ΜΑΘΗΤΕΣ ‘ΕΠΑΝΕΦΕΥΡΟΥΝ’ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ

Κωνσταντίνου Γιάννης, Τριανταφύλλου Χρυσαυγή

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

gianniskon2112@gmail.com, chrtriantaf@math.uoa.gr

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθεί η εξέλιξη της διαδικασίας ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης μιας ομάδας πέντε μαθητών Β΄ Λυκείου στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα πρόβλημα κινηματικής. Το πρόβλημα αφορούσε τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1 και τους παρουσιάστηκε με τη μορφή βίντεο. Τα ερευνητικά δεδομένα είναι οι συζητήσεις της ομάδας των μαθητών καθώς και οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών και αναλύθηκαν σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Leont’ev (1978). Τα αποτελέσματα ανέδειξαν δύο κύκλους δράσεων των μαθητών στην δραστηριότητα, οι οποίοι έχοντας ως στόχο την επίλυση του προβλήματος στο αυθεντικό του πλαίσιο, οδηγήθηκαν στην επανεφεύρεση της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Freudenthal (1991) αναφέρθηκε στη ‘αντί-διδακτική αναστροφή’ σύμφωνα με την οποία αφετηρία της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί το τέλος των αποτελεσμάτων της Μαθηματικής Επιστήμης, σε αντίθετη πορεία δηλαδή από την ιστορική πορεία και εξέλιξη των Μαθηματικών. Η εναλλακτική πρόταση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education - RME) βλέπει τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μαθηματικοποιήσουν ρεαλιστικές καταστάσεις και να επανεφεύρουν μαθηματικές έννοιες με την κατάλληλη καθοδήγηση (Freudenthal, 1973).

Ταυτόχρονα, η μελέτη και κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης, όπως της εφαπτομένης καμπύλης, του ρυθμού μεταβολής και του ολοκληρώματος, δυσκολεύει αρκετά τους μαθητές, καθώς οι περισσότεροι καταφεύγουν σε υπολογιστικές διαδικασίες και σπάνια κατανοούν την αναγκαιότητα αλλά και τη σημασία αυτών των υπολογισμών (Bos, Doorman & Piroi, 2020; Biza, Christou & Zachariades, 2008; Mkhatshwa, 2020). Συγκεκριμένα, στην περίπτωση κατανόησης της έννοιας του ολοκληρώματος, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές αφορούν κυρίως την αναγνώριση της φυσικής ποσότητας που προκύπτει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (Nguyen & Rebello, 2011). Ερευνητές όπως οι Doorman και Gravemeijer (2009) θεωρούν ότι η κατανόηση εννοιών της Ανάλυσης ευνοείται όταν γίνεται μέσω εννοιών Φυσικής και ιδιαίτερα της κινηματικής, δηλαδή της μελέτης της κίνησης ενός σώματος. Συγκεκριμένα, πολλοί ερευνητές προτείνουν τη διδακτική προσέγγιση της έννοιας του ολοκληρώματος μέσω του εμβαδού που προκύπτει από το γράφημα ταχύτητας-χρόνου, όπως ιστορικά επεξεργάστηκε την έννοια ο N. Oresme (Doorman, M., & Van Maanen, 2008; Farmaki, Klaudatos & Paschos, 2004). Ταυτόχρονα, θωρείται κρίσιμο το μαθηματικό έργο που δίνεται στους μαθητές να είναι ενδιαφέρον και να υποστηρίζει την ανάπτυξη μεθόδων και συλλογισμών (Bos et al., 2020).

Η παρούσα έρευνα μελετά πώς πέντε μαθητές Β΄ Λυκείου στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα ανοιχτό πρόβλημα κινηματικής ‘επανεφηύραν’ την έννοια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Το πρόβλημα αφορούσε την εύρεση του μήκους της διαδρομής ενός αγωνιστικού αυτοκινήτου της Formula 1 με τη βοήθεια ενός βίντεο που έδειχνε την ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή.

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι:

ΕΕ1: Πώς εξελίχθηκε η δραστηριότητα ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης από τους πέντε μαθητές;

ΕΕ2: Ποιοι παράγοντες επηρέασαν την εξέλιξη αυτής της δραστηριότητας;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Θέματα ‘επανεφεύρεσης’ μαθηματικών εννοιών έχουν μελετηθεί μέσα από γνωστικά πλαίσια όπως της οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης (Treffers, 1987) εστιάζοντας στα μοντέλα που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της επανεφεύρεσης. Για παράδειγμα, οι ερευνητές Bos, Doorman και Piroi (2020) μελέτησαν τον τρόπο που 44 ομάδες μαθητών Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου επανεφηύραν την κλίση μιας καμπύλης σε ένα πρόβλημα σχεδίασης μιας τσουλήθρας.

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η κοινωνικο-πολιτισμική οπτική στη μελέτη των δράσεων των μαθητών καθώς εξελίσσουν τη γνώση τους στην κατεύθυνση της ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα, αξιοποιείται η Θεωρία Δραστηριότητας (Leont’ev, 1978). Σύμφωνα με τον Leont’ev, κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα προσανατολίζεται σε ένα κίνητρο και αποτελείται από μια σειρά δράσεων. Για να αντιληφθεί κάποιος μια ανθρώπινη δραστηριότητα θα πρέπει να παρακολουθήσει και να ερμηνεύσει τις δράσεις μέσω των οποίων η δραστηριότητα αυτή πραγματώνεται. Οι δράσεις είναι διαδικασίες που έχουν συγκεκριμένους και συνειδητούς στόχους και είναι απαραίτητες για να μεταφέρουν στην πραγματικότητα το κίνητρο της κάθε δραστηριότητας. Τέλος, για να επιτευχθεί λειτουργικά ο στόχος της κάθε δράσης είναι απαραίτητες συγκεκριμένες λειτουργίες οι οποίες αποτελούν τις μεθόδους υλοποίησής της. Οι λειτουργίες με την σειρά τους υλοποιούνται μέσω κάποιων προϋποθέσεων οι οποίες αποτελούν τα εργαλεία επίτευξής τους (Leont' ev, 1978). Οι Jaworski και Potari (2009) συνοψίζουν τα παραπάνω σε μια τριπλή αλυσιδωτή σχέση: Δραστηριότητα ↔ κίνητρο, δράσεις ↔ στόχοι, λειτουργίες ↔ συνθήκες. Ταυτόχρονα, η Δραστηριότητα παρουσιάζει μία εξελικτική μορφή, δηλαδή χαρακτηρίζεται από συνεχείς αλλαγές και μεταμορφώσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μια ομάδα πέντε μαθητών (τέσσερα κορίτσια και ένα αγόρι) της Β΄ Λυκείου. Ήταν διάρκειας δύο διδακτικών ωρών. Ο εκπαιδευτικός προσπάθησε να ενθαρρύνει τους μαθητές να επικοινωνούν μεταξύ τους και να εφαρμόσουν τις ιδέες τους, χωρίς να έχει καθοδηγητικό ρόλο. Πριν τη διδακτική παρέμβαση και δεδομένου ότι το πλαίσιο του προβλήματος ήταν η κινηματική ο ερευνητής/εκπαιδευτικός της τάξης συζήτησε με συναδέλφους του Φυσικούς με σκοπό να είναι προετοιμασμένος για τους ενδεχόμενους τρόπους προσέγγισης των μαθητών.

Το πρόβλημα

Το μήκος πίστας της Formula 1

Θα παρακολουθήσετε σε βίντεο την προσπάθεια του οδηγού της Formula 1, Lewis Hamilton, ώστε να κάνει τον ταχύτερο γύρο σε πίστα στο Ισπανικό Grand Prix (2017). Οι πληροφορίες που μας παρέχει το βίντεο είναι η στιγμιαία ταχύτητα (σε km/h) του αγωνιστικού αυτοκινήτου (Εικόνα 1) καθώς και αν επιταχύνει (Εικόνα 2) ή επιβραδύνει (Εικόνα 3). Μπορείτε με τις πληροφορίες που σας δίνονται να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της πίστας;

https://www.youtube.com/watch?v=2e1krmYs_HM&t=14s)

Εικόνα 1 | Εικόνα 2 | Εικόνα 3

Η σωστή απάντηση είναι μια από τις παρακάτω:

(Α) 4.500m (Β) 4.600m (Γ) 4.550m (Δ) 4.700m (Ε) 4.650m

Κατά την διάρκεια της δραστηριότητας δόθηκε στους μαθητές ένας πλήρης πίνακας των ταχυτήτων του αγωνιστικού αυτοκινήτου ανά δευτερόλεπτο

(Πίνακας 1), όπως επίσης χρησιμοποιήθηκε και το GeoGebra από τον εκπαιδευτικό για την διευκόλυνση των χρονοβόρων υπολογισμών.

Ερευνητικά δεδομένα και ανάλυσή τους

Έγινε μαγνητοφώνηση και βιντεοσκόπηση της διδασκαλίας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν οι συζητήσεις των μαθητών και του εκπαιδευτικού και αναλύθηκαν σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Leont'ev (1978). Καταγράφηκαν οι δράσεις των μαθητών και οι στόχοι της κάθε δράσης (ΕΕ1). Στη συνέχεια εντοπίσαμε αλλαγές στην εξέλιξη της δραστηριότητας των μαθητών σε σχέση με τους στόχους και τα εργαλεία που χρησιμοποίησαν και προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε τους παράγοντες που επηρέασαν αυτή την εξέλιξη της δραστηριότητας των μαθητών (ΕΕ2).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το κίνητρο των μαθητών ήταν η επίλυση του προβλήματος που τους δόθηκε, δηλαδή η εύρεση του μήκους της πίστας της Formula 1.

Οι μαθητές ανέπτυξαν 2 κύκλους Δράσεων. Ο 1ος κύκλος Δράσεων είχε στόχο τον υπολογισμό του μήκους με τη βοήθεια της μέσης ταχύτητας του αγωνιστικού αυτοκινήτου σε διάφορα χρονικά διαστήματα. Ο 2ος κύκλος Δράσεων των μαθητών είχε στόχο τον υπολογισμό του μήκους ως αριθμητική τιμή του εμβαδού ενός χωρίου.

1ος κύκλος Δράσεων με στόχο τον υπολογισμό του μήκους με τη βοήθεια της μέσης ταχύτητας του αγωνιστικού αυτοκινήτου.

Δράση 1: Χωρισμός της κίνησης σε διαστήματα σύμφωνα με το είδος της κίνησης (επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη).

Η προσπάθεια αναγνώρισης του είδους της κίνησης τούς οδήγησε στην ιδέα να διαχωρίσουν την κίνηση ανά είδος, σε επιταχυνόμενη και επιβραδυνόμενη.

Απόσπασμα 1

Αναστασία: δεν μπορούμε να το σπάσουμε σε χρονικές στιγμές;

Γιώργος: να το περνάμε ανά διαστήματα, δηλαδή όσο κάνει επιταχυνόμενη να το πάρουμε αυτό ως ένα διάστημα (…) αλλά δεν είναι η επιτάχυνση σταθερή. Δεν νομίζω ότι μπορούμε να πάρουμε τους τύπους της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.

Η παραπάνω παρατήρηση των μαθητών τούς οδήγησε στην απόρριψη αυτής της προσπάθειας.

Δράση 2: Εύρεση της μέσης ταχύτητας σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα

Στη συνέχεια οι μαθητές σκέφτηκαν ότι θα τους ήταν χρήσιμες οι ταχύτητες σε κάθε δευτερόλεπτο ώστε να μπορούν να επιλέξουν αυτές που θα χρειαστούν για τους υπολογισμούς τους, όμως ως ανασταλτικός παράγοντας για αυτό λειτούργησε ότι η διαδικασία αυτή θα ήταν πολύ χρονοβόρα.

Τότε ο εκπαιδευτικός για την διευκόλυνση των υπολογισμών δίνει τον πίνακα με τις τιμές της ταχύτητας σε m/s και σε km/h για κάθε δευτερόλεπτο (Πίνακας 1).

Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)	Χρόνος	(km/h)	(m/s)
8	308	85,56	28	294	81,67	48	216	60,00	68	132	36,67
9	314	87,22	29	191	53,06	49	236	65,56	69	167	46,39
10	318	88,33	30	159	44,17	50	256	71,11	70	205	56,94
11	320	88,89	31	150	41,67	51	253	70,28	71	220	61,11
12	322	89,44	32	181	50,28	52	247	68,61	72	152	42,22
13	323	89,72	33	214	59,44	53	259	71,94	73	131	36,39
14	324	90,00	34	238	66,11	54	278	77,22	74	150	41,67
15	239	66,39	35	258	71,67	55	291	80,83	75	117	32,50
16	171	47,50	36	166	46,11	56	304	84,44	76	92	25,56
17	150	41,67	37	120	33,33	57	312	86,67	77	91	25,28
18	186	51,67	38	102	28,33	58	227	63,06	78	98	27,22
19	200	55,56	39	120	33,33	59	101	28,06	79	135	37,50
20	223	61,94	40	164	45,56	60	73	20,28	80	179	49,72
21	243	67,50	41	196	54,44	61	81	22,50	81	218	60,56
22	249	69,17	42	235	65,28	62	106	29,44	82	241	66,94
23	256	71,11	43	257	71,39	63	155	43,06	83	257	71,39
24	264	73,33	44	266	73,89	64	192	53,33	84	276	76,67
25	273	75,83	45	168	46,67	65	206	57,22	85	287	79,72
26	282	78,33	46	153	42,50	66	145	40,28	86	295	81,94
27	291	80,83	47	189	52,50	67	128	35,56	87	300	83,33

Πίνακας 1: Τιμές ταχύτητας του αγωνιστικού αυτοκινήτου σε km/h και m/s από το 8ο έως το 87ο δευτερόλεπτο.

Οι μαθητές στην επόμενη προσπάθεια επιχειρούν να υπολογίσουν τον μέσο όρο των ταχυτήτων και να τον συνδέσουν με τον τύπο της μέσης ταχύτητας από τη Φυσική.

Απόσπασμα 2

Δέσποινα: παίρνουμε όλες τις τιμές [της ταχύτητας] μαζί και τις διαιρούμε δια το πόσες είναι.

Εκπαιδευτικός: και την απόσταση πως θα την υπολογίσουμε;

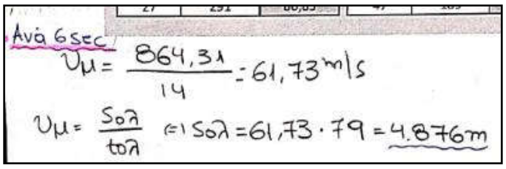
Δέσποινα: ταχύτητα δια χρόνο (λέει διστακτικά), όχι;

Γιώργος: θα πάρουμε τον τύπο x = u επί t.

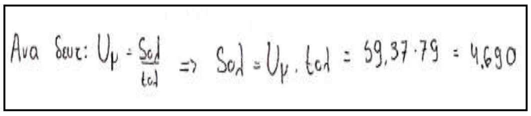
Αρχικά χωρίζουν την κίνηση σε διαστήματα έξι δευτερολέπτων και υπολογίζουν το μήκος (Εικόνα 4). Κατόπιν, απορρίπτουν την απάντησή τους εξαιτίας της απόκλισης από τα δοσμένα αποτελέσματα του προβλήματος.

Δράση 3: Εύρεση της μέσης ταχύτητας ανά 1 sec

Στη συνέχεια σκέφτονται ότι καλύτερα θα ήταν να υπολογίσουν τη μέση ταχύτητα ανά 1 sec. Επιλέγοντας το διάστημα 1 sec οι μαθητές πήραν το αποτέλεσμα 4.690 μέτρων με απόκλιση 30 μέτρων από μια δοθείσα επιλογή του προβλήματος που ήταν 4.660 μέτρα την οποία όμως απέρριψαν (Εικόνα 5).



Εικόνα 4. Φύλλο εργασίας Δέσποινας



Εικόνα 5. Φύλλο εργασίας Ντίνας

Ο διαχωρισμός των διαστημάτων και η προσπάθεια για καλύτερη προσέγγιση οδήγησε τους μαθητές στην ανάγκη να επιλέγουν όλο και μικρότερο διάστημα. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές ανάπτυξαν την αναγκαιότητα και τη σημασία της διαμέρισης ενός διαστήματος ως μέσον για την μεγαλύτερη ακρίβεια: «*δεν ξέρω αν θα το εκφράσω σωστά...ότι όσο περισσότερες τιμές πάρουμε....και τις διαιρέσουμε με το πλήθος τους, τόσο πιο σωστή θα είναι η μέτρηση.*» (Δέσποινα).

2ος Κύκλος Δράσεων με στόχο τον υπολογισμό του μήκους ως αριθμητική τιμή του εμβαδού ενός χωρίου

Ο Γιώργος προτείνει να σχεδιαστεί το γράφημα της ταχύτητας και στη συνέχεια συνειδητοποιεί ότι το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε γράφημα ταχύτητας – χρόνου είναι ίσο αριθμητικά με την συνολική απόσταση που διήνυσε το αγωνιστικό αυτοκίνητο, αναλογιζόμενος σχετικές γνώσεις του από το μάθημα της Φυσικής.

Απόσπασμα 3

Γιώργος: να φτιάξουμε μια συνάρτηση [εννοεί το γράφημα μιας συνάρτησης], να κάνουμε τον κάτω να είναι ο άξονας του χρόνου και ο $y'y$ ο άξονας των ταχυτήτων

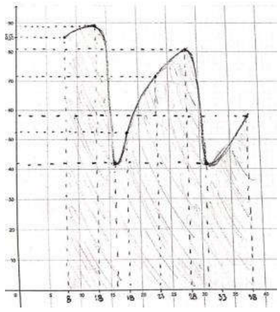
Αναστασία: θέλουμε να βρούμε το μήκος.

Γιώργος: αααα! αν το κάνουμε σε διάγραμμα και το εμβαδό κάτω από αυτό που θα φτιάξουμε θα είναι το Δx(μετατόπιση).

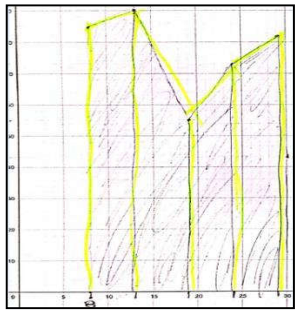
Έτσι οι μαθητές προχωρούν σε ένα νέο κύκλο δράσεων που είχε στόχο τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής του εμβαδού του χωρίου που σχηματίζεται ανάμεσα στο γράφημα της ταχύτητας και του άξονα του χρόνου.

Δράση 1: Σχεδίαση γραφημάτων

Αρχικά οι μαθητές σχεδίασαν τα γραφήματα για τα πρώτα 20 δευτερόλεπτα από τις τιμές του Πίνακα 1. Η επιλογή των μαθητών να σχεδιάσουν το γράφημα με καμπύλη έγινε στην προσπάθειά τους να έχουν μια όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική αναπαράσταση για την απεικόνιση της πραγματικότητας. (Εικόνες 6, 7).



Εικόνα 6. Γράφημα της Ίριδας



Εικόνα 7. Γράφημα της Δέσποινας

Δράση 2: υπολογισμός εμβαδού χωρίου

Οι μαθητές αναγνωρίζουν την αδυναμία εύρεσης του εμβαδού σε καμπυλόγραμμο χωρίο, οπότε θα προχωρήσουν στον υπολογισμό του εμβαδού στα γραφήματα με την τεθλασμένη γραμμή. Για τον υπολογισμό του εμβαδού οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα ως τραπέζια για το κάθε διάστημα που έχουν επιλέξει.

Απόσπασμα 4

Ίριδα: τώρα σχήματα... αυτό είναι τραπέζιο.

Δέσποινα: τραπέζιο άρα $E = \frac{(\beta+B)\upsilon}{2}$.

Η διαφοροποίηση αυτή έπαιξε σημαντικό ρόλο στην πορεία για την διαμόρφωση διαισθητικά του μοντέλου της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Οι μαθητές καταλαβαίνουν και επισημαίνουν ότι ο υπολογισμός του εμβαδού στο ευθύγραμμο γράφημα θα είναι μια προσέγγιση.

Δράση 3: Χρήση ψηφιακού εργαλείου για τον αυτόματο υπολογισμό χωρίων

Στην συνέχεια οι μαθητές υπολόγισαν τα εμβαδά των τραπεζίων που είχαν σχεδιάσει, όμως για τον τελικό υπολογισμό του μήκους της πίστας χρησιμοποιήθηκε από τον εκπαιδευτικό το πρόγραμμα GeoGebra για την διευκόλυνση των υπολογισμών. Στην αρχή επέλεξαν το χρονικό διάστημα των έξι δευτερολέπτων και έπειτα μείωναν το διάστημα κατά ένα δευτερόλεπτο έως ότου έφτασαν στο διάστημα ενός δευτερολέπτου. Η απόσταση που υπολόγισαν στο διάστημα ενός δευτερολέπτου ήταν 4.649 μέτρα με απόκλιση 1 μέτρου από την απάντηση (δ) 4.650 την οποία και επέλεξαν.

Δράση 4: Εξήγηση της καλύτερης προσέγγισης

Έχοντας ως κύριο στόχο την επίλυση του προβλήματος οι μαθητές επιδιώκουν την καλύτερη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Στην προσπάθεια αυτή εμφανίζεται, σε άτυπη μορφή, η έννοια του ορίου.

Απόσπασμα 5

Εκπαιδευτικός: ωραία άρα πως θα μπορέσουμε την προσέγγιση που είπε πριν η Ίριδα να την κάνουμε καλύτερη;

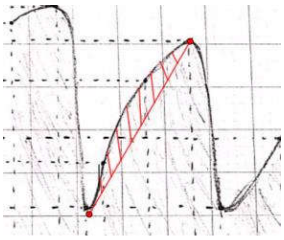
Αναστασία: γιατί αλλάζει συνεχώς η ταχύτητα του, επειδή είναι φόρμουλα οπότε όσο πιο λίγα δευτερόλεπτα πάρουμε εμείς τόσο πιο κοντά θα είμαστε.

Επίσης στο παρακάτω απόσπασμα υπάρχει μια άτυπη αναφορά στα αθροίσματα Riemann η οποία προέκυψε στη διάρκεια της συζήτησης για το είδος των γραφημάτων.

Απόσπασμα 6

Γιώργος: όλα τείνουν προς αυτό, το ένα είναι μεγαλύτερο, το άλλο είναι μικρότερο και πετύχαμε μια [προσέγγιση] που είναι σχεδόν ίσο με αυτό που θέλουμε.

Ο μαθητής παρατηρεί ότι οι υπολογισμοί από τα τραπέζια άλλοτε είναι μεγαλύτεροι και άλλοτε μικρότεροι από το καμπυλόγραμμο γράφημα αφού είτε θα λείπει ένα κομμάτι μηνίσκου είτε θα περισσεύει (Εικόνα 8).



Εικόνα 8. Η παρατήρηση του Γιώργου

Ταυτόχρονα, παρατηρούμε την αλλαγή στον τρόπο έκφρασης των μαθητών. Χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως ‘όλα τείνουν προς...’ ή ‘όσο πιο λίγα δευτερόλεπτα πάρουμε εμείς τόσο πιο κοντά θα είμαστε’ οι οποίες αφορούν διαισθητικές αντιλήψεις της έννοιας του ορίου. Σε αυτό τον κύκλο δράσεων των μαθητών παρατηρούμε την ‘επανεφεύρεση’ σε διαισθητικό επίπεδο της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης με την μέθοδο του τραπεζίου.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθεί η εξέλιξη της διαδικασίας ‘επανεφεύρεσης’ της έννοιας της αριθμητικής ολοκλήρωσης από μία ομάδα πέντε μαθητών Β΄ Λυκείου στην προσπάθειά τους να λύσουν ένα πρόβλημα κινηματικής. Αναγνωρίσαμε δύο κύκλους δράσεων των μαθητών, οι οποίοι είχαν διαφορετικούς στόχους και διαφορετικές λειτουργίες σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Leont’ev (1978). Ο 1^{ος} κύκλος δράσεων είχε στόχο τον υπολογισμό του συνολικού μήκος της πίστας συνδυάζοντας τον μέσο όρο των ταχυτήτων με την μέση ταχύτητα του αγωνιστικού αυτοκινήτου σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Τα εργαλεία των μαθητών ήταν κυρίως αλγεβρικής φύσης, όπως ο υπολογισμός του μέσου όρου των ταχυτήτων για διαφορετικές διαμερίσεις του χρονικού διαστήματος της κίνησης του αυτοκινήτου. Επειδή το αποτέλεσμα διέφερε από τις δοθείσες επιλογές (κίνητρο της δραστηριότητας) αποφάσισαν να ξεκινήσουν έναν νέο κύκλο δράσεων προσεγγίζοντας το πρόβλημα μέσα από διαφορετική οπτική, χρησιμοποιώντας εργαλεία από το μάθημα της Φυσικής. Ο 2^{ος} κύκλος δράσεων είχε στόχο τον υπολογισμό του συνολικού μήκους της πίστας από το εμβαδόν κάτω από γράφημα ταχύτητας-χρόνου. Τα εργαλεία σε αυτόν τον κύκλο δράσεων είναι τα γραφήματα απεικόνισης της ταχύτητας. Παρατηρούμε την προσπάθειά των μαθητών για την εγγύτερη με την πραγματικότητα γραφική απεικόνιση της ταχύτητας του αυτοκινήτου στο διάστημα της κίνησής του. Ο στόχος τους για την καλύτερη γραφική απεικόνιση της κίνησης του αυτοκινήτου οδήγησε τους μαθητές στην ‘επανεφεύρεση’ της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο του τραπεζίου. Σε αυτό τους βοήθησε και η εξοικείωσή τους με την έννοια της ‘διαμέρισης’ ενός χρονικού διαστήματος από τον 1^{ο} κύκλο δράσεων. Παράγοντες που συντέλεσαν σε αυτό ήταν το αυθεντικό πλαίσιο του προβλήματος που αποτελούσε το κίνητρο για τις προσπάθειές τους αλλά και το μέσον ανατροφοδότησης των δράσεών τους. Ταυτόχρονα, το ότι η ομάδα μοιράστηκε τους ίδιους στόχους και παρακολούθησε την εξέλιξή των δράσεών τους φάνηκε να υποστηρίζει τη δραστηριότητα που αναπτύχθηκε.

Τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν με σχετικές μελέτες ότι η ‘επανεφεύρεση’ των μαθηματικών εννοιών είναι μεν μια χρονοβόρα και απαιτητική διαδικασία αλλά είναι και εφικτή σε σχολικό επίπεδο (Bos et al., 2020). Παρότι στη παρούσα έρευνα, όπως και σε άλλες, οι μαθητές δεν φτάνουν στην τυπική μαθηματική γνώση, η ‘επανεφεύρεση’ έστω και σε άτυπο επίπεδο μπορεί να αποτελέσει μια γέφυρα σύνδεσης με την τυπική μαθηματική γνώση. Τέλος, η θεωρητική οπτική της κοινωνικο-πολιτισμικής προσέγγισης του Leont’ev (1978) βοηθά να παρακολουθήσουμε τις δράσεις ‘επανεφεύρεσης’ των μαθητών αλλά και τους παράγοντες που την επηρεάζουν, σε αντίθεση με άλλες έρευνες που επικεντρώνουν την προσοχή τους στο γνωστικό πλαίσιο και στα μαθηματικά μοντέλα που δημιουργούν οι μαθητές (π.χ. Doorman & Gravemeijer, 2009).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53-70.

Bos, R., Doorman, M., & Piroi, M. (2020). Emergent models in a reinvention activity for learning the slope of a curve. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100773.

Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM,* 41(1-2), 199-211.

Doorman, M., & Van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal*, *22*(2), 4-14.

Farmaki, V., Klaudatos, N., & Paschos, T. (2004). Integrating the History of Mathematics in Educational Praxis. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2020). A socio-constructivist elaboration of realistic mathematics education. In *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 217-233). Springer, Cham.

Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro-and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 219-236.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*.

Mkhatshwa, T. P. (2020). Calculus students' quantitative reasoning in the context of solving related rates of change problems. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(2), 139-161.

Nguyen, D. H., & Rebello, N. S. (2011). Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 7(1), 010112.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: *The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.