

# Μαθηματική πρόκληση και διαφοροποίηση της διδασκαλίας: Η εφαρμογή του Ευρωπαϊκού προγράμματος EDUCATE στην Ελλάδα

## Υλικά για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών

Χρυσαιγή Τριανταφύλλου  
Επίκουρη Καθηγήτρια  
Τμήματος Μαθηματικών, ΕΚΠΑ



Funded by the  
ERASMUS+ Programme  
of the European Union



# ACKNOWLEDGEMENTS

- **This project, entitled “Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning (EDUCATE)”, has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.**



**Erasmus+**

Στο πρόγραμμα  
**EDUCATE** έχει  
αναπτυχθεί

- Εκπαιδευτικό υλικό για Εκπαιδευτικούς Προδημοτικής και Δημοτικής Εκπαίδευσης
- Εκπαιδευτικό υλικό για Εκπαιδευτικούς Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
- Εκπαιδευτικό υλικό για Εκπαιδευτές Εκπαιδευτικών

- Το εκπαιδευτικό υλικό για τους εκπαιδευτικούς αποτελείται από μια σειρά **πέντε αυτοτελών διδακτικών ενότητων**.
  - Κάθε ενότητα επικεντρώνεται σε διαφορετικές διαστάσεις της μαθηματικής πρόκλησης και της διαφοροποίησης.



2<sup>η</sup> Πώς θα τροποποιήσω ένα έργο ώστε να διατηρείται η μαθηματική πρόκληση και να εμπλέκονται όλοι οι μαθητές;

**Ενότητα 2**  
Επιλογή, Ανάλυση και Τροποποίηση Εργων με Μαθηματική πρόκληση για όλους τους μαθητές

1<sup>η</sup> Κατηγοριοποίηση των έργων σύμφωνα με την μαθηματική τους πρόκληση και εισαγωγή στην έννοια της διαφοροποίησης. Πώς και τα δύο μπορούν να συνυπάρχουν;

3<sup>η</sup> Πώς μπορεί ο εκπαιδευτικός να διαχειριστεί την αυτόνομη (ατομική ή ομαδική) εργασία όλων των μαθητών;

**Ενότητα 5**  
Δημιουργία θετικής κουλτούρας στη σχολική τάξη

**Ενότητα 1**  
Εισαγωγή: Μαθηματική πρόκληση και διαφοροποίηση

**Ενότητα 3**  
Υποστηρίζοντας την Αυτόνομη Εργασία όλων των μαθητών

5<sup>η</sup> Με ποιες δράσεις ο εκπαιδευτικός διαμορφώνει μια θετική κουλτούρα μάθησης στην τάξη του;

**Ενότητα 4**  
Η Μαθηματική πρόκληση στην Ολομέλεια της Τάξης

4<sup>η</sup> Πώς ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης με σκοπό τη διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης για όλους τους μαθητές;

# Τα μέρη κάθε Διδακτικής ενότητας

- ΜΕΡΟΣ Α
  - εισαγωγικές δραστηριότητες
- ΜΕΡΟΣ Β
  - Παραδείγματα Διδακτικών Πρακτικών ξεχωριστά για εκπαιδευτικούς Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
- ΜΕΡΟΣ Γ
  - Επιπρόσθετες Πηγές και Υλικό

# ΜΕΡΟΣ Α: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

*Δραστηριότητες με σκοπό την ενεργοποίηση των εκπαιδευτικών σε θέματα που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη ενότητα*

Ενότητα 5  
Η κουλτούρα  
της σχολικής  
τάξης



Κοιτάξτε αυτές τις παραπάνω εικόνες. Να απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Ποιος/α κάνει μεγαλύτερη προσπάθεια;

# ΜΕΡΟΣ Α: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

## Ενότητα 3

Υποστηρίζοντας  
την Αυτόνομη  
Εργασία όλων των  
μαθητών

### Ερωτήσεις ενεργοποίησης

- Κατά τον σχεδιασμό ενός μαθήματος, **πώς ο εκπαιδευτικός μπορεί να προβλέψει** τη δραστηριότητα των μαθητών όταν αυτοί εργάζονται αυτόνομα;
- Πώς **ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποστηρίξει** τους μαθητές του;
- Πώς θα μπορέσει **να διαχειριστεί τις διαφορετικές στρατηγικές** που θα αναπτύξουν;



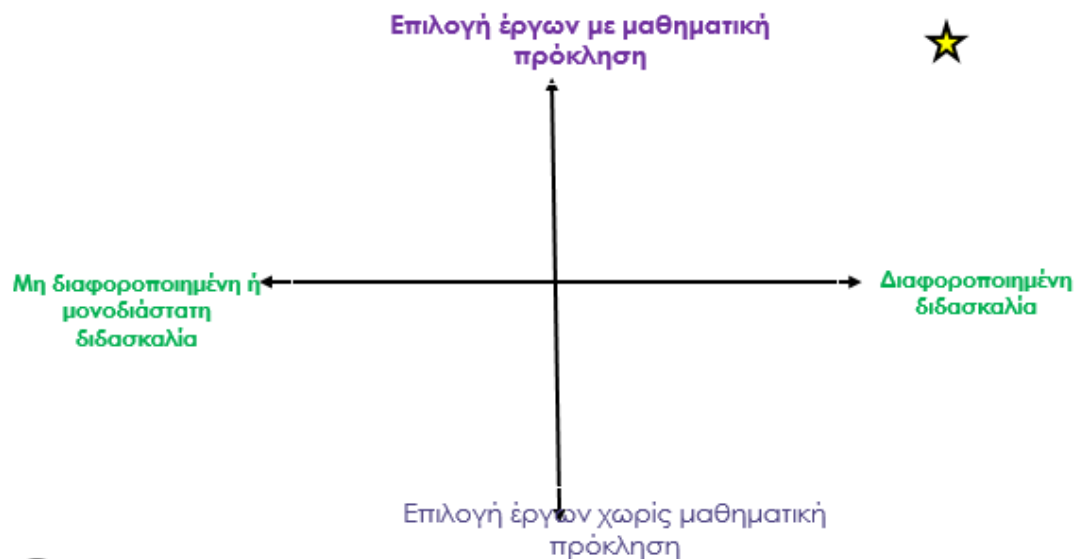
# ΜΕΡΟΣ Β: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ- ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

## Δ1: Ανταλλαγή εμπειριών



☞ Να σκεφτείτε σε ποιο σημείο θα τοποθετούσατε τη διδασκαλία σας στο παρακάτω σύστημα αξόνων.

**Ενότητα 1**  
Εισαγωγή:  
Μαθηματική  
πρόκληση και  
διαφοροποίηση



☹☹☹ Να δηλώσετε πού θα τοποθετούσατε τη διδασκαλία σας και να εξηγήσετε γιατί. Ποιες θεωρείτε ότι είναι οι κύριες προκλήσεις που αντιμετωπίζετε κατά την επιλογή και χρήση έργων με μαθηματική πρόκληση στα Μαθηματικά με σκοπό να εμπλέκετε παραγωγικά

# ΜΕΡΟΣ Β: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ-ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

## Δ2: Συζήτηση με βάση τον αναστοχασμό ενός εκπαιδευτικού

Απόσπασμα 3: Αναστοχασμός εκπαιδευτικού

"Στην εισαγωγή του δεύτερου ερωτήματος του έργου 1, ενθάρρυνα τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την εφαρμογή στον υπολογιστή. Πιστεύω ότι ο δυναμικός χαρακτήρας των εύκολων μεταβολών εξυπηρετεί τη εξερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στο τρίγωνο και το τετράπλευρο... Θέλω να τους εμπλέξω στη διεξαγωγή και επαλήθευση συνδέσεων."

Να συζητήσετε τα πιο πάνω απόσπασμα σε σχέση με τον ρόλο των ψηφιακών τεχνολογιών στην εμπλοκή των μαθητών με θεμελιώδεις μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες λαμβάνοντας υπόψη ζητήματα μαθηματικής πρόκλησης και διαφοροποίησης. Να συνδέσετε τα ζητήματα που προκύπτουν από τη συζήτηση με τις δικές σας εμπειρίες.

### Ενότητα 4

Η Μαθηματική πρόκληση και η διαφοροποίηση στην Ολομέλεια της Τάξης

# ΜΕΡΟΣ Β: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ-ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

## Δ3: Σχολιασμός διδακτικών επεισοδίων

### Ενότητα 3

Υποστηρίζοντας την Αυτόνομη Εργασία όλων των μαθητών



#### Απομαγνητοφώνηση Διδακτικού Επεισοδίου 2

Εκπαιδευτικός: Ποια είναι η απάντησή σας;

Σάρα: "Γίνεται μόνο με το τετράγωνο επειδή το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ορθογωνίου" (διαβάζει την απάντηση).

Εκπαιδευτικός: Είναι μόνο για αυτό; Δεν υπάρχουν άλλα σχήματα που μπορούν να καλύψουν το ορθογώνιο;

Μάρκος: Είναι μόνο αυτό.

Εκπαιδευτικός: Ναι, αλλά γιατί; Γιατί; Γιατί όχι τα άλλα;

Μάρκος: Γιατί ο κύκλος δεν έχει καθόλου γωνίες για να καλυφθεί [πλήρως η επιφάνεια].

Εκπαιδευτικός: Μηράβο!

- Ποιες μπορεί να είναι οι προθέσεις του εκπαιδευτικού με τις ερωτήσεις που υποβάλλει;
- Πώς θα σχολιάζατε τις απαντήσεις των μαθητών;

# ΜΕΡΟΣ Β: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ-ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

## Δ4: Μελέτη ερευνητικών κειμένων

**Ενότητα 4**  
 Η Μαθηματική πρόκληση στην Ολομέλεια της Τάξης



### Δραστηριότητα 2

Κοινοποιώντας τις λύσεις των μαθητών

*Να διαβάσετε το παρακάτω απόσπασμα. Το απόσπασμα αποτελεί μέρος ερευνητικού άρθρου το οποίο συζητά τη σύνδεση των απαντήσεων των μαθητών με τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης.*

Απόσπασμα

Οι εκπαιδευτικοί έχουν την δυνατότητα να βοηθήσουν τους μαθητές να προχωρήσουν σε συνδέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές ιδέες που σχετίζονται με τις στρατηγικές τους και τις αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούν. [...] Μπορούν επίσης να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν πως η ίδια μαθηματική ιδέα μπορεί να ενσωματωθεί σε δύο στρατηγικές οι οποίες αρχικά μοιάζουν διαφορετικές ... Συνεπώς, αντί οι μαθηματικές συζητήσεις να βασίζονται σε παρουσιάσεις διαφορετικών τρόπων επίλυσης ενός συγκεκριμένου προβλήματος, μπορεί η κάθε παρουσίαση να χτίζει σε κάποια άλλη και με αυτό τον τρόπο να ευνοείται η κατανόηση θεμελιωδών μαθηματικών ιδεών. (Stein et al., 2008, p. 330)

# ΜΕΡΟΣ Β: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ-ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

## Δ5: Συνδέσεις με την πρακτική μου



### Ανάλυση Βιντεοσκοπημένης Διδασκαλίας

#### Ενότητα 1

Εισαγωγή:  
Μαθηματική  
πρόκληση και  
διαφοροποίηση

(α) να **επιλέξετε** δύο έργα από τα διδακτικά σας εγχειρίδια, ένα υψηλής κι ένα χαμηλής μαθηματικής πρόκλησης, (β) να **σχεδιάσετε** και να **βιντεοσκοπήσετε** ένα μάθημα κατά το οποίο θα εφαρμόζετε το έργο υψηλής μαθηματικής πρόκλησης (γ) Να επιλέξετε ένα σχετικό απόσπασμα



Να μοιραστείτε με τους/τις συναδέλφους σας το απόσπασμα που επιλέξατε στο οποίο διατηρήθηκε ή προσαρμόστηκε το επίπεδο μαθηματικής πρόκλησης. Να εξηγήσετε τι περιλαμβάνει αυτό το απόσπασμα και το σκεπτικό σας πίσω από την επιλογή του.



# ΜΕΡΟΣ Β: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ-ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

## Δ6: Σύνοψη: Επικοινωνούμε τις ιδέες μας



### Σύνοψη

#### *Επικοινωνώντας τις ιδέες σας*

Να εργαστείτε σε ομάδες και να ετοιμάσετε μια αφίσα όπου θα παρουσιάζονται «αποτελεσματικοί τρόποι» εισαγωγής ενός έργου σε σχέση με την υποστήριξη των μαθητών για την αναγνώριση θεμελιωδών μαθηματικών ιδεών. Να επεξηγήσετε πώς αυτοί οι τρόποι προωθούν τη διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης για όλους τους μαθητές. Να παρουσιάσετε παραδείγματα.



### Ενότητα 4

Η Μαθηματική πρόκληση  
στην Ολομέλεια της Τάξης

- Επιλεγμένα παραδείγματα δραστηριοτήτων από διαφορετικές ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

## Ενότητα 1

Εισαγωγή: Μαθηματική  
πρόκληση και  
διαφοροποίηση

Υποστηρίζοντας ταυτόχρονα τη  
Μαθηματική Πρόκληση και τη  
Διαφοροποίηση: Η Μεταφορά  
των Τροχαλιών

**Ο ρόλος των ερωτήσεων που  
θέτει ο εκπαιδευτικός**



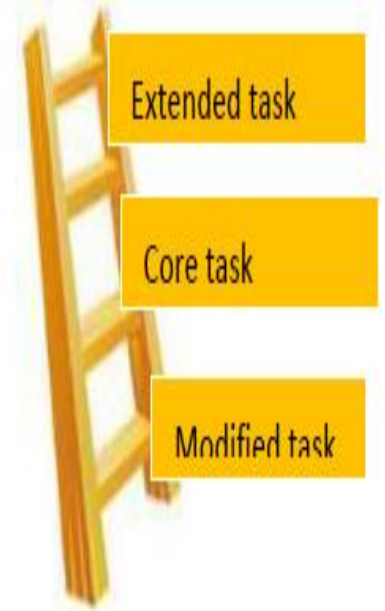


## Ενότητα 2

Επιλογή, Ανάλυση και Τροποποίηση  
Εργων με Μαθηματική πρόκληση για  
όλους τους μαθητές

# Η Σκάλα Διαφοροποίησης του Έργου

- Οι μαθητές δεν βιώνουν πάντοτε το ίδιο επίπεδο μαθηματικής πρόκλησης
- Σε κάποιο σημείο, οι μαθητές μπορεί να χρειαστούν διαφοροποιημένη διδασκαλία με βάση τις συγκεκριμένες μαθησιακές τους ανάγκες.
- Ένας τρόπος αντιμετώπισης αυτής της πολυπλοκότητας είναι η ανάπτυξη και η χρήση **διαβαθμισμένων έργων (tiered activities)**.
  - Όπως η χρήση διευκολυντών (π.χ. χειραπτικών υλικών ) ή επεκτάσεων



### Δραστηριότητα 3 – Διαχείριση Εναλλακτικών στρατηγικών και αντιλήψεων μθητών

Το μαθηματικό έργο που δόθηκε σε μαθητές Γ γυμνασίου

Λύστε τα παρακάτω προβλήματα και γράψτε εάν υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ τους.

Δέκα άτομα είχαν παραστεί σε μια συνάντηση και ήθελαν να βεβαιωθούν ότι όλοι είχαν κάνει χειραγία με όλους. Εάν οι παρευρισκόμενοι το κατάφεραν αυτό, τότε πόσες χειραγίες έχουν γίνει; Μια νέα διεθνής αεροπορική εταιρεία θα συνδέσει 12 αεροδρόμια σε 12 διαφορετικές χώρες. Πόσες είναι όλες οι πιθανές διαδρομές που θα χρειαστεί να δημιουργήσει η αεροπορική εταιρεία;

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ χειραγίες}$$

Χειραγίες

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66 \text{ τρεις}$$

Διαδρομές

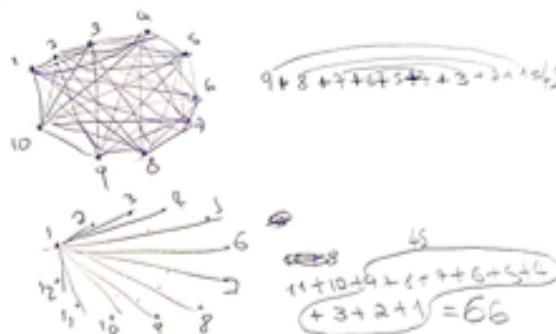
They both can be solved using combination.

Και τα δύο μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας συνδυαστική.

Εικόνα 1

## Ενότητα 2

Επιλογή, Ανάλυση και Τροποποίηση Εργων με Μαθηματική πρόκληση για όλους τους μαθητές



They are connecting things. I make many connections among the dots to solve them. (Similar problems)

Ενώνουν πράγματα. Έκανα πολλές συνδέσεις ανάμεσα σε κουκίδες για να τα λύσω (παρόμοια προβλήματα).

They are both math problems,

Είναι και τα δύο προβλήματα Μαθηματικών.

Εικόνα 2



### Καθοδηγητικές Ερωτήσεις

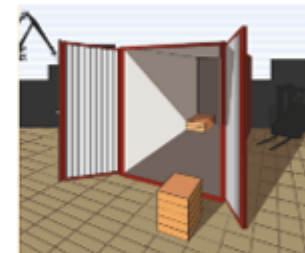
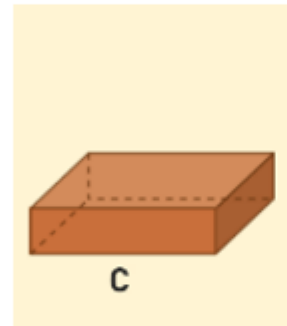
- Ποιες είναι οι δυσκολίες και οι εναλλακτικές ιδέες που βλέπετε να έχουν οι μαθητές με βάση τις πιο πάνω απαντήσεις τους;
- Πώς αυτές οι ιδέες μπορούν να μας βοηθήσουν όταν εφαρμόζουμε έργα με μαθηματική πρόκληση με όλους τους/τις μαθητές/ίτριες μας;

### Ενότητα 3

Υποστηρίζοντας  
την Αυτόνομη  
Εργασία όλων των  
μαθητών

#### Μαθηματικό έργο που δόθηκε σε μια τάξη Γυμνασίου στην Πορτογαλία

Σκεφτείτε ένα φορτηγό πλάτους 2m, μήκους 4m και ύψους 2,5m για τη μεταφορά κουτιών με σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και με τις ακόλουθες διαστάσεις: μήκος 70 εκ. πλάτος 50 εκ. και ύψος 30 εκ. Υποθέστε ότι τα κουτιά μπορούν να μπουν στο φορτηγό σε οποιαδήποτε θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Εάν όλα τα κουτιά μπήκαν στο φορτηγό στη θέση C, να εξετάσετε τον μέγιστο αριθμό κουτιών που είναι δυνατό να τοποθετηθούν στο φορτηγό. Να δείξετε πώς καταλήξατε στην απάντησή σας.

**Οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες.**

Μια ομάδα μαθητών απαντά ως εξής: Θα υπολογίσουμε πρώτα τον όγκο του φορτηγού, μετά τον όγκο του κουτιού C και στη συνέχεια θα διαιρέσουμε.

 Ατομική εργασία

- Πώς θα διαχειριζόσασταν αυτή την απάντηση;

**Το μαθηματικό έργο**

«...Απόψε θα έχουμε βραδιά γονέων...  
 ...Οι δηλώσεις που μάζεψα από εσάς λένε ότι θα παρουσιαστούν 81 άτομα...  
 ...Αυτή η συνάντηση θα λάβει χώρα στο μεγάλο σαλόνι...  
 ...Οι γονείς θα καθίσουν σε μεγάλα τραπέζια...  
 ...Έξι άτομα μπορούν να καθίσουν σε κάθε τραπέζι...  
 Στη συνέχεια ο/η εκπαιδευτικός σχεδιάζει ένα τέτοιο τραπέζι στον πίνακα:



Μετά από αυτό ο/η εκπαιδευτικός ρωτάει:  
 «Πόσα τραπέζια χρειαζόμαστε για 81 άτομα;»

Τρεις από τους μαθητές έδωσαν τις ακόλουθες λύσεις.

|                     |                     |                      |
|---------------------|---------------------|----------------------|
|                     |                     |                      |
| 1 <sup>η</sup> λύση | 2 <sup>η</sup> λύση | 3 <sup>η</sup> λύση* |

(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, pp. 21-23)

Φανταστείτε πως είστε η εκπαιδευτικός σε αυτή την τάξη και πως θέλετε να φέρετε αυτές τις λύσεις προς συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Ο στόχος σας είναι να υποστηρίξετε τους μαθητές που έχουν παρουσιάσει διαφοροποιήσεις από την τρίτη λύση, ώστε να αρχίσουν να αμφισβητούν την προσέγγισή τους και να σκέφτονται περισσότερο επιστημονικά αποδεκτές λύσεις. Να περιγράψετε περιληπτικά τις πρακτικές σας για να επιτύχετε τους στόχους σας.

**Ενότητα 4**

Η Μαθηματική πρόκληση  
 στην Ολομέλεια της  
 Τάξης

## Συνδέοντας τη Διαρρύθμιση της Τάξης με την Κουλτούρα

### Ενότητα 5

Δημιουργία  
κουλτούρας για την  
Ενίσχυση της  
Μαθηματικής  
Πρόκλησης και της  
Διαφοροποίησης

Η παρακάτω φωτογραφία δείχνει το συνηθισμένο περιβάλλον της τάξης όταν οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες.

Μπορείτε να απομονώσετε δύο πρακτικές που θεωρείτε ότι συμβάλλουν στη δημιουργία μιας θετικής κουλτούρας που επιτρέπει στους/στις μαθητές να πετύχουν.

Το φυσικό περιβάλλον της τάξης και η κουλτούρα





# Ηλεκτρονική Εκπαιδευτική Πλατφόρμα EDUCATE



**Πλατφόρμα:**

<http://educate-platform.com/>



**Ιστοσελίδα:**

[www.ucy.ac.cy/educate/el/](http://www.ucy.ac.cy/educate/el/)

Το διακρατικό ερευνητικό πρόγραμμα EDUCATE στοχεύει στη σύζευξη της γνωστικής ενεργοποίησης (δηλ. της εργασίας με έργα με μαθηματική πρόκληση) και της διαφοροποίησης, φιλοδοξώντας να προωθήσει και τις δύο πτυχές στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Προς τον σκοπό αυτό, έχει αναπτυχθεί εκπαιδευτικό υλικό με στόχο την επιμόρφωση εκπαιδευτικών ώστε να εμπλέξουν όλους τους μαθητές τους σε γνωστικά απαιτητική εργασία, από τη μία, και την υποστήριξη των εκπαιδευτών εκπαιδευτικών να καθοδηγήσουν εκπαιδευτικούς να το επιτύχουν, από την άλλη.

Καλείστε να πειραματιστείτε και να εφαρμόσετε αυτά τα υλικά (τα οποία μπορείτε να βρείτε στην ηλεκτρονική εκπαιδευτική πλατφόρμα) είτε ατομικά είτε σε ομάδες. Εάν έχετε οποιοσδήποτε ερωτήσεις σχετικά με το πρόγραμμα ή κάποιο σχόλιο για το σκεπτικό, τις δραστηριότητες και τις δημοσιεύσεις του, παρακαλώ επισκεφθείτε την ιστοσελίδα μας και εξερευνήστε την για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την πρόοδό της και τα αποτελέσματά του.

- Εκπαιδευτικό υλικό για Εκπαιδευτικούς Προδημοτικής και Δημοτικής Εκπαίδευσης
- Εκπαιδευτικό υλικό για Εκπαιδευτικούς Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
- Εκπαιδευτικό υλικό για Εκπαιδευτές Εκπαιδευτικών