *Πρακτικά 31ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας,* 940-949.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΤΩΝ ΓΟΝΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΦΑΣΕΙΣ

Δήμητρα Τσουρέλη, Μαρία Καλδρυμίδου
ΠΤΝ, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
dimtsoureli@yahoo.gr, mkaldrim@uoi.gr

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια έρευνα, η οποία συνεχίζεται, για την εμπλοκή - ενασχόληση των γονέων με τη μελέτη και προετοιμασία των παιδιών τους για το σχολείο στα Μαθηματικά. Με βάση τις έρευνες που έχουν καταγραφεί στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία και τα αντικρουόμενα μεταξύ τους αποτελέσματα, σχεδιάστηκαν 2 εργαλεία συλλογής δεδομένων: ημερολόγιο και ερωτηματολόγια απόψεων και εκτιμήσεων των γονέων. Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζονται τα πρώτα αποτελέσματα σχετικά με την επίδοση στα Μαθηματικά και το χρόνο μελέτης των παιδιών, τη συχνότητα εμπλοκής των γονέων, και τη σχέση αυτών των μεταβλητών μεταξύ τους, αναδεικνύοντας αντιφάσεις ανάμεσα στη άποψη των γονέων για τη συχνότητα εμπλοκής τους (20% σχεδόν καθημερινά) και την πραγματική εμπλοκή τους (58% σχεδόν καθημερινά)

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η επίδραση της οικογένειας στην επίδοση των παιδιών στο σχολείο είναι ένα θέμα που απασχολεί τους γονείς, τους εκπαιδευτικούς αλλά και πολλούς ερευνητές. Τα τελευταία είκοσι χρόνια η γονεϊκή εμπλοκή αναδείχθηκε ως ένα σημαντικό ζήτημα στη διεθνή βιβλιογραφία, που σχετίζεται με την εκπαίδευση γενικά αλλά και με τη μαθηματική εκπαίδευση ιδιαίτερα (Epstein & Jansorn 2004).

Με τον όρο γονεϊκή εμπλοκή ο οποίος πρωτοεμφανίζεται στις αρχές της δεκαετίας του ενενήντα γίνεται αναφορά σε διαφορετικά χαρακτηριστικά. Έτσι π.χ. η Epstein (1995) παρουσιάζει μια πρώτη κατηγοριοποίηση των παραγόντων που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά συμμετοχής των γονέων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αυτοί είναι: 1) ανατροφή, 2) επικοινωνία γονέων–σχολείου, 3) εθελοντική συμμετοχή σε σχολικές δραστηριότητες και προγράμματα, 4) συμμετοχή σε δραστηριότητες μάθησης στο σπίτι, 5) συμμετοχή στη λήψη αποφάσεων για την εκπαίδευση και 6) συνεργασία με την κοινότητα.

Αυτή η κατηγοριοποίηση διαφοροποιείται σε διάφορες έρευνες. Έτσι, για παράδειγμα ο Γεωργίου (1997) σε έρευνα που έγινε στην Κύπρο αναδεικνύει τους παρακάτω παράγοντες: ανατροφή, μάθηση στο σπίτι, εθελοντισμός και λήψη αποφάσεων στο σχολείο. Αντίστοιχα στον ελλαδικό χώρο οι παράγοντες της γονεϊκής εμπλοκής κατηγοριοποιούνται από τους Λεμονίδη και τους συνεργάτες του (2009) ως εξής: α) επικοινωνία των γονέων με το σχολείο και το δάσκαλο, β) εξασφάλιση συνθηκών που διευκολύνουν τη μάθηση των παιδιών τους, γ) επίβλεψη της μελέτης των παιδιών, δ) βοήθεια που τους παρέχουν στις κατ' οίκον εργασίες, ε) συμμετοχή τους σε σχολικές δραστηριότητες, στ) υιοθέτηση κανόνων μέσα στο σπίτι και ζ) το ενδιαφέρον τους για τη σχολική ζωή των παιδιών τους.

Όσον αφορά τη γονεϊκή εμπλοκή στα Μαθηματικά, άλλοι ερευνητές (Ma, 1997), αναγνωρίζουν δύο διαφορετικούς τύπους: την άμεση και την έμμεση. Ως άμεση θεωρούν την προσφορά βοήθειας στα παιδιά όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα Μαθηματικά. Και ως έμμεση εντάσσουν τους παράγοντες όπως η ενθάρρυνση από τους γονείς, οι προσδοκίες τους και οι στάσεις και αντιλήψεις που έχουν για τα Μαθηματικά.

Αν και για σχετικά ζητήματα οι περισσότεροι ερευνητές χρησιμοποιούν τον όρο γονεϊκή εμπλοκή, συναντάμε επίσης τους όρους συμμετοχή και αλληλεπίδραση. Οι έρευνες σχετικά με το είδος, τα χαρακτηριστικά και τις πρακτικές που προσδιορίζουν τη γονεϊκή εμπλοκή επικεντρώνονται στη διερεύνηση και μελέτη πολλών και διαφόρων παραγόντων.

Μια μεταβλητή που μελετάται συχνά είναι η συχνότητα βοήθειας στο σπίτι και η σύνδεση της με την επίδοση των παιδιών στα Μαθηματικά, με τα αποτελέσματα των ερευνών να είναι αντιφατικά, και ως προς τα δύο ζητήματα, που φαίνεται να έχουν σχέση με διαφορετικά πολιτισμικά χαρακτηριστικά.

Έτσι, ενώ στην Αμερική φαίνεται ότι η γονεϊκή εμπλοκή στη μελέτη των Μαθηματικών στο σπίτι είναι χαμηλή, με το 71% των γονέων να δηλώνουν ότι σπάνια ασχολούνται με τη μελέτη των παιδιών τους και μόνο το 17% των γονέων να ασχολούνται σε καθημερινή βάση (Balli, 1997), στην Ελλάδα φαίνεται να συμβαίνει το αντίθετο. Σύμφωνα με τους Κασσώτη & Κλιάπη (2009), βρέθηκε ότι το 37,1% των γονέων βοηθάει τα παιδιά σχεδόν καθημερινά στα Μαθηματικά. Στην ίδια έρευνα, η συχνότητα βοήθειας στο σπίτι στα Μαθηματικά δεν συνδέεται απαραίτητα με την υψηλή επίδοση του παιδιού στο μάθημα αυτό, ενώ, σύμφωνα με τους Pan και συνεργάτες (2006), η καλύτερη επίδοση στα Μαθηματικά των κινέζων μαθητών έναντι των αμερικάνων μαθητών αποδίδεται στον περισσότερο χρόνο που αφιερώνουν οι αντίστοιχες μητέρες στα παιδιά τους για τη μελέτη τους. Μηδαμινές συσχετίσεις βρέθηκαν ανάμεσα στο χρόνο που αφιερώνουν οι γονείς για την προετοιμασία του παιδιού τους και την επίδοσή του στα Μαθηματικά (Pezdek, et al., 2002, Balli et al., 1997).

Επίσης αντικρουόμενα αποτελέσματα παρουσιάζονται συχνά σε πολλές έρευνες οι οποίες διερευνούν τη σχέση ανάμεσα στο μορφωτικό και κοινωνικο–οικονομικό επίπεδο των γονέων, την εμπλοκή τους στη μάθηση των Μαθηματικών από τα παιδιά τους και την επίδοση τους στα Μαθηματικά. Σε ορισμένες από αυτές το μορφωτικό και κοινωνικό-οικονομικό επίπεδο των γονέων αναδείχθηκαν ως παράγοντες που επηρεάζουν τις στάσεις και την ποιότητα της γονεϊκής εμπλοκής (Stevenson & Baker, 1987, Λεμονίδης κ.άλ., 2002). Σε άλλες (Antunez, 2000, Kim, 2002, Ma, 2001) διαπιστώθηκε ότι αποτελούν παράγοντες που δεν επηρεάζουν άμεσα την επιτυχία του μαθητή στο σχολείο, αλλά δημιουργούν ένα περιβάλλον που ενθαρρύνει τη μάθηση και μεταδίδουν στο παιδί υψηλές αλλά ρεαλιστικές προσδοκίες.

Έτσι η σημασία των γονεϊκών προσδοκιών αναδεικνύεται ως ένα σημαντικό εύρημα για την εκπαίδευση των παιδιών τους (Catsambis, 2001, Pratt et al., 1992).

Το υψηλό μορφωτικό και κοινωνικο–οικονομικό επίπεδο των γονέων και ιδιαίτερα της μητέρας συνδέεται με τον τρόπο χρήσης και τη ποιότητα του εξωσχολικού υλικού (Hyde et al., 2006. Κασσώτη & Κλιάπης, 2009). Αυτοί οι γονείς δεν το χρησιμοποιούν απλά για να ελέγξουν τα αποτελέσματα των εργασιών, αλλά επιδιώκουν πιο σύνθετες και δημιουργικές προσεγγίσεις του υλικού, με στόχο να προσφέρουν στα παιδιά μια πιο σφαιρική και ποιοτική γνώση.

Η διερεύνηση του τρόπου εμπλοκής των γονέων στο διάβασμα των παιδιών τους στα Μαθηματικά, αποτέλεσε το θέμα πολλών ερευνών στην Ελλάδα. Τα βασικά ευρήματα δείχνουν ότι οι γονείς κυρίως ελέγχουν αν τα παιδιά έχουν λύσει σωστά τις ασκήσεις και τις εργασίες που έχουν για το σπίτι, βοηθούν στην απάντησή τους (Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2003) και ενίοτε είναι οι ίδιοι οι γονείς που συμπληρώνουν τις απαντήσεις (Χασάπης & Ζαχάρος, 2009). Συχνά αναθέτουν στα παιδιά πρόσθετες ασκήσεις που τις αντλούν από εξωσχολικά βοηθήματα (Κασσώτη & Κλιάπης, 2009).

Οι γονείς αναφέρουν αρκετούς λόγους για να εξηγήσουν την προσφορά βοήθειας στα Μαθηματικά, όπως για παράδειγμα τη δυσκολία των παιδιών να διεκπεραιώσουν τις μαθηματικές εργασίες (Δεσλή & Σαρήογλου, 2009), τη δυσκολία των μαθηματικών εννοιών, τη χαμηλή επίδοση του παιδιού, την ευχαρίστηση στο να βοηθούν τα παιδιά τους, ή ακόμα και τη θετική επίδραση στη επίδοση των μαθηματικών (Δεσλή, 2006).

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει για τη συχνότητα βοήθειας των γονέων έτσι και η ποιότητα της γονεϊκής εμπλοκής επιδρά θετικά ή αρνητικά στις επιδόσεις των παιδιών. Τη θετική επίδραση των διάφορων τύπων γονεϊκής εμπλοκής στις επιδόσεις των μαθητών αναδεικνύουν οι Ντζιαχρήστος & Καφούση (2003). Ενδέχεται όμως, η γονεϊκή εμπλοκή να επιφέρει αρνητικά αποτελέσματα (Γεωργίου, 1996) όταν οι γονείς είναι ανεπαρκώς προετοιμασμένοι, επικρίνουν τις δυνατότητες των παιδιών και αμφιβάλλουν για αυτές, αναμιγνύονται υπερβολικά στη μελέτη των παιδιών ή ακόμη ολοκληρώνουν τις εργασίες για λογαριασμό των παιδιών τους.

Έτσι το ζήτημα της γονεϊκής εμπλοκής ή συμμετοχής μένει ακόμα ασαφές. Σύμφωνα με τις προαναφερθείσες μελέτες αυτή η πληθώρα διαφορετικών και σε ορισμένες περιπτώσεις αντιφατικών αποτελεσμάτων μπορεί να οφείλεται σε πολιτισμικές διαφορές και σε διαφορετικούς τρόπους οργάνωσης και λειτουργίας του εκπαιδευτικού συστήματος κάθε χώρας.

Θα μπορούσε όμως κανείς να ισχυριστεί ότι μπορεί να παίζει επίσης ρόλο η πολυπλοκότητα και ποικιλομορφία των ερευνητικών εργαλείων. Στις περισσότερες έρευνες τα δεδομένα προέρχονται από ερωτηματολόγια συλλογής των απόψεων και εκτιμήσεων των γονέων. Έτσι, στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε να συνδυάσουμε τις υποκειμενικές, κατ' εκτίμηση, απαντήσεις των γονέων σε ένα ερωτηματολόγιο, με τα δεδομένα που καταγράφουν σε ένα ημερολόγιο, για να πάρουμε πιο συστηματικά και αντικειμενικά δεδομένα, που θα επιτρέπουν μια πιο ολοκληρωμένη περιγραφή και προσέγγιση αυτού του πολύπλοκου ζητήματος.

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε αφενός το εργαλείο που σχεδιάστηκε και αφετέρου τα πρώτα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων της έρευνας εστιάζοντας στην επίδοση στα Μαθηματικά και το χρόνο μελέτης των παιδιών, στη συχνότητα εμπλοκής των γονέων, και τη σχέση αυτών των μεταβλητών μεταξύ τους.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Εργαλείο και διαδικασία συλλογής δεδομένων: Για τη συλλογή των δεδομένων σχεδιάστηκε ένα εργαλείο που περιείχε ένα ημερολόγιο και ένα ερωτηματολόγιο το οποίο διανεμήθηκε και συμπληρώθηκε από τους γονείς.

Το ημερολόγιο περιείχε έναν πίνακα όπου ο γονέας κατέγραφε αναλυτικά και συστηματικά κάθε ημέρα επί μία εβδομάδα για τα Μαθηματικά, τη Γλώσσα και συνολικά τα άλλα μαθήματα:

- το χρόνο μελέτης του παιδιού για το κάθε μάθημα χωριστά,
- το αν μελέτησε μόνο του και τι (επίλυση ασκήσεων, θεωρία κ.λ.π.)
- καθώς και τον τρόπο και το είδος συμμετοχής του γονέα στη μελέτη του παιδιού.

Στο τέλος, υπήρχε ερωτηματολόγιο περιείχε συνολικά σαράντα ερωτήσεις κλειστού και ανοικτού τύπου οι οποίες οργανώθηκαν στις παρακάτω ομάδες:

- Δημογραφικά χαρακτηριστικά και μορφωτικό - κοινωνικό επίπεδο γονέων
- Σύνθεση οικογένειας και αλληλεπίδραση των μελών
- Ικανότητες, στάσεις και αντιλήψεις (απόψεις) των γονέων σχετικά με τα Μαθηματικά και την αξία τους

- Προσδοκίες για την επίδοση του παιδιού στα Μαθηματικά και την επαγγελματική του εξέλιξη
- Δήλωση εκτίμησης της επίδοσης του παιδιού και του χρόνου και τρόπου συμμετοχής του γονέα στη μελέτη του παιδιού
- Δυσκολίες των γονέων στην παροχή βοήθειας και επικοινωνίας με το παιδί
- Παροχή συνθηκών, μαθησιακού υλικού και εκπαιδευτικών μέσων που διευκολύνουν τη μάθηση του παιδιού
- Συμμετοχή τους σε σχολικές δραστηριότητες και επικοινωνία και συνεργασία με τον εκπαιδευτικό της τάξης

Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν πολύ απαιτητικό ως προς το χρόνο και τη συνέπεια από αυτόν που το συμπλήρωσε. Έτσι η συμμετοχή στην έρευνα απαίτησε αρχικά τη δημιουργία προσωπικής σχέσης εμπιστοσύνης μεταξύ του ερευνητή και των γονέων.

Μία σύντομη επιστολή που συνόδευε το πακέτο ημερολόγιο – ερωτηματολόγιο ενημέρωνε τους συμμετέχοντες για τους σκοπούς της έρευνας και έδινε οδηγίες για τον τρόπο συμπλήρωσης αυτών. Το ποσοστό επιστροφής των ερωτηματολογίων άγγιξε περίπου το 100% για το δείγμα των γονέων που δόθηκε, δεδομένου ότι οι γονείς είχαν ήδη δεχθεί να συμμετάσχουν.

Συμμετέχοντες: Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 60 γονείς μαθητών όλων των τάξεων του Δημοτικού από 10 σχολεία του Περιστερίου, με το 55% από τις δύο τάξεις του Δημοτικού, όπου τα Μαθηματικά γίνονται πιο «δύσκολα και απαιτητικά» σύμφωνα με την άποψη πολλών γονέων. όπως φαίνεται στον πίνακα 1.

Τάξη	Μαθητές (%)
Α	9 (15%)
Β	4 (6,7%)
Γ	5 (8,3%)
Δ	9 (15%)
Ε	18 (30%)
ΣΤ	15 (25%)

Πίνακας 1: Κατανομή των μαθητών ανά τάξη

Το 90% των ημερολογίων και των ερωτηματολογίων απαντήθηκε από τις μητέρες των μαθητών, οι οποίες στην πλειοψηφία τους ήταν Ελληνίδες (88,3%) μεταξύ 35 και 45 ετών (61,7%). Πληροφορίες για τις σπουδές και το επάγγελμα των γονέων δίνονται στον πίνακα 2.

ΣΠΟΥΔΕΣ	πατέρας	μητέρα	ΕΠΑΓΓΕΛΜΑ	πατέρας	μητέρα
Δημοτικό	0%	13,3%	Δημ. Υπάλληλος	31,7%	35,0%
Γυμνάσιο	6,7%	6,7%	Ιδιωτ. Υπάλληλος	38,3%	15,0%
Λύκειο	33,3%	21,7%	Ελευθ. Επάγγελμα	18,3%	5,0%
ΙΕΚ/Τεχνική σχολή	21,7%	15,0%	Οικιακά	0%	25,0%
ΤΕΙ	13,3%	11,7%	Συν/χος	1,7%	3,3%
ΑΕΙ	16,7%	30,0%	Άνεργος	6,7%	25,0%
Μάστερ/ Διδακτορικό	5%	1,7%	Άλλο	0%	1,7%
Δ Α	0%	0%	Δ Α	3,3%	0

Πίνακας 2:Σπουδές και επάγγελμα γονέων

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που αφορούν τρεις βασικές μεταβλητές: την επίδοση των παιδιών στα Μαθηματικά, το χρόνο μελέτης στο σπίτι και τη συχνότητα εμπλοκής των γονέων σε αυτήν.

Επίδοση μαθητών στα Μαθηματικά

Από τους 60 μαθητές του δείγματος οι μισοί περίπου ήταν μαθητές του 10. Αναλυτικά η επίδοση των μαθητών του δείγματος δίνεται στον πίνακα 3.

Βαθμός	Μαθητές (%)
6,00	6,7%
7,00	6,7%
8,00	20,0%
9,00	15,0%
10,00	51,7%

Πίνακας 3:Επίδοση μαθηdτών στα Μαθηματικά

Μελέτη στο σπίτι και εμπλοκή γονέων

Σύμφωνα με τα στοιχεία του ημερολογίου, οι μαθητές του δείγματος αφιέρωσαν στα Μαθηματικά την εβδομάδα καταγραφής κατά μέσο όρο περίπου 2 ώρες (ελάχιστος χρόνος: 36’, μέγιστος χρόνος: 215΄, μ.ο.:122,39, s.d.: 51,13).

Ο χρόνος μελέτης συνδέεται βέβαια με την τάξη στην οποία φοιτά το παιδί (R= .420, p=0.01)

Στη διάρκεια αυτής της εβδομάδας οι γονείς τους βοήθησαν 3,3 φορές κατά μέσο όρο, με το 10% να μην έχει εμπλακεί καθόλου στη μελέτη του παιδιού τους και το 58,6% να εμπλέκεται πολύ συχνά. Στον πίνακα 3 δίνεται η κατανομή της συχνότητας της βοήθειας που δόθηκε στα παιδιά.

Φορές την εβδομάδα	Πλήθος μαθητών (%)
0	6 (10%)
1	8 (13,3%)
2	4 (6,7%)
3	7 (11,7%)
4	14 (23,3%)
5	21 (35,3%)

Πίνακας 4: Κατανομή των γονέων ανάλογα με το πλήθος των ημερών που ενεπλάκησαν στη μελέτη του παιδιού τους

Παράλληλα στο ερωτηματολόγιο υπήρχαν δύο ερωτήσεις, όπου έπρεπε οι γονείς να εκτιμήσει τη συχνότητα εμπλοκής τους στη μελέτη του παιδιού καθώς και για το χρόνο που αφιερώνουν σε αυτή ημερησίως κατά μέσο όρο. Στον πίνακα 5 υπάρχουν αναλυτικά τα αποτελέσματα σ’ αυτές τις 2 ερωτήσεις.

	Συχνότητα βοήθειας		Χρόνος ενασχόλησης γονέα
καθόλου	1 (1,7%)	7 (11,7)	καθόλου
σπάνια	20 (33,3%)	23 (38,3)	λίγο
αρκετά	24(40%)	24 (40%)	Μισή ώρα
Σχεδόν καθημερινά	15 (25%)	6 (10%)	Μία ώρα

Πίνακσς 5: Κατανομή γονέων ανάλογα με την εκτίμηση που δηλώνουν στο ερωτηματολόγιο για τη συχνότητα και το χρόνο εμπλοκής τους στη μελέτη του απιδιού τους.

Οι απαντήσεις των γονέων στις 2 ερωτήσεις δεν παρουσιάζουν αντιφάσεις (R=.616, p=0.01).

Εντούτοις είναι αξιοσημείωτο ότι οι απαντήσεις των γονέων στο ερωτηματολόγιο δεν συνάδουν με τα στοιχεία που κατέγραψαν στο ημερολόγιο: η συσχέτιση ανάμεσα στο πλήθος των ημερών που οι γονείς ενεπλάκησαν στη μελέτη του παιδιού (πίνακας 4) και την εκτίμησή τους για τη συχνότητα εμπλοκής τους (πίνακας 5) είναι μη στατιστικά σημαντική (R= 0.217 R=0.235 αντίστοιχα)

Σχέση μεταξύ εμπλοκής γονέων και των άλλων μεταβλητών

Η πρώτη διερεύνηση για τη σχέση μεταξύ της συχνότητας εμπλοκής των γονέων, με βάση το ημερολόγιο, και της επίδοσης που έχουν τα παιδιά στα Μαθηματικά δείχνει ότι αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική (R= -.233) και δεν σχετίζεται με την τάξη στην οποία φοιτά το παιδί.

Αντιθέτως φαίνεται να σχετίζονται θετικά ο χρόνος μελέτης του παιδιού και η συχνότητα εμπλοκής των γονέων (R= .325, p=0.05) και αρνητικά μεταξύ τους, ο χρόνος μελέτης και η επίδοση του παιδιού (R= -.466, p=0.01).

Από τις μεταβλητές που αφορούν το επαγγελματικό και μορφωτικό επίπεδο των γονέων, μόνο αυτές που αφορούν τη μητέρα σχετίζονται με την επίδοση του παιδιού (R=.288, p=0.05 και R=.470, p=0.01 αντίστοιχα), ενώ καμία από αυτές δεν σχετίζονται με στατιστική σημαντικότητα με τη συχνότητα εμπλοκής τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοψίζοντας τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της πρώτης αυτής ανάλυσης των δεδομένων, βλέπουμε ότι το προφίλ της γονεϊκής εμπλοκής με τη μελέτη του παιδιού στο σπίτι είναι μη ομοιόμορφο, ως προς τους διάφορους παράγοντες που μελετήσαμε στην παρούσα εργασία.

Έτσι, για τη συχνότητα εμπλοκής των γονέων στη μελέτη του παιδιού και με βάση τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο το ποσοστό των γονέων που δηλώνει ότι βοηθάει το παιδί του σχεδόν καθημερινά ανέρχεται στο 20% και διαφέρει από άλλες έρευνες στην Ελλάδα, όπως π.χ. στους Κασσώτη & Κλιάπη (2009), όπου αυτό ανέρχεται στο 37,1%. Όταν όμως αναλύουμε τα δεδομένα από τη συμπλήρωση του ημερολογίου, που απαιτούσε συστηματική καταγραφή της ώρας που έλαβε χώρα αυτή η βοήθεια, βλέπουμε ότι το ποσοστό των γονέων που εμπλέκεται σχεδόν καθημερινά (4 ή 5 φορές την εβδομάδα) ανέρχεται στο 58,6%. Η αντίφαση αυτή αυτή που υπάρχει ανάμεσα στην άποψη που δηλώνουν οι γονείς σε ένα ερωτηματολόγιο και στο πιο αντικειμενικό στοιχείο που προκύπτει από την καταγραφή του χρόνου αναδεικνύει το ζήτημα του ή των εργαλείων που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της γονεϊκής εμπλοκής.

Στο ίδιο πλαίσιο, η εμπλοκή αυτή των γονέων δεν φαίνεται, σ' αυτήν την ανάλυση πρώτου επιπέδου, να σχετίζεται με την επίδοση του παιδιού, σε αντίθεση με άλλες έρευνες που αναδεικνύουν θετική ή αρνητική επίδραση (Γεωργίου, 1996, Δεσλή, 2006, Ντζιαχρήστος & Καφούση, 2003).

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, ενώ το ζήτημα της γονεϊκής εμπλοκής στη μελέτη στο σπίτι και, κατ΄ επέκταση στη μάθηση των Μαθηματικών είναι πολύ σημαντικό και ζωτικής σημασίας για τη μαθηματική εκπαίδευση, η προσέγγισή του φαίνεται ότι είναι πολύ δύσκολη. Σίγουρα, όπως υποστηρίζεται σε προηγούμενες έρευνες (Catsambis, 2001, Pan et al., 2006, Pratt et al., 1992) είναι ένα ζήτημα που επηρεάζεται από πολιτισμικούς παράγοντες και αυτό μπορεί να αποτελέσει μια ερμηνεία των διαφορετικών αποτελεσμάτων που έχουν καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Εντούτοις όμως η απουσία κατάλληλων εργαλείων για τη συλλογή των δεδομένων για την καταγραφή του σε πρώτη φάση είναι επίσης ένα σημαντικός παράγοντας. Προς αυτήν την κατεύθυνση συνηγορούν και τα ευρήματα της πρώτης ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν με τη χρήση του ημερολογίου που σχεδιάστηκε για την παρούσα έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Antunez, B. (2000) When everyone is involved: Parents and communities in school. Framing Effective Practices: *Topics and Issues in the Education of English Learners* pp. 53-59

Balli, S. J. (1997). When Mom and Dad Help: Student Reflections on Parent Involvement with Homework. Eric Document (p. 16), ανακτήθηκε από http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED409103.pdf

Balli, S. J., Wedman, J.F., & Demo, D.H. (1997). Family involvement with middle grades homework: Effects of differential prompting. *Journal of Experimental Education*, 66, pp 31-48.

Catsambis, S. (2001). Expanding knowledge of parental involvement inchildren’s secondary education: connections with high school seniors’ academic success. *Social Psychology of Education* 5, pp 149–177.

Georgiou, S. (1997). Parental involvement: Definition and outcomes. *Social Psychology of Education*, 1 (3), pp. 189-209.

Γεωργίου, Σ. (1996). Γονεϊκή συμπεριφορά και σχολική επίδοση. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 23 σελ 138-143

Cooper, H., & Lindsay, J. J. (2000). Homework in the home: How student, family, and parenting-style differences related to the homework process. *Contemporary Educational Psychology*, 25, pp. 464–487.

Δεσλή, Δ. (2006). Ο ρόλος των γονέων στην προετοιμασία των παιδιών στα μαθηματικά του σχολείου: οι απόψεις γονέων και εκπαιδευτικών. Στα Πρακτικά 1ου Εκπαιδευτικού Συνεδρίου (σ. 2-11). Ιωάννινα.

Epstein, J., & Jansorn, N. (2004). School, Family, and Community Partnerships Link the Plan. *Education Digest*, 69 (6), pp. 19-23.

Epstein, J. (1995). School/Family/Community Partnerships: Caring For the Children We Share. *Phi Delta Kappan*, 76, pp. 701-712.

Hoover-Dempsey, K. V., & Sandler, H. M. (1997). Why do parents become involved in their children's education? *Review of Educational Research*, 67(1), pp. 3–42.

Hyde, J. S., Else-Quest, N. M., Alibali, M. W., Knuth, E., & Romberg, T. (2006). Mathematics in the home: Homework practices and mother–child interactions doing mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, pp. 136–152.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. (2009). Γονεϊκή Συμμετοχή στη Μελέτη των Μαθηματικών στην Περιοχή της Αλεξάνδρειας Ημαθίας. Στο Φ. Καλαβάσης κ.αλ. (επιμ.), *Μαθηματική εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές, Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου, σελ.111-120.

Kim, E. (2002). The relationship between parental involvement and children's educational achievement in the Korean immigrant family. *Journal of Comparative Family Studies*, pp. 530-540

Λεμονίδης, Χ., Τσακιρίδου, Ε., Μαρκάδας, Σ. (2009) Διερεύνηση της Εμπλοκής των Γονέων στη Μαθηματική Εκπαίδευση των Παιδιών τους. Στο Φ. Καλαβάσης κ.αλ. (επιμ.,) *Μαθηματική εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές, Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου, σελ.89-100

Λεμονίδης, Χ., Χατζηλιαμή, Μ., Κυρίδης, Α. (2002). Η επίδραση του οικογενειακού περιβάλλοντος στις αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 34, σελ. 124.

Ma, X. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(1), pp. 26-47.

Ντζιαχρήστος, Β., Καφούση, Σ. (2003). Γονείς, μαθητές, δάσκαλοι και μαθηματικά. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 60, σελ. 63-84.

Pezdek, K., Berry, T., & Reeno, P. A. (2002). Children's mathematics achievement: The role of parents' perceptions and their involvement in homework. *Journal of Educational Psychology*, 94 (4), pp.771-777.

Pratt, M.W., Green, J., & MacVicar, J. (1992). The mathematical parent: Parental Scaffolding, Parenting Style, and Learning Outcomes in Long-Division Mathematics Homework. *Journal of applied developmental psychology*, 13, pp. 17-34.

Shumow, L. (1998). Promoting parental attunement to children's mathematical reasoning through parent education. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 19 (1), pp. 109-127

Stevenson, D., & Baker, D. (1987). The Family-School Relation and the Child's School Performance. *Child Development*, 58, pp. 1348-1357.

Χασάπης, Δ. & Ζαχάρος, Κ. (2009). Μια Διερεύνηση της Εμπλοκής Γονέων Μαθητών του Δημοτικού στη Μαθηματική Εκπαίδευση των Παιδιών τους Στο Φ. Καλαβάσης κ.αλ. (επιμ.), *Μαθηματική εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου, σελ.101-110

ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ: Η ΦΥΣΗ ΚΑΙ ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥΣ

Μαρία Χειμωνή και Δήμητρα Πίττα-Πανταζή
Πανεπιστήμιο Κύπρου
chimoni.maria@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy

Η παρούσα εργασία εξετάζει τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης των μαθητών ηλικίας 10-13 χρόνων, μέσα από την περιγραφή διαφορετικών ομάδων συμπεριφοράς και επίδοσης σε διάφορους τύπους αλγεβρικών έργων. Η ανάλυση βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε από τον Kaput (2008) για τους τρεις βασικούς παράγοντες που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη: τη «Γενικευμένη αριθμητική», τον «Συλλογισμό με μεταβλητές» και τη «Μοντελοποίηση». Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών με διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την επίδοσή τους στις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια, ερευνητές, συγγραφείς αναλυτικών προγραμμάτων και σχεδιαστές εκπαιδευτικών πολιτικών προτείνουν τον επαναπροσδιορισμό της έννοιας της αλγεβρικής σκέψης σε όλες τις τάξεις της δωδεκάχρονης εκπαίδευσης και ιδιαίτερα στο δημοτικό σχολείο (Carraher & Schliemann, 2007· Kieran, 2011). Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στα αποτελέσματα ερευνών που υποδεικνύουν ότι οι μαθητές μικρότερων ηλικιών μπορούν να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη μέσα από τη συμμετοχή τους σε κατάλληλα εκπαιδευτικά προγράμματα. Επιπρόσθετα, ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι η απουσία της άλγεβρας από το δημοτικό σχολείο και η απότομη εισαγωγή της στο γυμνάσιο προκαλεί δυσκολίες στην κατανόηση των αλγεβρικών ιδεών από τους μαθητές (Radford, 2008).

Στο πλαίσιο αυτό, προβάλλεται η ανάγκη για περεταίρω διερεύνηση της αλγεβρικής σκέψης, τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σύμφωνα με τους Carraher και Schliemann (2007), οι προσπάθειες των ερευνητών για ορισμό της αλγεβρικής σκέψης χαρακτηρίζονται από πολυμορφία, ενώ λίγοι από αυτούς έχουν προσεγγίσει την έννοια με τρόπο που να διασαφηνίζει τα στοιχεία που την συνθέτουν. Η ερευνητική ατζέντα του NCTM (Arbaugh et al., 2010) επισημαίνει ότι η αναγνώριση των μαθηματικών εννοιών και των διαδικασιών συλλογισμού που επιτρέπουν τη μάθηση της άλγεβρας παραμένει ένα από τα βασικά θέματα προσανατολισμού της έρευνας στη μαθηματική παιδεία.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια περιγραφής των ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης των μαθητών ηλικίας 10 με 13 χρόνων. Η ανάλυση βασίζεται στο θεωρητικό υπόβαθρο που έχει αναπτυχθεί από τον Kaput

(2008) σε σχέση με τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν την αλγεβρική σκέψη. Το πλαίσιο του Kaput έχει αξιοποιηθεί ευρέως από την ερευνητική κοινότητα για τη μελέτη της αλγεβρικής σκέψης. Ωστόσο, δεν έχει διερευνηθεί μέσα από εμπειρικά δεδομένα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η αλγεβρική σκέψη ως μια πολυδιάστατη έννοια

Στη διαθέσιμη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετά θεωρητικά πλαίσια που επιχειρούν να περιγράψουν την αλγεβρική σκέψη ως μια πολυδιάστατη δραστηριότητα (π.χ. Kieran, 1992· Radford, 2008). Ένας από τους ερευνητές που προσφέρει έναν ολοκληρωμένο ορισμό της αλγεβρικής σκέψης, λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο βαθμίδες της εκπαίδευσης, ήταν ο Kaput (Carraher & Schliemann, 2007). Ο Kaput (2008) επισημαίνει ότι το κύριο χαρακτηριστικό της αλγεβρικής σκέψης, σε όλες τις ηλικίες, είναι η αναγνώριση, η συστηματική έκφραση και η αιτιολόγηση γενικεύσεων με τρόπους που προοδευτικά γίνονται πιο τυπικοί. Αυτή η διαδικασία είναι διάχυτη σε τρεις παράγοντες αλγεβρικής σκέψης: στη γενικευμένη αριθμητική, στο συλλογισμό με μεταβλητές και στη μοντελοποίηση για την έκφραση και επισημοποίηση γενικεύσεων.

Ο παράγοντας της «Γενικευμένης αριθμητικής» αναφέρεται σε δραστηριότητες εφαρμογής της αλγεβρικής σκέψης σε αριθμητικά συγκείμενα. Πολλοί ερευνητές επισημαίνουν ότι για να κατανοήσουν οι μαθητές την αριθμητική χρειάζεται να ανακαλύψουν τις σχέσεις και τη δομή που κρύβονται πίσω από τους αριθμούς και τις πράξεις (π.χ. Empson, Levi & Carpenter, 2011). Συγκεκριμένα, η «Γενικευμένη αριθμητική» περιλαμβάνει τη διαχείριση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, την ανάλυση των πράξεων και των ιδιοτήτων τους, το μετασχηματισμό και την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, την κατανόηση του συμβόλου της ισότητας και τη χρήση γραμμάτων για τη γενίκευση σχέσεων (Blanton & Kaput, 2005).

Ο παράγοντας «Συλλογισμός με μεταβλητές» αναφέρεται στην αναγνώριση και περιγραφή σχέσεων συνάρτησης που περιλαμβάνουν ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές. Στον παράγοντα αυτό εντάσσονται οι έννοιες του ρυθμού, της μεταβολής, των επαναλαμβανόμενων μοτίβων, και της συν-διακύμανσης, καθώς και η ανάπτυξη της έννοιας των συμβόλων και η διαχείρισή τους ώστε να συμβολιστούν ποσότητες (Kieran, 2011).

Ο παράγοντας «Μοντελοποίηση» περιγράφεται από τους Blanton και Kaput (2005) ως οι δραστηριότητες που εμπλέκουν τους μαθητές στην έκφραση και επισημοποίηση γενικεύσεων που προκύπτουν από μαθηματικοποιημένες καταστάσεις μέσα στα μαθηματικά ή καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Η αλγεβρική σκέψη χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την αναπαράσταση προβλημάτων που προκύπτουν από περίπλοκα ρεαλιστικά φαινόμενα. Στον παράγοντα αυτό περιλαμβάνονται η χρήση συμβόλων για τη διαμόρφωση του μοντέλου και η αντιστοίχηση μεταξύ του μοντέλου και της κατάστασης.

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην περιγραφή των ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 10-13 χρόνων στην αλγεβρική σκέψη. Συγκεκριμένα, υιοθετώντας το θεωρητικό μοντέλο του Kaput που περιγράφει την αλγεβρική σκέψη ως μια γενική έννοια που μπορεί να αναλυθεί σε τρία ξεχωριστά αλλά αλληλοσχετιζόμενα στοιχεία, η εργασία επιχειρεί να αναγνωρίσει και να περιγράψει ομάδες μαθητών με διαφορετική συμπεριφορά και επίδοση ως προς τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες και Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες ήταν συνολικά 684 μαθητές από 3 αστικά και 7 προαστιακά σχολεία και 42 τάξεις: 170 από τη Δ’ τάξη, 164 από την Ε’ τάξη, 184 από τη Στ’ τάξη και 166 από την Α’ Γυμνασίου. Η επιλογή των μαθητών έγινε με βάση τη δειγματοληψία ευκολίας. Οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο με έργα αλγεβρικής σκέψης, έχοντας στη διάθεσή τους 40 λεπτά.

Δοκίμιο Αλγεβρικής Σκέψης

Η ανάπτυξη του δοκιμίου για τη μέτρηση της αλγεβρικής σκέψης βασίστηκε στην προσαρμογή έργων που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Blanton & Kaput, 2005· Mason et al, 2005) και σε έργα που συμπεριλήφθηκαν σε μελέτες που αξιολογούν την επίδοση στα μαθηματικά σε παγκόσμιο ή εθνικό επίπεδο (π.χ. TIMSS, 2011) · MCAS, 2012). Στο δοκίμιο συμπεριλήφθηκαν συνολικά 17 έργα τα οποία καλύπτουν τους τρεις παράγοντες αλγεβρικής σκέψης που περιγράφει μέσα από το θεωρητικό του μοντέλο ο Kaput. Η δομή του μοντέλου αυτού επιβεβαιώθηκε εμπειρικά σε προηγούμενες εργασίες (π.χ. Chimoni & Pitta-Pantazi, 2014).

Ο παράγοντας «Γενικευμένη αριθμητική» μετρήθηκε μέσα από τρεις κατηγορίες έργων: (α) εφαρμογή ιδιοτήτων των ακέραιων αριθμών, (β) προσέγγιση της δομής των πράξεων, (γ) έννοια της ισότητας και της ανισότητας. Ο παράγοντας «Συλλογισμός με μεταβλητές» μετρήθηκε μέσα από τρεις κατηγορίες έργων: (α) γραφική αναπαράσταση δεδομένων, (β) εντοπισμός σχέσεων μεταξύ μεταβλητών (γ) εντοπισμός αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων. Ο παράγοντας «Μοντελοποίηση» μετρήθηκε με έργα που έδιναν έμφαση στη γενίκευση κανονικοτήτων μέσα από την επεξεργασία φαινομένων. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει παραδείγματα των έργων.

Γενικευμένη αριθμητική (δομή των πράξεων)	Το άθροισμα της πράξης 1***245676 + 4535731*** είναι ζυγός ή μονός αριθμός; Να εξηγήσεις την απάντηση σου.
Συλλογισμός με μεταβλητές (αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα).	Ο Βασίλης τοποθετεί τετράγωνα με τον ακόλουθο τρόπο:  *Σχήμα 1* *Σχήμα 2* *Σχήμα 3* Πόσα τετράγωνα θα υπάρχουν στο 16ο σχήμα;
Μοντελοποίηση	Η Ιωάννα θα κάνει μάθημα ηλεκτρονικών υπολογιστών δύο φορές τη βδομάδα. Ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά; **ΠΡΟΣΦΟΡΑ Α** €8 για κάθε μάθημα **ΠΡΟΣΦΟΡΑ Β** €50 για τα 5 πρώτα μαθήματα του μήνα και €4 για κάθε επιπλέον μάθημα.

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων για τους τέσσερις παράγοντες

Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο MPLUS (Muthén & Muthén, 1998). Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση Latent Class η οποία επιτρέπει τον εντοπισμό ομάδων ατόμων με παρόμοια συμπεριφορά. Αρχικά, διερευνήθηκαν τα μοντέλα με 2, 3, 4 και 5 ομάδες και εξετάστηκε σε ποια από αυτά εμφανιζόταν καλύτερη επανάληψη της τιμής του Loglikelihood αρκετές φορές. Στη συνέχεια, έγινε έλεγχος των δεικτών του μοντέλου (AIC και BIC). Το καλύτερο μοντέλο θεωρείται αυτό με τις χαμηλότερες τιμές AIC και BIC.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα των αναλύσεων έδειξαν ότι το μοντέλο των 5 ομάδων δεν μπορούσε να ληφθεί υπόψη γιατί η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων κάθε ομάδας να ανήκουν στην ομάδα που τους τοποθετούσε η ανάλυση δεν ήταν ικανοποιητική. Η εξέταση των μοντέλων με 2, 3 και 4 ομάδες έδειξε ότι το καλύτερο μοντέλο ήταν το μοντέλο με τις 4 ομάδες. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι δείκτες προσαρμογής για τα μοντέλα με διαφορετικό αριθμό ομάδων. Στον Πίνακα 3 παρουσιάζεται η μέση τιμή πιθανότητας των υποκειμένων κάθε ομάδας να ανήκουν σε καθεμιά από τις 4 ομάδες.

Δείκτες	Εντροπία	AIC	BIC	Adjusted BIC
Μοντέλο με 2 ομάδες	.813	240.623	285.903	254.151
Μοντέλο με 3 ομάδες	.832	109.089	172.481	128.029
Μοντέλο με 4 ομάδες	.809	88.431	169.934	112.782

Πίνακας 2: Δείκτες προσαρμογής για τα μοντέλα με διαφορετικό αριθμό ομάδων

Πιθανότητα να ανήκουν	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Υποκείμενα Ομάδας 1	.904	0.000	.096	.000
Υποκείμενα Ομάδας 2	.000	.854	.081	.066
Υποκείμενα Ομάδας 3	.037	.094	.869	.000
Υποκείμενα Ομάδας 4	.000	.079	.000	.921

Πίνακας 3: Μέση τιμή πιθανότητας κάθε ομάδας (Average latent class probabilities)

Το ποσοστό των μαθητών που εμπίπτουν στην ομάδα 1 είναι 31.4%, στην ομάδα 2 το 19.3%, στην ομάδα 3 το 23.1% και στην ομάδα 4 το 26.2%. Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει τα ποσοστά των μαθητών για κάθε ομάδα ανά τάξη. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτά, η πλειοψηφία των μαθητών της Δ' τάξης ανήκει στην ομάδα 1 (47.1%). Περίπου ίσος αριθμός μαθητών της Ε' τάξης ανήκουν στην ομάδα 1 και την ομάδα 4 (29.9% και 29.3% αντίστοιχα). Το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών της Στ' τάξης ανήκει στην ομάδα 4 (30,4%), όπως και της Α' Γυμνασίου (33.1%).

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Δ' Δημοτικού	47.1 %	16.5%	24.7%	11.8%
Ε' Δημοτικού	29.9%	18.9%	22%	29.3%
Στ' Δημοτικού	25%	22.8%	21.7%	30.4%
Α' Γυμνασίου	24.1%	18.7%	24.1%	33.1%
Σύνολο	31.4%	19.3%	23.1%	26.2%

Πίνακας 4: Ποσοστά μαθητών για κάθε ομάδα

Για να διερευνηθεί αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στους μέσους όρους των τεσσάρων ομάδων, πραγματοποιήθηκε ανάλυση διασποράς (ANOVA). Σύμφωνα με την ανάλυση αυτή, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως προς τη γενική ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών των τεσσάρων ομάδων ($F= 558.306$, $p<.01$). Επιπλέον, η πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA) έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων ως προς τις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης ($F= 175.904$, $p<.01$).

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Ψηλή επίδοση (Μ≥.66)				Γενικευμένη Αριθμητική, Συλλογισμός με μεταβλητές
Μέτρια επίδοση (.66<Μ≤.49)		Γενικευμένη Αριθμητική	Γενικευμένη Αριθμητική, Συλλογισμός με μεταβλητές	Μοντελοποίηση
Χαμηλή επίδοση (Μ<.49)	Γενικευμένη Αριθμητική, Συλλογισμός με μεταβλητές, Μοντελοποίηση	Συλλογισμός με μεταβλητές, Μοντελοποίηση	Μοντελοποίηση	

Πίνακας 5: Χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων υποκειμένων

Ο πίνακας 5 παρουσιάζει συνοπτικά τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων ομάδων των μαθητών ως προς τους μέσους όρους στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Η επίδοση μιας ομάδας θεωρείται ψηλή όταν είναι ίση ή ψηλότερη από .66, μέτρια όταν είναι μικρότερη από .66 και μεγαλύτερη ή ίση από.49 και χαμηλή όταν είναι μικρότερη από .49. Οι μαθητές της ομάδας 1 φαίνεται ότι έχουν χαμηλή επίδοση και στις τρεις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης. Οι μαθητές της ομάδας 2 παρουσιάζουν μέτρια επίδοση στον παράγοντα «Γενικευμένη αριθμητική» και χαμηλή στους παράγοντες «Συλλογισμός με μεταβλητές» και «Μοντελοποίηση». Οι μαθητές της ομάδας 3 παρουσιάζουν μέτρια επίδοση στους παράγοντες «Γενικευμένη αριθμητική» και «Συλλογισμός με μεταβλητές» και χαμηλή επίδοση στην ικανότητα «Μοντελοποίηση». Η ομάδα 4 παρουσιάζει ψηλή επίδοση στις ικανότητες «Γενικευμένη αριθμητική» και «Συλλογισμός με μεταβλητές» και μέτρια επίδοση στην ικανότητα «Μοντελοποίηση».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα εργασία διερεύνησε την αλγεβρική σκέψη σε μαθητές ηλικίας 10-13 χρονών. Τα αποτελέσματα είναι σημαντικά γιατί διασαφηνίζουν την έννοια της αλγεβρικής σκέψης στον 2ο κύκλο της δημοτικής εκπαίδευσης και στην Α’ γυμνασίου, μέσα από την περιγραφή τεσσάρων ομάδων μαθητών με διαφορετικές ικανότητες. Ο καθορισμός των ομάδων βασίστηκε στις επιδόσεις σε τρεις παράγοντες της αλγεβρικής σκέψης: τη γενικευμένη αριθμητική, τον συλλογισμό με μεταβλητές και τη μοντελοποίηση.

Οι μαθητές που εμπίπτουν στην ομάδα 1 παρουσιάζουν χαμηλές επιδόσεις και στους τρεις παράγοντες, αφού φαίνεται να περιορίζονται σε αριθμητικές στρατηγικές προσέγγισης των αλγεβρικών έργων και αδυνατούν να αναγνωρίσουν τις σχέσεις και τη δομή ακόμη και σε έργα που περιλαμβάνουν ιδιότητες των αριθμών και πράξεις. Σύμφωνα με τους Blanton και Kaput (2005), οι μαθητές με αυτή τη συμπεριφορά στερούνται εννοιολογικής κατανόησης των μαθηματικών ιδεών και οι γνώσεις τους περιορίζονται στο πεδίο των υπολογιστικών διαδικασιών. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών της Δ’ τάξης εμπίπτει σε αυτή την ομάδα (47.1%). Ωστόσο, σε αυτή την ομάδα εμπίπτουν και σημαντικά ποσοστά μαθητών από τις υπόλοιπες τάξεις (π.χ. το 24.1% των μαθητών της Α’ Γυμνασίου). Ένας πιθανός λόγος για το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να είναι η έμφαση της διδασκαλίας και του αναλυτικού προγράμματος, ιδιαίτερα στο δημοτικό σχολείο, αποκλειστικά σε θέματα της αριθμητικής· η άλγεβρα παραδοσιακά θεωρείται θέμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με αποτέλεσμα να απουσιάζουν από τα Μαθηματικά του δημοτικού σχολείου δραστηριότητες με μοτίβα, σχέσεις συνάρτησης και μοντελοποίησης. Εντούτοις, η έρευνα έχει δείξει ότι η απότομη εισαγωγή της άλγεβρας στο γυμνάσιο προκαλεί σοβαρά προβλήματα στην κατανόηση των αλγεβρικών ιδεών (Cai & Knuth, 2005).

Στην ομάδα 2 περιλαμβάνονται οι μαθητές με μέτρια επίδοση σε έργα της «Γενικευμένης αριθμητικής» και χαμηλή επίδοση σε έργα του «Συλλογισμού με μεταβλητές» και της «Μοντελοποίησης». Οι μαθητές αυτοί φαίνεται να αξιοποιούν τις γνώσεις τους από την αριθμητική, για να εκφράσουν και να επισημοποιήσουν γενικεύσεις. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουν επιτυχία σε έργα επίλυσης εξισώσεων και εφαρμογής των ιδιοτήτων των αριθμών και των πράξεων. Η επιτυχία αυτή μπορεί να αποδοθεί στην εφαρμογή στρατηγικών όπως η «δοκιμή και έλεγχος» και η «ανάδρομη πορεία». Πολλοί ερευνητές θεωρούν αυτές τις στρατηγικές ως αριθμητικές (π.χ. Bednarz & Janvier, 1996), ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι οι στρατηγικές αυτές αποτελούν δείγμα απαρχής της αλγεβρικής σκέψης (π.χ. Sfard & Linchevski, 1994). Εξαιτίας των περιορισμένων δυνατοτήτων που παρέχουν οι πιο πάνω στρατηγικές, οι μαθητές της ομάδας 2 φαίνεται να παρουσιάζουν δυσκολίες όταν κληθούν να αντιμετωπίσουν έργα του «Συλλογισμού με μεταβλητές». Σε αυτές τις περιπτώσεις έργων, όπως για παράδειγμα η μετάφραση μιας σχέσης συνάρτησης που παρουσιάζεται με πίνακα σε εξίσωση, προκύπτει εντονότερα η ανάγκη για λειτουργία των αριθμητικών δομών μέσα σε αλγεβρικά συστήματα και η απαλλαγή από τη σκέψη με συγκεκριμένους αριθμούς. Κατά τον Vergnaud (1998), τέτοιου είδους δραστηριότητες, όπως και άλλες που περιλαμβάνουν τις έννοιες της συνάρτησης και των μεταβλητών, αποτελούν τα καινούρια αντικείμενα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές όταν περάσουν από το πεδίο της αριθμητικής στην άλγεβρα.

Οι μαθητές της ομάδας 3 παρουσιάζουν μέτρια επίδοση στα έργα της «Γενικευμένης αριθμητικής» και του «Συλλογισμού με μεταβλητές». Η επίδοση τους είναι χαμηλή στα έργα της «Μοντελοποίησης». Η συγκεκριμένη ομάδα φαίνεται να παρουσιάζει ικανότητες για αντιμετώπιση των αριθμητικών παραστάσεων ως σχέσεων παρά ως οδηγιών για την εκτέλεση υπολογισμών. Πέρα από τα έργα της «Γενικευμένης αριθμητικής», οι μαθητές αυτοί καταφέρνουν να επιλύσουν και έργα του «Συλλογισμού με μεταβλητές», τα οποία περιλαμβάνουν την εύρεση του νιοστού όρου σε αριθμητικά μοτίβα και την έκφραση σχέσεων συνάρτησης με λεκτικούς, συμβολικούς ή άλλους τρόπους.

Οι μαθητές της ομάδας 4 παρουσιάζουν ψηλή επίδοση στα έργα της «Γενικευμένης αριθμητικής» και του «Συλλογισμού με μεταβλητές» και μέτρια επίδοση στα έργα της «Μοντελοποίησης». Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών της Α' Γυμνασίου (33.1%) εμπίπτουν στην ομάδα 4. Οι μαθητές αυτοί, πέρα από τις ικανότητες που αναφέρονται στη «Γενικευμένη αριθμητική» και στο «Συλλογισμό με μεταβλητές», παρουσιάζουν δυνατότητες για επίλυση έργων που ανήκουν στον παράγοντα της «Μοντελοποίησης». Όπως επισημαίνουν οι Blanton και Kaput (2005), ο παράγοντας αυτός εμφανίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι μαθητές της ομάδας 4 φαίνεται να έχουν ικανότητες για ανάπτυξη συσχετιστικών συλλογισμών, όχι μόνο στα πλαίσια των αριθμητικών μοτίβων και των σχέσεων συνάρτησης αλλά και σε νέα πλαίσια, όπου μια κανονικότητα παρουσιάζεται μέσα σε μια κατάσταση ή φαινόμενο. Μια ικανότητα που φαίνεται να απαιτείται ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να διαχειριστούν τα έργα της «Μοντελοποίησης» είναι η επιλογή, χρήση και μετάφραση αναπαραστάσεων ή η σύγκριση αναπαραστάσεων, η οποία παραμένει δύσκολη για την πλειονότητα των μαθητών (Lamon, 1998). Το γεγονός ότι σε αυτή την ομάδα εμπίπτουν σημαντικά ποσοστά μαθητών από όλες τις τάξεις (π.χ. 29,3% και 30,4% των μαθητών της Ε' και Στ' δημοτικού αντίστοιχα), υποδεικνύει ότι η αλγεβρική σκέψη επηρεάζεται από την ετοιμότητα των ατόμων για παρατήρηση και εξαγωγή γενικεύσεων. Ένας πιθανός λόγος για το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να είναι ο βαθμός στον οποίο η αλγεβρική σκέψη σχετίζεται με τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών, οι οποίες διαφέρουν από άτομο σε άτομο, ανεξάρτητα από την ηλικία τους (π.χ. χωρική σκέψη, επαγωγικός συλλογισμός, παραγωγικός συλλογισμός, εργαζόμενη μνήμη). Όπως επισημάνθηκε από τον Radford (2000), η αλγεβρική σκέψη αποτελεί προσπάθεια του ίδιου του ατόμου για να αναπαραστήσει καταστάσεις γενίκευσης με συγκεκριμένους τρόπους.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας διαφωτίζουν την έννοια της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες ηλικίες και μπορούν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς για την ενίσχυση των ικανοτήτων των μαθητών τους. Ειδικότερα, η περιγραφή διαφορετικών ομάδων επίδοσης στα έργα αλγεβρικής σκέψης μπορεί να καθοδηγήσει την εφαρμογή μεθόδων διαμορφωτικής αξιολόγησης με σκοπό την αναγνώριση του επιπέδου αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Σε μελλοντικές έρευνες, σημαντική θα ήταν και η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η αλγεβρική σκέψη αναπτύσσεται ιεραρχικά και αν ένα αναπτυξιακό μοντέλο μπορεί να προβλέψει την πρόοδο των ατόμων στις ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arbaugh, F., Herbel-Eisenmann, B., Ramirez, N., Knuth, E., Kranendonk, H. & Reed Quander, J. (2010). *Linking research and practice: The NCTM Research Agenda Conference report*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412–446.

Cai, J. & Knuth, E. (2005). Developing algebraic thinking: Multiple perspectives. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik* (*International Review on Mathematics Education*)*, 37*(1), p.1-4.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a problem solving tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. In N. Bednarz, C., Kieran, C., L. Lee, L. (Eds), *Approaches to Algebra* (pp. 115-136). London: Kluwer Academic Publishers.

Carraher, D.W. & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (ed.) *2nd Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the NCTM*. (Vol II, pp.669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Chimoni, M. & Pitta-Pantazi, D. (2014). Forms of algebraic thinking in the elementary school. In C. Lemonides & C. Nikolantonakis (Eds.), *Proceedings of the 5th En.E.Di.M Conference*. Florina, Greece: University of Western Macedonia.(In Greek)

Empson, S.B., Levi, L., & Carpenter, T.P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*, 409-428.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of Algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*. (pp. 557-577). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Lamon, S. (1998). Algebra: Meaning through Modelling. In A. Olivier and K. Newstead (Eds), *Proceedings of* the *22nd PME Conference* (VIII, p.167-174). Stellenbosch.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Chapman.

Muthén, L. K, & Muthén, B. O (1998). *Mplus User's Guide (3rd ed.)*. Los Angeles: Author.

Radford, L. (2000). Sings and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268. doi: 10.1023/A:1017530828058

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1).

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ Ε' ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Χιοκτουρίδη Κυριακή [1], Χατζηκυριάκου Κων/νος [2] , Ασημόπουλος Στέφανος [3]

[1] Μ.Δ.Ε στα Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης & Παραγωγή Διδακτικού Υλικού, ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, *chioktouridi@gmail.com*

[2] Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, ΠΤΔΕ, *kxatzkyr@uth.gr*

[3] Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, ΠΤΔΕ, *asimstef@uth.gr*

Περίληψη

Η εργασία αυτή αφορά ένα διεπιστημονικό σενάριο που σχεδιάσαμε με στόχο τη λειτουργική διδακτική σύνθεση τριών γνωστικών αντικειμένων, των Μαθηματικών, της Μουσικής και των Φυσικών Επιστημών ώστε να κατανοηθούν έννοιές τους και να συγκροτηθεί ένα ενιαίο πλαίσιο γνώσεων από τους μαθητές και τις μαθήτριες. Εδώ παρουσιάζουμε την εφαρμογή ενός τμήματος του σεναρίου στην Ε Δημοτικού που αφορά την αξιοποίηση της μουσικής σημειογραφίας στη διδασκαλία και τη μάθηση της διάταξης των κλασματικών μονάδων, της ισοδυναμίας των κλασμάτων καθώς και των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μεταξύ κλασμάτων.

ΛΕΞΕΙΣ – ΚΛΕΙΔΙΑ: *Διεπιστημονικό σενάριο, Μουσική, Μαθηματικά, κλάσματα, μουσικές ρυθμικές αξίες.*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η άποψη ότι η Μουσική ενισχύει άλλους τομείς της μάθησης έχει αποκτήσει ιδιαίτερη αποδοχή τα τελευταία χρόνια. Σημείο αναφοράς αποτελεί η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης που παρουσίασε ο Gardner (1985), σύμφωνα με την οποία η ανθρώπινη νοημοσύνη δεν είναι μία και ενιαία, αλλά υπάρχουν οχτώ διαφορετικές μορφές νοημοσύνης το ίδιο σημαντικές, μία εκ των οποίων είναι και η μουσική. Επομένως η καλλιέργεια μιας μορφής νοημοσύνης μπορεί να είναι διδακτικός στόχος καθαυτός αλλά και εναλλακτικό διδακτικό εργαλείο στην ανάπτυξη μιας άλλης μορφής νοημοσύνης (Kassell, 1998). Αν και δεν υπάρχουν έως σήμερα εκτεταμένα αποτελέσματα από έρευνες τα οποία να τεκμηριώνουν την επίδραση διεπιστημονικών προσεγγίσεων μεταξύ της Μουσικής, των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών, ωστόσο υπάρχουν ενδείξεις ότι μαθητές που διδάσκονται Μουσική αποδίδουν καλύτερα στα μαθηματικά. Η μουσική εκπαίδευση (μέθοδος Kodaly) εντάχθηκε στα σχολεία της Ουγγαρίας, όταν διαπιστώθηκε η πολύ καλή επίδοση στα Μαθηματικά και τη Φυσική των μαθητών που φοιτούσαν στα «μουσικά» σχολεία (Dickinson,1993). Θετική απάντηση στην υπόθεση ότι η μουσική εκπαίδευση μπορεί να επιφέρει καλύτερη μαθηματική απόδοση δόθηκε στην έρευνα της Vaughn (2000). Σύμφωνα με τους Johnson & Edelson (2003), υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα στην αξιοποίηση της μουσικής στη διδασκαλία των μαθηματικών, ένα εκ των οποίων είναι ότι η κοινή προσέγγιση μαθηματικών και μουσικών δραστηριοτήτων δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες πέρα από αυτές που ανήκουν στη λογικο-μαθηματική περιοχή, ώστε να κατανοήσουν, να αναλύσουν και να ερμηνεύσουν τα μαθηματικά μέσα από διαφορετικές οδούς. Να αναφερθεί ότι όπως τα Μαθηματικά είναι ο κατεξοχήν κλάδος όπου οι αναπαραστάσεις διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην κατανόηση και τη μάθηση διάφορων εννοιών, έτσι και η Μουσική χρησιμοποιεί ένα ιδιαίτερο σύστημα αναπαράστασης σε σχέση με το οποίο οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν αντίστοιχες δεξιότητες. Ανάμεσα σε ορισμένες έννοιες ή μαθηματικές ιδιότητες και έννοιες ή ιδιότητες της Μουσικής υπάρχει αναλογία (Γαγάτσης, Α-Χ., 2006). Το 2012, οι Courey, S.J., Balogh, E., Siker, J. R. and Paik από το Πανεπιστήμιο του Σαν Φρανσίσκο, ανέπτυξαν ένα πρόγραμμα, το Academic Music, για τη διδασκαλία των κλασμάτων, στο οποίο οι μαθητές που συμμετείχαν σημείωσαν υψηλότερες επιδόσεις σε δοκιμαστικά posttest με κλάσματα, σε σύγκριση με τους μαθητές που παρακολουθούσαν την κανονική μαθηματική τάξη. Οι δημιουργοί του προγράμματος αποδίδουν την επιτυχία του στο γεγονός ότι ενθαρρύνει την εμπλοκή των μαθητών και ότι τους είναι πολύ ενδιαφέρον. Τέλος, η έρευνα των An, S., Capraro, M. M., και Tillman, D. A. (2013) που συνάδει με προηγούμενες έρευνες για την επίδραση των μουσικών δραστηριοτήτων ενσωματωμένων στη διδασκαλία μαθηματικών, έδειξε στα συμπεράσματά της ότι η διεπιστημονική προσέγγιση της μουσικής και μαθηματικών έχει θετικές επιπτώσεις σε πολλαπλά επίπεδα για την μαθηματική ικανότητα.

2. ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Λέγοντας διεπιστημονικό σενάριο διδασκαλίας εννοούμε ένα σενάριο που επιχειρεί να διασυνδέσει και να συσχετίσει το περιεχόμενο διαφορετικών μαθημάτων, προκειμένου να εξασφαλιστεί πληρέστερη και σφαιρικότερη μελέτη του περιεχομένου τους (Jacobs, 1989c). Το σενάριό μας απευθύνεται σε μαθητές και μαθήτριες της Ε΄ τάξης δημοτικού. Για την εφαρμογή του δεν απαιτείται να κατέχει ο ή η εκπαιδευτικός ειδικές μουσικές γνώσεις, ωστόσο, μπορεί, να συνεργαστεί με τον ή την μουσικό του σχολείου. Απαιτούνται 12 διδακτικές ώρες συνολικά για τις τέσσερις ενότητές του, οι οποίες είναι: α) *Μοτίβα Ήχου*, β) *Μουσικά Μαθηματικά*, γ) *Ρυθμικοί Διάλογοι*, δ) *Ηχοκατασκευές*. Εδώ, θα αναφερθούμε μόνο στην ενότητα *Μουσικά Μαθηματικά* που αφορά τη σύνδεση της διδασκαλίας των Μαθηματικών με τη διδασκαλία της Μουσικής και ειδικότερα την αξιοποίηση της μουσικής σημειογραφίας στη διδασκαλία και τη μάθηση της διάταξης των κλασματικών μονάδων, της ισοδυναμίας των κλασμάτων καθώς και των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μεταξύ κλασμάτων.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το ερώτημα που διερευνούμε στην ενότητα *Μουσικά Μαθηματικά* είναι αν και πώς μπορεί να εφαρμοστεί, μέσω του σεναρίου που σχεδιάσαμε και του υλικού που αναπτύξαμε, η διεπιστημονική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών με διδακτικό στόχο την κατανόηση των εννοιών της κλασματικής ισοδυναμίας, της διάταξης των κλασματικών μονάδων και την εκτέλεση των πράξεων της κλασματικής πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Εφαρμόσαμε επί ένα διδακτικό δίωρο τη 2η ενότητα του σεναρίου μας σε τρία τμήματα Ε΄ Δημοτικού, με συνολικό δείγμα 55 ατόμων (33 αγόρια και 22 κορίτσια). Το συγκεκριμένο δείγμα μαθητών και μαθητριών δεν είχε διδαχθεί από τους μουσικούς των σχολείων κάτι σχετικό με τη μουσική σημειογραφία (π.χ. ρυθμικές αξίες φθογγόσημων).

Οι μαθητές και οι μαθήτριες ασχολήθηκαν με τις προαναφερθέντες κλασματικές έννοιες και πράξεις με την ταυτόχρονη χρήση του σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης της μουσικής, το οποίο ονομάσαμε **"Μοντέλο Μουσικής Αναπαράστασης" (ΜΜΑ).** Στόχος μας ήταν να διαπιστώσουν τη σύνδεση της έννοιας των ρυθμικών αξιών φθόγγων με τις μαθηματικές έννοιες κλάσμα, διάταξη και ισοδυναμία κλασμάτων και ως εκ τούτου να μπορούν να χρησιμοποιούν το ΜΜΑ βοηθητικά στην αποτελεσματική εκτέλεση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων.

Ως δεδομένα ποιοτικής ανάλυσης (Erickson F., 2014) χρησιμοποιήθηκαν οι καταγραφές στα ατομικά φύλλα εργασίας, οι προφορικές μαρτυρίες των μαθητών-τριων και οι ζωγραφιές τους.

4. ΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ *ΜΟΥΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ*

Οι Διδακτικοί Στόχοι της ενότητας *Μουσικά Μαθηματικά*

Α. Οι μαθητές και οι μαθήτριες να

1) κατανοούν και αναγνωρίζουν τα σύμβολα της ευρωπαϊκής σημειογραφίας όσον αφορά τη διάρκεια του ήχου και τον ρυθμό της μουσικής, 2) κατανοούν την έννοια της υποδιαίρεσης των ρυθμικών αξιών, 3) αντιλαμβάνονται τη μαθηματική σχέση των ρυθμικών αξιών όσον αφορά τη διάρκεια του χρόνου, 4) κατανοούν την κλασματική μονάδα ως ένα μέρος της ακέραιης μονάδας ή ενός πλήθους ομοειδών αντικειμένων, 5) συνθέτουν την ακέραια μονάδα με τη χρήση των ομώνυμων ή ετερώνυμων κλασματικών μονάδων 6) παρατηρούν, αντιστοιχίζουν τα φθογγόσημα με τους κλασματικούς αριθμούς και εξάγουν σχετικά συμπεράσματα, 7) ανακαλύπτουν την ισοδυναμία κλασμάτων με τη βοήθεια των φθογγόσημων, 8) αντιστοιχούν σύνολα φθογγόσημων με κλασματικούς αριθμούς, 9) συγκρίνουν και διατάσσουν ετερώνυμες κλασματικές μονάδες που αναφέρονται στην ίδια μονάδα και είναι με τη μορφή αριθμών και

φθογγόσημων, 10) προσθέτουν αξίες φθογγόσημων και εξάγουν κλασματικό αριθμό, 11) αφαιρούν αξίες φθογγόσημων και εξάγουν κλασματικό αριθμό, 12) προσθέτουν και αφαιρούν κλασματικούς αριθμούς που προκύπτουν από την επανάληψη των κλασματικών μονάδων $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ με τη βοήθεια των φθογγόσημων.

Οι παραπάνω ειδικοί στόχοι συνδέονται με τους δύο γενικότερους στόχους

B. Οι μαθητές και οι μαθήτριες να 1) κατανοούν ότι η μουσική περιγράφεται μέσω εδραιωμένης και επινοημένης μουσικής σημειογραφίας, 2) αντιλαμβάνονται και αναγνωρίζουν τις σχέσεις των Μαθηματικών και της Μουσικής.

Το Διδακτικό Υλικό για την ενότητα *Μουσικά Μαθηματικά*

- Κάρτες με φθογγόσημα (1 σετ ανά δύο μαθητές)
- Ατομικό Φύλλο Εργασίας 1 (ΦΕ1) *«Μουσικά Μαθηματικά»*
- Ατομικό Φύλλο Εργασίας 2 (ΦΕ2) *«Μουσικά Μαθηματικά»*

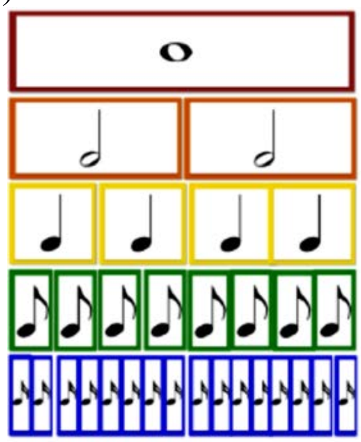
Εφαρμογή του Διδακτικού Σεναρίου Μουσικά Μαθηματικά

Ι. Προσανατολισμός του ενδιαφέροντος και ενεργητική προσέγγιση της γνώσης (5 λεπτά).

Ζητήσαμε από τους μαθητές & τις μαθήτριες να εκφράσουν τις απόψεις τους στην ερώτηση «Πώς μπορούμε να γράψουμε μουσική;». Κάποια παιδιά απάντησαν ότι χρειαζόμαστε το πεντάγραμμο και σύμβολα, όπως το κλειδί του σολ, τις νότες. Συζητήσαμε με όλη την τάξη τον ρόλο καθενός στοιχείου. (Στόχος Β1).

ΙΙ. Επαφή με νέα δεδομένα και σχηματοποίηση έννοιας (30 λεπτά).

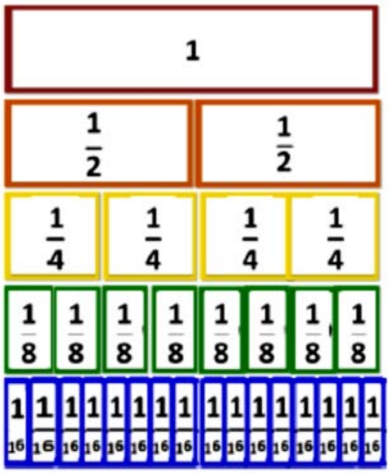
Δραστηριότητα «Κάρτες με φθογγόσημα» (Σχήμα 1).



ΣΧΗΜΑ 1: Ρυθμικές κάρτες (χειραπτικό υλικό)

Μοιράσαμε στους μαθητές & τις μαθήτριες τις κάρτες με τα φθογγόσημα που αναπαριστάνουν τις ρυθμικές αξίες των μουσικών φθόγγων και συζητήσαμε τον τρόπο της αναπαράστασης. Κάθε ζευγάρι είχε ένα σετ καρτών που περιλάμβανε μία κάρτα με το «ολόκληρο», 2 κάρτες με το «μισό», 4 κάρτες με το «τέταρτο», 8 με το «όγδοο» και 16 με το «δέκατο έκτο». Στη συνέχεια, ζητήσαμε από κάθε ζευγάρι να τοποθετήσει τις κάρτες, ξεκινώντας από το «ολόκληρο», συνεχίζοντας με τις 2 κάρτες με τα «μισά» κ.ο.κ., όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Ζητήσαμε να παρατηρήσουν τις σχέσεις (π.χ. «ολόκληρο» = 2 «μισά») και να μας πουν από πού πηγάζουν τα ονόματά των φθογγόσημων (όγδοο, δέκατο έκτο κ.λπ.) (Στόχοι Α1, Α2). Μας απάντησαν ότι το ολόκληρο το κόψαμε σε δυο ίσα κομμάτια και πήραμε τα «μισά», σε τέσσερα ίσα κομμάτια και πήραμε το ένα, για τα «τέταρτα», κ.ο.κ.

Στο ΦΕ 1, στην 1η δραστηριότητα ζητάμε να γράψουν τα φθογγόσημα και την ονομασία τους καθώς και τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των διαφορετικών φθογγόσημων. Στη 2η δραστηριότητα ζητάμε να αποδώσουν τις ρυθμικές αξίες φθογγόσημων με κλάσματα και να καταγράψουν την αντιστοιχία αυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα 2 (Στόχοι Α3 και Β2). Όλα τα παιδιά απάντησαν στην προφορική ερώτηση: «Τι εκφράζουν τα συγκεκριμένα κλάσματα;», ότι το ½ εκφράζει το ένα από τα δύο μέρη (Στόχοι Α4 και Α5). Ακολούθησαν οι προφορικές καθοδηγητικές ερωτήσεις «Τι φανερώνουν οι όροι του κλάσματος;», «Ποια κλασματική μονάδα είναι η μεγαλύτερη και ποια η μικρότερη;», καθώς έγινε σύγκριση με τη βοήθεια των καρτών(Στόχος Α6). Στην 3η δραστηριότητα, ζητάμε να καταγραφούν οι παραπάνω κλασματικές μονάδες σε αύξουσα σειρά κάτι που έκανε σωστά το 82% των παιδιών.



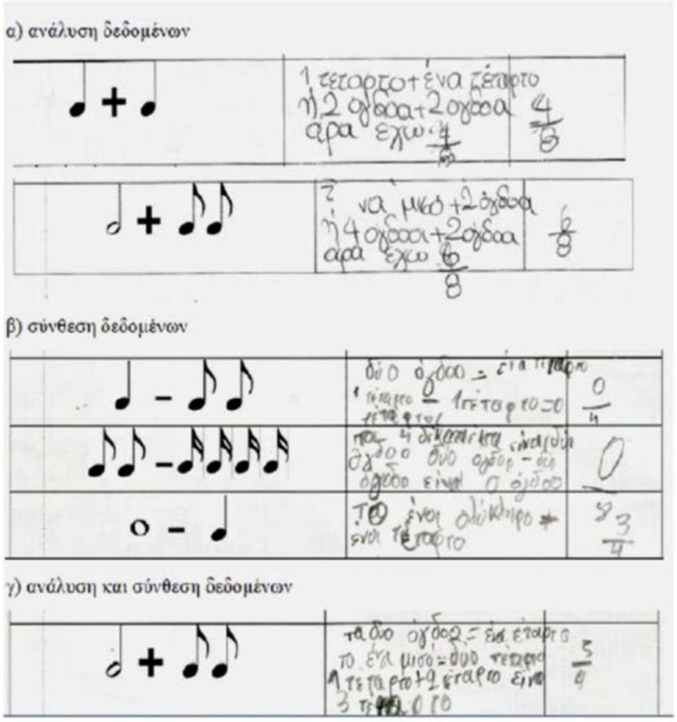
ΣΧΗΜΑ 2: Αντιστοιχία με κλασματικές μονάδες

ΙΙΙ. Επεξεργασία και Εφαρμογή νέων δεδομένων (45 λεπτά).

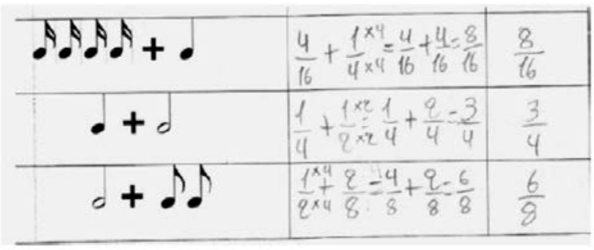
Οι μαθητές-τριες ασχολήθηκαν ατομικά με τις δραστηριότητες του ΦΕ2, ενώ μπορούσαν να χρησιμοποιούν βοηθητικά τις ρυθμικές κάρτες.

- Δραστηριότητα 1: Στον πρώτο πίνακα κλήθηκαν να γράψουν τον κλασματικό αριθμό που αντιστοιχεί στη ρυθμική αξία του δοσμένου φθογγόσημου (Στόχοι Α7 και Α9), ενώ στον δεύτερο πίνακα, αντιστρόφως, το φθογγόσημο που αντιστοιχεί στον δοσμένο κλασματικό αριθμό (Σωστές απαντήσεις: 94,6%)
- Δραστηριότητα 2: Οι μαθητές & οι μαθήτριες έπρεπε να ανακαλύψουν ισοδύναμα κλάσματα γράφοντας φθογγόσημα και σύνολα φθογγόσημων ίδιας χρονικής διάρκειας (Στόχος Α8). (Σωστές απαντήσεις: 85,5%)
- Δραστηριότητα 3: Οι μαθητές & οι μαθήτριες κλήθηκαν να διατάξουν κλασματικές μονάδες σε φθίνουσα σειρά, αφού πρώτα αντικαταστήσουν ορισμένα δοσμένα φθογγόσημα με τις αντίστοιχες κλασματικές μονάδες (Στόχος Α10). (Σωστές απαντήσεις: 62%)
- Δραστηριότητες 4-5: Οι μαθητές & οι μαθήτριες κλήθηκαν να εκτελέσουν προσθέσεις και αφαιρέσεις με μουσικούς φθόγγους, γράφοντας στη δεύτερη στήλη του πίνακα τη σκέψη που έκαναν και έπειτα στην τρίτη στήλη το κλάσμα που προκύπτει (Στόχος Α11- Α12). (Σωστές απαντήσεις για την 4η: 78,3%, για την 5η: 76%)

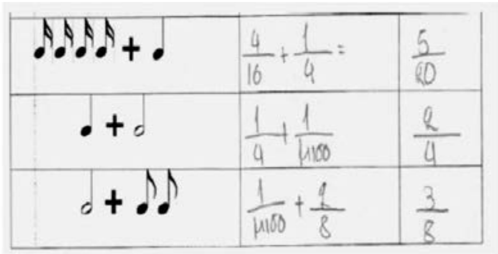
Για να αναλύσουμε τα ευρήματά μας ομαδοποιήσαμε τους τρόπους με τους οποίους σκέφτηκαν τα παιδιά για να κάνουν τις προσθέσεις και αφαιρέσεις των φθογγόσημων σε τρεις κατηγορίες: ο *περιγραφικός ή λεκτικός*, όπου γίνεται χρήση του χειραπτικού υλικού για την εύρεση της απάντησης (Σχήμα 3), ο *μαθηματικός*, όπου η επεξεργασία είναι μαθηματική (Σχήμα 4^{α}, 4^{β}) και ο *μουσικός*, όπου χρησιμοποιούνται τα φθογγόσημα για την καταγραφή της σκέψης. Ο περιγραφικός τρόπος φαίνεται να αποτελεί τον πιο προσιτό ή πιο ενδιαφέροντα τρόπο καταγραφής, καθώς εμφανίζεται στο μεγαλύτερο ποσοστό απαντήσεων (55,3% του συνόλου των απαντήσεων που δόθηκαν στις εργασίες 4 και 5). Σε αντιδιαστολή, ο μαθηματικός τρόπος αποτελεί το 22,7% των απαντήσεων και ο μουσικός το 4,3%. Το 8,2% δεν κατέγραψε τη σκέψη του παρά μόνο το αποτέλεσμα της πράξης και το 9,5% δεν απάντησε.



ΣΧΗΜΑ 3: Περιγραφικός τρόπος - Καταγραφή σκέψης με χρήση χειραπτικού υλικού (ρυθμικών καρτών)



ΣΧΗΜΑ 4α: Μαθηματική Καταγραφή σκέψης – σωστές απαντήσεις (77%)



ΣΧΗΜΑ 4β: Μαθηματική Καταγραφή σκέψης – λανθασμένες απαντήσεις (23%)

Αναφορικά με τον μαθηματικό τρόπο επίλυσης, διαπιστώσαμε ότι το ένα τέταρτο των απαντήσεων που δόθηκαν με μαθηματική επεξεργασία ήταν λανθασμένες, επαληθεύοντας έτσι τις δυσκολίες που, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές & μαθήτριες στην εκτέλεση πράξεων κλασμάτων (σχήμα 4β).

- Δραστηριότητα 6: Οι μαθητές & οι μαθήτριες κλήθηκαν να εκτελέσουν πράξεις αφαίρεσης και πρόσθεσης κλασμάτων, χρησιμοποιώντας το ΜΜΑ (Στόχος Α13). Συγκεκριμένα, μετέτρεψαν τα κλάσματα στις αντίστοιχες ρυθμικές αξίες και έκαναν τη "μουσική πρόσθεση & αφαίρεση" αντί της μαθηματικής λύσης (μετατροπή κλασμάτων σε ομώνυμα) και κατέγραψαν τον κλασματικό αριθμό που προκύπτει (Σχήμα 5) (σωστές απαντήσεις 84,8%).

ΣΧΗΜΑ 5: Χρήση του Μοντέλου Μουσικής Αναπαράστασης (Εργασία 6)

Στον παρακάτω Πίνακα 1, συγκρίνουμε την επίδοση των μαθητών & των μαθητριών στις δραστηριότητες 4 και 5 (όπου επέλεξαν τον τρόπο επίλυσης και κατέγραψαν τη σκέψη τους) με αυτήν στη δραστηριότητα 6 (όπου τους ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν το ΜΜΑ).

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Σύγκριση Επίδοσης των μαθητών – τριών στις εργασίες 4,5 και 6

	Σωστές Απαντήσεις	*Λάθος Απαντήσεις*
Εργασίες 4 και 5	**78,4%**	**21,6%**
Εργασία 6	**84,8%**	**15,2%**

Στις δραστηριότητες 4 και 5, οι σωστές απαντήσεις αποτελούν το 78,4% επί του συνόλου των απαντήσεων που δόθηκαν. Στη δραστηριότητα 6, οι σωστές απαντήσεις αποτελούν το 84,8% του συνόλου των απαντήσεων που κατεγράφησαν. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι η διεπιστημονική προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά στη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων.

Επίσης, διερευνήσαμε την επίδοση των μαθητών που παρουσίασαν *μαθηματικό τρόπο* καταγραφής της σκέψης τους (Σχήμα 4$^{\alpha}$ - 4$^{\beta}$) σε σύγκριση με την επίδοση που είχαν με τη χρήση του ΜΜΑ. Ειδικότερα, οι μαθητές-τριες που είχαν μαθηματικό τρόπο καταγραφής σκέψης και έκαναν σωστούς μαθηματικούς υπολογισμούς είχαν 77 σωστές απαντήσεις (77% του συνόλου μαθηματικών απαντήσεων). Στη συνέχεια, που τους ζητήθηκε να επιλύσουν τις πράξεις κλασμάτων με τη χρήση του ΜΜΑ, δόθηκαν 44 σωστές απαντήσεις (48,3%) και 15 λανθασμένες (16,5%). Αντίστοιχα, για τους μαθητές-τριες που είχαν μαθηματικό τρόπο καταγραφής σκέψης και παρουσίασαν λάθος μαθηματική επεξεργασία, έδωσαν 23 απαντήσεις που ήταν λάθος (23% του συνόλου μαθηματικών απαντήσεων). Στη συνέχεια, στην 6η άσκηση, που τους ζητήθηκε να επιλύσουν τις πράξεις κλασμάτων με τη χρήση του μοντέλου μουσικού αναπαράστασης, δόθηκαν 24 σωστές απαντήσεις (26,4%) και 8 λανθασμένες (8,8%). Διαπιστώσαμε ότι τώρα, με τη χρήση του ΜΜΑ, το ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων που δόθηκαν από μαθητές που απάντησαν με μαθηματικό τρόπο λανθασμένα στις δραστηριότητες 4 και 5 μειώθηκε από 23% σε 8,8%. Συνεπώς, μαθητές & μαθήτριες που έκαναν λανθασμένους μαθηματικούς υπολογισμούς, φάνηκε να βοηθήθηκαν από τη χρήση χειραπτικού υλικού και του ΜΜΑ για την εκτέλεση τέτοιων πράξεων. Από την άλλη το γεγονός ότι δόθηκαν λανθασμένες απαντήσεις με το ΜΜΑ (16,5%) από μαθητές που αρχικά απάντησαν σωστά επιλύοντας με μαθηματικό τρόπο, πιθανόν να δικαιολογείται από το γεγονός ότι πρώτη φορά ήρθαν σε επαφή με ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης – συμβολισμού ποσοτήτων, το οποίο επεξεργάστηκαν με τη χρήση ενός χειραπτικού υλικού (ρυθμικές κάρτες) και δεν είχαν περισσότερο χρόνο για να εξοικειωθούν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Επίδοση Μαθητών με τη Χρήση Μοντέλου Μουσικής Αναπαράστασης σε σχέση με τον Μαθηματικό τρόπο Καταγραφής Σκέψης

Επίλυση Εργασιών 4 και 5:	Σωστή		Λάθος	
Ποσοστό Απαντήσεων	77%		23%	
Επίλυση Εργασίας 6:	Σωστή	Λάθος	Σωστή	Λάθος
Ποσοστό Απαντήσεων	48,3%	16,5%	26,4%	8,8%

IV. Ανατροφοδότηση-Συζήτηση στην τάξη (10 λεπτά)

Οι μαθητές & οι μαθήτριες εξέφρασαν τη γνώμη τους σχετικά με το μάθημα. Περιέγραψαν τις εντυπώσεις τους αναφορικά με τη σύνδεση των δύο μαθημάτων, Μαθηματικών και Μουσικής, και αποτύπωσαν τις προσωπικές τους εμπειρίες, ζωγραφίζοντας και γράφοντας ένα τίτλο για το μάθημα (Στόχος Β2).

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην ενότητα *Μουσικά Μαθηματικά*, οι μαθητές & οι μαθήτριες προσέγγισαν την έννοια του κλάσματος μέσω της μουσικής σημειογραφίας και γνώρισαν έναν τρόπο προσέγγισης διαφορετικό από τον "παραδοσιακό" για την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων. Από τη συζήτηση της ανατροφοδότησης και τις ζωγραφιές τους φάνηκε πως οδηγήθηκαν σε μία διαφορετική οπτική των μαθηματικών, καθώς καταργήθηκαν τα “σύνορα” των δυο γνωστικών αντικειμένων και αντιλήφθηκαν τη “συνομιλία” των επιστημών. Το Μοντέλο Μουσικής Αναπαράστασης με την εναλλακτική αναπαράσταση της έννοιας του κλάσματος φαίνεται ότι βοήθησε μία μερίδα μαθητών και μαθητριών να εκτελέσουν σωστά την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων και ότι ήταν ευρύτερα ευεργετικό για το σύνολο των παιδιών. Ελπίζουμε ότι η παραπέρα εφαρμογή ολόκληρου του σεναρίου θα μας οδηγήσει σε πιο τεκμηριωμένα συμπεράσματα για την επίδραση της διεπιστημονικής προσέγγισης που προτείνουμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαγάτσης, Α-Χ. (2006). Μαθηματικά και Μουσική: Μια πολυδιάστατη προσέγγιση, στο Γαγάτση, Α., Παναούρα, Α., Δαμιανού, Π.(επιμ.) Πρακτικά 8ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης (σελ.23-38).

An, S., Capraro, M. M., & Tillman, D. A. (2013). Elementary teachers integrate music activities into regular mathematics lessons: Effects on students’ mathematical abilities. Journal for Learning through the Arts: A Research Journal on Arts Integration in Schools and Communities, 9(1). class_lta_12867.

Carrier, S., Wiebe, E.N. Gray, P. and Teachout, D. (2011). BioMusic in the Classroom: Interdisciplinary Elementary Science and Music Curriculum Development, School Science and Mathematics 111(8), 425-434.

Courey, S., Balogh, E., Siker, J., Paik, J. (2012). Academic Music: Music Instruction to Engage Third Grade Students in Learning Basic Fraction Concepts. Educational Studies in Mathematics

Dickinson, Dee. (1993). Music and the Mind. Seattle, Wash.: New Horizons for Learning.

Erickson, Frederick, (2014): Qualitative Research Methods for Science Education. In: Second International Handbook of Science Education, No.39. B. J. Fraser et. al. (eds).

Gardner, H. (1985). Frames of mind, the theory of multiple intellingence. New York: Basic Books.

Jacobs, H. (1989), *Interdisciplinary curriculum: Design and implementation*, Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Johnson, G. and Edelson, J. (2003). Integrating Music and Mathematics in the Elementary Classroom, Teaching children mathematics 9(8), 474-479

Kassell, C. (1998). Music and the theory of multiple intelligences: Gardner's theory has lent itself to classroom activities that exercise different intelligences, but some music activities supposedly based on this theory may be misguided. Music Educators Journal, 84, (5) 29-32.

Vaugh, K. (2000). Music and Mathematics: Modest Support for the Oft-Claimed Relationship, Journal of Aesthetic Education 34(3-4).

ΤΡΟΠΟΙ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΠΡΑΞΕΙΣ, ΜΕΓΕΘΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου (kpchristou@gmail.com)
Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις δυσκολίες των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς και εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο επιδρά η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (δηλ. η τάση να εφαρμόζονται ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς) σε αριθμητικές πράξεις και στην κατανόηση της διάταξης και της πυκνής δομής των ρητών. Τα αποτελέσματα μελέτης σε 189 μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης έδειξαν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι σε πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν (π.χ., γίνεται 8:_=5;) οι αριθμοί που λείπουν είναι φυσικοί και οι πράξεις δίνουν πάντα συγκεκριμένα αποτελέσματα (ο πολ/σμός μεγαλώνει κι η διαίρεση μικραίνει). Η τάση αυτή συσχετίζεται θετικά με την κατανόηση των ιδιοτήτων των ρητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στο ευρύτερο ζήτημα των δυσκολιών των μαθητών με την κατανόηση του ρητού αριθμού και πιο συγκεκριμένα διερευνά το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στον τρόπο κατανόησης των ρητών. Ο όρος προκατάληψη του φυσικού αριθμού χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία για να χαρακτηρίσει την τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς αριθμούς (Ni & Zhou, 2005), μια τάση που συχνά οδηγεί σε λάθη και χαμηλές επιδόσεις λόγω των διαφορών ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και τους μη-φυσικούς.

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού φαίνεται να είναι το αποτέλεσμα μιας καλά εδραιωμένης γνώσης για τον αριθμό που έχει τις ρίζες της στην αρχική κατανόηση του αριθμού που οργανώνεται από πολύ πρώιμη ηλικία γύρω από τους φυσικούς αριθμούς και την διαδικασία της απαρίθμησης (Gelman, 2000). Μια τέτοια αρχική κατανόηση του αριθμού ενισχύεται τα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης με τη συστηματική χρήση των φυσικών αριθμών (Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008) καταλήγοντας να αποτελεί μια καλά διαμορφωμένη γνώση για το πως πρέπει να μοιάζει ο αριθμός και ποιες να είναι οι ιδιότητές του (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Έτσι, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα σε δύο ψευτο-διαδοχικούς ρητούς αριθμούς, για παράδειγμα ανάμεσα στο 0.5 και το 0.6, καθώς θεωρούν ότι οι αριθμοί γενικώς είναι διακριτοί, όπως οι φυσικοί αριθμοί (Vamvakoussi et al., 2012). Επίσης, έχουν την τάση να διατάσσουν τους ρητούς χρησιμοποιώντας ιδιότητες των φυσικών αριθμών, θεωρώντας, για παράδειγμα, ότι οι δεκαδικοί αριθμοί με τα περισσότερα ψηφία είναι και μεγαλύτεροι (π.χ., 2,346>2,8) (Nesher & Peled, 1986), ή ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (Moss, 2005).

Ένα άλλο πεδίο της μαθηματικής δραστηριότητας που θα μπορούσε να επηρεαστεί από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και το οποίο σχετικά πρόσφατα επανεξετάστηκε μέσα από αυτή την προσέγγιση είναι οι πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς ή/και σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς και πιο συγκεκριμένα η τάση να θεωρείται ότι η πρόσθεση και ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνουν τους αριθμούς ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση τους μικραίνουν. Πολλοί ερευνητές στο παρελθόν είχαν επισημάνει αυτές τις παρανοήσεις στον τρόπο με τον οποίο λύνουν οι μαθητές λεκτικά προβλήματα (βλ. για παράδειγμα (Bell, Swan, & Taylor, 1981), ενώ ο Fischbein (1987), που ήταν πιθανότατα ο πρώτος που παρατήρησε το συγκεκριμένο φαινόμενο, υποστήριξε ότι οι μαθητές συνδέουν κατά απόλυτο τρόπο τις αριθμητικές πράξεις με συγκεκριμένα αποτελέσματα λόγω της ύπαρξης άδηλων, πρωτόγονων μοντέλων για κάθε πράξη, όπως για παράδειγμα του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Άλλοι ερευνητές επεσήμαναν ότι αυτά τα άδηλα μοντέλα είναι συμβατά και υποστηρίζονται από την αρχική γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς και την εμπειρία με πράξεις αποκλειστικά με τέτοιους αριθμούς (Christou, 2015; Vamvakoussi et al., 2012).

Πιο συγκεκριμένα, η πρόσθεση και ο πολ/σμός ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς δίνει πάντα ως αποτέλεσμα αριθμούς μεγαλύτερους από τους αρχικούς αριθμούς (εκτός βέβαια αν εμπλέκονται το 0 ή το 1 αντίστοιχα), ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς έχει ως αποτέλεσμα αριθμούς μικρότερους των αρχικών. Αυτό όμως δεν συμβαίνει όταν στις πράξεις εμπλέκονται μη-φυσικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, ο πολ/σμός με αριθμούς μικρότερους της μονάδας έχει ως αποτέλεσμα αριθμούς μικρότερους του πολλαπλασιαστή (π.χ., 8□1/2=4) ενώ η διαίρεση με αριθμό μικρότερο της μονάδας μεγαλώνει τους διαιρετέους (π.χ., 3:1/3=9). Όταν μάλιστα οι μαθητές μάθουν τους αρνητικούς αριθμούς, τότε παύει να ισχύει ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς κι η αφαίρεση πάντα τους μικραίνει [π.χ., 3+(-2)=5].

Σε πρόσφατες μελέτες που εξέτασαν αυτό το φαινόμενο δόθηκαν σε μαθητές γυμνασίου (Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel, & Van Dooren, 2015) αλλά και σε ενήλικες συμμετέχοντες (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2013) ερωτήσεις όπως "το 5+2x είναι πάντα μεγαλύτερο από 5;" Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι πράγματι οι συμμετέχοντες είχαν ισχυρές διαισθητικές πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων, που έπαιρναν τη μορφή γενικών κανόνων όπως ότι η πρόσθεση και ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνουν τους αριθμούς, ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση πάντα τους μικραίνουν.

Παρόλα αυτά, σε προηγούμενη μελέτη (Χρήστου, 2014) εκφράστηκε η κριτική ότι οι απαντήσεις στα συγκεκριμένα έργα των Vamvakoussi και συνεργατών της (2013) και της Van Hoof και των συνεργατών της (2015) θα μπορούσαν να οφείλονται όχι μόνο στη χρήση γενικών κανόνων για τα αποτελέσματα των πράξεων αλλά και σε μία στρατηγική δοκιμής με συγκεκριμένους αριθμούς που αποδίδονται στα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς (π.χ., στο x στην παραπάνω περίπτωση). Μια τέτοια στρατηγική θα επηρεάζονταν επίσης από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, η οποία θα ωθούσε τους μαθητές να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα, βγάζοντας συνολικά συμπεράσματα για το αποτέλεσμα των πράξεων στη βάση των αποτελεσμάτων των συγκεκριμένων δοκιμών. Υπήρχαν σημαντικές ενδείξεις για την ύπαρξη μιας τέτοιας στρατηγικής από ποιοτικές μελέτες με ατομικές συνεντεύξεις σε μαθητές Α’ Λυκείου, με ερωτήσεις όπως «ποιο είναι μεγαλύτερο το 5δ ή το 4/δ», όπου στην πλειοψηφία τους οι μαθητές απαντούσαν ότι το 5δ είναι «πάντα μεγαλύτερο γιατί είναι πολλαπλασιασμός ενώ το 4/δ είναι διαίρεση» και δικαιολόγησαν την απάντησή τους δοκιμάζοντας με μια σειρά φυσικών αριθμών (όπως 1, 2, 3), και με τον τρόπο αυτόν δικαιολογούσαν την αρχική τους απάντηση [βλ. επίσης (Christou & Vosniadou, 2012) (Van Hoof et al., 2015)]. Η θέση αυτή υποστηρίζονταν επίσης από παλιότερες μελέτες που έδειχναν ότι μαθητές μέχρι και Α’ Λυκείου έχουν την τάση να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι το 4γ αναπαριστά φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, ενώ η παράσταση κ+3 αναπαριστά μόνο φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 3 (Christou & Vosniadou, 2012). Παρόλα αυτά έλειπαν δεδομένα από ποσοτικές μελέτες που να υποστηρίζουν αυτή τη διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις πράξεις με αριθμούς που λείπουν.

Προηγούμενη μελέτη (Christou, 2015; Χρήστου, 2014) κάλυψε αυτό το κενό, καθώς με χρήση ερωτηματολόγιου σε δείγμα μαθητών Ε’ και Στ΄ Δημοτικού, παρουσιάστηκαν ποσοτικά δεδομένα που υποστήριζαν την υπόθεση ότι η τάση των μαθητών να περιμένουν συγκεκριμένα αποτελέσματα από κάθε αριθμητική πράξη είναι αποτέλεσμα επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, που επηρεάζει και τις δύο βασικές στρατηγικές που φαίνεται να χρησιμοποιούν για να απαντήσουν σε αυτές τις ερωτήσεις: α) τη στρατηγική να βασίζονται σε γενικούς κανόνες για το αποτέλεσμα κάθε πράξης, κανόνες που είναι επηρεασμένοι από διαισθητικές πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα κάθε πράξης (δηλ. η πρόσθεση και ο πολ/σμός μεγαλώνουν, η αφαίρεση και η διαίρεση μικραίνουν), και β) τη στρατηγική να δοκιμάζουν συγκεκριμένους αριθμούς, η οποία επηρεάζεται από την τάση τους να θεωρούν ότι τα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς μπορούν να αντικατασταθούν μόνο με φυσικούς αριθμούς.

Η παρούσα μελέτη χρησιμοποιεί την ίδια μεθοδολογία σε νέο και μεγαλύτερο δείγμα μαθητών για να τεκμηριώσει καλύτερα τα αποτελέσματα της προηγούμενης μελέτης όσον αφορά την επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις (Christou, 2015; Χρήστου, 2014). Ταυτόχρονα πάει ένα βήμα παραπέρα και εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο συσχετίζεται η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις με την επίδρασή της στην κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού. Για το λόγο αυτό οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν όχι μόνο σε ερωτήσεις με αριθμητικές πράξεις αλλά και να διατάξουν μια σειρά από δεκαδικούς και κλάσματα και να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αφορούσαν την πυκνότητα της δομής τους.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα μελέτη συμμετείχαν 189 μαθητές/τριες Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού· 104 ήταν αγόρια και 85 κορίτσια· 73 από την Ε’ και 116 από την ΣΤ’ τάξη Δημοτικού σχολείου της Ελλάδας. Ήδη από την Δ’ Δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν ιδιότητες των ρητών και πράξεις με ρητούς αριθμούς.

Υλικά - Διαδικασία

Στους συμμετέχοντες δόθηκε να συμπληρώσουν ένα έντυπο τεστ με 34 ερωτήσεις κλειστού τύπου, ένα μέρος του οποίου παρουσιάζεται εδώ. Οι πρώτες 28 ερωτήσεις/έργα αφορούσαν πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και κενά που συμβόλιζαν αριθμούς που λείπουν, όπου επίσης δίνονταν το αποτέλεσμα της κάθε πράξης (π.χ., 2:_=5). Ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν αν «γίνεται» ή «δεν γίνεται» να ισχύει μια τέτοια ισότητα, δηλαδή αν γίνεται να βρεθεί τέτοιος αριθμός που θα έδινε στη συγκεκριμένη αναγραφόμενη πράξη το δοσμένο αποτέλεσμα, χωρίς απαραίτητα να πουν ποιος είναι αυτός ο αριθμός.

Υπήρχαν τρεις κατηγορίες έργων: 4 έργα στα οποία η αναγραφόμενη πράξη και το αποτέλεσμα ήταν συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων (δηλαδή ο πολ/σμός μεγάλωνε, ενώ η διαίρεση μίκραινε) και όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί (π.χ., 7×_=21)· άλλα 4 έργα με αποτελέσματα συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί (π.χ., 6×_=11)· και 8 έργα στα οποία παραβιάζονταν οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων (π.χ., 2:_=5). Στα αντίστοιχα έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., 8+_=3) η σωστή απάντηση για τους μαθητές αυτής της ηλικίας είναι «δεν γίνεται» κι έτσι αυτές οι ερωτήσεις λειτουργούν ως εξουδετερωτές της συνεχόμενης απάντησης «γίνεται» που είναι και η μόνη σωστή στα έργα πολ/σμού και διαίρεσης. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν έχουν ακόμα μάθει τους αρνητικούς αριθμούς κι έτσι δεν έχει ακόμα παραβιαστεί η αρχική πεποίθησή τους ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει ενώ η αφαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου δόθηκαν έξι ερωτήσεις κλειστού τύπου με την μορφή ανισωτικής σχέσης ανάμεσα στην πράξη δύο δοσμένων αριθμών, όπου το σύμβολο της πράξης έλειπε, και ένα δοσμένο αριθμητικό αποτέλεσμα (π.χ., 3_10>3)· οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν ανάμεσα σε «πολλαπλασιασμό» ή «διαίρεση» την πράξη η οποία θα ικανοποιούσε τη σχέση. Δύο από αυτά τα έργα ήταν συμβατά με τις διαισθήσεις των μαθητών ότι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει, κι έτσι αν οι μαθητές τα απαντούσαν βασιζόμενοι σε αυτές τους τις πεποιθήσεις θα απαντούσαν σωστά (π.χ., 3_10>3), ενώ στα υπόλοιπα τέσσερα έργα με αυτόν τον τρόπο θα απαντούσαν λανθασμένα (π.χ., 6_0.2<6).

Στο τρίτο μέρος του ερωτηματολόγιου δόθηκαν μια σειρά ερωτήσεων που αφορούσαν την κατανόηση των ρητών αριθμών. Ζητήθηκε από τους μαθητές να διατάξουν ένα σετ μοναδιαίων κλασμάτων (1/7, 1/5, 1/3, 1/11), ένα σετ κλασμάτων (1/2, 3/2, 1, 1/4) και ένα σετ δεκαδικών (0.12, 1.549, 0.4, 0.387), από το μικρότερο στο μεγαλύτερο,. Επίσης τους ζητήθηκε να απαντήσουν πόσοι αριθμοί θεωρούν ότι υπάρχουν ανάμεσα σε δύο αριθμούς που ορίζονταν από τα ζεύγη: 0 και 1, 0.005 και 0.006, 1/3 και 2/3, επιλέγοντας μία από τρεις δοσμένες απαντήσεις που δόθηκαν σε τυχαία σειρά: α) δεν υπάρχει κανείς, β) υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που θα μπορούσαμε να τους ονομάσουμε όλους έναν προς έναν, και γ) υπάρχουν τόσοι πολλοί που δεν θα μπορούσαμε να τους ονομάσουμε έναν προς έναν. Οι τρεις εναλλακτικές απαντήσεις αντιστοιχούν στους τρεις πιο συνηθισμένους τρόπους απάντησης παρόμοιων ερωτήσεων, όπως έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία (βλ. Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Σε αυτές τις τρεις εναλλακτικές απαντήσεις αντανακλώνται τρία βασικά επίπεδα κατανόησης της δομής των ρητών: μια λανθασμένη κατανόηση όπου αποδίδεται στους ρητούς η ιδιότητα της διακριτότητας των φυσικών αριθμών (εναλλακτική α), η ορθή κατανόηση της πυκνότητας των ρητών (βλ. εναλλακτική γ) και ένα ενδιάμεσο επίπεδο ανάμεσα στα δύο προηγούμενα (βλ. εναλλακτική β) που χαρακτηρίζεται από μια εκλεπτυσμένη διακριτότητα (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Οι μαθητές συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια στην τάξη τους παρουσία του δασκάλου τους και του ερευνητή, σε 40΄ που ήταν επαρκής χρόνος για την πλήρη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν με 0 ενώ οι σωστές με 1. Η αξιοπιστία του συνόλου του ερωτηματολογίου ήταν αρκετά υψηλή (Cronbach's Alpha= .716). Ανάλυση διασποράς της συνολικής επίδοσης δεν έδειξε σημαντικές διαφορές που να οφείλονται στο φύλο [F(1,

181) = 0.027, p = .869, η_p^2 = .000], ή την τάξη [F(1, 181) = .292, p = .590, η_p^2 = .002], που δείχνει ότι αυτές οι δυσκολίες δεν είχαν ξεπεραστεί από τους μεγαλύτερους μαθητές.

Για την ανάλυση των απαντήσεων στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι επίδοσης στις τέσσερις κατηγορίες έργων με πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς που λείπουν, όπως αυτές περιγράφονται παραπάνω· τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Όπως ήταν αναμενόμενο, οι μαθητές έδειξαν την υψηλότερη επίδοση στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων και οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί. Τα ελάχιστα λάθη που εμφανίζονται σε αυτή την κατηγορία δείχνουν ότι τα έργα έγιναν κατανοητά από τους μαθητές και ήταν μέσα στο εύρος των δυνατοτήτων τους.

Μεταβλητή	N	Min	Max	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Συμβατά με ΦΑ	189	.14	1	.844	.188
Συμβατά με μη-ΦΑ	189	0	1	.434	.192
Μη-Συμβατά	189	0	1	.196	.211
Εξουδετερωτές	189	0	1	.096	.186

Πίνακας 1: Μέσες επιδόσεις των μαθητών στα έργα με αριθμητικές πράξεις

Τα αποτελέσματα ελέγχου t-test υποστήριξαν τη βασική υπόθεση για την διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις πράξεις με αριθμούς που λείπουν, καθώς έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων και που οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί ήταν σημαντικά υψηλότερη από τις επιδόσεις στα έργα που ήταν μεν συμβατά με τις πεποιθήσεις τους για τα αποτελέσματα των πράξεων αλλά οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί t(188) = 28.412, p<.001. Επίσης, οι μαθητές σημείωσαν σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τις πράξεις και στις οποίες οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί σε σχέση με τα έργα τα οποία παραβίαζαν τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων t(188) = 14.08, p<.001. Οι μαθητές του δείγματος απάντησαν στα έργα που λειτουργούσαν ως εξουδετερωτές με αρνητικό τρόπο (δεν γίνεται) και η επίδοσή τους σε αυτά ήταν πολύ χαμηλή, σημαντικά χαμηλότερη ακόμα κι από τις επιδόσεις τους στα έργα που παραβίαζαν τις πεποιθήσεις τους για τα αποτελέσματα των πράξεων t(188) = 6.576, p<.001.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου, όπου οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν την πράξη (πολ/σμό ή διαίρεση) που θα έκανε τη δοσμένη ανίσωση ορθή, τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις που αφορούν τα αποτελέσματα των πράξεων (M = .767, SD = .359), σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα που τις παραβίαζαν (M = .416, SD = .427), $t(188) = 8.454$, $p<.001$.

Όσον αφορά τις επιδόσεις στο τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου, οι συχνότητες και τα ποσοστά των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων στις ερωτήσεις διάταξης των ρητών αριθμών παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 και οι απαντήσεις στις ερωτήσεις για την κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 3. Οι χαμηλές επιδόσεις που εμφανίζονται στους Πίνακες 2 και 3, δείχνουν ότι οι μαθητές εμφανίζουν μεγάλες δυσκολίες και λάθη σε ερωτήσεις κατανόησης των ρητών αριθμών, που θα μπορούσαν να εξηγηθούν από το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού.

	Λάθος	Σωστό
Διάταξη μοναδιαίων κλασμάτων	106 (56.1%)	83 (43.9%)
Διάταξη κλασμάτων	140 (74.1%)	49 (25.9%)
Διάταξη δεκαδικών	120 (63.5%)	69 (36.5%)

Πίνακας 2: Επιδόσεις στα έργα διάταξης ρητών αριθμών

	Λάθος (εναλ. α)	Ενδιάμεσο (εναλ. β)	Σωστό (εναλ. γ)
Αριθμοί ανάμεσα στο 0 και 1	63 (33.3%)	69 (36.5%)	57 (30.2%)
Αριθμοί ανάμεσα στο 0.005 και 0.006	112 (59.3%)	39 (20.6%)	38 (20.1%)
Αριθμοί ανάμεσα στο 1/3 και 2/3	95 (50.3%)	55 (29.1%)	39 (20.6%)

Πίνακας 3: Επιδόσεις στα έργα πυκνότητας των ρητών αριθμών

Ανάλυση συσχέτισης κατά Pearson έδειξε ότι υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στην επίδοση στα έργα αριθμητικών πράξεων με αριθμούς που λείπουν και στα έργα ανισώσεων όπου έλειπε το σύμβολο της πράξης $r(189)= .172$, $p<.05$. Επίσης, οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα με αριθμητικές πράξεις ήταν θετικά συσχετιζόμενες με τις επιδόσεις τους στη διάταξη μοναδιαίων κλασμάτων $r(189)= .146$, $p<.05$, δεκαδικών $r(189)= .163$, $p<.05$ και κλασμάτων $r(189)= .219$, $p<.001$, όπως επίσης και με τα έργα που εξέταζαν τη κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών: δηλαδή με τις επιδόσεις στην ερώτηση αν υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα σε 0 και 1 [$r(189)= .139$, $p<.05$], ανάμεσα σε 0.005 και 0.006 [$r(189)= .144$, $p<.05$] και ανάμεσα σε 1/2 και 2/3 [$r(189)= .148$, $p<.05$]. Αντίθετα, οι επιδόσεις στις ανισώσεις όπου έλειπε το σύμβολο της πράξης δεν φάνηκε να συσχετίζονται σημαντικά ούτε με τις επιδόσεις στις ερωτήσεις διάταξης, ούτε με τις επιδόσεις στις ερωτήσεις για την πυκνότητα των ρητών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι ακόμη και στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κι ενώ οι μαθητές έχουν διδαχθεί πράξεις με μη-φυσικούς αριθμούς ήδη από την Δ΄ Δημοτικού, παρόλα αυτά δείχνουν μια ισχυρή τάση να χρησιμοποιούν ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε περιπτώσεις που εμπλέκονται μη-φυσικοί αριθμοί, κάτι που προκαλεί λάθη και χαμηλές επιδόσεις. Η τάση αυτή ονομάζεται συχνά προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Στην περίπτωση των αριθμητικών πράξεων ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν η προκατάληψη αυτή επηρεάζει τους μαθητές με δύο τρόπους: α) επιδρά στη δημιουργία διαισθητικών πεποιθήσεων όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων, που παίρνουν τη μορφή γενικών κανόνων όπως ότι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση τους μικραίνει, και β) ωθεί τους μαθητές να σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς που λείπουν.

Οι τάσεις αυτές εμφανίστηκαν να είναι αρκετά ισχυρές καθώς στα δύο πρώτα μέρη του ερωτηματολογίου οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις αυτές ήταν σημαντικά υψηλότερες από τις επιδόσεις τους στα έργα τα οποία τις παραβίαζαν. Επίσης, οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί ήταν σημαντικά καλύτερες απ’ ότι στα έργα όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί, όταν και στις δύο κατηγορίες οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων δεν παραβιάζονταν. Η τάση των μαθητών να απαντούν, για παράδειγμα, ότι γίνεται 7×_=21 αλλά δεν γίνεται 6×_=11, ενώ και στις δύο περιπτώσεις ο πολ/σμός μεγαλώνει, ερμηνεύτηκε ως δυσκολία να σκεφτούν ρητούς αριθμούς στη θέση των αριθμών που λείπουν. Τα αποτελέσματα αυτά είναι συμβατά με αυτά προηγούμενης μελέτης που χρησιμοποίησε τα ίδια έργα σε άλλο δείγμα μαθητών (Χρήστου, 2014) και ενισχύουν αντίστοιχα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών για τις πεποιθήσεις σε σχέση με τα αποτελέσματα των πράξεων (Fischbein, 1987; Vamvakoussi et al., 2012; Van Hoof et al., 2015) καθώς και για την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι κατά προτεραιότητα οι αριθμοί που λείπουν είναι φυσικοί αριθμοί (Christou & Vosniadou, 2012).

Ένα επίσης σημαντικό εύρημα της παρούσας μελέτης είναι ότι οι δύο βασικές στρατηγικές για να γίνονται εκτιμήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων, δηλαδή η χρήση γενικών κανόνων όπως “ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει” ή η δοκιμή με συγκεκριμένους αριθμούς, συσχετίζονται μεταξύ τους με αρκετά πολύπλοκους τρόπους. Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα των ελέγχων συσχετίσεων, η επίδοση των μαθητών στα έργα με αριθμητικές πράξεις συσχετίζεται θετικά με την επίδοση στα έργα επιλογής της κατάλληλης πράξης που θα έκανε μια ανίσωση σωστή. Επιπροσθέτως, θετική ήταν η συσχέτιση ανάμεσα στην επίδοση στις αριθμητικές πράξεις και στα άλλα έργα που αφορούν την κατανόηση των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών, όπως η διάταξή τους και η πυκνότητα της δομής τους. Από την άλλη μεριά, η επίδοση των μαθητών στα έργα που αφορούσαν τις ιδιότητες των ρητών δεν συσχετίζονταν με τις επιδόσεις στα έργα επιλογής της σωστής πράξης στις ανισώσεις. Αυτά τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να οφείλονται στο ότι, όπως φάνηκε από την ανάλυση των επιδόσεων στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου, τα έργα με αριθμητικές πράξεις χρειάζονται σκέψη όχι μόνο πάνω στο "τι κάνει κάθε πράξη" αλλά και πάνω στους ίδιους τους αριθμούς που εμπλέκονται στις πράξεις, κάτι που επίσης συμβαίνει όταν οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν στις ερωτήσεις που αφορούν τις ιδιότητες των ρητών. Αυτό όμως δεν συμβαίνει απαραίτητα στην περίπτωση των ερωτήσεων για τις ανισώσεις, καθώς αυτές θα μπορούσαν να απαντηθούν με επίκληση μόνο γενικών κανόνων που αφορούν τα αποτελέσματα των πράξεων (π.χ., ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει), χωρίς εστίαση στους αριθμούς που εμπλέκονται. Έτσι θα μπορούσε να εξηγηθεί και γιατί οι επιδόσεις σε αυτά τα έργα επιλογής πράξης δεν συσχετίζονταν με τις επιδόσεις στα έργα κατανόησης των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών. Με άλλα λόγια, με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι για τους μαθητές είναι ένα πράγμα τι κάνουν οι αριθμοί (π.χ., πώς διατάσσονται, πόσο πυκνή είναι η δομή τους) και ένα άλλο τι κάνουν οι πράξεις (π.χ., η διαίρεση πάντα μικραίνει). Ως αποτέλεσμα, αυτές οι δύο στρατηγικές της εκτίμησης των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων, ενώ φαίνεται να διακρίνονται η μία από την άλλη, ταυτόχρονα και οι δύο επηρεάζονται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, έστω και με διαφορετικούς τρόπους η καθεμιά, όπως αναφέρθηκε παραπάνω (βλ. επίσης Christou, 2015). Περαιτέρω μελέτη είναι βεβαίως απαραίτητη για να διερευνηθούν σε βάθος οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης των αριθμητικών πράξεων και οι σχέσεις μεταξύ τους.

Για να καταφέρουν οι μαθητές να δεχθούν ότι είναι δυνατόν ο πολ/σμός, για παράδειγμα, να μικρύνει τον αριθμό, θα πρέπει να απαλλαγούν από τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων και να καταφέρουν να αναπτύξουν την έννοια του αριθμού πέρα από τα όρια του φυσικού αριθμού αποκτώντας μια πιο μαθηματικώς εκλεπτυσμένη κατανόηση για τον αριθμό που να είναι πιο κοντά στην μαθηματική έννοια του πραγματικού αριθμού. Αυτού του τύπου η μάθηση απαιτεί αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς αριθμούς, ενέχει αυξημένες δυσκολίες και απαιτεί χρόνο (Vosniadou et al., 2008). Στα αποτελέσματα άλλωστε δεν εμφανίστηκαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές δεν αλλάζουν εύκολα αυτές τους τις πεποιθήσεις. Για τον λόγο αυτόν χρειάζεται διαρκής υποστήριξη τόσο σε γνωστικό επίπεδο (π.χ., χρήση παραδειγμάτων όπου οι πράξεις δίνουν αποτελέσματα διαφορετικά από τις διαισθήσεις των μαθητών), όσο και σε συναισθηματικό επίπεδο (π.χ., ενίσχυση μεταγνωστικών δεξιοτήτων, παροχή κινήτρων για αλλαγή των λανθασμένων πεποιθήσεων).

Βιβλιογραφία:

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. Educational Studies in Mathematics, 12, 399-420.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 747-758.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. Mathematical Thinking and Learning, 14(1), 1-27.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37.

Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. Educational Studies in Mathematics, 17(1), 67-79.

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40(1), 27-52.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of Mathematical Behavior, 31, 344– 355.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. Educational Studies in Mathematics, 82(2), 323-330.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. Learning and Instruction, (37), 30-38

Vosniadou, S, Vamvakoussi, X, & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Χρήστου, Κ. Χ. (2014). Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις. Στο Μαθηματικά στο σχολείο και την καθημερινή ζωή - Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ) (σελ. 1-10). Φλώρινα, Ελλάδα.

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Χριστοδούλου Θεοδώρα, Νικολάου Στυλιάνα, Ηλία Ιλιάδα, Γαγάτσης Αθανάσιος
Πανεπιστήμιο Κύπρου
christodoulou.theodora@ucy.ac.cy, nicolaou.styliana@ucy.ac.cy, elia.iliada@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy

Το παρόν κείμενο αποτελεί μέρος μιας εργασίας που διερευνά τρόπους που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών, δίνοντας έμφαση στη χρήση της τεχνολογίας και των ρεαλιστικών προβλημάτων. Η παρούσα εργασία εστιάζει στη συμβολή των ρεαλιστικών προβλημάτων στην ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων των παιδιών Α΄ τάξης δημοτικού στην αναγνώριση, ερμηνεία και κατασκευή ραβδογράμματος. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών βελτιώθηκε μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος και η χρήση των ρεαλιστικών προβλημάτων φάνηκε να συμβάλλει στην ικανότητα ερμηνείας ραβδογράμματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα κεντρικό ζήτημα στη Διδακτική και την Ψυχολογία των Μαθηματικών είναι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζουν και μετασχηματίζουν τις μαθηματικές έννοιες (Cobb et al., 1992, σελ. 2). Βασικές έννοιες χρησιμοποιούν απεικονίσεις για να αναπαραστήσουν αφηρημένα νοήματα μέσω οπτικών και χωρικών μεταφορών και σχημάτων απεικόνισης (Tversky, 1997). Τα γραφήματα είναι ίσως το πιο διαδεδομένο παράδειγμα απεικόνισης αφηρημένων εννοιών (Carswell and Wickens, 1988). Πολλοί ερευνητές (π.χ., Wood, 1968) έχουν επικεντρωθεί στην κατανόηση των γραφημάτων εξετάζοντας την ανάγνωση και την ερμηνεία τους, ενώ πολύ λίγοι (π.χ., Friel et al., 2001) είναι αυτοί που έχουν ασχοληθεί με άλλες πιθανές πτυχές της κατανόησης ενός γραφήματος, συμπεριλαμβανομένης της κατασκευής μιας γραφικής παράστασης. Η παρούσα εργασία, πέρα από την ικανότητα ερμηνείας της γραφικής παράστασης (ραβδόγραμμα), εξετάζει την ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής ραβδογράμματος από μαθητές Α΄ τάξης δημοτικού πριν και μετά από διδακτικές παρεμβάσεις, οι οποίες στηρίζονται στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ρεαλιστικά προβλήματα στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Στην παραδοσιακή προσέγγιση διδασκαλίας των μαθηματικών τα προβλήματα χρησιμοποιούνται ως μέσο που βοηθά τους μαθητές να αποκτήσουν και να εφαρμόσουν την καινούρια γνώση. Ωστόσο, τα προβλήματα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια είναι στερεοτυπικά και δίνονται συνήθως στο τέλος του μαθήματος. Ο Freudenthal (1983) στηριζόμενος στην ιστορική μελέτη της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών υποστηρίζει ότι η λύση σε προβλήματα της καθημερινής ζωής αποτελεί τη βάση στην οποία άρχισε η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών. Επομένως, κύριος στόχος της διδακτικής προσέγγισης του εκπαιδευτικού θα πρέπει να είναι η αναζήτηση τέτοιων πραγματικών καταστάσεων. Αυτές οι καταστάσεις βοηθούν στη δόμηση και ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης των μαθητών, σε μια τάξη η οποία λειτουργεί ως περιβάλλον μάθησης τόσο για τους μαθητές όσο και για τον ίδιο τον εκπαιδευτικό. Επομένως, το πλαίσιο των προβλημάτων πρέπει να βασίζεται σε αυθεντικές-καθημερινές ανάγκες των μαθητών, οι οποίες καθιστούν τη διδασκαλία των μαθηματικών ρεαλιστική.

Τα ρεαλιστικά μαθηματικά είναι μια θεωρία διδασκαλίας και μάθησης. Ως εκ τούτου, ο Freudenthal (1983) υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και για τον λόγο αυτό πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, να έχουν σχέση με την κοινωνία και να επιτρέπουν εύκολα την πρόσβαση των μαθητών σε αυτά. Η μαθηματική εκπαίδευση χαρακτηρίζεται ως «ρεαλιστική» όχι μόνο επειδή σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο, αλλά γιατί δίνει έμφαση σε καταστάσεις τις οποίες οι μαθητές μπορούν να φανταστούν. Το σημαντικό επομένως είναι ότι, επίκεντρο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών αποτελεί η λύση προβλημάτων, τα οποία έχουν νόημα για τον μαθητή με την έννοια ότι μπορεί να τα φανταστεί (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

Εστιάζοντας στην εκμάθηση της στατιστικής, αρκετοί ερευνητές επισημαίνουν ότι τα προβλήματα ανάλυσης δεδομένων χρειάζεται να βασίζονται στις γνώσεις των μαθητών για το πλαίσιο/συγκείμενο, έτσι ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να κατανοούν και να ερμηνεύουν τα δεδομένα και όχι μόνο να εφαρμόζουν αριθμητικές διαδικασίες για να επιλύουν τα προβλήματα (English, 2012). Προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει ότι το πλαίσιο του προβλήματος, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο τα δεδομένα του προβλήματος παρουσιάζονται μπορεί να επηρεάσουν τη διαδικασία λύσης τους, αλλά μπορεί επίσης να ενισχύσουν ή να παρεμποδίσουν την ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού των μαθητών (Pfannkuch, 2011).

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τη δυνατότητα ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των παιδιών στην ενότητα της Στατιστικής, ως αποτέλεσμα της χρήσης ρεαλιστικών προβλημάτων. Ειδικότερα, επιδιώκεται να απαντηθούν τα πιο κάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποιος είναι ο βαθμός επιτυχίας των παιδιών στην κατανόηση γραφικών παραστάσεων και ειδικότερα, στην ερμηνεία, αναγνώριση και κατασκευή ραβδογράμματος;
- Μπορεί μια παρέμβαση που εστιάζεται στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων να συμβάλει στην κατανόηση του ραβδογράμματος;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Συμμετέχοντες και ερευνητική διαδικασία

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 58 μαθητές Α΄ τάξης δημοτικού, οι οποίοι προέρχονταν από τρία τμήματα. Συγκεκριμένα, σε όλους τους μαθητές χορηγήθηκε αρχικό δοκίμιο αξιολόγησης με έργα αναγνώρισης, ερμηνείας και κατασκευής ραβδογράμματος. Στη συνέχεια, 18 μαθητές δέχτηκαν παρέμβαση στη στατιστική με έμφαση στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων (Πειραματική Ομάδα-ΠΟ) και 16 μαθητές αποτέλεσαν την ομάδα ελέγχου (ΟΕ), η οποία δέχτηκε διδασκαλία στη βάση του τρέχοντος ΑΠ σπουδών των Μαθηματικών. Οι διδασκαλίες και των δύο ομάδων πραγματοποιήθηκαν από την ίδια ερευνήτρια. Μετά την ολοκλήρωση των παρεμβάσεων χορηγήθηκε στους μαθητές τελικό δοκίμιο, το οποίο ήταν ίδιο με το αρχικό.

Καταρτισμός δοκιμίου

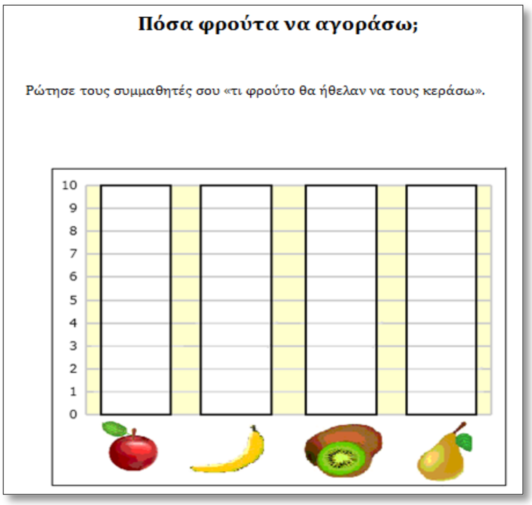
Για τη συλλογή δεδομένων χρησιμοποιήθηκε δοκίμιο με 8 έργα, για να εξεταστεί η ικανότητα των παιδιών στην αναγνώριση, ερμηνεία και κατασκευή ραβδογράμματος. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των έργων από κάθε κατηγορία παρουσιάζονται στο παράρτημα. Το δοκίμιο δόθηκε έγχρωμο στους μαθητές, οι οποίοι εργάστηκαν ατομικά για περίπου 30-40 λεπτά προκειμένου να το συμπληρώσουν. Κάθε πρόβλημα διαβάζονταν δύο φορές μεγαλόφωνα από την ερευνήτρια και οι μαθητές απαντούσαν. Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε για όλους τους μαθητές.

Παρεμβατικά προγράμματα

Σε κάθε ομάδα της έρευνας σχεδιάστηκαν και πραγματοποιήθηκαν ξεχωριστές διδασκαλίες δύο διδακτικών περιόδων, για τις οποίες αναπτύχθηκε σχετικό διδακτικό υλικό (φύλλα εργασίας).

Ειδικότερα, στην ΠΟ δόθηκε έμφαση στη χρήση ρεαλιστικών προβλημάτων, ενώ οι μαθητές της ΟΕ δέχτηκαν την τυπική διδασκαλία της στατιστικής, η οποία περιλάμβανε ερμηνεία δεδομένων, αναγνώριση και κατασκευή ραβδογραμμάτων.

Ένα παράδειγμα δραστηριότητας που δόθηκε στα παιδιά της ΠΟ ήταν το σενάριο ότι η εκπαιδευτικός-ερευνήτρια στο επόμενο μάθημα θέλει να κεράσει στον καθένα από ένα φρούτο. Όμως, δεν ξέρει ποιο είναι το αγαπημένο φρούτο του καθενός. Ανακοινώνεται στα παιδιά ότι η εκπαιδευτικός θα αγοράσει μόνο μήλα, μπανάνες, ακτινίδια και αχλάδια, αλλά δεν ξέρει πόσα να αγοράσει από το κάθε είδος. Έτσι, ζητά από τα παιδιά να βρουν έναν τρόπο να την βοηθήσουν. Το πιο πιθανόν είναι να προσπαθήσουν να ψηφίσουν το αγαπημένο τους φρούτο, σηκώνοντας το χέρι τους. Σε αυτή την περίπτωση, η εκπαιδευτικός μπερδεύεται και ζητά από τα παιδιά να κάνουν μια έρευνα στην τάξη τους (συλλογή δεδομένων), χωρισμένα σε τέσσερις ομάδες, για να δείξουν πόσα φρούτα χρειάζεται να αγοράσει, χωρίς όμως να τους δοθεί γραφική παράσταση. Μέσα από αυτή τη διαδικασία προκύπτει αβίαστα η ανάγκη ότι η γραφική παράσταση είναι ένα βοηθητικό εργαλείο, για να καταγράψουν τα δεδομένα τους. Έτσι, δίνεται σε κάθε ομάδα φύλλο εργασίας στο οποίο παρουσιάζεται η γραφική παράσταση (Διάγραμμα 1), για την καταγραφή των δεδομένων τους. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές ασχολούνται με την κατασκευή γραφικής παράστασης (ραβδόγραμμα), την οποία θα κληθούν στη συνέχεια να ερμηνεύσουν.



Διάγραμμα 1. Γραφική παράσταση για τη δραστηριότητα κατασκευής και ερμηνείας στην ΠΟ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι αναλύσεις των δεδομένων που συλλέχθηκαν, επικεντρώθηκαν σε δύο άξονες: (α) στην επίδοση των μαθητών Α΄ δημοτικού σχετικά με την κατανόηση του ραβδογράμματος (ερώτημα 1) και (β) στη συμβολή των ρεαλιστικών προβλημάτων στην επίδοση των μαθητών (ερώτημα 2).

Η επίδοση των μαθητών: αποτελέσματα από το αρχικό δοκίμιο για την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στο σύνολο των έργων του δοκιμίου, καθώς και σε κάθε κατηγορία έργων: αναγνώριση, ερμηνεία και κατασκευή. Ο μέσος όρος της συνολικής επίδοσης όλων των μαθητών (N=58) για το αρχικό δοκίμιο ήταν .68. Ο μέσος όρος της επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης και ερμηνείας γραφικής παράστασης ήταν .61 και .59 αντίστοιχα, ενώ στα έργα κατασκευής γραφικών παραστάσεων ήταν .86. Πραγματοποιήθηκε επιπρόσθετη ανάλυση χρησιμοποιώντας το Wilcoxon Signed-Rank Test (Πίνακας 2), προκειμένου να προσδιοριστούν τυχόν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών τύπων έργων. Η ανάλυση έδειξε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των έργων κατασκευής και των άλλων δύο κατηγοριών έργων, δηλ. έργων αναγνώρισης γραφικών παραστάσεων (W56=6, z=-5.45, p<.05), και έργων ερμηνείας γραφικών παραστάσεων (W56=2, z=-5.71, p<.05). Διαπιστώνεται επομένως ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην ερμηνεία και στην αναγνώριση γραφικών παραστάσεων, ενώ ήταν πιο ικανοί στην κατασκευή τους.

Πίνακας 1. Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις από το αρχικό δοκίμιο

Συνολική επίδοση			**Έργα αναγνώρισης**			**Έργα ερμηνείας**			**Έργα κατασκευής**		
M	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*N*
.68	.21	58	.61	.26	58	.59	.31	58	.86	.17	58

Πίνακας 2. Αποτελέσματα Wilcoxon Signed-Rank Tests για τη διερεύνηση διαφορών μεταξύ των τριών τύπων έργων στο αρχικό δοκίμιο

	Ερμηνεία-Αναγνώριση		**Κατασκευή-Αναγνώριση**		**Ερμηνεία-Κατασκευή**	
	Δείγμα (N=58)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=58)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=58)	Μ.Ο. κατάταξης
Αρνητική κατάταξη	32	26.67	6	15.50	49	30.57
Θετική κατάταξη	24	30.94	46	27.93	7	14.00
Καμία αλλαγή	2		6		2	
	Z= -.453		**Z= -5.449**		**Z= -5.713**	
	p= .651		**p= .000**		**p= .000**	

Η συμβολή των παρεμβάσεων

Προκειμένου να διερευνηθεί κατά πόσο η επίδοση των μαθητών βελτιώθηκε μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, χρησιμοποιήθηκε επίσης το Wilcoxon Signed-Rank Test. Η ανάλυση διενεργήθηκε τόσο για την πειραματική ομάδα όσο και για την ομάδα ελέγχου, ώστε να διερευνηθούν τυχόν διαφορές στην επίδοση των μαθητών στο αρχικό και στο τελικό δοκίμιο. Η ανάλυση διενεργήθηκε τόσο για τη συνολική επίδοση των μαθητών όσο και για την επίδοσή τους σε κάθε επιμέρους ικανότητα (αναγνώριση, ερμηνεία, κατασκευή).

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, στην ΠΟ οι περισσότεροι μαθητές απέδωσαν καλύτερα μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος και η διαφορά αυτή ήταν στατιστικά σημαντική ($W17=2$, $z=-2.36$, $p<.05$). Αυτή η πρόοδος εξηγείται από τη βελτίωση των μαθητών κυρίως στα έργα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων, στα οποία οι διαφορές ανάμεσα στο αρχικό και στο τελικό δοκίμιο ήταν στατιστικά σημαντικές ($W17=2$, $z=-2.09$, $p<.05$).

Ομοίως, οι περισσότεροι μαθητές της ομάδας ελέγχου παρουσίασαν βελτίωση μετά την εφαρμογή του παρεμβατικού προγράμματος, η οποία ήταν στατιστικά σημαντική ($W15=1$, $z=-2.87$, $p<.05$). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στα έργα αναγνώρισης και ερμηνείας γραφικών παραστάσεων ($W15=1$, $z=-2.64$, $p<.05$ και $W15=2$, $z=-2.56$, $p<.05$ αντίστοιχα).

Πίνακας 3. Αποτελέσματα Wilcoxon Signed-Rank Tests για τη διερεύνηση της συμβολής των παρεμβάσεων στην επίδοση των μαθητών της ΠΟ1, της ΠΟ2 και της ΟΕ ξεχωριστά

Ομάδα		**Συνολική επίδοση**		**Έργα αναγνώρισης**		**Έργα ερμηνείας**		**Έργα κατασκευής**	
ΠΟ2		Δείγμα (N=18)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=18)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=18)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=18)	Μ.Ο. κατάταξης
	Αρνητική κατάταξη	3	7.50	3	4.50	3	9.33	2	4.75
	Θετική κατάταξη	13	8.73	8	6.56	13	8.31	7	5.07
	Καμία αλλαγή	2		7		2		9	
		Z= -2.362		**Z=-1.814**		**Z=-2.092**		**Z=-1.582**	
		p= .018		**p= .070**		**p= .036**		**p= .114**	
ΟΕ		Δείγμα (N=16)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=16)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=16)	Μ.Ο. κατάταξης	Δείγμα (N=16)	Μ.Ο. κατάταξης

	Αρνητική κατάταξη	1	7.00	0	.00	2	3.25	3	4.17
	Θετική κατάταξη	13	7.54	8	4.50	10	7.15	4	3.88
	Καμία αλλαγή	2		8		4		9	
		Z= -2.866		**Z= -2.640**		**Z= -2.556**		**Z= -.264**	
		p= .004		**p= .008**		**p= .011**		**p= .792**	

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα μελέτη ασχολείται με την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων· ένα θέμα το οποίο έχει λάβει ελάχιστη προσοχή από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ειδικότερα, διερευνά την ικανότητα των μαθητών στην αναγνώριση, ερμηνεία και κατασκευή ραβδογράμματος, καθώς επίσης κατά πόσο η χρήση των ρεαλιστικών προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να αναπτύξουν αυτές τις ικανότητες.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγαλύτερη δυσκολία στην ερμηνεία και στην αναγνώριση της γραφικής παράστασης, παρά στην κατασκευή της. Οι αυξημένες γνωστικές απαιτήσεις της ερμηνείας και της αναγνώρισης γραφικής παράστασης σε σχέση με την κατασκευή γραφικής παράστασης μπορούν να εξηγήσουν αυτό το αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, η κατασκευή γραφικής παράστασης περιλαμβάνει ένα σημειωτικό μετασχηματισμό με τη γραφική παράσταση ως αναπαράσταση-στόχο (τελική αναπαράσταση) που πρέπει να κατασκευαστεί. Αυτή η διαδικασία φαίνεται μάλλον απλή για τους μαθητές, οι οποίοι μπορούν να την ακολουθήσουν βήμα προς βήμα, χωρίς κατ' ανάγκην να κατανοούν σε βάθος τη δομή της γραφικής παράστασης. Αντίθετα, η αναγνώριση και η ερμηνεία της γραφικής παράστασης απαιτούν πιο πολύπλοκο συλλογισμό. Παρόλο που η αναγνώριση γραφικών παραστάσεων περιλαμβάνει ένα σημειωτικό μετασχηματισμό με τη γραφική παράσταση ως αναπαράσταση-στόχο, όπως και στην περίπτωση της κατασκευής γραφικών παραστάσεων, εντούτοις απαιτεί τη σύγκριση μεταξύ των δοσμένων γραφικών παραστάσεων και την εστίαση σε συγκεκριμένα δεδομένα και στις σχέσεις τους, προκειμένου να εντοπιστεί η γραφική παράσταση η οποία ανταποκρίνεται στη λεκτική περιγραφή που δίνεται. Η ερμηνεία γραφικών παραστάσεων περιλαμβάνει ένα σημειωτικό μετασχηματισμό με τη γραφική παράσταση ως αρχική αναπαράσταση, η οποία απαιτεί από τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή των δεδομένων που αναπαρίστανται προκειμένου να διακρίνουν τις σχετικές από τις άσχετες συνιστώσες και να βρουν τις σχέσεις στα δεδομένα της γραφικής παράστασης.

Σχετικά με το παρεμβατικό πρόγραμμα, διαπιστώθηκε ότι παρόλο που συνέβαλε στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών ιδιαίτερα στις πτυχές της στατιστικής που υστερούσαν (ερμηνεία ή/και αναγνώριση γραφικών παραστάσεων), εντούτοις η συμβολή του ήταν συγκρίσιμη με την επίδραση της συνηθισμένης διδασκαλίας που δέχτηκε η ομάδα ελέγχου. Αυτό μπορεί να αποδοθεί κατά κύριο λόγο στην περιορισμένη διάρκεια των παρεμβάσεων που δέχτηκε η πειραματική ομάδα.

Τα πιο πάνω ευρήματα θα πρέπει να ειδωθούν κάτω από το σωστό πρίσμα, λαμβάνοντας υπόψη τις αδυναμίες της έρευνας. Στην έρευνα συμμετείχε ένας μικρός αριθμός τάξεων και όπως έχει αναφερθεί, η διάρκεια των παρεμβάσεων ήταν πολύ μικρή. Επομένως, τα ευρήματα της παρούσας εργασίας αποτελούν απλώς ενδείξεις για τη θετική επίδραση της συγκεκριμένης διδακτικής προσέγγισης και ταυτόχρονα έναυσμα για περαιτέρω έρευνα, η οποία θα πρέπει να εκμηδενίζει τους περιορισμούς της παρούσας εργασίας για να βελτιώσει τις γνώσεις μας για την ανάπτυξη της κατανόησης των γραφικών παραστάσεων από τα παιδιά και την πιθανή συμβολή των ρεαλιστικών καταστάσεων σε αυτή την ανάπτυξη. Τέλος, δεν γνωρίζουμε ακόμη πώς η χρήση των ρεαλιστικών προβλημάτων υποστηρίζει την ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα πρώτα χρόνια διδασκαλίας της στατιστικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carswell, C. M. and Wickens, C. D. (1988). Comparative graphics: history and applications of perceptual integrality theory and the proximity compatibility hypothesis. Technical Report, Institute of Aviation, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematical Education. Journal of Research in Mathematics Education, 23(1), 2-33.

English, L. D. (2012). Data modelling with first-grade students. Educational Studies in Mathematics, 81(1), 15-30.

Freudenthal, H. (1983). Didactic phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.

Friel, S. N., Curcio F. R. & Bright G. W., (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 124–158.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (2001). “Realistic Mathematics Education as work in progress” in F. L. Lin (Ed.), Common Sense in Mathematics Education, 1-40, Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan

Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, November 19-23, 2001.

Pfannkuch, K. (2011). The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study. Mathematical Thinking and Learning 13(1-2), 27-46.

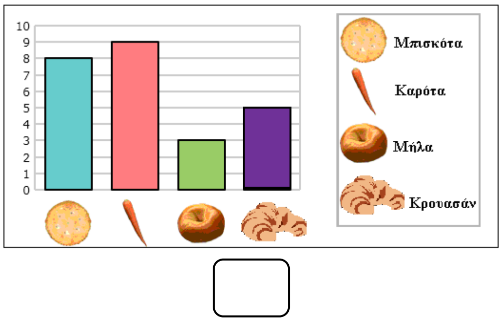
Tversky, B. (1997). Cognitive Principles of Graphic Displays. AAAI Technical Report FS-97-03, 116-124.

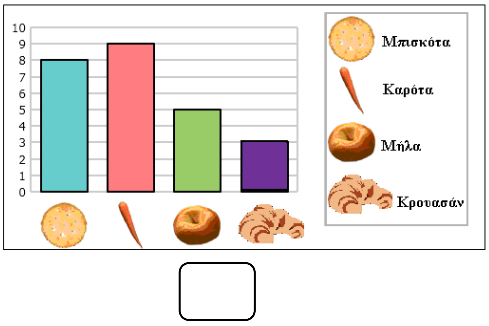
Wood, R. (1968). Objectives in the teaching of mathematics. Educational Research, 10(2), 83–98.

Παράρτημα-Έργα από το δοκίμιο

Έργο αναγνώρισης ραβδογράμματος

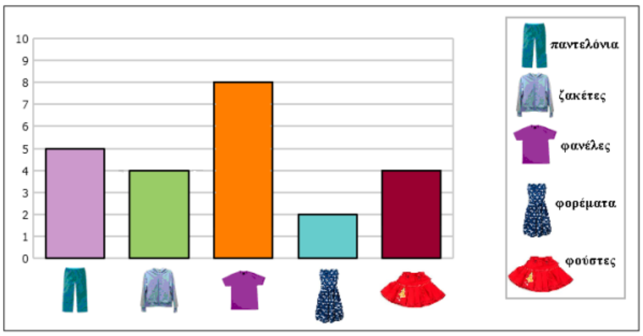
1. Ο Χάρης πήγε εκδρομή και πήρε μαζί του 8 μπισκότα, 9 καρότα, 5 μήλα και 3 κρουασάν. Έφτιαξε μια γραφική παράσταση με τα φαγητά που πήρε μαζί του, για να δείξει στους συμμαθητές του πόσα φαγητά πήρε, ώστε να ξέρουν όταν θα πάνε και οι ίδιοι εκδρομή. Ποια είναι η γραφική παράσταση που εφτιαξε;





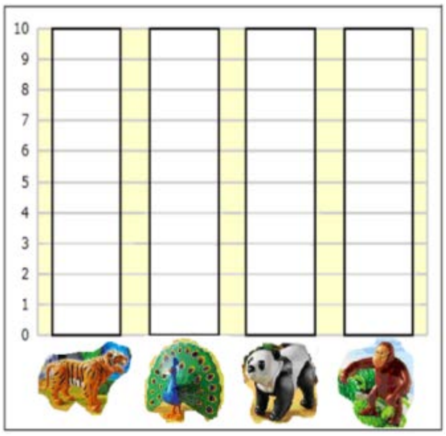
Έργο ερμηνείας ραβδογράμματος

3. Η Λιλή αποφάσισε να δώσει μερικά ρούχα για ανακύκλωση. Στη συνέχεια, έφτιαξε μια γραφική παράσταση, για να δείξει στις φίλες της πόσα ρούχα έδωσε και να κάνουν κι αυτές το ίδιο. Μπορείς να την βοηθήσεις να βρει πόσα ρούχα έδωσε από το κάθε είδος, ώστε να μπορέσει να περιγράψει πιο εύκολα τη γραφική παράσταση που έφτιαξε;



Έργο κατασκευής ραβδογράμματος

7. Η Κατερίνα και η μαμά της σε ένα ταξίδι που έκαναν επισκέφτηκαν ένα ζωολογικό κήπο. Οι συμμαθητές της Κατερίνας την ρώτησαν: «Τι ζώα είδες; Πόσα ζώα είδες;» Η Κατερίνα αποφάσισε να φτιάξει μια γραφική παράσταση για να δώσει ξεκάθαρες απαντήσεις στις ερωτήσεις των συμμαθητών της. Μπορείς να την βοηθήσεις;



Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΕ ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Μαριλένα Β. Χρυσοστόμου & Κωνσταντίνος Χρίστου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
chrysostomou.g.marilena@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy

Σκοπός της εργασίας ήταν η διερεύνηση της δομής της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης. Το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης συμπλήρωσαν 803 μαθητές Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και Α΄ γυμνασίου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης αποτελείται από τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης: την «ικανότητα συλλογισμού για τη συμμεταβολή», την «ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική» και τις «ικανότητες που είναι συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη» και οκτώ παράγοντες πρώτης τάξης. Οι στατιστικά σημαντικές και ψηλές συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων δεύτερης τάξης υποδηλώνουν ότι καθώς αυξάνεται η επίδοση σε μια ικανότητα, αυξάνεται η επίδοση και σε άλλη ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η άλγεβρα είναι σημαντική όχι μόνο για ακαδημαϊκούς σκοπούς αλλά και για τη σημερινή πραγματικότητα, με αποτέλεσμα να τονίζεται η ανάγκη ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης αρχίζοντας από το νηπιαγωγείο, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν τις αλγεβρικές δεξιότητες και τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης που χρειάζονται για την επιτυχία στο λύκειο και πέρα από αυτό (NCTM, 2000). Η έρευνα σχετικά με την αλγεβρική σκέψη μαθητών μικρότερων τάξεων (δημοτικού και γυμνασίου) έχει εστιάσει κυρίως: (α) στη γενίκευση επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων (π.χ. Lannin, 2005; Walkowiak, 2013), (β) στο συλλογισμό για συναρτησιακές σχέσεις εξετάζοντας τις έννοιες της συνδυακύμανσης και της αντιστοιχίας (π.χ. Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011), (γ) στη γενίκευση των ιδιοτήτων αριθμών ή/και των πράξεων (π.χ. Carpenter, Franke & Levi, 2003), (δ) στη συσχεσιακή αντίληψη του συμβόλου της ισότητας (π.χ. Blanton et al., 2011), (ε) στη διατύπωση, χρήση και επίλυση εξισώσεων (π.χ. Brizuela & Schliemann, 2004), (στ) στο χειρισμό και πράξεις με αλγεβρικά σύμβολα (π.χ. Hewitt, 2012), (ζ) στο συλλογισμό για τις ιδιότητες της ισότητας (π.χ. Blanton et al., 2011) και (η) στη μοντελοποίηση/αναπαράσταση σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων (Brizuela & Schliemann, 2004; NCTM, 2000).

Ωστόσο, παρόλη την αυξανόμενη έρευνα στο πεδίο της αλγεβρικής σκέψης την τελευταία δεκαετία (Cai & Knuth, 2011), οι περισσότερες εργασίες επικεντρώνονται σε μια αλγεβρική έννοια ή ικανότητα κάθε φορά, ενώ οι προσπάθειες καθολικής περιγραφής της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης (π.χ.

Kaput, 2008; Kieran, 2004) είναι ελάχιστες (Carraher & Schliemann, 2007). Η βιβλιογραφία στερείται ενός περιεκτικού και ολοκληρωμένου μοντέλου, το οποίο θα *βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα*, για τις διαφορετικές ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και το οποίο θα αφορά στη φύση της αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις (π.χ. Ε΄-Στ΄ τάξεις δημοτικού), μικρότερες δηλαδή από ότι συνηθιζόταν να εξετάζεται η άλγεβρα. Αυτό που, επίσης, φαίνεται να απουσιάζει είναι η κατανόηση του πώς αυτές οι ικανότητες σχετίζονται μεταξύ τους, όχι μόνο στη θεωρία, αλλά με βάση τη συμπεριφορά των μαθητών (Oldenburg, 2012). Αυτή η γνώση αναμένεται να ενημερώσει τη συζήτηση για τους διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας και μάθησης για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Ως εκ τούτου, σκοπός της παρούσας εργασίας (η οποία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης εργασίας για τη φύση και την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης), ήταν η διερεύνηση της δομής της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, εξετάζοντας τις διαφορετικές ικανότητες της αλγεβρικής σκέψης και τις μεταξύ τους σχέσεις.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ενώ η παραδοσιακή διδασκαλία της άλγεβρας τονίζει το χειρισμό μεταβλητών, την επίλυση εξισώσεων και την απλοποίηση εκφράσεων (Kieran, 2004), η αλγεβρική σκέψη παρόλο που περιλαμβάνει μεταβλητές και εκφράσεις, έχει μια πιο ευρεία έννοια από τον όρο άλγεβρα. Οι ερευνητές του πεδίου της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις λαμβάνουν υπόψη τις πολλαπλές πτυχές της άλγεβρας και υιοθετούν και την άποψη ότι η αλγεβρική σκέψη δεν περιορίζεται στη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού (Kieran, 2004). Ωστόσο, δεν παραγνωρίζεται το ότι και στις μικρές τάξεις, ο αλγεβρικός συμβολισμός διαδραματίζει έναν υποστηρικτικό ρόλο στην εκμάθηση των μαθηματικών (Van Amerom, 2003).

Οι πιο γνωστές προσπάθειες ολοκληρωμένης περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις ή της αλγεβρικής δραστηριότητας γενικότερα, είναι αυτές της Kieran (2004) και του Kaput (2008) (Χρυσοστόμου, 2014). Οι περιγραφές αυτές αποτελούν προτάσεις οι οποίες δεν έχουν εξεταστεί με βάση εμπειρικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, η Kieran (2004) περιγράφει την αλγεβρική δραστηριότητα στα σχολεία να αποτελείται από τρεις συνιστώσες: (α) τις παραγωγικές δραστηριότητες (διατύπωση εκφράσεων και εξισώσεων), (β) τις μετασχηματιστικές δραστηριότητες (βασίζονται σε κανόνες, όπως παραγοντοποίηση, απλοποίηση εκφράσεων) και (γ) τις καθολικές δραστηριότητες μετά-επιπέδου (π.χ. τη μοντελοποίηση, την παρατήρηση της δομής, τη μελέτη της αλλαγής, τη γενίκευση, την αιτιολόγηση). Όπως επισημαίνει σε σχετικά πρόσφατο κεφάλαιο η Kieran (2011), η περιγραφή των τριών δραστηριοτήτων που πρότεινε και συγκεκριμένα το πώς και το αν είναι δυνατό να υιοθετηθούν στο πεδίο της αλγεβρικής σκέψης σε μικρότερες τάξεις, δεν έχει τύχει διερεύνησης.

Ο Kaput (2008) προσδιορίζει τις δύο βασικές πτυχές του αλγεβρικού συλλογισμού: (α) τη γενίκευση και την έκφραση γενικεύσεων με όλο και πιο τυπικά συμβολικά συστήματα και (β) τη συντακτικά καθοδηγούμενη δράση σε σύμβολα εντός οργανωμένων συμβολικών συστημάτων. Σύμφωνα με τον Kaput (2008), οι δύο πτυχές εμφανίζονται σε διαφορετικό βαθμό στους ακόλουθους τρεις πυλώνες της άλγεβρας: (α) άλγεβρα ως η μελέτη των δομών που προκύπτουν στην αριθμητική, (β) άλγεβρα ως η μελέτη συναρτήσεων και (γ) άλγεβρα ως η εφαρμογή γλωσσών μοντελοποίησης.

Στην παρούσα εργασία η ικανότητα αλγεβρικής σκέψης στις μικρές τάξεις εμπλέκει την ανάπτυξη τρόπων σκέψης, όπως «η ανάλυση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, ο εντοπισμός της δομής, η μελέτη της αλλαγής/μεταβολής, η γενίκευση, η μοντελοποίηση, η αιτιολόγηση, η απόδειξη και η πρόβλεψη» (Kieran, 2004, σ. 149). Ωστόσο, δεν παραβλέπονται και οι ικανότητες πιο διαδικαστικής φύσης όπως η επίλυση εξισώσεων και ο χειρισμός και πράξεις με αφηρημένα σύμβολα, οι οποίες χαρακτήριζαν για χρόνια τον περιορισμένο ορισμό της άλγεβρας. Ο συνδυασμός αυτών των ικανοτήτων επιτρέπει μια ολοκληρωμένη θεώρηση για την αλγεβρική σκέψη. Ως εκ τούτου, λαμβάνοντας υπόψη τις ικανότητες αλγεβρικής σκέψης που αναδύονται από τη βιβλιογραφία και έχοντας ως σκοπό τη διερεύνηση της δομής της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, ερευνητικό ερώτημα της παρούσας εργασίας αποτέλεσε το εξής: «Ποιοι παράγοντες συνθέτουν την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης των μαθητών;».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

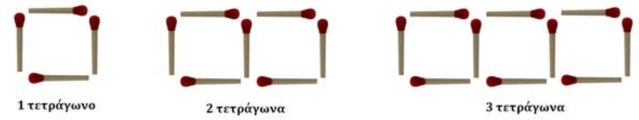
Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 803 μαθητές από 46 τμήματα Ε' και Στ' δημοτικού και Α' Γυμνασίου δέκα διαφορετικών σχολείων της Κύπρου. Συγκεκριμένα, συμμετείχαν 237 μαθητές της Ε΄ δημοτικού, 280 μαθητές της Στ΄ δημοτικού και 286 μαθητές της Α΄ γυμνασίου οι οποίοι προέρχονταν από αστικά σχολεία της Λεμεσού και της Λευκωσίας.

Δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Για τη μέτρηση της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης των μαθητών αναπτύχθηκε ένα γραπτό τεστ το οποίο περιλαμβάνει τόσο ερωτήσεις ανοικτού τύπου όσο και ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Η κατασκευή των έργων όπως και η διαφοροποίηση και προσαρμογή κάποιων έργων από προηγούμενες έρευνες και από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών είχαν ως στόχο κάθε έργο να αφορά σε συγκεκριμένη ικανότητα και να μην υπάρχει επικάλυψη με κάποια άλλη ικανότητα.

Το περιεχόμενο του τεστ για την αλγεβρική σκέψη αναφέρεται σε οκτώ ικανότητες αλγεβρικής σκέψης και παραδείγματα των έργων κάθε ικανότητας παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 1. Για την πρώτη ικανότητα «γενίκευσης μοτίβων-σχέσεων της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεταβλητών», αξιοποιήθηκαν δύο έργα με εικονικά-αναπτυσσόμενα μοτίβα (Gf2, Gf3) στα οποία οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν τους επόμενους όρους του μοτίβου, έναν πολύ μεγαλύτερο όρο και να περιγράψουν λεκτικά το γενικό κανόνα. Αξιοποιήθηκε, επίσης, και ένα έργο με πίνακα τιμών για δύο μεταβλητές (Gf1) το οποίο απαιτούσε γενίκευση για την περιγραφή της σχέσης των δύο μεταβλητών. Στη δεύτερη ικανότητα «μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη με βάση κανόνες και συλλογισμός για τη σχέση μεταβολής των δύο μεταβλητών» χρησιμοποιήθηκαν τέσσερα έργα (Vf1, Vf2, Vf3, Vf4). Τα συγκεκριμένα έργα αξιοποιήθηκαν για να εξεταστεί η ικανότητα υπολογισμού των τιμών της ανεξάρτητης και των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής με βάση κανόνες (αλγεβρικά ή λεκτικά διατυπωμένους) και η ικανότητα συλλογισμού για τη σχέση μεταβολής δύο μεταβλητών (π.χ. όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μειώνονται οι τιμές της άλλης) είτε μέσα από γραφικές παραστάσεις είτε με βάση αλγεβρικά διατυπωμένους κανόνες. Στην ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων των πράξεων» συμπεριλήφθηκαν τέσσερα έργα (Go1, Go2, Go3, Go4) τα οποία απαιτούσαν διατύπωση γενικεύσεων για την επιμεριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα και το προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Για την ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας» αξιοποιήθηκαν τρία έργα (Ge1, Ge2, G3) στα οποία οι μαθητές καλούνταν να διατυπώσουν γενικεύσεις για τις ιδιότητες της ισότητας καθώς και για τη μεταβατική ιδιότητα της ισότητας και της ανισότητας. Για την ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών» χρησιμοποιήθηκαν τρία έργα (Gn1, Gn2, Gn3) στα οποία οι μαθητές καλούνταν να διατυπώσουν και να αιτιολογήσουν γενικεύσεις για το αποτέλεσμα πράξεων με άρτιους και περιττούς αριθμούς.

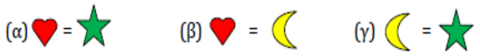
Gf3. Ο Φώτης φτιάχνει τετράγωνα με σπίρτα όπως φαίνεται πιο κάτω.



Θα συνεχίσει να φτιάχνει τετράγωνα με αυτό τον τρόπο.
(α) Για 4 τετράγωνα θα χρειαστεί ____ σπίρτα. Για 5 τετράγωνα θα χρειαστεί ____ σπίρτα.
(β) Για 10 τετράγωνα θα χρειαστεί _____ σπίρτα.
(γ) Για 100 τετράγωνα θα χρειαστεί _____ σπίρτα.
(δ) Να περιγράψεις με λόγια πώς μπορεί να υπολογίσει κάποιος τον αριθμό των σπίρτων που θα χρειαστεί, αν γνωρίζει τον αριθμό των τετραγώνων που θέλει να φτιάξει.

Ge1.Έχουμε την ισότητα 

Με βάση την πιο πάνω ισότητα μπορούμε να πούμε ότι μια από τις πιο κάτω επιλογές ισχύει σίγουρα. Να βάλεις σε κύκλο την επιλογή σου.



Να εξηγήσεις την επιλογή σου.

Gn1. Όταν προσθέσω έναν περιττό αριθμό με έναν περιττό αριθμό, το αποτέλεσμα που παίρνω είναι περιττός ή άρτιος αριθμός; Να δείξεις τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκες, για να απαντήσεις στο ερώτημα.

Vf4. Ο Αλέξανδρος φύλαξε κάποια χρήματα, δεν ξέρουμε ακριβώς πόσα. Το ποσό όμως που συγκέντρωσε είναι πάνω από 2 ευρώ και είναι θετικός ακέραιος αριθμός (π.χ. 3, 4, 5 κτλ.). Η γιαγιά του, του πρότεινε:
είτε (α) **Να του τριπλασιάσει τα χρήματα που φύλαξε** είτε (β) **Να του πολλαπλασιάσει το ποσό που συγκέντρωσε ξανά με το ίδιο ποσό**

Να συμπληρώσεις τους πίνακες ώστε να δείξεις πώς αλλάζει το ποσό που μπορεί να έχει ο Αλέξανδρος με τις δύο προσφορές.

Να εξηγήσεις στον Αλέξανδρο ποια από τις δύο προσφορές τον συμφέρει να διαλέξει, για να πάρει περισσότερα χρήματα.

Se1. Αν δ+δ+δ=15 τότε, δ= ___
Αν γ+1=15 και γ+1+σ=19, τότε σ = ___

Se3. Αν $\alpha + 4 = 2 \times \alpha + 2$, τότε α= ___

Mo1. Τα πουκάμισα στοιχίζουν δ ευρώ το ένα και τα παντελόνια β ευρώ το ένα. Θα αγοράσω 3 πουκάμισα και 4 παντελόνια. Να σημειώσεις τι αναπαριστά η μαθηματική πρόταση $3\times\delta + 4\times\beta$.

Το Μ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των βιβλίων που έχει ο Ηλίας. Η Ντίνα έχει 10 βιβλία λιγότερα από τον Ηλία. Να γράψεις τη μαθηματική πρόταση η οποία αναπαριστά τον αριθμό των βιβλίων της Ντίνας.

Go3. <u>Χωρίς να κάνεις τις πράξεις</u>, να εξηγήσεις αν οι δύο μαθηματικές προτάσεις θα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα.

(α) 65 × (50 + 81)
(β) (65 × 50) + (65 × 81)

Sm1. (β) Η Λίνα είχε Κ μολύβια στην κασετίνα της και έδωσε χτες στη Ρίτα 1 μολύβι. Δηλαδή τώρα έχει Κ - 1 μολύβια. Αύριο η μαμά της θα της χαρίσει 4 μολύβια. Να σημειώσεις πόσα μολύβια θα έχει αύριο η Λίνα.

Sm2. (α) Να βρεις το αποτέλεσμα $\frac{\alpha+\alpha}{2}=$

Sm3. Να κάνεις τις πράξεις, για να βρεις το αποτέλεσμα.

$\alpha + \alpha =$ $\qquad$ $2 \times \alpha + 5 \times \alpha =$

Διάγραμμα 1: Παραδείγματα έργων του δοκιμίου αλγεβρικής σκέψης.

Στην ικανότητα «αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου (ή και εύρους των τιμών που ικανοποιούν ανίσωση)» αξιοποιήθηκαν τέσσερα έργα (Se1, Se2, Se3, Si4) τα οποία απαιτούσαν επίλυση εξισώσεων με τον άγνωστο στο ένα μέλος, με τον άγνωστο και στα δύο μέλη και επίλυση ανίσωσης. Για την ικανότητα «μοντελοποίησης σχέσεων μέσω της χρήσης αλγεβρικών συμβόλων» χρησιμοποιήθηκαν πέντε έργα όπου οι μαθητές καλούνταν να μεταφράσουν λεκτικές περιγραφές σε αλγεβρικές εκφράσεις ή το αντίστροφο (Mo1), λεκτικές καταστάσεις σε αλγεβρικές εξισώσεις και το αντίστροφο (Mo2) και να μεταφράσουν δοσμένες λεκτικές γενικεύσεις σε αλγεβρικούς κανόνες (Mo3). Για την ικανότητα «χειρισμού αφηρημένων συμβόλων για απλοποίηση αλγεβρικών εκφράσεων» συμπεριλήφθηκαν τρία έργα (Sm1, Sm2, Sm3) διαφορετικού βαθμού δυσκολίας (Χρυσοστόμου, 2014). Η βαθμολόγηση των απαντήσεων βασίστηκε στην κατηγοριοποίηση των απαντήσεων που προέκυψαν σε κάθε έργο, ενώ σε όλα τα έργα η μέγιστη τιμή ήταν το ένα και η ελάχιστη το μηδέν.

Τεχνικές ανάλυσης των δεδομένων

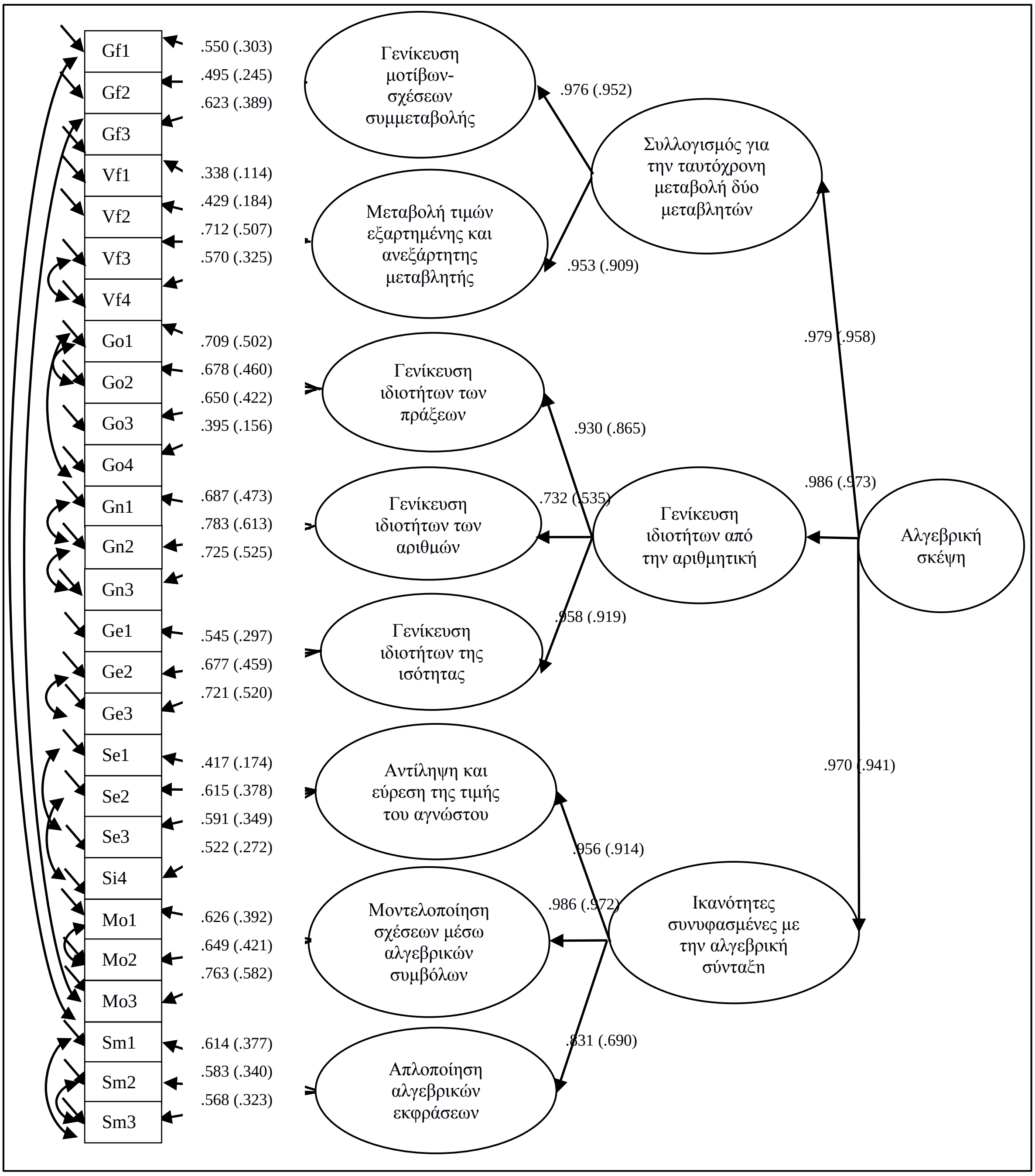
Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthen & Muthen, 1998-2012). Για την απάντηση του ερωτήματος της εργασίας εξετάστηκε ο βαθμός προσαρμογής μοντέλων επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (CFA: Confirmatory Factor Analysis) και έγινε εφικτή η εξέταση του βαθμού προσαρμογής των δεδομένων της παρούσας εργασίας στη δομή του προτεινόμενου μοντέλου. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση εφαρμόστηκε σε ολόκληρο το δείγμα των μαθητών, αλλά μέσω της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης πολλαπλών ομάδων (Multiple Group Confirmatory Factor Analysis) εξετάστηκε η προσαρμογή του και για κάθε τάξη μαθητών ('Ε και Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου) ταυτόχρονα, ώστε να εξεταστεί η σταθερότητα του μοντέλου σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες. Για τον έλεγχο του βαθμού προσαρμογής του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν τρεις δείκτες: (α) ο δείκτης comparative fit index (CFI) όπου μια τιμή μεγαλύτερη από .95 δείχνει καλή προσαρμογή, (β) ο δείκτης RMSEA όπου μια τιμή μικρότερη από .5 υποδηλώνει πολύ καλή προσαρμογή και (γ) ο λόγος x^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (x^2/df) του οποίου η τιμή πρέπει να είναι μικρότερη από το δύο (Marcoulides & Schumacker, 1996).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να διερευνηθεί η δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης, εξετάστηκε ένα μοντέλο που εισηγείται ότι η αλγεβρική σκέψη αποτελείται από: (α) την ικανότητα «συλλογισμού για τη ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών (Rc)» και η οποία αναλύεται στην ικανότητα «γενίκευσης μοτίβων/σχέσεων συμμεταβολής» και στην ικανότητα «μεταβολής των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή και συλλογισμού για τη σχέση συμμεταβολής», (β) την ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική (Ga)», η οποία αναλύεται στην ικανότητα «γενίκευσης ιδιοτήτων των αριθμών», «γενίκευσης των ιδιοτήτων των πράξεων» και «γενίκευσης ιδιοτήτων της ισότητας» και (γ) τις «ικανότητες που είναι άμεσα συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη (Syn)», η οποία αναλύεται στην ικανότητα «αντίληψης και εύρεσης της τιμής του αγνώστου», στην ικανότητα «μοντελοποίησης σχέσεων μέσω αλγεβρικών συμβόλων» και στην ικανότητα «απλοποίησης αλγεβρικών εκφράσεων».

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (Διάγραμμα 2), έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν πάρα πολύ καλή, επιβεβαιώνοντας τη δομή του μοντέλου και την καταλληλότητα του να περιγράψει τη δομή της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης (CFI=.996, TLI=.995, x^2=325.748, df=295, x^2/df=1.14, p>.05, RMSEA=.011). Οι φορτίσεις όλων των έργων του μοντέλου στους αντίστοιχους παράγοντες (δείτε Διάγραμμα 2) ήταν στατιστικά σημαντικές. Η προσαρμογή των δεδομένων στη δομή του μοντέλου επιβεβαιώνει ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούν κατάλληλα έργα μέτρησης των οκτώ άδηλων παραγόντων. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι η ερμηνευόμενη διασπορά των έργων είναι σχετικά ψηλή (δείτε Διάγραμμα 2). Οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης και δεύτερης τάξης στους αντίστοιχους ψηλότερους τάξης παράγοντες, όπως και τα ποσοστά ερμηνευόμενης διασποράς των παραγόντων πρώτης τάξης και των παραγόντων δεύτερης τάξης, ήταν στατιστικά σημαντικά και ψηλά. Επιπρόσθετα, εξετάστηκαν οι συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων δεύτερης τάξης οι οποίες ήταν όλες στατιστικά σημαντικές (p<.05) και ψηλές («Rc και Ga» r=.965, «Rc και Syn» r=.949 και «Ga και Syn» r=.957).

Για να εξεταστεί η σταθερότητα της δομής του μοντέλου της αλγεβρικής σκέψης στις τρεις τάξεις (Ε΄ δημοτικού, Στ΄ δημοτικού, Α΄ γυμνασίου), πραγματοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση πολλαπλών ομάδων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προσαρμογή των δεδομένων των τριών τάξεων στο προτεινόμενο μοντέλο ήταν ικανοποιητική (CFI=.965, TLI=.962, x^2=1196.553, df=966, x^2/df=1.239, p<.05, RMSEA=.030). Όλα τα έργα παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές φορτίσεις στους αντίστοιχους παράγοντες. Αυτά τα αποτελέσματα εισηγούνται ότι το μοντέλο είναι σταθερό και για τους τρεις πληθυσμούς.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός υποδεικνύει τη φόρτιση στον παράγοντα και ο αριθμός στην παρένθεση υποδεικνύει την αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 2: Το μοντέλο για την ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της εργασίας για τη δομή της αλγεβρικής σκέψης υποδεικνύουν ότι η αλγεβρική σκέψη είναι μια πολυδιάστατη ικανότητα (Kaput, 2008). Επιπρόσθετα, στο μοντέλο λαμβάνονται υπόψη και οι «δύο σχολές» απόψεων οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς το ποια πτυχή της αλγεβρικής σκέψης είναι πιο σημαντική για τον ορισμό της αλγεβρικής σκέψης: «η γενίκευση, εντοπισμός της δομής και αιτιολόγηση» ή «οι ενέργειες σε αλγεβρικά σύμβολα με βάση κανόνες» (Kaput, 2008). Συγκεκριμένα, ενώ οι δύο δεύτερης τάξης παράγοντες του μοντέλου (συλλογισμός για την ταυτόχρονη μεταβολή δύο μεταβλητών και γενίκευση ιδιοτήτων από την αριθμητική) δεν εμπλέκουν απαραίτητα τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων και ενθαρρύνουν την έκφραση γενικεύσεων και μοντέλων διαφόρων καταστάσεων χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε μέσο είναι διαθέσιμο για το μαθητή (Kaput, 2008), ο τρίτος παράγοντας του μοντέλου εμπλέκει ικανότητες συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη όπου είναι απαραίτητη η αντίληψη και χρήση των αλγεβρικών συμβόλων.

Οι στατιστικά σημαντικές και ψηλές συσχετίσεις μεταξύ των τριών παραγόντων δεύτερης τάξης υποδηλώνουν ότι η επίδοση στις ικανότητες-παράγοντες που εμπλέκουν γενίκευση είτε για τη συμμεταβολή είτε από το πλαίσιο της αριθμητικής, σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους, αλλά σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό και με τις ικανότητες που είναι συνυφασμένες με την αλγεβρική σύνταξη. Τα αποτελέσματα έρχονται σε κάποια αντίθεση με τα αποτελέσματα του Oldenburg (2012) που αφορούσαν σε μαθητές λυκείου και έδειχναν χαμηλές συσχετίσεις μεταξύ της ικανότητας του ατόμου να εκτελεί πράξεις με βάση συντακτικούς κανόνες και της ικανότητας γενίκευσης σχέσεων ή συσχεσιακού συλλογισμού.

Τα αποτελέσματα της εργασίας τονίζουν, επίσης, την καταλληλότητα και σημασία του προτεινόμενου μοντέλου, αφού φάνηκε ότι η δομή του μοντέλου της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης είναι σταθερή παρά το ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών διαφορετικών ηλικιών τόσο ως προς την ανάπτυξη της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και το περιεχόμενο που διδάσκονται με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα όσο και ως προς το γνωστικό τους σύστημα γενικότερα. Το μοντέλο αποσκοπεί στο να υποδείξει τις πιο σημαντικές διαστάσεις της ικανότητας αλγεβρικής σκέψης και τονίζει τη σημασία του να παρέχεται στους μαθητές μια ποικιλία δραστηριοτήτων που αναφέρονται στις διαφορετικές διαστάσεις αυτής της ικανότητας, ώστε να διευκολύνεται και η ανάπτυξή της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. W., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. Essential Understanding Series. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 33-40.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). A global dialogue about early algebraization. In J. Cai & Knuth, E., (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. vii-xi). New York, NY: Springer.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics*, *81*(2), 139-159.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Lannin, J. K. (2005).Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities, *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R.E. (1996). *Advanced structural equation modeling*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Muthen, L. K., & Muthen, B. O. (1998-2012). *Mplus user’s guide* (7th ed.). Los Angeles: Muthen & Muthen.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Oldenburg, R. (2012). Structure of algebraic proficiency. *Research Paper ICME 12*.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63-75.

Walkowiak, T. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 56-71.

Χρυσοστόμου, Μ. Β. (2014). *Η Δομή και η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης*. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (POSTERS)

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΙΣΧΥΟΝΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΝΕΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Βασιλά Αικατερίνη & Δεσλή Δέσποινα
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.
basilakaterina@yahoo.gr, ddesli@eled.auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εισαγωγή των μαθητών/ριών στις έννοιες της στατιστικής, σύμφωνα με τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών, πραγματοποιείται κατά τα χρόνια του δημοτικού σχολείου. Κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση και η σύγκριση της δομής και της λογικής του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003) για τη διδασκαλία της στατιστικής στις τρεις τελευταίες τάξεις του δημοτικού και του νέου αναλυτικού προγράμματος σπουδών (Ν.Π.Σ.) (2011). Από την ανάλυση και σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών φαίνεται ότι το ισχύον πρόγραμμα σπουδών δεν επιτρέπει στην/ον εκπαιδευτικό να έχει μία συνολική εικόνα της εξέλιξης των εννοιών της στατιστικής ανά τάξη, παρά προσφέρει την εικόνα της διαπραγμάτευσης αυτών των εννοιών μόνο για την τάξη στην οποία ο/η εκπαιδευτικός διδάσκει. Παρατηρείται, επίσης, απόκλιση ανάμεσα στο περιεχόμενο των σχολικών εγχειριδίων και τους στόχους που τίθενται από το πρόγραμμα σπουδών (περισσότερο στην Ε' τάξη σε σχέση με τις άλλες δύο τάξεις). Το Ν.Π.Σ. σχεδιάζεται και αναπτύσσεται στη λογικής της 'τροχιάς μάθησης', σύμφωνα με την οποία προτείνονται συγκεκριμένα διδακτικά έργα τα οποία θα προκαλέσουν την ανάπτυξη και θα οδηγήσουν τα παιδιά προοδευτικά σε ανώτερα επίπεδα σκέψης. Η διδασκαλία της στατιστικής προτείνεται σε παιδιά μικρότερης ηλικίας και εμπλουτίζεται σημαντικά το περιεχόμενο της στατιστικής (όπως π.χ. διεύρυνση της έννοιας της πιθανότητας μέσω πειραμάτων), προσφέροντας τη δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να παρακολουθούν την εξελικτική πορεία του στατιστικού συλλογισμού των παιδιών (Clements & Sarama, 2013). Συμπερασματικά, το νέο πρόγραμμα για τη στατιστική εμφανίζεται ανανεωμένο με νέους στόχους και περιεχόμενο στη διδασκαλία της στατιστικής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αποτελεί πρόκληση για την εκπαιδευτική κοινότητα η εφαρμογή του στην πράξη και ο έλεγχος της αποτελεσματικότητάς του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D.H., & Sarama, J. (2013). Rethinking early mathematics: What is research-based curriculum for young children?. In L.D. English, & J.T.Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning, Advances in mathematics education* (pp. 121-147). Dordrecht: Springer.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΣΥΓΚΛΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΗΤΟΥ Η ΆΡΡΗΤΟΥ ΡΟΛΟΥ ΤΟΥΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

Ιωσηφίδου Ειρήνη[1], Μπάρκα Πηνελόπη[2], Νάτσου Κυριακή[3]
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
[1]eiriiosi@gmail.com, [2]popibarka@gmail.com, [3]kyrinats@gmail.com

Οι άνθρωποι καθημερινά έρχονται σε επαφή με μαθηματικά που εμπλέκονται σε δραστηριότητες της καθημερινής και επαγγελματικής τους ζωής. Έρευνες έχουν δείξει ότι επαγγελματίες με λίγη ή καθόλου φοίτηση στο σχολείο είναι ικανοί να αναπτύσσουν και να χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες και στρατηγικές, συχνά χωρίς να το γνωρίζουν, ώστε να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις που προκύπτουν στο χώρο εργασίας τους. Η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται στη διερεύνηση των αντιλήψεων περί φύσης, μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών εννιά επαγγελματιών που επιλέχτηκαν με βάση το επίπεδο εκπαίδευσής τους (χαμηλό, μεσαίο, υψηλό). Επιπλέον, διερευνάται το είδος των μαθηματικών γνώσεων που χρησιμοποιούν στην καθημερινή και επαγγελματική τους ζωή. Η μέθοδος που υιοθετήθηκε ήταν η μελέτη περίπτωσης. Συγκεκριμένα, πρόκειται για εννιά περιπτώσεις μελέτης επαγγελματιών, οι οποίοι κλήθηκαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις μιας ημι-δομημένης συνέντευξης. Τα ευρήματα υποδεικνύουν την αξιοποίηση ιδιαίτερων ‘μαθηματικών’ πρακτικών στα συγκεκριμένα πλαίσια, οι οποίες διαμορφώνονται στο σχολείο, στο χώρο εργασίας ή στη βάση προσωπικών αναζητήσεων. Οι πρακτικές αυτές διαφέρουν ανάλογα με την επαγγελματική πρακτική και το επίπεδο εκπαίδευσης που την υποστηρίζει. Ακόμη, βρέθηκε ότι οι επαγγελματίες χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως εργαλείο σε περιστάσεις της καθημερινής και επαγγελματικής τους ζωής. Τέλος, αναφορικά με την επαγγελματική πρακτική παρατηρήθηκε συνδυασμός μη εξελιγμένων και σχολικών μαθηματικών στρατηγικών. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος «μη εξελιγμένες μαθηματικές στρατηγικές» αποτελεί δική μας επινόηση. Αναφέρεται σε μαθηματικές στρατηγικές, που δεν κατατάσσονται πλήρως ούτε στο πεδίο των άτυπων αλλά ούτε και σε αυτό των τυπικών. Προσεγγίζουν χαρακτηριστικά των άτυπων μαθηματικών στρατηγικών, ενώ ταυτόχρονα συγκλίνουν έως ένα σημείο με αυτά των σχολικών. Όμως, δεν έχουν εξελιχθεί πλήρως έτσι ώστε να ανήκουν στις τυπικές και γι' αυτό τις χαρακτηρίζουμε ως «μη εξελιγμένες».

ΔΟΥΛΕΥΟΝΤΑΣ ΜΙΑ ΗΜΕΡΑ ΩΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ

Γ. Καλογεράκης, Ε. Κούβελα, Β. Παπανδρέου, Ε. Ροδίτη
ΠΜΣ, ΔτΜ, ΕΚΠΑ
kalogerakismath@yahoo.gr, E.Kouvela@lboro.ac.uk, vasia_@live.com, eleniroditi@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία αφορά σε μία δραστηριότητα διερευνητικής μάθησης, όπως αυτή σχεδιάστηκε προκειμένου να πραγματοποιηθεί σε μία τάξη μαθητών Β γυμνασίου. Στόχος της εργασίας ήταν οι μαθητές να μπουν για μία ημέρα στο ρόλο ενός μηχανικού χρησιμοποιώντας κάποια από τα εργαλεία του επαγγέλματος, προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα σχετικά με την κατασκευή ενός αιολικού πάρκου. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες και παρακολούθησαν βίντεο σχετικό με τη λειτουργία αιολικού πάρκου. Στη συνέχεια μοιράστηκε το φύλλο εργασίας με τις πληροφορίες του προβλήματος και ένα μηχανικό σχέδιο. Η κάθε ομάδα εργάστηκε ξεχωριστά και με την ολοκλήρωση της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν σε όλη την τάξη. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψε, ότι οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία που τους δόθηκαν, συνεργάστηκαν, πρότειναν διαφορετικές λύσεις, διατύπωσαν εικασίες και επιχειρηματολόγησαν. Με τη δραστηριότητα διερευνητικής μάθησης, όπου χρησιμοποιήθηκε, αξιοποιήθηκε η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και χώρου εργασίας, μέσω της οποίας δόθηκε στους μαθητές η δυνατότητα να αποκτήσουν ενεργό ρόλο και να ανακαλύψουν μία νέα κατάσταση κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bingolbali, E. (2011). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Australian Journal of Teacher Education, 36(1).*

Engeln,K. ,Euler, M. & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers’ beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM Mathematics Education 45:823–836.*

Fauzan, A., Slettenhaar, D., Plomp, T. (2002). Traditional Mathematics Education vs. Realistic Mathematics Education: Hoping for Changes. *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference. Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics, pp. 1-4.*

ΡΟΜ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΣΙΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ: ΑΝΙΧΝΕΥΟΝΤΑΣ ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ, ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Αλέξανδρος Καραγιαννίδης
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Paidagwgos274@gmail.com

Στην καθημερινή ζωή πολλοί μαθητές υπολογίζουν με ευκολία, επεξεργάζονται και επιλύουν προβλήματα, τα οποία απαιτούν μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες (Nunes, Schielman & Carraher, 1993). Στο σχολείο, ωστόσο, οι μαθητές αυτοί συχνά αποτυγχάνουν. Η σχετική έρευνα τις τελευταίες δυο δεκαετίες αναζήτησε και εντόπισε σαφή σύνδεση αυτής της αποτυχίας όχι μόνο με γνωστικούς αλλά και με κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες. Η εργασία μελετά τους τρόπους με τους οποίους αυτοί οι παράγοντες διαμορφώνουν την επίδοση και τη συμμετοχή Ρομ μαθητών στην τάξη των μαθηματικών. Για τους σκοπούς της έρευνας υιοθετήθηκε μια εθνογραφικού τύπου ερευνητική προσέγγιση, σε μια προσπάθεια δημιουργίας μιας όσο το δυνατόν πιο «ζωντανής» αναπαράστασης της ‘κουλτούρας’ της υπό μελέτη ομάδας (Cohen, Mannion & Morrison, 2008). Τα δεδομένα προέρχονται από τις παρατηρήσεις οχτώ ρομά μαθητών σε τάξεις μαθηματικών σε δημόσια σχολεία της Θράκης. Για να εξασφαλιστεί η εγκυρότητα και η αξιοπιστία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε τριγωνοποίηση των μεθόδων συλλογής τους. Τα ερευνητικά εργαλεία ήταν οι σημειώσεις πεδίου/ παρατηρήσεις και οι συνεντεύξεις. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των δεδομένων αναδεικνύουν σημαντικά εμπόδια πρόσβασης στη μαθηματική γνώση από τους μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας, κυρίως για λόγους χαμηλών προσδοκιών, κοινωνικών ανισοτήτων και πολιτισμικών διαφορών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*, New York: Cambridge University Press.

Cohen, L., Manion, L., Morisson, E. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Gutenberg.

ΚΛΙΜΑΤΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ: ΕΝΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

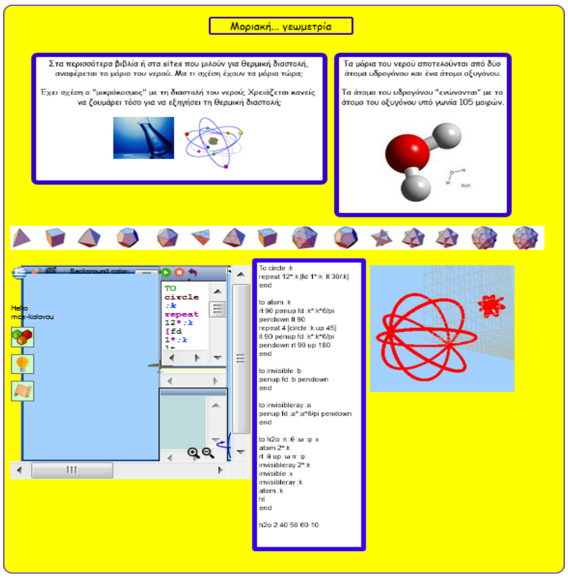
Αγγελική Κολοβού, Ειρήνη Περισσυνάκη, Κώστας Γαβριλάκης, Μαρία Δασκολιά

Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων ‘Διόφαντος’ Ε.Κ.Π.Α

teacher_ak@yahoo.gr, peririni@hotmail.com, cgav@aegean.gr, mdaskol@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος του δυναμικού ψηφιακού βιβλίου «Κλιματική αλλαγή» είναι η ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Κεντρικός ήρωας είναι ο George, ένας έφηβος που κατοικεί σε ένα νησί του Ειρηνικού και βιώνει τις δραματικές συνέπειες της κλιματικής αλλαγής. Ως «περιβαλλοντικός μετανάστης» αποφασίζει να ταξιδέψει ανά τον κόσμο και να οργανώσει ένα παγκόσμιο κίνημα νέων κατά της κλιματικής αλλαγής μέσω των μέσων κοινωνικής δικτύωσης.



Καθώς η αφήγηση εξελίσσεται, ποικίλες μαθηματικές έννοιες σχετικές με την κλιματική αλλαγή αναδύονται. Οι μαθητές μαστορεύουν και πειραματίζονται με δομήματα μέσω των οποίων τους δίνονται ευκαιρίες να διερευνήσουν συσχετίσεις μεταξύ μεταβλητών, να κατασκευάσουν μαθηματικά μοντέλα, να χειριστούν πολλαπλές δυναμικές αναπαραστάσεις, να σχεδιάσουν τρισδιάστατα σχήματα, να διερευνήσουν υποθέσεις και να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τις διαστάσεις της κλιματικής αλλαγής.

Το δυναμικό ψηφιακό βιβλίο «Κλιματική αλλαγή» αναπτύχθηκε στα πλαίσια του ευρωπαϊκού έργου «M C Squared» και αποτελεί προϊόν συνεργατικού σχεδιασμού από 6 μέλη διαφορετικών κοινοτήτων πρακτικής (ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών και της περιβαλλοντικής εκπαίδευσης, εκπαιδευτικοί και σχεδιαστές ψηφιακών εργαλείων για τη διδακτική των μαθηματικών).

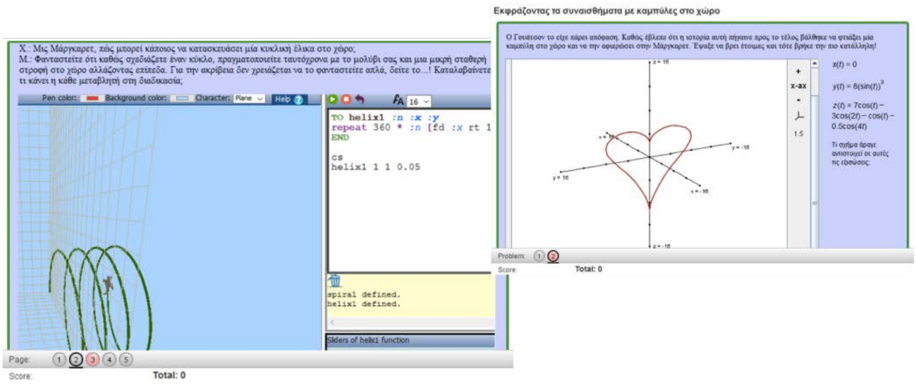
ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ: ΕΝΑ ΨΗΦΙΑΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Γεώργιος Λάλας1, Στέφανος Κεΐσογλου2, Μαριάνθη Γριζιώτη3, Ιωάννης Παπαδόπουλος4, Αικατερίνη Μακρή5
[1]lalasgeorg@math.uoa.gr, [2]keisoglu@otenet.gr, [3]margrizioti@gmail.com, [4]ypapadop@eled.auth.gr, [5]kmakrh@ppp.uoa.gr

Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων ‘Διόφαντος’ – Ε.Κ.Π.Α

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα Ελληνικά προγράμματα σπουδών δεν προβλέπουν την διδασκαλία θεμάτων σχετικών με σπειροειδείς καμπύλες, εκτός από τον κύκλο, ωστόσο, οι σπειροειδείς καμπύλες έχουν ένα ιδιαίτερο αισθητικό και πολιτισμικό ενδιαφέρον. Το ψηφιακό βιβλίο ‘Καμπύλες στο χώρο’, εμπλέκει τους μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε μία ατμόσφαιρα μυστηρίου και τους ταυτίζει με δύο γνωστούς ντετέκτιβ που εργάζονται προς τη λύση ενός μυστηρίου. Έτσι η διερεύνηση Μαθηματικών εννοιών (παραμετρικών εξισώσεων μίας καμπύλης και καμπυλότητα) τους είναι αναγκαία για την διαλεύκανση μίας πολυεπίπεδης υπόθεσης κλοπής των σχεδίων ενός αρχαίου μηχανισμού. Η προσομοίωση κατασκευής καμπυλών επιτυγχάνεται με τη χρήση διαφορετικών εργαλείων (widgets: Cinderella, Malt, Geogebra, Χελωνόκοσμος) και παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν διαφορετικές αναπαραστάσεις των καμπυλών, μεταβαίνοντας ομαλά από το οικείο γεωμετρικό περιβάλλον των 2 διαστάσεων στο περιβάλλον των 3 διαστάσεων.



Το ψηφιακό βιβλίο ‘Καμπύλες στο χώρο’ αναπτύχθηκε στα πλαίσια του ευρωπαϊκού έργου ‘M C Squared Project’ και είναι προϊόν της συνεργασίας 7 μελών διαφορετικών ειδικοτήτων της ελληνικής εκπαιδευτικής κοινότητας, τα οποία συνεισέφεραν τις εξειδικευμένες γνώσεις τους και την διαφορετική τους οπτική.

ΤΟ ΒΙΟΚΛΙΜΑΤΙΚΟ ΛΟΥΝΑ ΠΑΡΚ: ΕΝΑ ΨΗΦΙΑΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΜΕ ΣΤΟΧΟ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Μαρία Λάτση[1], Καλλιόπη Αρδαβάνη[2], Κατερίνα Βλαχοστέργιου[3], Σύλβη Ιωακειμίδου[4]

Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων ‘Διόφαντος’ – Ε.Κ.Π.Α

mlatsi@ppp.uoa.gr[1], popiardv@hotmail.com[2], katerina152@gmail.com[3], silviioakimidou@yahoo.gr[4]

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με στόχο την καλλιέργεια και ανάπτυξη της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, το ψηφιακό βιβλίο (c-book) ‘Βιοκλιματικό Λούνα Παρκ’ διασυνδέει την αφήγηση μιας φανταστικής ιστορίας με μια ποικιλία ειδικά σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων. Ο μαθητής/χρήστης του ψηφιακού αυτού βιβλίου εμπλέκεται ενεργά τόσο στην ανάγνωση της ιστορίας όσο και στην κατασκευή της γνώσης, καθώς πειραματίζεται, σχεδιάζει, δομεί και αναδομεί ψηφιακά μοντέλα και λύνει γρίφους, αξιοποιώντας παράλληλα το διαδραστικό περιβάλλον και τη διαθέσιμη ανατροφοδότηση. Ειδικότερα, με στόχο την αειφορική διαχείριση των φυσικών πόρων οι μαθητές: α) αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες δισδιάστατων και τρισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, β) χρησιμοποιούν τη χωρική αντίληψη και τη γλώσσα προγραμματισμού Logo, γ) χρησιμοποιούν λόγους και αναλογίες, δ) συλλέγουν και επεξεργάζονται δεδομένα.

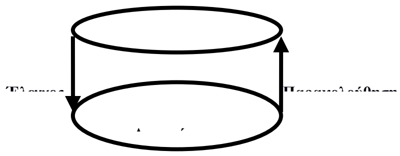
Το ψηφιακό βιβλίο ‘Το Βιοκλιματικό Λούνα-Παρκ’ αναπτύχθηκε στα πλαίσια του ευρωπαϊκού έργου ‘M C Squared Project’ και είναι προϊόν της συνεργασίας 7 μελών διαφορετικών ειδικοτήτων της ελληνικής εκπαιδευτικής κοινότητας, τα οποία συνεισέφεραν τις εξειδικευμένες γνώσεις τους και την διαφορετική τους οπτική.

ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΡΙΑ ΜΕ ΣΥΝΔΡΟΜΟ ASPERGER: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Ευάγγελος Μώκος[1] και Ιωάννης Νούλης[2]
[1] Πανεπιστήμιο Αιγαίου, [2] Πανεπιστήμιο Αιγαίου

emokos@rhodes.aegean.gr, inoulis@rhodes.aegean.gr

Η μεταγνώση συνδέεται με τον έλεγχο των γνωστικών διεργασιών και τις λειτουργίες που ακολουθούν αυτόν το έλεγχο. Το Σύνδρομο Asperger (ΣΑ) είναι μια διάχυτη αναπτυξιακή διαταραχή και ανήκει στις Διαταραχές Αυτιστικού Φάσματος (ΔΑΦ). Οι μαθητές με ΣΑ που είναι ικανοί να λύσουν ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα αδυνατούν να εκφράσουν λεκτικά τον τρόπο σκέψης, που τους οδήγησε στη λύση. Σκοπός της έρευνάς μας είναι να διαπιστώσουμε αν μπορεί μια μαθήτρια με διαπιστωμένο ΣΑ να παρουσιάσει αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης, όταν λύνει ένα συγκεκριμένο τύπο μαθηματικού προβλήματος που δεν είναι στα ενδιαφέροντά της.



Βασική αναπαράσταση του μεταγνωστικού μοντέλου των Nelson και Narens

Για τους σκοπούς της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της «φωναχτής σκέψης». Αναλύσαμε τις λεκτικές αναφορές της μαθήτριας σύμφωνα με το τροποποιημένο MAI (Μώκος, 2012). Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι:

- Η μαθήτρια φάνηκε πως με δυσκολία μπορεί να πει φωναχτά τη σκέψη της.
- Σύμφωνα με το MAI φάνηκε ότι κατέχει Δηλωτική και Διαδικαστική γνώση (Μεταγνωστική Παρακολούθηση), αλλά δεν κατέχει τις μεταγνωστικές λειτουργίες του Ελέγχου (Αξιολόγηση, Διαχείριση πληροφοριών, στρατηγικές Διόρθωσης κλπ).
- Το πρόβλημα επίσης της έρευνας δεν αναφέρεται στα ιδιαίτερα ενδιαφέροντα της συμμετέχουσας και ίσως είναι ένας επιπλέον λόγος για μη καλή ανάπτυξη μεταγνωστικών ικανοτήτων (Νούλης, & Καφούση, 2014).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μώκος, Ε., (2012). Διερεύνηση μεταγνωστικών λειτουργιών κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές ηλικίας 10 – 11 ετών. Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Νούλης, Ι. & Καφούση, Σ. (2014). Η διερεύνηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών με διάγνωση συνδρόμου Asperger μέσα από λεκτικά προβλήματα. *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Ένωσης Ερευνητών στη Διδακτική των Μαθηματικών*. Φλώρινα, Μάρτιος. (Έκδοση πρακτικών σε CD)

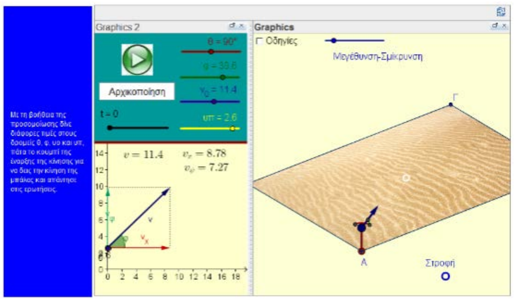
Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ C-BOOKS ΠΡΟΚΑΛΕΙ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΝΑΓΝΩΣΤΩΝ: ΤΟ ΤΟΥΡΝΟΥΑ BEACH VOLLEY

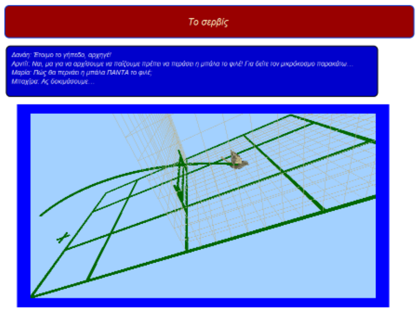
Μάριος Ξένος, Βαγγέλης Φακούδης, Δημήτρης Διαμαντίδης
Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων ‘Διόφαντος’ – Ε.Κ.Π.Α
mariosxenos@gmail.com, fakoudis@sch.gr, dimitrd@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος του σχεδιασμού ενός ψηφιακού βιβλίο (c-book) σαν το “τουρνουά Beach” Volley είναι η αυθόρμητη εμπλοκή των μαθητών (κυρίως Λυκείου) σε δημιουργικές δραστηριότητες σχετικές με τα μαθηματικά, που προκύπτουν φυσιολογικά στα πλαίσια της αφήγησης μιας ιστορίας. Πρωταγωνιστές είναι μια παρέα μαθητών που κατά τη διάρκεια των διακοπών τους προσπαθούν να οργανώσουν ένα τουρνουά Beach Volley. Στην εξέλιξη της ιστορίας ανακύπτουν προβλήματα από τη σύνθεση των ομάδων μέχρι την κατασκευή γηπέδου. Ο συνδυασμός κειμένου και ψηφιακών εργαλείων προκαλεί τους μαθητές να τα περιεργαστούν και να απαντήσουν σε αυθόρμητα ερωτήματα, αλλά και να κατασκευάσουν δικά τους ψηφιακά δομήματα όπως ένα γήπεδο.

Οι μαθητές-αναγνώστες χρησιμοποιούν τη γλώσσα Logo για να εκφράσουν συμβολικά ιδιότητες, το δυναμικό χειρισμό σχημάτων μέσω ολισθητών και παρατηρούν τα αντίστοιχα οπτικά αποτελέσματα δημιουργώντας εικασίες. Μέσα από πολλαπλές δυναμικές αναπαραστάσεις εννοιών, απαντούν σε ερωτήματα, ενώ ταυτόχρονα εμπλουτίζουν τις εικόνες που έχουν για τις έννοιες αυτές.





Το ψηφιακό βιβλίο ‘Τουρνουά Beach Volley’ αναπτύχθηκε στα πλαίσια του ευρωπαϊκού έργου ‘M C Squared Project’ και είναι προϊόν μιας μικρής κοινότητας (Community of Interest) Ελλήνων εκπαιδευτικών που της ελληνικής εκπαιδευτικής κοινότητας, τα οποία κομίζουν στο σχεδιασμό τις εξειδικευμένες γνώσεις και αντιλήψεις της κοινότητας πρακτικής που εκπροσωπούν (μαθηματικά, πληροφορική, εκπαιδευτικός σχεδιασμός ψηφιακού υλικού, διδασκαλία μέσω αφήγησης) και σχεδιάζουν πώς θα δημιουργήσουν μαθησιακά περιβάλλοντα που θα ενισχύσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Συμεωνίδης Νικόλαος
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

nsimeonidis@sch.gr

Σκοπός της εργασίας είναι να αναδείξει τις νέες μεταρρυθμιστικές προτάσεις που ακολούθησαν ή υιοθέτησαν αρκετές χώρες αναγνωρίζοντας τη σπουδαιότητα του αριθμητισμού.. Από τις πιο ολοκληρωμένες είναι της Αγγλίας, η «εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό». Ακολουθείται το μοντέλο της «άμεσης διδασκαλίας» όπου συμμετέχει ενεργά όλη η τάξη, ή οι ομάδες των μαθητών ή και καθένας ξεχωριστά. Χρησιμοποιείται ο μαθηματικός διάλογος για την επεξήγηση και παρουσίαση των στρατηγικών υπολογισμού τους στην τάξη (QCA, 1999). Στις υπόλοιπες αγγλοσαξονικές χώρες η Αυστραλία ακολουθεί και αυτή το αγγλικό πρόγραμμα και μοντέλο, στοχεύοντας στην επαρκή γνώση των μαθηματικών για συναλλαγές στην καθημερινή ζωή. Οι Η.Π.Α. με το πρόγραμμα 'standards 2000' ακολουθεί το Ολλανδικό μοντέλο των «ρεαλιστικών» μαθηματικών. Διαφοροποιείται με τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος για την ανάπτυξη του μαθηματικού διαλόγου, των νοερών υπολογισμών και της αιτιολόγησης των απαντήσεων και μεθόδων των μαθητών. Πολλές Ασιατικές χώρες εφάρμοσαν και αυτές μεταβολές στα αναλυτικά τους προγράμματα για τον αριθμητισμό (Fuji et al., 1998). Διαφοροποιούνται ανωτέρω ως εξής: στη Σιγκαπούρη, χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός διδακτικών μοντέλων (μετωπικής, εξατομικευμένης και μικρής ομάδας εργασίας), με ανάλογες δραστηριότητες. Στην Ιαπωνία και την Ταϊβάν ο περισσότερος διδακτικός χρόνος παρέχεται για διάλογο και σύγκριση στρατηγικών επίλυσης και υπολογισμού των μαθητών. Επιλέγονται μαθηματικά προβλήματα από την καθημερινή πραγματικότητα και όχι τυποποιημένα και υποθετικά (Κίνα). Η «διδασκαλία με όλη την τάξη» εφαρμόζεται κατ' επιλογή του διδάσκοντα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Fuji, T., Shimizu, Y., Kumagai, K., & Sugiyama, Y. (1998). A cross-cultural study of classroom practises based on a common topic. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics , 17*, 185-194.

NAEP. (2005). The nation's report card. Ανάκτηση June 25, 2015, από http://nces.ed.gov/nationsreportcard/

QCA. (1999). *Teaching mental calculation strategies: Guidance for teachers at key stage 1 & 2*. London, Great Britain: Guarding standards.

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΑΓΩΝ

ΠΑΡΑΓΩΓΗ, ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Χρίστος Χασιώτης
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
cchasiot@cc.uoi.gr
Βαρβάρα Καμπουρίδη
Σχολική Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
bkabouridis@gmail.com
Κωνσταντίνος Σδρόλιας
Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
ksdrolias@cc.uth.gr
Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
ttriant@cc.uth.gr

Σκοπός της προτεινόμενης Ομάδας Ανταλλαγών είναι ο προβληματισμός και η συζήτηση θεμάτων σχετικών με την παραγωγή, την οργάνωση και τη διαχείριση του διδακτικού υλικού στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Οι εργασίες της Ομάδας θα στηριχθούν σε δύο συλλογές διδακτικού υλικού, οι οποίες έχουν παραχθεί σε διαδοχικές φάσεις του Προγράμματος «Ένταξη τσιγγανοπαίδων στο Σχολείο». Κατά την πρώτη συνεδρία θα γίνει σύντομη παρουσίαση των δύο συλλογών και θα αναζητηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές τους, καθώς και οι πιθανές επιδράσεις τους στην αυτενέργεια, την συνεργασία και την αξιολόγηση των μαθητών. Κατά την δεύτερη συνεδρία θα προταθούν αντιπροσωπευτικές δραστηριότητες από τις δύο συλλογές για διδακτική ανάλυση και τελικό αναστοχασμό, σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αθανασίου, Λ. (2004) Παραγωγή διδακτικού υλικού και πιλοτικές εφαρμογές του. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας. Τομέας Παιδαγωγικής. (http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/1673/293.pdf)

Γεωργιάδου-Καμπουρίδη, Β., Μαρκόπουλος, Χ. (2007). Μαθηματικά. Βιβλίο του δασκάλου. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου. (http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/910/162.pdf).

Κλώθου, Α. κ.α. (2007) Μαθηματικά. Επίπεδο διδασκαλίας Α. Βιβλίο του μαθητή. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου. (http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/905/155.pdf).

Κλώθου, Α. κ.α. (2007) Μαθηματικά. Επίπεδο διδασκαλίας Β. Βιβλίο του μαθητή. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου. (http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/907/157.pdf).

Κλώθου, Α. κ.α. (2007) Μαθηματικά. Επίπεδο διδασκαλίας Γ. Βιβλίο του μαθητή. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου. (http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/936/159.pdf).

Χασιώτης, Χ. (2003) Λογικομαθηματικές δραστηριότητες για το Δημοτικό Σχολείο. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας. Τομέας Παιδαγωγικής. . (http://repository.edulll.gr/edulll/retrieve/737/124.pdf).

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ της ΚΑΘΕΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΜΕ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ POLYA

Βισσαρίου Αικατερίνη
Εκπαιδευτικός
aikaterinivissariou7@gmail.com

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η περιγραφή μιας διδακτικής παρέμβασης σχετικά με την εμπέδωση του αλγορίθμου της κάθετης πρόσθεσης με κρατούμενο κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος του Polya (1991). Η εν λόγω παρέμβαση υλοποιήθηκε σε μαθητές/τριες Β΄ Δημοτικού, αφού είχε προηγηθεί η διδασκαλία της αξίας θέσης ψηφίου στους διψήφιους αριθμούς (Κεφάλαιο 6ο), η μεγαλύτερη εξοικείωσή τους με τα κέρματα (Κεφάλαιο 11ο) και τα χαρτονομίσματα (Κεφάλαιο 40ο) του ευρώ και η διδασκαλία της κάθετης πρόσθεσης με κρατούμενο (Κεφάλαιο 34ο), σύμφωνα με το αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο (Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο 2007).

Κατά τον Polya (1991), η επίλυση ενός προβλήματος εξαρτάται σημαντικά από ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ή έναν οικείο χώρο εμπειριών, γνώσεων και παρόμοιων προβλημάτων. Υλοποιείται μέσα από τα ακόλουθα στάδια: α) εξοικείωση με το πρόβλημα, β) προσπάθεια για μεγαλύτερη κατανόηση, γ) αναζήτηση της κρίσιμης ιδέας, δ) εκτέλεση του σχεδίου και ε) ανασκόπηση της λύσης. Ωστόσο, αν ο μαθητής/τρια δεν μπορεί να λύσει το προτεινόμενο πρόβλημα, ο δάσκαλος τον ωθεί να επινοήσει και να λύσει πρώτα κάποιο πιο προσιτό σχετικό πρόβλημα, πετυχαίνοντας έτσι έναν πιο εύκολο στόχο. Η παραλλαγή του εξεταζόμενου αντικειμένου συμβάλλει στο να διατηρεί ζωντανό το ενδιαφέρον του μαθητή/τριας, ώστε να μην διασπάται η προσοχή του/της, να μην αποδιοργανώνεται η σκέψη του/της και να αποφεύγεται ο κίνδυνος να χάσει όλο το πρόβλημα (Polya 1991).

Για την υλοποίηση της διδασκαλίας αξιοποιήθηκε η βιωματική προσέγγιση, καθώς και η ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας. Πριν την έναρξη της διδασκαλίας, τοποθετήθηκαν στα θρανία της κάθε ομάδας μία εκατοντάδα κύβων Dienes, ψεύτικα κέρματα και χαρτονομίσματα του ευρώ και δύο φύλλα εργασίας. Το πρώτο περιείχε έναν κενό πίνακα καταγραφής της αξίας θέσης των ψηφίων και το δεύτερο ένα «σαφώς προσδιορισμένο» (Kahney 1997; Robertson 2001) μαθηματικό πρόβλημα με στοιχεία της καθημερινής ζωής, το οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν με τα στάδια επίλυσης του Polya. Το εποπτικό υλικό αποτέλεσε την αφόρμηση του μαθήματος, καθώς έγινε μια σύντομη αναφορά στην χρήση του, διέγειρε το ενδιαφέρον των παιδιών και τα προϊδέασε σχετικά με το τι πρόκειται να ακολουθήσει.

Έπειτα, αφού τα παιδιά διάβασαν το πρόβλημα που τους δόθηκε, η εκπαιδευτικός έθεσε ερωτήσεις, που τα βοήθησε να κατανοήσουν το πρόβλημα και να διαχωρίσουν τα δεδομένα, τη συνθήκη και τα ζητούμενα του προβλήματος. Ακολούθησε η υιοθέτηση των σταδίων της εν λόγω μεθόδου, κατά τη διάρκεια των οποίων η εκπαιδευτικός είχε τον ρόλο του καθοδηγητή, του συντονιστή και του εμψυχωτή των ομάδων. Ταυτόχρονα, τους δόθηκε η δυνατότητα να συνδέσουν τη νέα με την προϋπάρχουσα γνώση, όσον αφορά τη χρήση των ψεύτικων ευρώ, την αναπαράσταση των όρων των προσθέσεων στον πίνακα καταγραφής της αξίας θέσης των ψηφίων και την κάθετη πρόσθεση με κρατούμενο.

Από μια πρώτη ανάλυση διαπιστώθηκε η δυσκολία των παιδιών να τηρήσουν πιστά τα στάδια της συγκεκριμένης επίλυσης μεθόδου του προβλήματος, γεγονός που δυσκόλεψε την επαφή των παιδιών με τη νέα γνώση και την εφαρμογή της. Ωστόσο, δεν διαπιστώθηκε δυσκολία στην ανάκληση της προϋπάρχουσας γνώσης ούτε στην κατανόηση του προβλήματος, στην οποία συνέβαλαν σημαντικά οι κατάλληλες ερωτήσεις που τέθηκαν από την εκπαιδευτικό σε όλα τα στάδια της επίλυσης. Επίσης, καθόλη τη διάρκεια του μαθήματος τα παιδιά συμμετείχαν ενεργά και τα μέλη των ομάδων συνεργάζονταν μεταξύ τους σε κάθε στάδιο της επίλυσης του προβλήματος, καθιστώντας φανερό ότι η επίλυση προβλημάτων συνιστά ένα ισχυρό και αποτελεσματικό μέσο εκμάθησης (van de Walle 2007).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Kahney, H. (1997). *Λύση Προβλημάτων*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*. Αθήνα: Καρδαμίτσα.

Robertson, S. I. (2001). *Problem Solving*. Sussex: Psychology Press Ltd.

van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2007). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ ΣΤΗ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μαρία Δούκα & Μαριάνθη Ζιώγα
Παιδαγωγική Σχολή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
mariadkas@yahoo.gr, mizioga@eled.auth.gr

Η παρούσα εργασία αναφέρεται σε ένα σχέδιο μαθήματος της ενότητας των τετραπλεύρων της Δ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου (κεφάλαια 27-33). Οι κύριοι διδακτικοί στόχοι που καλύπτονται από την προκειμένη πρόταση αφορούν στην καθετότητα, την παραλληλία, την περίμετρο, την επιφάνεια/εμβαδόν και τις ιδιότητες των τετράπλευρων. Η πρόταση υλοποιήθηκε κατά τη διάρκεια οκτάωρης διδασκαλίας σε 21 μαθητές (11 αγόρια και 10 κορίτσια) Δ' τάξης, του 87ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, στο πλαίσιο της πρακτικής άσκησης του μαθήματος «Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών: Εφαρμογές στην τάξη» (χειμερινό εξάμηνο 2014-2015).

Οι δραστηριότητες της ενότητας συνενώθηκαν μεταξύ τους μέσω ενός ενιαίου σεναρίου, συνδέοντας με αυτόν τον τρόπο όλους τους στόχους, με σκοπό την πρόκληση του ενδιαφέροντος, την ανακάλυψη της νέας γνώσης και τη σύνδεση του περιεχομένου με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών. Το σενάριο αφορούσε στις περιπέτειες της «Ευθείας Γραμμής» σε ένα νέο, φανταστικό κόσμο, όπου όλα είναι ευθείες γραμμές. Τα παιδιά, στο ρόλο των «συν-εξερευνητών» της, και εργαζόμενα σε μικτές ομάδες των 5 ατόμων, επιδόθηκαν σε μία προσπάθεια να αποτυπώσουν σε μακέτα τον κόσμο αυτό, βασιζόμενα σε πληροφορίες που παρέχονταν σταδιακά, με τη μορφή γρίφων – προβληματισμών από την Ευθεία Γραμμή. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στη σχεδίαση του σεναρίου με τέτοιον τρόπο, ώστε να ευνοεί την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στους μαθητές.

Οι δραστηριότητες αφορούσαν την εύρεση απόστασης σημείου από ευθεία, την εξαγωγή του τύπου εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου από τους ίδιους τους μαθητές, την κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των τετραπλεύρων, τον υπολογισμό εμβαδού και περιμέτρου τετραπλεύρων και το σχεδιασμό τετραπλεύρων με συγκεκριμένες ιδιότητες (περίμετρο, εμβαδόν). Σχεδιάστηκαν με στόχο να θέσουν τα παιδιά σε προβληματισμό, να τα εισάγουν σε διαδικασία δράσης και σκέψης πάνω στη δράση. Επιπροσθέτως επιδιώξαμε να έχουν ως κύριο χαρακτηριστικό την καλλιέργεια της δημιουργικότητας. Στα μαθηματικά η δημιουργικότητα συχνά αξιολογείται σύμφωνα με τέσσερις δείκτες δημιουργικότητας

(Torrance, 1966 και Guilford,1967 στο Desli & Zioga, 2015): α) *επάρκεια*, την ικανότητα του ατόμου να βρίσκει μεγάλο αριθμό λύσεων που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του ερωτήματος, β) *ευελιξία*, την ικανότητα του ατόμου να εναλλάσσει διαφορετικές στρατηγικές, γ) *πρωτοτυπία*, την ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με καινούριο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει αντισυμβατική και μη αναμενόμενη λύση, και δ) *περίτεχνη λύση*, την ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει την δοσμένη ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να προχωρά σε γενικεύσεις. Αρκετές από τις δραστηριότητες καλλιεργούν τη δημιουργικότητα και κυρίως την επάρκεια και την πρωτοτυπία, καθώς καθιστούν δυνατή την εύρεση πολλαπλών και ασυνήθιστων λύσεων και την κατασκευή διαφορετικών μακετών πόλεων, με τα ίδια δεδομένα.

Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας περιελάμβανε ποικιλία τρόπων εργασίας των μαθητών (ατομικά, ομαδικά, ολομέλεια) και, κρίνοντας από την τελική δραστηριότητα αξιολόγησης, φάνηκε να καλύπτει τους στόχους. Ακόμη, παρατηρήθηκε προθυμία συμμετοχής όλων των παιδιών στο σύνολο των δραστηριοτήτων.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειωθεί ότι, καθώς οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με την εργασία σε ομάδες, πολλές φορές, χρειάστηκε ο μετασχηματισμός δραστηριοτήτων από ομαδικές εργασίες σε εργασίες σε ζευγάρια, ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν σταδιακά με την ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας (Ματσαγγούρας, 2001). Τα αποτελέσματα της παρατήρησης έδειξαν ότι η εργασία σε ζευγάρια έγινε εύκολα αποδεκτή από τους μαθητές και τα πρώτα ψήγματα λεκτικής αλληλεπίδρασης έκαναν την εμφάνισή τους, ενισχύοντας την πεποίθηση ότι με συνεχή και συστηματική ενίσχυση από τον εκπαιδευτικό, η συνεργασία σε μεγαλύτερες ομάδες είναι εφικτή, με όλα τα οφέλη που αυτό συνεπάγεται (για τα οφέλη της ομαδοσυνεργατικής μορφής διδασκαλίας βλ. Ματσαγγούρας, 2001). Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η εφαρμογή της παρούσας διδακτικής πρότασης σε άλλους μαθητικούς πληθυσμούς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Desli, D. & Zioga, M. (2015). Looking for creativity in primary school mathematical tasks. Proceedings of the ninth congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Czech: Prague.

Ματσαγγούρας, Η (2001). Στρατηγικές διδασκαλίας. Gutenberg: Αθήνα.

ΜΙΑ ΔΙΑΣΧΟΛΙΚΗ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Παναγιώτα Κοταρίνου, Ειρήνη Κουλέτση, Βαγγέλης Παντελής, Σωτήρης Συριόπουλος

Καλλιτεχνικό Σχολείο Γέρακα, Βαρβάκειο Πρότυπο Πειραματικό Γυμνάσιο, 3ο Γυμνάσιο Αμαρουσίου, 2ο Γενικό Λύκειο Βριλλησίων

pkotarinou@uth.gr, kouleir@gmail.com, aresot@otenet.gr

Στην εργασία μας αυτή θα παρουσιάσουμε μια διασχολική συνεργασία για την εφαρμογή στο σχολείο δραστηριοτήτων με χρήση 'διερευνητικής μάθησης' (inquiry based learning) στα μαθηματικά, με τρόπους που συνδέονται με τον χώρο της εργασίας. Η συνεργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil το οποίο έχει ως στόχο την προώθηση της διδασκαλίας αυτής της μορφής.

Η διερευνητική μάθηση σύμφωνα με τους Dorier και Maaß (2012) αναφέρεται σε ένα παράδειγμα διδασκαλίας Μαθηματικών και Φυσικών επιστημών με κέντρο τον μαθητή, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με τρόπους παρόμοιους με αυτούς που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί και φυσικοί. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να παρατηρήσουν φαινόμενα, να διατυπώσουν ερευνητικά ερωτήματα, να αναζητήσουν επιστημονικούς τρόπους για να απαντήσουν στα ερωτήματα αυτά (όπως να διεξάγουν πειράματα, να ελέγξουν μεταβλητές, να σχεδιάσουν διαγράμματα, να βρουν patterns και σχέσεις, να διατυπώσουν υποθέσεις, να ελέγξουν εικασίες, να προβούν σε γενικεύσεις και να διακρίνουν εναλλακτικές λύσεις) να ερμηνεύσουν και να αξιολογήσουν τις λύσεις τους. Οι Kremer & Schlüter (2006) διακρίνουν τη διερευνητική μάθηση σε *δομημένη*, *καθοδηγούμε* και σε *ανοιχτή διερεύνηση*, με την πλειοψηφία των ερευνών να αφορά στην καθοδηγούμενη διερεύνηση, η οποία δείχνει ότι έχει τα μεγαλύτερα οφέλη ταυτόχρονα και ως προς το περιεχόμενο αλλά και ως προς την ίδια τη διαδικασία της διδασκαλίας (Bruder & Prescott, 2013).

Για την εφαρμογή διδασκαλιών με *καθοδηγούμενη διερεύνηση* σχεδιάστηκαν και πραγματοποιήθηκαν μια σειρά από διδασκαλίες με θέμα την εγκατάσταση φωτοβολταϊκών (Φ/Β) στην ταράτσα μιας κατοικίας με τα οικονομικά και περιβαλλοντικά πλεονεκτήματα από την εγκατάσταση αυτή, με στόχους για τους μαθητές: α) την καλλιέργεια διερευνητικής σκέψης β) τη γνωριμία με την εφαρμογή επιστημονικής γνώσης στον χώρο εργασίας και γ) τη ενίσχυση της συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ τους. Οι εκπαιδευτικοί μέσα από συναντήσεις και ηλεκτρονική επικοινωνία συνεργάστηκαν για το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, προσάρμοσαν τη δραστηριότητα από το υλικό του προγράμματος Mascil σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα (Β Γυμνασίου και Λυκείου) αλλά και ιδιαιτερότητα κάθε σχολείου (Γενικό, Πρότυπο, Καλλιτεχνικό) και τη συνέδεσαν με το αναλυτικό πρόγραμμα (Τριγωνομετρία). Για την αξιολόγηση των διδασκαλιών αναλύθηκαν τα φύλλα εργασίας και μαγνητοφωνήθηκαν συζητήσεις από την εργασία ορισμένων ομάδων μαθητών.

Το βασικό ερώτημα που τέθηκε στους μαθητές ήταν ο υπολογισμός του μέγιστου αριθμού φωτοβολταϊκών (Φ/Β) πλεγμάτων που μπορούμε να εγκαταστήσουμε σε μια ταράτσα με σχήμα ορθογωνίου και συγκεκριμένων διαστάσεων ώστε να βρούμε το κέρδος που θα μας αποφέρουν κάθε χρόνο και να απαντήσουμε στο ερώτημα αν συμφέρει οικονομικά η εγκατάσταση τους. Ως εισαγωγή συζητήθηκαν θέματα που αφορούν στα Φ/Β, στη λειτουργία τους και στους παράγοντες που επηρεάζουν τη απόδοσή τους, ενώ έμφαση δόθηκε στο πρόβλημα του προσανατολισμού και της καταλληλότερης κλίσης για την εγκατάστασή των Φ/Β καθώς και στο επακόλουθο πρόβλημα δημιουργίας σκιάς από τον τρόπο τοποθέτησής τους. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε εργασία των μαθητών σε ομάδες, με τον εκπαιδευτικό σε ρόλο συντονιστή και εμψυχωτή.

Από μια πρώτη ανάλυση διαπιστώθηκε η δυσκολία των εκπαιδευτικών κατά τη μετατροπή μιας δομημένης δραστηριότητας που αναφέρεται σε ένα εξειδικευμένο θέμα συνδεδεμένο με τον εργασιακό χώρο σε διερευνητική, αλλά και η σημαντική επίδραση της συνεργασίας τους στην αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού. Και ενώ διαπιστώθηκαν δυσκολίες από τους μαθητές στην ανάκληση προηγούμενης γνώσης για την επίλυση πραγματικού προβλήματος, διαφάνηκε επίσης μια ενεργότερη εμπλοκή τους στην πορεία δόμησης της γνώσης, όπου οι ίδιοι θέτουν ερωτήματα, τα διερευνούν και αξιολογούν τα αποτελέσματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM Mathematics Education 45*, 811–822.

Dorier, J.-L., & Maaß, K. (2012). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Heidelberg: Springer. http://www.springerreference.com/index/chapterdbid/335725.

Kremer, A., & Schlüter, K. (2006). Analyse von Gruppensituationen beim forschend entdeckenden Lernen. Ergebnisse einer ersten Studie. *Erkenntnisweg Biologiedidaktik*, *5*, 145–156.

ΜΙΚΡΟΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΕΣ

Κούκιου Αλέκα
1ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας
kalex@math.uoa.gr

Στα πλαίσια του ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil (mathematics and science for life) οι μαθητές της Β τάξης του 1ου Γυμνασίου Νέας Ιωνίας δούλεψαν σαν μικροί αρχιτέκτονες. Ξεφεύγοντας από τα στενά πλαίσια του παραδοσιακού μαθήματος προσπάθησαν να φτιάξουν οι ίδιοι την κάτοψη μιας κατοικίας και να σχεδιάσουν τις θέσεις του σαλονιού, της κουζίνας των υπνοδωματίων, του WC όπως αυτοί επιθυμούν καλύτερα. Στο τέλος η κάθε ομάδα παρουσίασε και υποστήριξε τη λύση που πρότεινε στην υπόλοιπη τάξη.

Το πρόγραμμα mascil έχει ως στόχο την καλλιέργεια της διερεύνησης κατά τη διδασκαλία και μάθηση. Η προώθηση της διερεύνησης επιτυγχάνεται μέσα από τη σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών με το χώρο εργασίας. Η διερευνητική μάθηση εστιάζει στη πρόκληση της περιέργειας των μαθητών, στην ενίσχυση της συμμετοχής τους και στην επιδίωξη της εμβάθυνσης στην κατανόηση. (Maas & Artigue, 2013). Στα πλαίσια λοιπόν αυτού του προγράμματος η δραστηριότητα σχεδιάστηκε με στόχους: α) Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με την πολυπλοκότητα των προβλημάτων της καθημερινής ζωής και των χώρων εργασίας και να μεταφέρουν τις σχολικές γνώσεις, ώστε να επιλύσουν τα προβλήματα και να πάρουν τις σχετικές αποφάσεις. β) Να εκτελούν μαθηματικές πράξεις και μαθηματικούς υπολογισμούς με βάση τύπους εμβαδού σε πραγματικές καταστάσεις. γ) Να εκτιμούν τα γεωμετρικά μεγέθη και να χρησιμοποιούν σωστά τα γεωμετρικά όργανα.

Αρχικά μοιράστηκαν κάποιες οδηγίες από το βιβλίο Αρχιτεκτονικό σχέδιο της Γ Λυκείου[20] σχετικά με το α) τι είναι κάτοψη και β) ποια βήματα ακολουθεί ένας αρχιτέκτονας για να κατασκευάσει μια κάτοψη. Στην συνέχεια δόθηκε ένα φύλλο Α3 στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν την κάτοψη μιας μονοκατοικίας περίπου $100m^2$ λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι θα κατοικήσει μια τετραμελής οικογένεια.
Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 4 ατόμων και προσπάθησαν να δουλέψουν «περίπου» όπως οι αρχιτέκτονες. Προβληματίστηκαν για το που πρέπει να είναι το σαλόνι, η κουζίνα τα υπνοδωμάτια, το WC. Χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά όργανα (συνειδητοποίησαν μάλιστα τη χρησιμότητα του γνώμονα κατά την κατασκευή ενός ορθογωνίου).

[20] http://ps.privateschools.gr/lykeio/c_lyk/Arxitektoniko_Sxedio/Arxitektoniko_Sxedio-Biblio_Mathiti.pdf

Συνεργάστηκαν, αν και διαφωνούσαν συχνά για την χωροθέτηση. Οι συζητήσεις των ομάδων μαγνητοφωνήθηκαν.

Κάποιες ομάδες δυσκολεύτηκαν στην αρχή να βρουν τις διαστάσεις του σπιτιού. Κάποιοι μπέρδεψαν την περίμετρο με το εμβαδόν ενώ κάποιοι έδωσαν διαστάσεις που δεν είναι ρεαλιστικές (2x50 ή 4x25). Δυσκολία επίσης συνάντησαν και με την κλίμακα «*...τα 3 cm είναι 6 m; Όχι είναι 1,5..*».Μερικοί μαθητές προσπάθησαν να φτιάξουν ένα τετράγωνο μόνο μετρώντας διαδοχικά την ίση πλευρά με αποτέλεσμα η 4η πλευρά του τετραγώνου να μην ενώνεται με την πρώτη. Τότε συνειδητοποίησαν ότι η κατασκευή ενός τετραγώνου ή ενός ορθογωνίου χρειάζεται σωστή χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Οι διαφορετικές κοινωνικοπολιτικές απόψεις τους και τα προσωπικά τους βιώματα συχνά τους οδηγούσαν σε διαφορετικές επιλογές και σε προστριβές. Μια ομάδα είχε κάνει μεγάλο το δωμάτιο των γονιών και πολύ μικρό το δωμάτιο των παιδιών. Στην συνέχεια τα άλλαξαν γιατί συνειδητοποίησαν ότι τα παιδιά θέλουν περισσότερο χώρο. Χαρακτηριστικοί είναι οι παρακάτω διάλογοι

Μ1: 2 δωμάτια για τα παιδιά ή ένα;

Μ2: 1 με κουκέτα........................

Μ3: Θέλουμε 2 μπάνια

Μ4: Γιατί;

Μ3: Γιατί είναι τετραμελής οικογένεια

Η δραστηριότητα αυτή είναι ανοικτή, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να πάρουν πολλές αποφάσεις αλλά και να αιτιολογήσουν γιατί αυτές είναι καλές. Κινητοποίησε τις μαθηματικές γνώσεις τους και βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις έννοιες του εμβαδού, του χώρου και να συνδέσουν τις διαστάσεις του σχεδίου με τις πραγματικές διαστάσεις. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις τους, «απόλαυσαν την δραστηριότητα» και ένιωσαν σαν μικροί αρχιτέκτονες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Maas, K. and Artigue, M., 2013, “Implementation of inquiry-based learning in day to day teaching: a synthesis”. ZDM The International Journal on Mathematics Education. Vol. 45, pp. 779-795.

www.mascil-project.eu

BULLYING

Κούκιου Αλέκα
1ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας
kalex@math.uoa.gr

Το πρόβλημα του bullying είναι έτσι και αλλιώς ένα καυτό θέμα στο σύγχρονο σχολείο. Οι μαθητές της Β γυμνασίου βρήκαν πολύ ενδιαφέρον να ασχοληθούν με ένα ερωτηματολόγιο μέσα από το οποίο θα έβλεπαν και οι ίδιοι την κατάσταση που επικρατεί στο δικό τους σχολείο. Στο άρθρο αυτό θα σας παρουσιάσω την εργασία που έκαναν οι μαθητές μου στα πλαίσια του ευρωπαικού πρόγραμματος Mascil (www.mascil-project.eu).

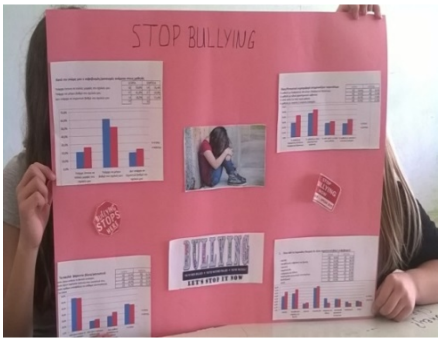
Το mascil (maths and science in life) στοχεύει στην διάχυση της διερευνητικής διδασκαλίας και μάθησης στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τη σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών με το χώρο εργασίας. http://noether.math.uoa.gr/mascil/gr/html/index.html. Η διερευνητική μάθηση κινητοποιεί τους μαθητές να ερευνήσουν, να θέσουν ερωτήσεις και να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα. Αυτό το είδος μάθησης έχει επίκεντρο τους μαθητές και την συνεργασία μεταξύ τους (Doorman, 2011). Στα πλαίσια λοιπόν αυτού του προγράμματος σχεδιάστηκε η δραστηριότητα με στόχους α) την εξοικείωση των μαθητών με τις διαδικασίες συλλογής καταγραφής και οργάνωσης δεδομένων β) την διαχείριση και ανάλυση δεδομένων, εξαγωγή συμπερασμάτων και διαμόρφωση επιχειρηματολογίας γ) την χρήση γραφημάτων και γραφικών παραστάσεων για την εμπεριστατωμένη παρουσίαση των ευρημάτων της έρευνας

Οι μαθητές ανέπτυξαν το πρόβλημα του bullying στην τάξη και μετά από συζήτηση έφτιαξαν ένα ερωτηματολόγιο. Στην συνέχεια μοίρασαν τα ερωτηματολόγια σε όλες τις τάξεις του σχολείου και συνέλεξαν δεδομένα. Η επεξεργασία των δεδομένων έγινε σε 2 διδακτικές ώρες όπου δημιουργήθηκαν ομάδες των 3 ή 4 ατόμων. Οι μαθητές αφέθηκαν ελεύθεροι να επεξεργαστούν τα δεδομένα όπως αυτοί θέλουν καλύτερα. Επέλεξαν για πρδ να επεξεργαστούν χωριστά τα ερωτηματολόγια των αγοριών από εκείνα των κοριτσιών. Η συζήτηση που έγινε στην ολομέλεια της τάξης προσπάθησε να δώσει ερμηνείες των αποτελεσμάτων που συλλέχτηκαν. Τα παιδιά κατέγραψαν τα αποτελέσματά τους σε μεγάλες αφίσες. Χρησιμοποίησαν κυρίως κυκλικό διάγραμμα και ραβδογράμματα τα οποία έγιναν με excel στο σχολικό εργαστήριο υπολογιστών. Τέλος παρουσίασαν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους σε εκδήλωση στον χώρο του σχολείου .

Μέσα από την δραστηριότητα αυτή οι μαθητές είχαν την ευκαιρία

- να παρατηρήσουν φαινόμενα (το άθροισμα των ποσοστών βγαίνει περισσότερο από 100% όταν υπάρχει η δυνατότητα να επιλέξεις πολλές απαντήσεις σε κάποια ερώτηση),
- να κινητοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις (ποσοστά, διαγράμματα..)
- να θέσουν ερωτήματα που τους βοήθησαν να εξελίξουν τη σκέψη τους,
- να ερμηνεύσουν και να συζητήσουν τα αποτελέσματα,

Το θέμα της διδακτικής παρέμβασης (Bullying) ήταν πολύ ενδιαφέρον για τους μαθητές. Η συζήτηση (η οποία βιντεοσκοπήθηκε) ήταν άκρως ενδιαφέρουσα για όλους τους εκπαιδευτικούς και όχι μόνο για τους μαθηματικούς. Θα έπρεπε κατά την γνώμη μου να είχε δοθεί περισσότερος χρόνος σε αυτό. Ωστόσο προέκυψαν και αρκετά προβλήματα. Το ερωτηματολόγιο ήταν αρκετά μεγάλο (12 ερωτήσεις), τα ερωτηματολόγια που συλλέχτηκαν ήταν αρκετά (περίπου 130) με αποτέλεσμα η επεξεργασία των δεδομένων να γίνει χρονοβόρα και ανιαρή. Η αγωνία όμως για τα αποτελέσματα κράτησε τους μαθητές σε εγρήγορση. Αναλαμβάνοντας ρόλο παρόμοιο με αυτό του επιστήμονα-ερευνητή, οι μαθητές ανέπτυξαν δεξιότητες που μπορεί να τους βοηθήσουν στη μελλοντική τους επαγγελματική πορεία αλλά και στην καθημερινότητα.



Μερικές από τις ερωτήσεις που υπήρχαν στο ερωτηματολόγιο

1 Κατά την γνώμη μου ο εκφοβισμός/ρατσισμός ανάμεσα στους μαθητές
- ☐ Υπάρχει έντονα σε πολλές μορφές στο σχολείο μου
- ☐ Υπάρχει σε μέτριο βαθμό στο σχολείο μου
- ☐ Δεν υπάρχει σε σημαντικό βαθμό στο σχολείο μου

2 Οι περισσότεροι καθηγητές
- ☐ Ανέχονται ρατσιστικές συμπεριφορές
- ☐ Δεν επιτρέπουν ρατσιστικές συμπεριφορές και αντιδρούν

3 Τα παιδιά φέρονται βίαια/ρατσιστικά
- ☐ Διότι έχουν ανάγκη να φανούν ανώτεροι.
- ☐ Διότι έχουν παρόμοια πρότυπα στην οικογένειά τους.
- ☐ Διότι νιώθουν ανασφάλεια και αίσθημα κατωτερότητας.
- ☐ Για πλάκα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Doorman, M. (2009). PRIMAS WP3 – Materials: Teaching and professional development materials for IBL (version 2). Netherlands: PRIMAS project

MATHEMATICAL CREATIVITY SQUARED: ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ

Χρόνης Κυνηγός[1], Μαρία Δασκολιά[2], Ιωάννης Παπαδόπουλος[3], Αικατερίνη Μακρή[4]

Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και εκδόσεων 'Διόφαντος' – Ε.Κ.Π.Α.[1, 2, 4], ΑΠΘ[3]

kynigos@ppp.uoa.gr[1] mdaskol@ppp.uoa.gr[2] ypapadop@eled.auth.gr[3] kmakrh@ppp.uoa.gr[4]

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Η μαθηματική δημιουργικότητα αναγνωρίζεται ως μία σημαντική ικανότητα, απαραίτητο να καλλιεργηθεί σε όλους τους μαθητές. Ωστόσο, η καλλιέργειά της αποτελεί μία σύνθετη πρόκληση, εξαιτίας τόσο της έλλειψης κατάλληλων τεχνολογιών που ευνοούν το δημιουργικό σχεδιασμό ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού, όσο και της απουσίας κατάλληλης μεθοδολογίας που να μπορεί να υποστηρίξει το δημιουργικό συνεργατικό σχεδιασμό για τους επαγγελματίες του χώρου. Συνεπώς, ο σχεδιασμός με στόχο τη δημιουργική μαθηματική σκέψη θεωρείται ως μία διπλή πρόκληση με άξονες:

- τη δημιουργικότητα στη μαθηματική σκέψη
- τη δημιουργικότητα στο σχεδιασμό ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο MC Squared (http://mc2-project.eu) είναι ένα τριετές (2013-2016) Ευρωπαϊκό Πρόγραμμα έρευνας και ανάπτυξης (European Commission). Στοχεύει στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός προσαρμόσιμου υπολογιστικού περιβάλλοντος, το οποίο υποστηρίζει άτομα από διαφορετικούς επαγγελματικούς χώρους που εμπλέκονται με την παραγωγή ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού να συνεργαστούν και να σχεδιάσουν από κοινού ψηφιακό υλικό. Η ερευνητική εστίαση τοποθετείται στην κοινωνική δημιουργικότητα που αναπτύσσεται κατά το σχεδιασμό ψηφιακών μέσων που στοχεύουν στην προώθηση της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης (Creative Mathematical Thinking, CMT) στους μαθητές.

ΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ: Η ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ C-BOOK

Η τεχνολογία c-book περιλαμβάνει:

- έναν προσαρμόσιμο μηχανισμό data analytics (authorable data analytics engine) με γραφική επιφάνεια διεπαφής, για την προσαρμογή της πληροφορίας που απαιτείται για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας σε επίπεδο τελικού χρήστη
- μία προσαρμόσιμη δυναμική υποδομή e-book για επαγγελματίες σχεδιαστές υλικού, ώστε να σχεδιάζουν από κοινού εκπαιδευτικό υλικό που στοχεύει στη μαθηματική δημιουργικότητα, και για

μαθητές, ώστε να σχεδιάζουν τις δικές τους προσαρμοσμένες εκδόσεις αυτού του υλικού

– ένα εύρος δυναμικών, διερευνητικών και εποικοδομητικού χαρακτήρα ψηφιακών εργαλείων, ενσωματωμένων στην υποδομή του c-book και ειδικά σχεδιασμένων ώστε να προωθούν τη δημιουργικότητα στη μαθηματική έκφραση των μαθητών, την διερεύνηση και την κατασκευή νοημάτων

ΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ: ΚΟΙΝΟΤΗΤΕΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ

Το κοινωνικό περιβάλλον συνενώνει διαφορετικές κατηγορίες επαγγελματιών προς το στόχο της αναθεώρησης της έννοιας των ανοικτών εκπαιδευτικών πηγών που συνδυάζουν παιδαγωγικές του 21ου αιώνα με ανάλογες τεχνολογίες. Οι δραστηριότητες και η παραγωγή περιλαμβάνουν:

- τη δημιουργία τεσσάρων πολυσυλλεκτικών κοινοτήτων ενδιαφέροντος σε τέσσερα αντίστοιχα Ευρωπαϊκά κράτη
- τη συνεργατική παραγωγή ενός αριθμού υποδειγματικών εφαρμογών c-book
- την αποτύπωση αυτής της διαδικασίας μέσα από ειδικά εργαλεία που καταγράφουν την επικοινωνία των σχεδιαστών και την πορεία της ανάπτυξης των διαδοχικών εκδόσεων του υλικού

ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Το έργο MC Squared συμβάλλει στη γνώση μας για τη φύση της διαδικασίας της κοινωνικής δημιουργικότητας μέσα από:

– μία στιβαρή αξιολόγηση του τρόπου με τον οποίο αναπτύσσεται η δημιουργικότητα μέσα σε πολυσυλλεκτικές κοινότητες επαγγελματιών, αλλά και των ειδών της δημιουργικότητας που προκύπτουν μέσα από την εμπλοκή μ’ αυτές τις τεχνολογίες.

– Τη σύνθεση μίας μεθοδολογικής εργαλειοθήκης για τον τρόπο οργάνωσης τέτοιων κοινοτήτων και την υποστήριξη δημιουργικών σχεδιασμών που στοχεύουν στη μαθηματική δημιουργικότητα.

ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΜΦΙΣΗΜΙΑ ΤΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΔΟΜΩΝ

Μαυρομμάτης Άρης – Παπανικολάου Απόστολος - Σταθοπούλου Σοφία
amavromatis@rhodes.aegean.gr – apapani@math.uoa.gr
– sosta@e-arsakeio.gr

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια καινοτόμο διδακτική πρόταση που έχει ως στόχο τη μελέτη Γεωμετρικών εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μέσω της Διαθεματικότητας της Τέχνης με τα Μαθηματικά. Ειδικότερα, μέσα από τα αμφισημιακά εικαστικά έργα του Vasarely, της σειράς Tridim, ανακαλύπτεται η υπάρχουσα υπόρρητη γεωμετρική δομή, η οποία οδηγεί σε επίπεδες κανονικές πλακοστρώσεις, και σε συνδυασμό με το παιχνίδι Tridio [1] ανακαλύπτεται η αξονομετρική προβολή, η οποία αναδεικνύει την σχέση ανάμεσα σ' ένα τρισδιάστατο αντικείμενο και την δισδιάστατη επίπεδη προβολή του. Ο συνδυασμός των συγκεκριμένων έργων τέχνης και του παιχνιδιού Tridio, όπως παρατηρήσαμε από την εφαρμογή του σε ένα μεγάλο δείγμα μαθητών ηλικίας 10-15 ετών και σε διάστημα δυο περίπου ετών στο Μουσείο Ηρακλειδών, οδήγησε στην εξαγωγή συμπερασμάτων όπως: τη δημιουργία κλίματος ενδιαφέροντος τόσο για την Τέχνη όσο και για τα Μαθηματικά, την ανάπτυξη της ουσιαστικής συνεργασίας μαθητών με διαφορετικό γνωστικό επίπεδο στα μαθηματικά, την αντιμετώπιση των μαθηματικών χωρίς το σύνδρομο της μαθηματικοφοβίας, την συμβολή στην εκπαίδευση άλλων χώρων εκτός του σχολείου, όπως για παράδειγμα των Μουσείων [2], τον παρεμβατικό ρόλο της μη τυπικής εκπαίδευσης στη μάθηση κ. ά.

Η αποκωδικοποίηση σχέσεων μεταξύ χρωματικών τονικοτήτων οδηγεί το παιδί στον σχηματισμό μιας «ιδέας». Ενώ η αναζήτηση της τεχνικής τοποθέτησης των μορφών στο επίπεδο, με τρόπο ακριβή δημιουργεί την ανάγκη «αναζήτησης και εφαρμογής γεωμετρικών μεθόδων».

Προβάλλεται συγκεκριμένος ζωγραφικός πίνακας και ζητείται να περιγραφεί ελεύθερα στη φυσική γλώσσα. Οι αναμενόμενοι διαφορετικοί τρόποι περιγραφής αναδεικνύουν τον αμφισημιακό του χαρακτήρα. Στη συνέχεια επιλέγονται τα σημεία, τα οποία αποτελούν κορυφές της εικονιζόμενης μορφής. Χαράσσονται οι ευθείες γραμμές που ορίζονται από τα σημεία που καθορίζουν οι ακμές της εικονιζόμενης μορφής. Αποσύρεται η εικόνα και ανακαλύπτεται το γεωμετρικό πλέγμα που ορίζει τη γεωμετρική δομή της κατασκευής και τα γεωμετρικά σχήματα: κανονικό εξάγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο. Τα σχήματα αυτά αποτελούν δυο από τα τρία κανονικά πολύγωνα που ορίζουν επίπεδες κανονικές πλακοστρώσεις. Εισάγεται το παιχνίδι Tridio [3] και με τη χρήση 4 κύβων πραγματοποιείται πάνω στο ορθογώνιο πλαίσιο η εικονιζόμενη κατασκευή. Στη συνέχεια με τη χρήση των ψηφίδων δημιουργείται η επίπεδη αναπαράσταση της αντίστοιχης στερεάς κατασκευής. Με βάση τα οριζόμενα σημεία στην εικόνα της προηγούμενης επίπεδης αναπαράστασης χαράσσονται οι αντίστοιχες δέσμες παραλλήλων ευθειών. Απομακρύνεται η εικόνα από το πλέγμα των παραλλήλων ευθειών και ανακαλύπτεται ότι η επίπεδη προβολή της στερεάς κατασκευής, υπόκειται στην ίδια γεωμετρική δομή [4] με εκείνη του ζωγραφικού πίνακα. Με βάση τώρα την γεωμετρική δομή που ανακαλύφθηκε κατασκευάζεται ο αξονομετρικός κύβος, ως η στοιχειώδης μονάδα ανακατασκευής της εικόνας της στερεάς κατασκευής. Εδώ ακολουθείται η αντίστροφη πορεία από την επίπεδη εικόνα της κατασκευής προς την ίδια την κατασκευή. Χρησιμοποιώντας την βασική αξονομετρική μονάδα, δηλαδή τον αξονομετρικό κύβο σχεδιάζεται η προβολή μιας κατασκευής και ζητείται μέσω του Tridio η πραγματοποίηση της ίδιας της στερεάς κατασκευής. Χρησιμοποιώντας τέλος όλα όσα ανακαλύφθηκαν προηγουμένως, αναπτύσσεται μαθηματικός διάλογος πάνω τις έννοιες: της επίπεδης κανονικής πλακόστρωσης, της μεταφορικής, περιστροφικής και αξονικής συμμετρίας, της αξονομετρικής προβολής και γενικότερα του τρόπου παράστασης ενός τρισδιάστατου αντικειμένου σε μια επίπεδη επιφάνεια και αντιστρόφως.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Productief B. V. (2006) *Tridio: Handleiding ruimtelijk inzicht niveau 1,2* . Rotterdam, Netherlands: Author.
2. Burnham R. & Elliot Kai-Kee, (2011) *Teaching in the art Museum, Paul Getty Museum, Los Angeles.*
3. Lohman, D. F. (1993) *spatial ability and g*. Paper presented at the first Spearman Seminar, University of Plymouth, UK.
4. Yenawine P., (2006). *Shapes*, The Museum of Modern Art, New York.

ΔΡΑΠΕΤΕΥΟΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Μιχαηλίδου Χριστίνα, Κοεμτζόπουλος Λάζαρος, Λεοντής Παναγιώτης, Τζώτζης Ευάγγελος
1ο Πειραματικό ΓΕΛ Μανόλης Ανδρόνικος
chrismichailidou@gmail.com

Περίληψη: *Τα Δωμάτια Απόδρασης (Escape Rooms) είναι χώροι με ζωντανά βιωματικά παιχνίδια με στόχο οι μαθητές / παίκτες να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους και να συγκεντρώσουν, να συνδυάσουν όλα τα απαραίτητα στοιχεία, αντικείμενα, κλειδιά, κωδικούς, γρίφους προκειμένου να διαλευκάνουν την υπόθεση και να προλάβουν να δραπετεύσουν στην ώρα τους. Στο 1ο ΠΓΕΛ Μανόλης Ανδρόνικος δημιουργήθηκαν κατά το σχολικό έτος 2014-2015, δυο δωμάτια απόδρασης στα οποία έλαβε μέρος ένας μεγάλος αριθμός μαθητών του σχολείου.*

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Στόχος της «ψυχαγωγικής εκπαίδευσης» (edutainment) είναι να μετατρέψει την εκπαίδευση σε μία διασκεδαστική δραστηριότητα με θετικά μαθησιακά αποτελέσματα (Lund & Nielsen, 2002). Τα εκπαιδευτικά παιχνίδια αποτελούν μία πηγή κινήτρου για τους μαθητές και τους δίνουν τη δυνατότητα να δοκιμάσουν και να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους ενώ ταυτόχρονα διασκεδάζουν (Malone, 1980). Η ομαδική συνεργασία επιτρέπει στα μέλη της ομάδας να ξεπεράσουν τα ατομικά τους όρια σκέψης και πράξης (Ματσαγγούρας 2000).

ΤΟ ΔΩΜΑΤΙΟ ΑΠΟΔΡΑΣΗΣ «ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΝΔΡΟΝΙΚΟΣ»

Στο δωμάτιο απόδρασης «Μανόλης Ανδρόνικος» η ομάδα (3-5 μέλη), η οποία διαγωνίζεται θα πρέπει σε χρόνο 45 λεπτών να λύσει τους γρίφους, να βρει τρία χαμένα αντικείμενα (το πρώτο θα είναι ορθογώνιο, το δεύτερο ένας μικρός κύκλος και το τρίτο ένας μεγαλύτερος κύκλος), τα οποία θα είναι σχετικά με τον Μανόλη Ανδρόνικο, και να αποδράσει. Μέσα στο δωμάτιο υπάρχουν τρείς game-masters, οι οποίοι επιβλέπουν τους διαγωνιζόμενους και τους βοηθάνε όταν κρίνουν ότι είναι απαραίτητο. Η επιστημονική λογική σκέψη, η συνεργασία, η παρατηρητικότητα και η ψυχραιμία είναι κάποια από τα απαραίτητα στοιχεία για την επιτυχή δραπέτευση. Η συνεργασία με στόχο την αποτελεσματική λύση του μυστηρίου καθιστά το παιχνίδι ιδανικό για δραστηριότητες με στόχο την ανάπτυξη του ομαδικού πνεύματος ανάμεσα σε ομάδες (team building). Μπαίνοντας στο δωμάτιο οι παίχτες προσπαθούν να εντοπίσουν κλειδιά, κλειδαριές, στοιχεία γρίφων, αινίγματα, κώδικες που διαδοχικά θα τους οδηγούν σε επόμενα στάδια με απώτερο στόχο την απόδραση. Στο δωμάτιο «Μανόλης Ανδρόνικος» οι μαθητές θα εντοπίσουν κλειδωμένα κασελάκια είτε με απλές κλειδαριές είτε με 3ψηφιους κωδικούς που πρέπει προηγουμένως να ανακαλύψουν «σπάζοντας» κατάλληλους γρίφους. Επιπλέον, θα πρέπει να παρατηρήσουν στο χώρο κώδικες που κρύβονται πίσω από αφίσες θεατρικών παραστάσεων, αριθμό χρωματιστών μπαλών και χάρτες με συντεταγμένες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ενεργητική ενασχόληση, η κοινωνική συμμετοχή, οι εποικοδομητικές δραστηριότητες, η ανάπτυξη στρατηγικής για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων, ο αυτοέλεγχος, η αναδόμηση της προϋπάρχουσας γνώσης είναι ανάμεσα στα θετικά αποτελέσματα των δωματίων απόδρασης. Τα παιχνίδια μπορούν να γίνουν εκπαιδευτικά αν συσχετιστούν με κοινωνικά ενδιαφέροντα που η εκπαίδευση εξυπηρετεί (Pelletier, 2005). Εκπαιδευτικοί και μαθητές θεωρούν ότι η εμπειρία της συνεργασίας αλλά και του ανταγωνισμού μέσω παιχνιδιού στην τάξη δημιουργεί θετικά συναισθήματα και βοηθά τους μαθητές να μαθαίνουν ευκολότερα παίζοντας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Lund, H. H. and Nielsen, J. (2002). An Edutainment Robotics Survey. *In Proceedings of the Third International Symposium on Human and Artificial Intelligence Systems: The Dynamic Systems Approach for Embodiment and Sociality, Fukui.*

Malone, T. W. (1980), What make things fun to learn? A study of intrinsically motivating computer games, *Cognitive and Instructional Science Series, CIS-7, Xerox Palo Alto Research Center, Palo Alto*

Ματσαγγούρας Η. (2000) Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση, *Εκδόσεις Γρηγόρης, Αθήνα*

Pelletier. C (2005), Reconfiguring Interactivity, Agency and Pleasure in the Education and Computer Games Debate – using Žižek's concept of interpassivity to analyse educational play, *Learning, Volume 2, Number 4, 2005*

«Ο ΛΑΒΥΡΙΝΘΟΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ»

Μουσταφάογλου Σελατίν, Μωυσιάδου Σοφία, Ντελή Χαββά, Ομέρ Εσρά, Τζουμέρκα Παρασκευή

Π.Τ.Δ.Ε. Α.Π.Θ.

mselatin@eled.auth.gr, xavvanteli@gmail.com, sophaki7fa@gmail.com, omresra@hotmail.com, paraskevitzoum@hotmail.com

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να περιγραφεί μια διδακτική παρέμβαση που αφορά στα κλάσματα της Γ΄ Δημοτικού με τη χρήση ενός ρεαλιστικού πλαισίου. Για το σκοπό αυτό επινοήθηκε ένα φανταστικό σενάριο το οποίο εξελίσσεται γύρω από την κλοπή ενός σκύλου, στο οποίο εντάχθηκαν δραστηριότητες που συνδέονται με την καθημερινή ζωή των παιδιών και καλύπτουν με ποικίλους τρόπους το μαθηματικό περιεχόμενο των κλασμάτων.

Στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης, χρησιμοποιήθηκε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι που σχεδιάστηκε για το σκοπό της διδασκαλίας και το οποίο λειτούργησε επαναληπτικά. Η χρήση του παιχνιδιού βασίστηκε στο γεγονός ότι η μάθηση μέσα από το παιχνίδι επιφέρει θετικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τον Feldman (2009), το παιχνίδι συνεισφέρει στην κοινωνική, συναισθηματική και γνωστική ανάπτυξη των παιδιών. Επιπλέον, προκαλεί το ενδιαφέρον προσφέροντας συγχρόνως νόημα και, μάλιστα, δια μέσω δράσης και άμεσης εφαρμογής (Ball, 1992). Τέλος, παρέχει τη δυνατότητα στα παιδιά να παρουσιάσουν τις ιδέες αλλά και τις στρατηγικές σκέψης τους, ενισχύοντας τα κίνητρα και το σκοπό μάθησης (Χατζηγεωργίου, 2012). Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με την ομαδοσυνεργατική μορφή μάθησης. Η μορφή αυτή επιφέρει θετικές επιπτώσεις στον κοινωνικό, ψυχολογικό και γνωστικό τομέα της ανάπτυξης των παιδιών (Ματσαγγούρας, 2001).

Οι δραστηριότητες, σχεδιάστηκαν βάσει κλιμάκωσης βαθμού δυσκολίας, από το απλό-συγκεκριμένο προς το σύνθετο-αφηρημένο. Στο σύνολό τους εντάχθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες: α) δραστηριότητες σχετιζόμενες με χωρισμούς ή/ και διπλώσεις ίσων τμημάτων και ισάριθμων συνόλων, β) δραστηριότητες ισοδυναμίας κλασμάτων, γ) δραστηριότητες αναπαράστασης κλασμάτων και δ) δραστηριότητες επαναληπτικές που εμπεριέχουν τις παραπάνω κατηγορίες.

Για το επιτραπέζιο παιχνίδι χρησιμοποιήθηκαν ένα ταμπλό, ζάρια και πιόνια. Στο ταμπλό απεικονίζονταν σε τετραγωνάκια οι αριθμοί από το 1 έως το 100 και έξι διαφορετικές φιγούρες, οι οποίες αντιπροσωπεύουν έξι κατηγορίες ερωτήσεων ή δράσεων διαβαθμισμένης δυσκολίας. Οι κατηγορίες των ερωτήσεων αφορούν: α) ερωτήσεις για την ισοδυναμία, το μισό και το διπλάσιο κλασμάτων, β) ερωτήσεις συσχετισμού κλασμάτων με χρωματισμένα σχήματα, γ) ερωτήσεις για την ώρα, τα τέταρτα και τα μισά σε σχέση με αυτήν, δ) εντολές για τη μετακίνηση στο ταμπλό με τη χρήση κλασμάτων, ε) ερωτήσεις γενικής χρήσης των κλασμάτων όπως ερμηνεία αποτελεσμάτων έρευνας και, τέλος, ζ) ορισμένα προβλήματα προς λύση. Τα παιδιά ερχόμενα αντιμέτωπα με μια ερώτηση ή δράση, όφειλαν, αρχικά, να σκεφτούν σε ατομικό επίπεδο και, έπειτα, να διατυπώσουν την ιδέα ή στρατηγική τους στα μέλη της ομάδας. Για να προχωρήσουν, όμως, απαιτούνταν να συναποφασίσουν σχετικά με την ορθότητα των παραπάνω (σκέψη και στοχασμός πάνω στη σκέψη).

Στην πλειοψηφία τους συμμετείχαν ενεργά και ήθελαν να απαντούν. Απογοητεύονταν, μάλιστα, αν «έπεφταν» σε αριθμό που δεν αντιστοιχούσε σε κάποια ερώτηση. Ακόμα, έγινε μια μικρή επανάληψη στην πρόσθεση δεκαδικών και μη αριθμών με νοερούς υπολογισμούς. Κάθε φορά που τα παιδιά απαντούσαν σωστά σε κάτι, έκαναν νοερά τον υπολογισμό για να βρουν πόσους πόντους είχε συγκεντρώσει πλέον η ομάδα.

Κλείνοντας, η συνεισφορά του επιτραπέζιου παιχνιδιού στη μάθηση των παιδιών αλλά περισσότερο αυτών που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα Μαθηματικά ήταν σημαντική. Με λίγα λόγια, η ενασχόληση με αυτό συνετέλεσε στη θετικότερη στάση τους απέναντι στη «δυσκολία- φόβο των Μαθηματικών», ενώ παράλληλα η ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας ενδυνάμωσε την ύπαρξη αλληλοβοήθειας (σκαλωσιά) που αυτομάτως ενθάρρυνε προς την ίδια κατεύθυνση.

Βιβλιογραφία

Ball, D.L. (1992). Magical hopes: manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16, 14-18.

Feldman, R. S. (2009). *Εξελικτική Ψυχολογία: Δια βίου Μάθηση*. Θεσσαλονίκη: Gutenberg.

Χατζηγεωργίου, Γ. (2012). *Γνώθι το curriculum*. Αθήνα: Διάδραση.

Ματσαγγούρας Η. (2001). *Στρατηγικές διδασκαλίας: η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη*. Αθήνα: Gutenberg.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΜΟΥΣΕΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Κωστούλα Ντούμα
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
kostoul_a@hotmail.com

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Η εισαγωγή μαθητών Ε΄ δημοτικού στην έννοια του *αλγορίθμου* ως ακολουθία βημάτων επίλυσης προβλημάτων αποτελεί τον στόχο της δραστηριότητας αυτής. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με αλληλεπιδραστικά εκθέματα που αναπαριστούν κόμβους και συνδέσεις, καλούνται να διατυπώσουν το πρόβλημα και τέλος να ανακαλύψουν τους αλγόριθμους επίλυσής του. Βοηθητικό στην επίλυση του προβλήματος είναι ένα έκθεμα το οποίο τοποθετείται σε σαπουνόνερο και δημιουργεί σαπωνοειδής επιφάνειες.

Κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης της διδασκαλίας πραγματοποιείται εξοικείωση των μαθητών με τα υλικά και τη χρήση τους. Στη συνέχεια, με την τοποθέτηση του εκθέματος – που δημιουργεί μεμβράνες σαπουνιού – στο επιδιασκόπιο προβάλλονται δύο σημεία. Ζητείται από τους μαθητές να βρεθεί ο οικονομικότερος τρόπος σύνδεσης τους, θεωρώντας ότι το κάθε ένα αντιπροσωπεύει μία πόλη. Σύμφωνα με το μοντέλο της Goos (2004) κατά το πρώτο στάδιο της διδασκαλίας η μαθηματική σκέψη βασίζεται στις διαδικασίες γενίκευσης και διατύπωσης εικασιών.

Οι μαθητές έπειτα καλούνται να βρουν τον οικονομικότερο τρόπο σύνδεσης τριών αλλά και τεσσάρων πόλεων. Η επιβεβαίωση ή η διάψευση των εικασιών των μαθητών πραγματοποιείται με τη βοήθεια του εκθέματος. Ο εκπαιδευτικός προκαλεί συζήτηση για τη θέση του σημείου ένωσης των σαπωνοειδών μεμβρανών και ζητά να αναπαρασταθεί το δίκτυο της ένωσης των πόλεων με το έκθεμα που αναπαριστά κόμβους και συνδέσμους. Οι διαδικασίες της μαθηματικής διερεύνησης συνοδεύονται από ατομικούς προβληματισμούς και αυτοέλεγχο (Goos, 2004). Ακολουθεί η συμπλήρωση ενός πίνακα με το πλήθος των πόλεων, το πλήθος των κόμβων και το πλήθος των συνδέσμων κάθε δικτύου.

Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να οδηγήσει τους μαθητές με κατάλληλες ερωτήσεις σε μία στρατηγική για τη δημιουργία δικτύου πέντε πόλεων και τους ωθεί να σκεφτούν έναν τρόπο για να επαληθεύσουν τις απαντήσεις τους. Η μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται μέσα από την υποστήριξη του εκπαιδευτικού (scaffolding) στις διαδικασίες της διερεύνησης αλλά και από την ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των μαθητών (Goos, 2004).

Στη συνέχεια, ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα για οκτώ, εννιά καθώς και για εκατό πόλεις. Τέλος, οι μαθητές καλούνται να βρουν τους κόμβους και τις συνδέσεις για «ν» πλήθος πόλεων. Ο εκπαιδευτικός στο στάδιο αυτό κάνει αναφορά στην μαθηματική γλώσσα, τις συμβάσεις και τον συμβολισμό.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Η εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του αλγόριθμου είναι ένα μόνο από τα οφέλη της παρέμβασης. Η διδασκαλία όπως αυτή καθορίστηκε από τους ίδιους τους μαθητές, τους έδωσε επίσης την ευκαιρία να εντοπίσουν τις ιδιότητες του σημείου Steiner και να εξασκηθούν στη δημιουργία αλλά και τη μέτρηση γωνιών. Η χαρά και η ικανοποίηση των μαθητών όταν φτάνουν μόνοι τους στον εκάστοτε στόχο φαίνεται να επιβεβαιώνει τα ευρήματα της έρευνας των Dorier και García (2013) ότι η διερευνητική μάθηση είναι μία ελκυστική και αποτελεσματική μέθοδος διδασκαλίας. Επιπλέον, φάνηκε ότι όπως υποστηρίζει και η Moyer (2001) η χρήση χειραπτικών υλικών έχει εκτός από γνωστικό όφελος και συναισθηματική επίδραση στους μαθητές. Τέλος, φάνηκε από την παρέμβαση ότι το κίνητρο των μαθητών στο πλαίσιο του μουσείου προέρχεται από μια εγγενή επιθυμία για μάθηση παρατήρηση που επιβεβαιώνεται και από τους Dierking, κ.ά. (2003).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dierking, L. D., Falk, J. H., Rennie, L., Anderson, D., & Ellenbogen, K. (2003). Policy statement of the “informal science education” Ad Hoc Committee. Journal of Research in Science Teaching, 40(2), 108-111.

Dorier, J. L., & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 837-849.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 258-291.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175-197.

ΈΡΕΥΝΑ – ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ Ε’ ΤΑΞΗ

Ιωάννης Παναγιωτόπουλος
Δάσκαλος, Δημοτικό Σχολείο Βασιλικών Θεσσαλονίκης, Απόφοιτος Μεταπτυχιακού Τμήματος Π.Τ.Δ.Ε Φλώρινας.

panagiotio@sch.gr

Πειραματική διδασκαλία των κλασμάτων στην Ε’ τάξη του Δημοτικού Σχολείου.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η κατανόηση των κλασμάτων θέτει δυσκολίες σε μαθητές αλλά και σε δασκάλους σε διεθνές επίπεδο (π.χ. Depaepe, et al. 2015).Στην πειραματική διδασκαλία που προτείνεται, έγινε αναδιάταξη της ύλης, χρησιμοποιήθηκαν δε διάφορα εποπτικά υλικά και κυρίως η αριθμογραμμή καθώς και προβλήματα, με στόχο την όσο το δυνατό μεγαλύτερη κατανόηση των ρητών αριθμών.

Μεθοδολογία - Δείγμα

Για την παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν δύο τμήματα της Ε΄ τάξης του ιδίου σχολείου. Στο τμήμα ελέγχου η διδασκαλία έγινε κανονικά (παραδοσιακά), ακολουθώντας τη σειρά του σχολικού εγχειριδίου, ενώ στο πειραματικό τμήμα η διδασκαλία έγινε με εναλλακτικό υλικό με χαρακτηριστικά που περιγράψαμε παραπάνω. Έτσι, δόθηκε ένα φύλλο εργασίας με πράξεις και προβλήματα στα κλάσματα, με σκοπό την ανίχνευση του κατά πόσον οι μαθητές κατανόησαν σε βάθος τις έννοιες του ρητού αριθμού (χρησιμοποίηση εννοιολογικών στρατηγικών επίλυσης) ή απλά εφαρμόζουν τους διδαχθέντες αλγόριθμους χωρίς κατανόηση (χρησιμοποίηση εργαλειακών στρατηγικών επίλυσης). Από τους μαθητές ζητήθηκε να καταγράψουν τις σκέψεις τους μετά τη λύση της πράξης ή του προβλήματος.

Τα προβλήματα

Χρησιμοποιήθηκαν πράξεις και προβλήματα από σχετική βιβλιογραφία (βλ. Λεμονίδης, 2013): Στην πρώτη άσκηση τους ζητήθηκαν οι πράξεις: 1-1/4 και ½+1/4. Στη δεύτερη άσκηση να κάνουν συγκρίσεις τεσσάρων ζευγαριών κλασμάτων, στην τρίτη να τοποθετήσουν τέσσερα κλάσματα σε μία αριθμογραμμή, ενώ στην τέταρτη άσκηση τους δόθηκε το λεκτικό πρόβλημα «Πόσα τέταρτα χωρούν στο μισό».

Αποτελέσματα

Πράξεις	*Επιτυχία (%)*		*Εργαλειακή Στρατηγική (%)*		*Εννοιολογική Στρατηγική (%)*	
Άσκηση	Πειραμ. τάξη	Τάξη Ελέγχου	Πειραμ. τάξη	Τάξη Ελέγχου	Πειραμ. τάξη	Τάξη Ελέγχου
1	75	70	40	55	35	15
2	70	50	50	45	20	5
3	60	50	10	45	50	5
4	85	70	5	45	80	25

Στην ανάλυση των γραπτών δοκιμασιών παρατηρήθηκαν διαφορές ως προς την απόδοση των μαθητών στη χρησιμοποίηση των εννοιολογικών στρατηγικών. Οι διαφορές ως προς την πειραματική τάξη και αυτή του ελέγχου είναι ιδιαίτερα εμφανείς στο λεκτικό πρόβλημα (4), όπου χρειάστηκε κατανόηση από την πλευρά των μαθητών. Υπάρχουν ωστόσο διαφορές και στις υπόλοιπες δοκιμασίες, ιδίως στην τρίτη και την πρώτη. Οι μαθητές της τάξης ελέγχου προτίμησαν να δοκιμάσουν την «πεπατημένη» οδό, εφαρμόζοντας απλά τους κανόνες χωρίς να δείχνουν ότι κατανοούν. Στην πειραματική τάξη στις απαντήσεις των μαθητών οι εξηγήσεις των σκέψεών τους είναι πληρέστερες και σχετικά διεξοδικές, ένδειξη πως χρησιμοποίησαν σε μεγαλύτερο βαθμό νοερούς υπολογισμούς.

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων φάνηκε πως η διδασκαλία των κλασμάτων με την εναλλακτική μέθοδο των αριθμογραμμών, σχημάτων και λεκτικών προβλημάτων, βοηθάει στην βαθύτερη κατανόηση της φύσης του κλάσματος από τους μαθητές και τους βάζει σε διαδικασία χρησιμοποίησης εναλλακτικών στρατηγικών και μοντελοποίησης για τη λύση προβλημάτων όπως αυτά που τους τέθηκαν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., Dooren, W., (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education 47*, 82-92.

Λεμονίδης, Χ. (2013). Μαθηματικά της φύσης και της ζωής-νοεροί υπολογισμοί - Λογαριάζω με το τσιμίδι μ’. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός.

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πετρίδου Αντωνία[1], Καραγιαννίδης Αλέξανδρος[2], , Νάτσου Κυριακή[4]

[1]Εκπαιδευτικός, 1Ο Πειραματικό Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης, pantonia65@gmail.com
[2]Φοιτητής *ΠΤΔΕ, ΔΠΘ, alexkara14@eled.duth.gr*
[3]Φοιτήτρια *ΠΤΔΕ,ΔΠΘ,* xrushiidamkr@gmail.com
[4]Φοιτήτρια *ΠΤΔΕ, ΔΠΘ, kyrinats@gmail.com*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διδακτική πρόταση της παρούσας εργασίας επιδιώκεται η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών και της τέχνης στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Για το σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης συνεργάστηκαν μια εκπαιδευτικός του 1ου πειραματικού Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης και τρεις τεταρτοετείς φοιτητές του ΠΤΔΕ του ΔΠΘ, στο πλαίσιο λειτουργίας του ομίλου μαθηματικών του 1ου πειραματικού Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης, κατά το σχολικό έτος 2014-2015. Στον όμιλο συμμετείχαν μαθητές της Δ΄, Ε΄ και της Στ΄ τάξης, όχι μόνο του σχολείου, αλλά και άλλων σχολείων της πόλης.

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Τα μαθηματικά παρουσιάζονται στο σχολείο ως μια σειρά από πράξεις, δημιουργώντας την εντύπωση ότι είναι απρόσωπα ανεξάρτητα, αυθύπαρκτα και αποκομμένα από κάθε κοινωνική και ανθρωπινή δραστηριότητα. (Τουμάσης,1999). Οι διδακτικές πρακτικές που συνήθως υιοθετούνται αγνοούν τον κοινωνικό-πολιτισμικό χαρακτήρα της διαδικασίας συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης (Σακονίδης & Δεσλή, 2007). Στη διδακτική παρέμβαση της παρούσας εργασίας επιδιώκεται η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών και της τέχνης στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, όπως οι έννοιες του αριθμού, των γεωμετρικών μοτίβων, της συμμετρίας και του απείρου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι συναντήσεις του Ομίλου μαθηματικών πραγματοποιούνταν μία φορά την εβδομάδα και περιλάμβαναν, κυρίως, την παρουσίαση και την επεξεργασία ιδεών και πηγών, τη διερεύνηση και την επίλυση προβλημάτων. Για το σύνολο της δραστηριοποίησης του Ομίλου υπήρξε συνεργασία της υπεύθυνης εκπαιδευτικού με τον ερευνητή της Διδακτικής των Μαθηματικών, τον κ. Σακονίδη Χαράλαμπο, από το ΠΤΔΕ του ΔΠΘ και με φοιτητές του τμήματος. Για τις ανάγκες του ομίλου κατασκευάστηκε εκπαιδευτικό υλικό: α. ιστορική γραμμή, επιτραπέζιο παιχνίδι για την ιστορία των αριθμών, κάρτες με την ιστορία του μηδενός, επιδαπέδιο παιχνίδι, αφίσες, β. φύλλα εργασίας και παρουσιάσεις και αξιοποιήθηκαν λογοτεχνικά και άλλα βιβλία με θέμα τα μαθηματικά.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ:

Α. *Εργαστήριο για την ιστορία των Αριθμών.* Οργανώθηκε βιωματικό εργαστήριο για την ιστορία των αριθμητικών συστημάτων με δραστηριότητες που αφορούσαν τη διερεύνηση αρχαίων αριθμητικών συστημάτων, του κοινωνικοπολιτικού περιβάλλοντος που καθόρισε και διαμόρφωσε τα μαθηματικά που χρησιμοποίησαν οι λαοί, τη σύγκριση των δομικών και σημασιολογικών στοιχείων γραφής και ανάγνωσης των αριθμών τους, με σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές τα πλεονεκτήματα του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Β. *Τέχνη και μαθηματικά.* Με αφορμή επιλεγμένα έργα τέχνης του σπουδαίου ζωγράφου M.C. Escher, οι μαθητές αναζήτησαν μαθηματικές ιδέες, όπως τα γεωμετρικά μοτίβα, τη συμμετρία, αλλά και την έννοια του απείρου, τις οποίες αξιοποίησε στα εικαστικά του έργα και στη συνέχεια δημιουργήσαν τα δικά τους έργα τέχνης.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Από τις συνεντεύξεις των μαθητών, φάνηκε ότι εμπλούτισαν τις γνώσεις τους μαθαίνοντας την ιστορία των αριθμών και αναγνώρισαν την αξία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Τα έργα τέχνης του M.C. Escher έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν το ρόλο της συμμετρίας τόσο στην τέχνη, όσο και στα μαθηματικά. Η παρέμβαση τους άρεσε, γιατί είχε παιχνίδι και εικαστική έκφραση.

Κατά ομολογία της εκπαιδευτικού και των συνεργατών φοιτητών, η συνεργασία στο σχεδιασμό και την υλοποίηση των δράσεων του ομίλου ήταν εξαιρετικά εποικοδομητική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Σακονίδης, Χ. & Δεσλή, Δ. (2007). Προλεγόμενα. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επ.), *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ.11-17). Αλεξανδρούπολη: Τυπωθήτω.

Τούμασης, Μ. (1999). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ

Πλιάτσικας Διονύσιος, Φυσικός-Μαθηματικός

Ζυγούρη Μαρία, Δασκάλα, Υποψ. Διδάκτορας
dionpliatsikas@yahoo.gr

Η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε με αφορμή την αδυναμία των μαθητών, ακόμα και των τελευταίων τάξεων του λυκείου, να εκτελούν υπολογισμούς τετραγωνικών ριζών "μεγάλων" φυσικών αριθμών. Αποτελεί μία πρόταση για γρήγορο και εύκολο υπολογισμό φυσικών τετραγωνικών ριζών μεγάλων αριθμών, όχι με την εκμάθηση ενός ακόμα αλγόριθμου, αλλά μέσω της ενασχόλησής τους με προβλήματα υπολογισμού φυσικών τετραγωνικών ριζών να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια της τετραγωνικής ρίζας, να ενδυναμωθούν και να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση κατά την αντιμετώπιση προβλημάτων δίνοντας πλέον βαρύτητα στην εννοιολογική πλευρά των προβλημάτων και όχι στη διαδικαστική.

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ/ΤΡΙΕΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΓΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αφορμή γι' αυτή την παρέμβαση ήταν η αδυναμία των μαθητών να εκτελέσουν πράξεις, που αυτοί θεωρούν δύσκολες, ιδιαίτερα όταν καλούνται να υπολογίσουν τετραγωνικές ρίζες "μεγάλων" φυσικών αριθμών.
Η τετραγωνική ρίζα διδάσκεται πρώτη φορά στους μαθητές της Β γυμνασίου και στη συνέχεια στην Α λυκείου, με ελλιπή τρόπο (επαναλαμβανόμενα παραδείγματα) με αποτέλεσμα οι μαθητές κυρίως να "αποστηθίζουν" τις τετραγωνικές ρίζες παρά να τις υπολογίζουν. Το πρόβλημα αυτό μετατοπίζεται και γίνεται φανερό στις τελευταίες τάξεις του λυκείου όπου συχνά οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τετραγωνικές ρίζες μεγαλύτερων φυσικών αριθμών για την επίλυση προβλημάτων μαθηματικών και φυσικής.

Στόχος της παρέμβασης δεν είναι η ενσωμάτωση στη διδακτέα ύλη αλγορίθμων υπολογισμού τετραγωνικών ριζών αλλά η ενασχόληση των μαθητών με προβλήματα υπολογισμού φυσικών τετραγωνικών ριζών μεγάλων αριθμών ώστε να αφομοιώσουν καλύτερα την έννοια της τετραγωνικής ρίζας. Έμμεσα οφέλη είναι η εξοικείωσης με τις πράξεις (που στις τάξεις γυμνασίου και λυκείου ατονούν), η επιπλέον τριβή τους με ανισοτικές σχέσεις, η ενδυνάμωση της αυτοπεποίθησης των μαθητών στην αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων (αφού θα μπορούν να ασχοληθούν περισσότερο με την εννοιολογική πλευρά του προβλήματος έχοντας ελαφρυνθεί από τη διαδικαστική) και η άντληση ικανοποίησης από την επίλυση μιας δύσκολης άσκησης.

Σε πρόβλημα μαθηματικών κατεύθυνσης Β λυκείου ζητήθηκε να βρεθούν τα σημεία τομής ευθείας και κύκλου, οι μαθητές επιλύοντας το σύστημα έφθασαν εύκολα στην εξίσωση 2ου βαθμού $15x^2-13x+20=0$ όπου και "κόλλησαν" αφού $\Delta=1369$. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να σκεφτούν τα πλήρη τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών και ποιος θα ήταν ο αριθμός των μονάδων του αποτελέσματος της τετραγωνικής ρίζας:

- $1^2 \to 1$
- $2^2 \to\to 4$
- $3^2 \to\to\to 9$
- $4^2 \to\to\to\to 16$
- $5^2 \to\to\to\to\to 25$
- $6^2 \to\to\to\to 36$
- $7^2 \to\to\to 49$
- $8^2 \to\to 64$
- $9^2 \to 81$

Η απάντηση ήταν 3 ή 7 αφού είναι τα μόνα που τα τετράγωνά τους έχουν μονάδες 9, μετά ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν τον αριθμό των δεκάδων του αποτελέσματος της τετραγωνικής ρίζας και η απάντηση ήταν 3 αφού $30^2=900<1369<1600=40^2$, τέλος το λογικό συμπέρασμα των μαθητών ήταν ότι $\sqrt{1369}=33$ ή $\sqrt{1369}=37$ με δοκιμή βρίσκουν $\sqrt{1369}=37$ και τελικά $x=\frac{5}{3}$ ή $x=-\frac{4}{5}$.

*έξυπνο τέχνασμα: για τα πλήρη τετράγωνα των φυσικών αριθμών με 5 μονάδες και ν δεκάδες ισχύει $\nu 5^2=\nu(\nu+1)100+25$ (π.χ. $35^2=3(3+1)100+25=3\cdot 4\cdot 100+25=1225$), έτσι μπορούσαμε, χωρίς δοκιμή, να πούμε ότι $\sqrt{1369}=37$ αφού 1369>1225.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ., & Δαμιανού, Χ. (2014). *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης Κ. (2014). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «MATHEMATICS AND SCIENCE IN LIFE» (MASCIL)

Δ. Πόταρη[*], Θ. Ζαχαριάδης[*], Β. Σπηλιωτοπούλου[**], Χ. Τριανταφύλλου[**] Γ. Ψυχάρης[*]

[*] ΕΚΠΑ [**]ΑΣΠΑΙΤΕ

Το Mascil (2013-2016) είναι ένα ευρωπαϊκό πρόγραμμα εκπαίδευσης και επαγγελματικής εξέλιξης εκπαιδευτικών που στοχεύει στη διάχυση της διερευνητικής διδασκαλίας και μάθησης στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τη σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών με τον χώρο εργασίας. Μέσα από αυτή τη σύνδεση επιδιώκεται να αποκτήσουν νόημα τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες για τους μαθητές. Ο σκοπός αυτός υλοποιείται μέσα από προγράμματα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών, ανάπτυξη διδακτικού υλικού και εφαρμογή του στη σχολική τάξη με στόχο την εμπλοκή των μαθητών σε διερευνήσεις έχοντας ρόλο παρόμοιο με αυτό του επιστήμονα. Η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στηρίζεται στη συνεργασία στο πλαίσιο κοινοτήτων, ενώ η επιμόρφωση περιλαμβάνει δια ζώσης και εξ αποστάσεως εκπαίδευση. Ειδικές επιτροπές εμπειρογνωμόνων σε εθνικό και ευρωπαϊκό επίπεδο έχουν συμβουλευτικό ρόλο σε όλη τη διάρκεια του έργου.

Το πρόγραμμα χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή και στο πλαίσιο του συνεργάζονται 18 φορείς από 13 ευρωπαϊκές χώρες. Συντονιστικό Ίδρυμα είναι το University of Education Freiburg της Γερμανίας. Από την Ελλάδα συμμετέχουν το Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών μέσω του Τμήματος Μαθηματικών (ΕΚΠΑ) και το Ίδρυμα Έρευνας και Τεχνολογίας (Κρήτη). Η φάση εφαρμογής του mascil στην Ελλάδα (Οκτώβριος 2014 – Ιούνιος 2015) περιελάμβανε τη δημιουργία 14 ομάδων επιμόρφωσης εκπαιδευτικών (συνολικά 138 εκπαιδευτικοί) εκ των οποίων οι 13 ομάδες ακολούθησαν το μοντέλο της δια ζώσης επιμόρφωσης (12 ομάδες εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και μία ομάδα εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης), ενώ συστάθηκε και συνεχίζει τις δράσεις της μία ομάδα εξ' αποστάσεως εκπαίδευσης με εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι ομάδες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ήταν μεικτές (μαθηματικοί, ειδικότητες φυσικών επιστημών και καθηγητές πληροφορικής) ενώ μία εξ' αυτών συγκροτήθηκε από εκπαιδευτικούς επαγγελματικών λυκείων. Στην επιμόρφωση συμμετείχαν 11 συντονιστές που ανέλαβαν την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών ακολουθώντας μοντέλα κοινοτήτων μάθησης. Πραγματοποιήθηκαν συνολικά 116 εφαρμογές σε σχολικές τάξεις.

ΜΕΤΡΩ ΣΤΟ ΜΕΤΡΟ

ΜΙΑ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΣΕ ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΑΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ.

Ρουμπέα Γ., **Βεργίνης Η., Δεληγιάννη Ε., Ζωιτσάκος Σ.**

Πρότυπο ΓΕ.Λύκειο της Βαρβακείου Σχολής
roumbeayioula@hotmail.com , iliasver@di.uoa.gr , ideliyanni@yahoo.gr , sotiris.vivi@gmail.com

Περίληψη

Παρουσιάζεται μια διδακτική παρέμβαση από ομάδα εκπαιδευτικών του Π.ΓΕ.Λ.της Βαρβακείου Σχολής στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος Mascil, με κύριους στόχους την προαγωγή της διερευνητικής μάθησης και τη σύνδεση θεμάτων του αναλυτικού προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών της Πληροφορικής και των Φυσικών επιστημών του Λυκείου με εργασιακούς χώρους. Σε μια πρώτη αποτίμηση η εφαρμογή που αφορούσε τον εργασιακό χώρο του μετρό, φαίνεται να έχει θετική επίδραση στους μαθητές όσον αφορά στα κίνητρα, στην ανάπτυξη διερευνητικής σκέψης, στη νοηματοδότηση και στην εμπέδωση επιστημονικών γνώσεων, στην επιβεβαίωση της χρησιμότητάς τους στην καθημερινή ζωή, καθώς και στην άσκηση στη συλλογική εργασία..

Περιγραφή διδακτικής προσέγγισης- Συμπεράσματα

Η ανάγκη της σύνδεσης της σχολικής γνώσης τόσο με την επιστημονική γνώση όσο και με τα προβλήματα της καθημερινής ζωής και τον επαγγελματικό χώρο έχει αναδειχθεί τα τελευταία χρόνια διεθνώς αλλά ιδιαίτερα και στην Ελλάδα. Με αφορμή το ερευνητικό πρόγραμμα Mascil κατά το σχολικό έτος 2014-15, ομάδα 4 εκπαιδευτικών, αναπτύξαμε μια σειρά διαθεματικών διδακτικών παρεμβάσεων 26 διδακτικών ωρών, απευθυνόμενοι στους μαθητές του Βαρβακείου Λυκείου.

Οι στόχοι των διδακτικών παρεμβάσεων είναι: η καλλιέργεια διερευνητικής σκέψης, η κατανόηση της φύσης της επιστημονικής γνώσης και η εφαρμογή της στον χώρο εργασίας, στην καθημερινή ζωή και η ανάπτυξη της συνεργατικότητας.

Η διδακτική μέθοδος είναι διερευνητική με στοιχεία καθοδήγησης και ομαδοσυνεργατική. Ο εργασιακός χώρος που επιλέχθηκε ως παράδειγμα ήταν το Αττικό Μετρό, στα γραφεία του οποίου προηγήθηκε επίσκεψη ομάδας μαθητών και εκπαιδευτικών. Κατά τις διδακτικές παρεμβάσεις οι μαθητές κλήθηκαν να εργασθούν ως ομάδες επιστημόνων εργαζόμενων στο μετρό, μαθηματικοί, φυσικοί, σχεδιαστές, μηχανικοί υπολογιστών και περιβάλλοντος, ώστε να διατυπώσουν, να επιλύσουν και να παρουσιάσουν προτάσεις σχετικά με τον σχεδιασμό και τοποθέτηση νέων γραμμών του μετρό, την φύλαξη χώρων του, την ελαχιστοποίηση και αξιοποίηση χρόνου ταξιδιού την ανάπτυξη οπτικοακουστικού υλικού για την ενημέρωση των επιβατών σε θέματα επιστήμης. Χρησιμοποιήθηκαν τα εργαστήρια φυσικών επιστημών και πληροφορικής, ηλεκτρονικοί υπολογιστές, προβολείς διαφανειών, video, μελέτη λογισμικού που βασίζεται στον αλγόριθμο του Dijkstra, λογισμικά GeoGebra, Interactive Physics, Gif Animator, Pivot Animator, προσομοιώσεις φυσικών φαινομένων, λίστα ιστοτόπων, φύλλα εργασιών και αξιολόγησης, όργανα φυσικής κλπ. Κατά την αποτίμηση φαίνεται ότι οι παρεμβάσεις στο σύνολό τους πέτυχαν το μεγαλύτερο μέρος των στόχων τους. Η σύνδεση με τον χώρο εργασίας συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη του ενδιαφέροντος, στην ενεργή και συνεργατική συμμετοχή, στη δημιουργικότητα παρά τη δυσκολία που προέκυψε λόγω έλλειψης χρόνου- στο πλαίσιο της αναλγησίας του αναλυτικού προγράμματος σπουδών και του εξετασιοκεντρικού προσανατολισμού των Λυκείων. Θεωρούμε απαραίτητη μια πιο εκτεταμένη σε χρόνο και περιβάλλοντα εφαρμογή σε ερευνητική βάση, ώστε να δώσει πιο γενικεύσιμα αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

Aigner M., Ziegler G. M. (1998) ‘How to guard a museum’ in Proofs from the Book, Springer, pp.165-167.

Dijkstra, E. W. (1959). A Note on Two Problems in Connection with Graphs. Numerische Math. 1, 269-271.

Jaworski, B. (1994). Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry. London: Falmer Press.

Osborne, J. (2011). Science teaching methods: a rationale for practices. School Science Review, 93 (343), 93 -103.

Kurt M., Sanders P. (2008). Algorithms and Data Structures: The Basic Toolbox. Springer.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemm, V. (2007). Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Brussels: Directorate General for Research, Science, Economy and Society.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΧΩΡΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Σίδερης Απόστολος[1], Λυκοφρίδη Ευπραξία[2], Σιώπη Καλλιόπη[3]
Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ[1], 3ο ΓΕΛ Αλίμου[2] , Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης[3]
aposider@gmail.com[1], lykofridieupraxia@gmail.com[2], kalsiopi@gmail.com[3]

Η διδακτική πρόταση αφορά τη διδακτική αξιοποίηση στο μάθημα της Γεωμετρίας μιας δραστηριότητας που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε με βάση το μοντέλο της διερευνητικής μάθησης και διδασκαλίας και τη σύνδεση με το χώρο εργασίας που προτείνει το ευρωπαϊκό πρόγραμμα Mascil για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και φυσικών επιστημών. Το πλαίσιο στο οποίο δομείται η δραστηριότητα σχετίζεται με το χώρο εργασίας γεωπόνου και αναφέρεται σε μια αυθεντική πρακτική που αφορά την επιλογή της βέλτιστης διάταξης δενδροφύτευσης κτήματος.

Θεωρητική τεκμηρίωση: Η καινοτομία του *Mascil (Mathematics and science for life)* έγκειται στο ότι επιχειρεί να συνδυάσει τα οφέλη της διερευνητικής μάθησης και διδασκαλίας με την αξιοποίηση αυθεντικών καταστάσεων από το χώρο εργασίας με σκοπό να αποκτήσουν νόημα τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες για τους μαθητές (Gilbert, 2006). Το μοντέλο της διερευνητικής μάθησης (inquiry-based learning -IBL) που υιοθετεί το *Mascil* είναι ένα είδος επαγωγικής (inductive) μάθησης, η οποία βασίζεται στην ενεργό εμπλοκή του μαθητή στην πορεία δόμησης της γνώσης, με έμφαση στην δημιουργικότητα και τη συνεργασία, με τον εκπαιδευτικό και τα χρησιμοποιούμενα υλικά να παίζουν καθοριστικό ρόλο στον σχεδιασμό και την εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας (Bruder & Prescott, 2013; Doorman, 2009). Στο πλαίσιο αυτό, η ερευνητική υπόθεσή μας είναι ότι, *η δημιουργικότητα των μαθητών ενισχύεται όταν αυτοί εμπλέκονται σε κύκλους μοντελοποίησης προβλήματος που υποστηρίζονται από δραστηριότητες, οι οποίες σχετίζονται με αυθεντικές πρακτικές από το χώρο εργασίας και που επιτρέπουν τους μαθητές α) να χρησιμοποιούν εργαλεία και τεχνικές για να συγκεντρώσουν, να αναλύσουν και να περιγράψουν δεδομένα και να αναπτύξουν μοντέλα για να τα περιγράψουν γ) να εξετάσουν περαιτέρω προβλέψεις των μοντέλων τους, δ) να παρουσιάσουν την έρευνά τους, και ε) να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε όλα τα στάδια της έρευνας.*

Εφαρμογή/Αξιολόγηση: Η διδακτική παρέμβαση αναπτύχθηκε σε δυο φάσεις και υλοποιήθηκε σε δυο τμήματα της Β τάξης δυο Γενικών Λυκείων στο πλαίσιο του μαθήματος της Γεωμετρίας. Συμμετείχαν 27/14 μαθητές διαφόρων γνωστικών επιπέδων. Η κάθε φάση ήταν διάρκειας 2 διδακτικών ωρών. Το πρόβλημα αφορούσε την εύρεση βέλτιστης διάταξης δενδρυλλίων σε κτήμα με συγκεκριμένους περιορισμούς και αναγόταν στην εύρεση του μέγιστου αριθμού εφαπτόμενων κύκλων που μπορούσαν να καλύψουν δεδομένη ορθογώνια επιφάνεια. Προκειμένου να ενισχυθεί οπτικά η φάση της διερεύνησης χρησιμοποιήθηκαν αεροφωτογραφίες δενδροφυτεμένων κτημάτων, καπάκια διαφορετικών διαστάσεων και ένα εικονικό μοντέλο δενδροφύτευσης σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας.

Βασικός στόχος της δραστηριότητας ήταν οι μαθητές-γεωπόνοι να κατανοήσουν το πρόβλημα, να το μοντελοποιήσουν και να το επιλύσουν χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις, σχέσεις και έννοιες στο πλαίσιο των μαθηματικών (γεωμετρίας/ άλγεβρας). Παράλληλα, επιδιώχθηκε να προκληθεί το ενδιαφέρον των μαθητών να συμμετέχουν ενεργά σε διαδικασίες διερεύνησης και πειραματισμού με δραστηριότητα που οι ίδιοι δεν είχαν καμιά προηγούμενη εμπειρία, να εμπλακούν σε διαδικασία επίλυσης προβλήματος που δεν έχει προφανή τρόπο επίλυσης και να αναπτύξουν και αξιολογήσουν στρατηγικές επίλυσής του. Οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν στην 1η φάση εφαρμογής της οδήγησαν στην τροποποίηση της δομής της αρχικής δραστηριότητας και τον εμπλουτισμό της με επιπλέον στοιχεία (οπτικό υλικό) και προσθήκη ερωτημάτων κατά την εφαρμογή της στη δεύτερη φάση. Οι δυσκολίες αφορούσαν: α) Την αδυναμία των μαθητών να μεταφράσουν και να αναπαραστήσουν σχηματικά τις πληροφορίες του προβλήματος, λόγω του ότι αυτοί στερούνταν της εικόνας της κάτοψης ενός φυτεμένου κτήματος β) Το πλαίσιο διατύπωσης της δραστηριότητας, καθώς οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με διατυπώσεις προβλημάτων στα οποία δε χρησιμοποιείται η αυστηρή μαθηματική γλώσσα. γ) Την κατάστρωση σχεδίου για τον υπολογισμό του αριθμού των σειρών και του πλήθους των δενδρυλλίων κάθε σειράς στην περίπτωση που η καταμέτρηση δεν είναι δυνατή. δ) Την εύρεση όλων των δυνατών επαναλαμβανόμενων μοτίβων στην τριγωνική διάταξη καθώς και τη συσχέτιση του πλήθους των δέντρων με την επιλογή της πλευράς.

Bruder, r. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM, 45, 811-822.

Gilbert J. (2006). On the nature of 'context' in chemical education. *International Journal of Science Education, 28*(9), 957-976.

Doorman, M. (2009). PRIMAS WP3–Materials: Teaching and professional development materials for IBL (version 2). *Netherlands: PRIMAS project*.

Mascil: http://www.noether.math.uoa.gr/mascil/gr/docs/guidelines.doc

Ο ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΣ ΩΣ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Σιώπη Καλλιόπη
Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
kalsiopi@gmail.com

Η διδακτική παρέμβαση αξιοποιεί διδακτικά ένα τέχνημα, τον παντογράφο και το αντίστοιχό του εικονικό σε περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας (geogebra), για τη διδασκαλία των εφαρμογών του παραλληλογράμμου σε τρίγωνο στο πλαίσιο της σχολικής ευκλείδειας γεωμετρίας.

Θεωρητική τεκμηρίωση/Ερευνητική Υπόθεση

Ερευνητικά δεδομένα επισημαίνουν ότι η χρήση μαθηματικών μηχανών (mathematical machines) σε δραστηριότητες στην τάξη, μπορεί να ενεργοποιήσει σημαντικές διεργασίες που εμπλέκονται με την απόδειξη και μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών και την ενίσχυση πολιτιστικών, συναισθηματικών και γνωστικών πτυχών των εμπλεκομένων (Bussi, 2009; Isoda et al., 2001; Bussi & Maschietto, 2008). Μια τέτοια μαθηματική μηχανή (ΜΜ) είναι ο παντογράφος- ένα σύστημα ράβδων οι οποίες συνδέονται με αρθρώσεις σχηματίζοντας απλά γεωμετρικά σχήματα. Η ύπαρξη του συνδέσμου δίνει τη δυνατότητα στις ράβδους να στρέφονται, κάτι που καθιστά δυναμικό το εργαλείο. Η ερευνητική μας υπόθεση είναι ότι, *κατά το μετασχηματισμό της μορφής ενός μοντέλου (υλικού / εικονικού) παντογράφου από την κίνηση συγκεκριμένων σημείων του ενεργοποιούνται διαδικασίες παραγωγής και ελέγχου εικασιών για τις γεωμετρικές ιδιότητες των παραγόμενων σχημάτων με αποτέλεσμα οι μαθητές να αναπτύσσουν γεωμετρικό συλλογισμό και στρατηγικές απόδειξης.*

Εφαρμογή/Αξιολόγηση

Η διδακτική παρέμβαση, διάρκειας μιας διδακτικής ώρας, πραγματοποιήθηκε σε μια τάξη της Α λυκείου με 26 μαθητές στο πλαίσιο του μαθήματος της γεωμετρίας. Ως εκπαιδευτικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε μια υλική συνδεσμολογία (μέρος πλέγματος αναρρίχησης φυτών). Πρόκειται για ένα μοντέλο παντογράφου ο οποίος αποτελείται από δυο ράβδους (ΑΔ και ΒΓ), με τη μία ράβδο να είναι διπλασίου μήκους από την άλλη (ΒΓ=2ΑΔ) και οι οποίες συνδέονται με άρθρωση (στο μέσο Δ της ΒΓ) έτσι ώστε να είναι ΑΔ= ΔΒ = ΔΓ. Προκειμένου να ενισχυθεί οπτικά η φάση της διερεύνησης της λειτουργίας του παντογράφου ανακατασκευάστηκε και χρησιμοποιήθηκε ένα εικονικό του μοντέλο σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (geogebra). Εκτός από το γνωστικό στόχο «διερεύνηση, προσδιορισμός και απόδειξη ιδιοτήτων τριγώνων χρησιμοποιώντας ιδιότητες των παραλληλογράμμων» επιδιώχθηκε να προκληθεί η ενεργοποίηση και το ενδιαφέρον των μαθητών να συμμετέχουν ενεργά με δραστηριότητα που οι ίδιοι δεν είχαν καμιά προηγούμενη εμπειρία.

Ένα μοντέλο του παντογράφου επιδείχθηκε στην τάξη και παρόμοια μοντέλα του μοιράστηκαν στις ομάδες των 4 ή 3 μαθητών. Τα έργα τα σχετικά με τον παντογράφο (υλικό / δυναμικό μοντέλο) που δόθηκαν στην τάξη προς διαπραγμάτευση σε περιβάλλον χαρτί- μολύβι / δυναμικής γεωμετρίας αφορούσαν: *α) Τη δομή του υλικού μοντέλου (τι είναι;). β) Τη λειτουργία της δομής του υλικού μοντέλου (πως λειτουργεί;). γ) Τη διερεύνηση της μορφής και του μεγέθους των παραγόμενων σχηματικών μορφών (υλικού/ εικονικού μοντέλου) (τι μπορεί να κάνει και γιατί;). δ) Τη διατύπωση, έλεγχο και απόδειξη εικασιών. στ) Τη διατύπωση γεωμετρικών θεωρημάτων.*

Οι μαθητές σχηματοποίησαν τα οπτικά δεδομένα στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι με βάση τις προκαταρκτικές ιδέες τους σχετικά με το πώς η ΜΜ λειτουργεί και τι μπορεί να κάνει. Αυτές οι ιδέες φαίνεται να σχετίζονται με τη μηχανική δράση της συνδεσμολογίας της ΜΜ και θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως δειλές-προ-εικασίες (Vincent, 2003). Η ανατροφοδότηση στη συνέχεια με εικονικά μοντέλα της γεωμετρικής μηχανής σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας ενίσχυσε τη βεβαιότητα για την ισχύ των αρχικών παρατηρήσεων, οι οποίες άρχισαν να πλαισιώνονται με όρους γεωμετρίας.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Bussi, M. G. B., (2009). Experimental mathematics and teaching and learning of proof. *Proceedings of CERME 6 WORKING GROUP 2*, 221-230.

Isoda, M., Suzuki, A., Ohneda, Y., Sakamoto, M., Mizutani, N., Kawasaki, N., Aoyama, K. (2001). LEGO Project. Mediational means for Mathematics by Mechanics. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, (Vol.20, 77-92). (www.human.tsukuba.ac.jp/~mathedu/2007)

Bussi, M. G. B. & Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. In book *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, Rotterdam:* Sense Publisher, Editors: Dina Tirosh, Terry Wood, pp.183–208. (http://www.researchgate.net/publication/239938636)

Vincent, J. (2003). Mathematical reasoning in a technological environment. *Informatics in Education-An International Journal* (Vol 2_1), 139-150.

ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Χατζηγούλα Ρούλα[1], Μαναρίδης Αλέξανδρος[2], Σιώπη Καλλιόπη[3]
Εκπαιδευτήρια «Θεομήτωρ»[1], Κολλέγιο Αθηνών[2], Ευαγγελική Σχολή[3]
aghatzig@gmail.com[1],almanaridis@gmail.com[2], kalsiopi@gmail.com[3]

Η δημιουργικότητα στη σχολική τάξη των μαθηματικών συνδέεται με την επίλυση προβλήματος. Στην παρούσα διδακτική πρόταση παρουσιάζεται μια προσπάθεια αξιοποίησης του σχολικού εγχειριδίου, σε μια τάξη της Α Λυκείου, μέσω της τροποποίησης των χαρακτηριστικών ερωτημάτων απλών ασκήσεων Γεωμετρίας, που περιέχει με σκοπό τη διδακτική του αξιοποίηση ως πλαίσιο δημιουργικότητας για τους μαθητές. Η οπτική αυτή δίνει νόημα στα χαρακτηριστικά του σχολικού βιβλίου ως εκπαιδευτικό εργαλείο για τον εκπαιδευτικό.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Καθώς δεν υπάρχει ένας σαφής και αποδεκτός ορισμός της έννοιας της δημιουργικότητας στα Μαθηματικά (Mann,2006), στη συγκεκριμένη διδακτική πρόταση υιοθετούνται κάποια βασικά χαρακτηριστικά αυτής της έννοιας, όπως έχουν διατυπωθεί από τον Torrence (1966). Συγκεκριμένα, τέσσερις από τις βασικές πτυχές της δημιουργικότητας των μαθητών είναι α) *η ευχέρεια* (fluency) στις πολλαπλές ερμηνείες και ευρετικές στην επίλυση του προβλήματος, β) *η ευελιξία* (flexibility),η οποία συνδέεται με τις διαφορετικές λύσεις που προτείνουν, γ) *η πρωτοτυπία* (novelty) στη μοναδικότητα του τρόπου σκέψης στην επίλυση του προβλήματος και δ) *η επεξεργασία* (elaboration), ως την ικανότητα γενίκευσης της συλλογιστικής τους. Όλα τα παραπάνω συμβάλλουν στο να είναι οι μαθητές ικανοί να μοντελοποιήσουν ένα πρόβλημα, να ανακαλύψουν τις διάφορες συνδέσεις των δεδομένων, να κάνουν εικασίες, τις οποίες στη συνέχεια να επαληθεύσουν ή να απορρίψουν.

Με βάση τα παραπάνω, με την παρούσα διδακτική παρέμβαση επιχειρήθηκε να διερευνηθεί αν και κατά πόσο α) η εμπλοκή των μαθητών με έργα τροποποίησης των ερωτημάτων μιας άσκησης του σχολικού εγχειριδίου, που την μετασχηματίζει σε ερώτηση ανοιχτού τύπου, μπορεί να προκαλέσει την αξιοποίηση της πρότερης μαθηματικής τους εμπειρίας και το ενδιαφέρον τους ώστε να αναλάβουν πρωτοβουλίες, να αναζητήσουν διαφορετικές προσεγγίσεις ή στρατηγικές και β) ο εκπαιδευτικός αξιοποιώντας τα χαρακτηριστικά των ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου συντελεί στην κινητοποίηση, στην ενεργοποίηση και στην αλλαγή της στάσης των μαθητών να κατανοούν και όχι να απομνημονεύουν γεωμετρικές ιδιότητες και αποδείξεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο τμήματα της Α Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας κατά τη διάρκεια του διδακτικού έτους. Αρχικά, οι μαθητές διαπραγματεύτηκαν ασκήσεις με ερωτήματα της μορφής «να αποδείξετε ότι..». Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός τροποποίησε τα ερωτήματα θέτοντας ερωτήσεις του τύπου «τι θα συμβεί αν..», « ποιες είναι οι προϋποθέσεις ώστε το ... να είναι...» ή «πως θα μπορούσατε να ...» και «πότε **δεν** μπορεί να είναι …;». Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί ένα θέμα μιας απλής άσκησης προκειμένου να προωθήσει τη σύνδεση και τη συσχέτιση διαφορετικού περιεχομένου γεωμετρικής γνώσης (επέκταση, συμπλήρωση) καθώς και τον επαγωγικό και αναλογικό συλλογισμό.

Πρωτεύοντα ρόλο έπρεπε να διαδραματίσει η διαίσθηση με ταυτόχρονη ανάπτυξη της ενόρασης των μαθητών. Οι μαθητές έπρεπε να οδηγηθούν στην απάντηση ερωτήσεων της μορφής «αρκεί να δείξω ότι...» ή «θα πρέπει να ισχύει...». Έτσι εσκεμμένα δε χρησιμοποιήθηκε κάποιο εκπαιδευτικό λογισμικό καθώς κάτι τέτοιο θα αποδυνάμωνε την ανάπτυξη νοητικών διεργασιών που συνδέονται με το γεωμετρικό συλλογισμό.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανωτέρω διαδικασία είναι δύσκολη, καθώς απαιτεί από τον εκπαιδευτικό προσεγμένη κατασκευή της αλλαγής του πλαισίου των ερωτημάτων και από τους μαθητές αλλαγή στις νοητικές διαδικασίες που έχουν συνηθίσει. Ο εκπαιδευτικός τροποποιώντας το πλαίσιο του σχολικού εγχειρίδιου α) δίνει νόημα στη διδακτική και μαθησιακή λειτουργία του ως το εκπαιδευτικό εργαλείο που μπορεί να καθορίσει τη στροφή προς μια κριτική και δημιουργική προσέγγιση και των μαθησιακών δραστηριοτήτων που αναπτύσσει ο ίδιος και οι μαθητές του και β) το καθιστά εργαλείο δημιουργικότητας των μαθητών εξελίσσοντας την γνώση τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Mann, E.L. (2006). *Creativity: The essence of Mathematics*. *Journal for the Education of the Gifted*. Vol.30, No2, 2006, pp 236-260.

Torrance, E. P. (1966). *Torrance test on creative thinking: Norms-technical manual* (Research ed.). Lexington, MA: Personal Press.

Σοφού,Ε., Κατσαντώνη, Σ., Ταβουλάρη, Ζ. *Η διδακτική χρήση των σχολικών βιβλίων*. Εκπαιδευτική Επιθεώρηση, Τεύχος 7, σελ. 104-119.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ